UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

ÁLGEBRA

Cuaderno 2

Víctor Wall

2008

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870

Posadas - Misiones – Tel-Fax: (03752) 428601

Correos electrónicos:

edunam-admini@arnet.com.ar

edunam-direccion@arnet.com.ar

edunam-produccion@arnet.com.ar

edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra

Coordinación de la edición: Claudio Oscar Zalazar

Armado de interiores: Amelia E. Morgenstern

Corrección: Julia Renaut-Gabriela Domínguez

ISBN 978-950-579-076-0

Impreso en Argentina

Wall, Víctor
Álgebra II. - 1a ed. - Posadas: EDUNaM - Editorial Universitaria de la Univ. Nacional de Misiones, 2007.
1, 146 p.; 30x21 cm.
ISBN 978-950-579-076-0
1. Algebra. 2. Educación Superior. I. Título
CDD 512

Fecha de catalogación: 27/07/2007.

EL AUTOR

Víctor Wall

Profesor Titular de Álgebra 1 y Álgebra 2 de la Carrera del Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones.

ÍNDICE

Comentario

El presente trabajo tiene como objetivo, desarrollar ante el estudiante una guía de estudio, constituída por notas teórico-práctico de las clases dadas. Pero, bajo ningún concepto intenta sustituir a la bibliografía existente sobre este tema, la cual deberá consultarse permanentemente para lograr un efectivo aprendizaje.

Está dirigido a los alumnos que cursan regularmente la asignatura Álgebra 2, correspondiente al segundo cuatrimestre del primer año de la Carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones. Asímismo, el objetivo fundamental del presente consiste en desarrollar los conceptos básicos y propiedades de los números complejos de las funciones circulares, de los polinomios, de las fracciones racionales y de las ecuaciones algebraicas; de acuerdo a los contenidos mínimos establecidos por los docentes de las asignaturas de los años siguientes de la Carrera.

Se cree que el alumno tendrá un elemento de trabajo que le facilitará el estudio de esta parte del Álgebra en el Primer Año de su carrera. Los temas presentados en este cuaderno son los que se desarrollarán en las clases teóricas, prácticas y trabajos complementarios, y se corresponden con las unidades que conforman el Programa vigente de la Carrera mencionada, constituyen, en consecuencia, el complemento necesario para una buena comprensión del texto.

Este material impreso expone los temas que forman parte de los contenidos de la asignatura y que son desarrollados en las clases expositivas y presentados en base al criterio del Profesor para el estudio del mismo. Perom, además, el mismo cobra relevancia si se considera que tales contenidos se encuentran dispersos en una bibliografía muy variada o de muy difícil acceso para el alumno. Consiste, esencialmente, en la presentación y desarrollo, metodológicamente ordenado, de lo fundamental de cada unidad y que es producto de una labor docente de síntesis y recopilación.

Se propone que la asignatura considere y estudie los temas relativos a:

- Números Complejos;
- Funciones Circulares;
- Polinomios;
- Fracciones Racionales
- Ecuaciones Algebraicas.

propuestos en los contenidos básicos para la Formación Docente en Matemática del actual Plan de Estudios de la carrera.

Se parte de la premisa fundamental de que en las Universidades se debe enseñar ciencia de buen nivel, no importa si pura o aplicada, pero si óptima; no se debe sacrificar la formación básica en aras de la información tecnológica, ya que esta envejece con mucha facilidad y solo un sólido dominio de los conceptos básicos, otorga la flexibilidad necesaria para incorporar y adaptarse a las nuevas tecnologías.

El curso, sin pérdida del rigor y de su nivel de excelencia, deberá concentrarse en ideas, aplicaciones y capacitación para una mayor y efectiva participación en actividades de discusión sobre problemas didácticos relacionados con la futura participación profesional. La selección de los temas, y su ordenamiento, deberán mostrar las conexiones entre ellos y con modelos reales, así como las técnicas de resolución concreta, y además teniendo en cuenta los contenidos mínimos de la Carrera.

Se ha tratado de presentar el desarrollo de los temas con el concepto de:

-Incrementar, actualizar y fortalecer su formación específica mediante el conocimiento de los fundamentos, métodos y aplicaciones de:

- Números complejos.
- Funciones trigonométricas.
- Polinomios.
- Fracciones racionales.
  Ecuaciones Algebraicas

-Desarrollar una mejor disposición a:

- Redescubrir conceptos básicos e incorporar conocimientos nuevos de manera contínua;
- Resignificar los conocimientos previamente adquiridos a partir de:

  a) la reflexión y el análisis histórico y epistemológico sobre el descubrimiento y desarrollo de los conceptos.
  b) La comparación de diferentes propuestas didácticas.

- Adoptar una actitud decididamente actual en la presentación e interpretación de temas problemas y resultados tradicionales;
- Relacionar sus propios conocimientos y experiencias con el desarrollo de la investigación científica.

Está organizado de manera tal que cada capítulo se corresponda con una Unidad del Programa de la asignatura, tal como se enumera a continuación.

I. Números complejos

Conceptos: Introducción. Definición. Adición. Multiplicación. Propiedades. Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición. Cuerpo de los números complejos. Construcción de la **R**-álgebra **C**. Número complejo conjugado. Automorfismo involutivo. Módulo de un número complejo. Definición. Valuación sobre **C**. Plano complejo.

II. Razones y funciones trigonométricas

Conceptos: Ángulos. Razones trigonométricas de un ángulo. Razones trigonométricas de ángulos especiales. Fórmulas relativas a los ángulos asociados.

Funciones trigonométricas y sus gráficas. Expresión trigonométrica del producto escalar. Identidades trigonométricas fundamentales. Ecuaciones trigonométricas.

III. Raíces de números complejos

Conceptos: Argumento de un número complejo no nulo. Interpretación geométrica. Expresión trigonométrica de un número complejo. Fórmulas trigonométricas de adición. Fórmulas de transformación. Potencias. Teorema de DeMoivre. Raíces enésima de un número complejo. Raíces enésima de la unidad. Forma exponencial.

IV. Anillo de polinomios

Conceptos: Introducción. Polinomio formal. Grado. Igualdad. Adición en A[x]. Multiplicación. Notación definitiva. División euclidiana. Teorema fundamental. Divisores comunes. Máximo común divisor. Polinomios primos entre sí. Teorema de Bezout. Teorema de la divisibilidad. Descomposición en factores primos. Derivación. Fórmula de Mac-Laurin y de Taylor. Ceros de un polinomio.

V. Fracciones racionales

Conceptos: Cuerpo de las fracciones racionales. Fracción irreducible. Leyes de composición en $F_K[x]$. Descomposición de una fracción racional sobre un cuerpo conmutativo. Descomposición de una fracción irreducible. Descomposición sobre el cuerpo de los números complejos. Determinación de la parte principal. Descomposición sobre el cuerpo de los números reales.

VI. Ecuaciones algebraicas

Conceptos: Ecuaciones algebraicas y polinomios. Relaciones entre los coeficientes y las raíces de un polinomio. Polinomio en **R**[x]. Ceros comunes a dos polinomios. Eliminación. Métodos de eliminación. Resolución de ecuaciones particulares. Ecuación de tercer grado. Método de Cardan. Discusión de la resolución en **R.** Resolución trigonométrica en el caso: $4p^3 + 27q^2 < 0$.

1. Números complejos

Recordatorio

Recordemos que, para todo punto $\mathbf{a} \neq 0$ en $P = \mathbf{R}^2$, se denomina *recta vectorial que contiene a* **a**, al conjunto D_a, que sigue:

$$D_a = \{\mathbf{x} \in P / \exists\lambda\in\mathbf{R};\ \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}\}.$$

Semi-recta

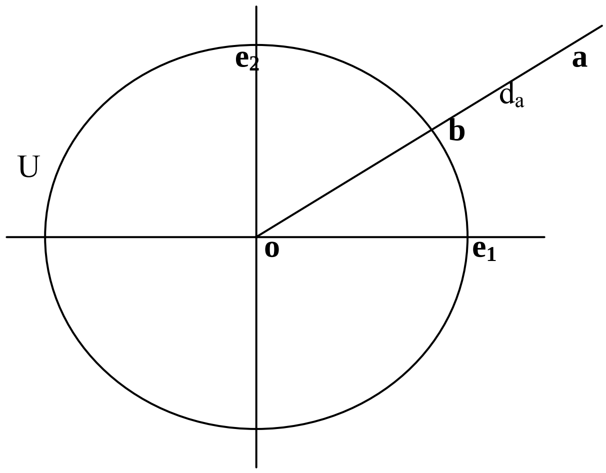
Para todo punto $\mathbf{a} \neq 0$ en P, se denomina *semi-recta vectorial* (o simplemente semirrecta) que contiene a **a** al (conjunto denotado d_a) siguiente:

$$d_a = \{\mathbf{x} \in P / \exists\lambda\in\mathbf{R}^+;\ \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}\}.$$

La semirrecta d_a es entonces el conjunto de puntos $\lambda\mathbf{a}$ cuando λ recorre $\mathbf{R}^+$.

El punto **o** se denomina el *origen* de toda semirrecta vectorial.

La semirrecta d_{e_1} que pasa por el punto $\mathbf{e}_1$ (primer vector de la base canónica) se denomina eje polar)



Definición:

Se llama círculo unidad, y se lo denota U*, al siguiente conjunto:*

$$U = \{\mathbf{x}\in P / \|\ \mathbf{x}\ \| = 1\}$$

Propiedad 1

Toda semirrecta vectorial corta al círculo unidad en uno y solo un punto.

En efecto, sea la semirrecta d_a ($\mathbf{a} \neq 0$). La intersección $d_a \cap U$ es el conjunto de los $\mathbf{x} \in P$ que verifican las siguientes condiciones:

$$\| \mathbf{x} \| = 1, \text{ con } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} \text{ y } \lambda \in \mathbf{R}^+$$

Se tiene entonces $\| \mathbf{x} \| = |\lambda| \cdot \| \mathbf{a} \| = 1$. Como $\mathbf{a} \neq 0$ y $\lambda > 0$, resulta que λ existe y es único. Esto es $\lambda = \| \mathbf{a} \|^{-1}$. La intersección contiene entonces un único punto **b**. Ver figura.

Ejemplo 1:

Supongamos que tengamos que escribir la ecuación de la semirrecta que pase por:

a) (3, 2); b) (-3, 5) y además tengamos que representarla gráficamente.

a) Solución:

La ecuación que describe los puntos de la semirrecta será: $(x, y) = \lambda\ (3, 2)$ con $\lambda \in \mathbf{R}^+$, con $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{a} = (3, 2)$. Sabemos que la semirrecta tiene su origen en el punto (0, 0), ($\lambda = 0$) y además pasa por el punto (3, 2). Para conocer un tercer punto, le asignamos a λ un número real positivo cualquiera, por ejemplo 2, de manera que el punto lo calculamos como $(x, y) = 2(3, 2) = (6, 4)$. Se debe observar que la pendiente de la semirrecta estará dada por $m = \frac{2}{3}$.

b) Solución:

Queda a cargo del alumno.

1.1. Planteamiento del problema

Sabemos que todo número real positivo tiene raíz cuadrada; sabemos también que un número real negativo no tiene; en efecto, en un cuerpo ordenado todo número al cuadrado es positivo.

Cuando los algebristas del siglo XVI acometieron la solución de la ecuación de tercer grado, encontraron perturbados que ciertas expresiones, donde intervenían raíces cuadradas de números negativos, representaban números reales.

El Matemático Bombelli fue el primero en no asustarse ante el objeto $\sqrt{-1}$ y lo consideró como un número. Aplicó a este símbolo las operaciones conocidas en **R**, denotando a este objeto imaginario i que, por definición, verifica que $i^2 = -1$, y lo trató como si este símbolo fuese un "número" como los otros.

Más precisamente compuso este elemento i con los números de **R** como si operara en un cuerpo, y reemplazando en los cálculos i^2 por -1. Actualmente, se dice que este cuerpo es una *extensión* del cuerpo **R** o que es el cuerpo *engendrado* por i sobre **R** y se lo denota $\mathbf{R}_{(i)}$. (La notación definitiva será **C**).

1.2. Condiciones necesarias

Intentemos que las propiedades de la adición y la multiplicación en **R** sean prolongadas a $\mathbf{R}_{(i)}$ de manera que $\mathbf{R}_{(i)}$ sea al menos un anillo conmutativo. Supongamos que se definen una adición y una multiplicación que tengan las propiedades de un anillo conmutativo de tal forma que **R** sea un sub-cuerpo de este anillo y denotemos estas operaciones de la misma manera que en **R** (es decir, tal como procedió Bombelli).

Para la multiplicación, debe ser $i^2 = -1$, y para cualesquiera a y b reales por asociatividad debe ser:

$$(ia)b = i(ab)$$

y por conmutatividad y asociatividad,

$$a(ib) = (ai)b = i(ab) \quad \text{y} \quad (ia)(ib) = -ab$$

para la adición, por distributividad,

$$ia + ib = i(a + b),$$

y en una segunda etapa, se debe probar que para elementos del tipo a + ib. Sumando dos elementos de este tipo, se obtiene:

1) $$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

por conmutatividad y asociatividad de la adición y por distributividad. Se ve que el resultado es del mismo tipo que los términos de la adición.

Multiplicando dos elementos de este tipo; se obtiene por distributividad:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + (ib)(id) + a(id) + (ib)c$$

Finalmente, por los resultados precedentes, se obtiene:

2) $$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + ib)$$

y el resultado es del mismo tipo.

Se ve entonces que: haciendo intervenir pares ordenados (a, b) de $\mathbf{R}^2$, definiendo en $\mathbf{R}^2$ una adición y una multiplicación y, apoyándonos en las condiciones necesarias que acabamos de mostrar, podemos definir el cuerpo de los números complejos.

Observación:

A partir de la definición $i^2 = -1$, se obtienen: $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$, es decir, cualquiera sea el número natural n, i^n será igual a uno de estos cuatros valores, {i, -1, -i, 1}

1.3. Números complejos

1.3.1. Definición

Se llama número complejo a un elemento de $\mathbf{R}^2$, es decir a un par ordenado (a, b) de números reales.

Al primero; a se le denominará "parte real de (a, b)".
Al segundo; b se le denominará "parte imaginaria de (a, b)".

Dos números complejos son *iguales* se tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \quad y \quad b = b').$$

Al conjunto de los números complejos, munidos de estructura aditiva y multiplicativa, que van a ser definidas, se le denota **C**.

Un número complejo será denotado por una letra griega:

$$\alpha = (a, b)$$

se escribe entonces:

$$a = Re_{(\alpha)} \quad y \quad b = Im_{(\alpha)}.$$

1.3.2. Adición en **C**

La definición siguiente resulta de la condición necesaria (1)

Definición:

A dos números complejos (a, b) y (c, d), asociamos un número complejo, denominado *suma* y definido por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c; b + d).$$

1.3.3. Multiplicación en **C**

La definición siguiente resulta de la condición necesaria (2).

Definición:

A dos números complejos (a, b) y (c, d), asociamos un número complejo, denominado *producto* y definido por:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd; ad + bc)$$

1.4. Propiedades de la Adición

1.4.1. Conmutatividad

Cualesquiera que sean los números complejos α y β, se tiene

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

En efecto, si $\alpha = (a, b)$ y $\beta = (c, d)$, entonces

$$(a + c; b + d) = (c + a; d + b)$$

debido a la conmutatividad en **R**

1.4.2. Asociatividad

Cualesquiera que sean los números complejos α, β y γ se tiene:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

En efecto, se conservan las notaciones precedentes y si $\gamma = (e, f)$, se tiene:

$$[(a + c) + e; (b + d) + f]] = [a + (c + e); b + (d + f)]$$

debido a la asociatividad en **R.**

1.4.3. Elemento neutro: $\omega = (0, 0)$

Se verifica inmediatamente que, cualquiera que sea $\alpha \in$ **C**

$$\alpha + \omega = \alpha.$$

1.4.4. Números complejos opuestos

Cualquiera que sea $\alpha \in$ **C**, existe un $\beta \in$ **C** tal que:

$$\alpha + \beta = \omega.$$

En efecto, si se parte de $\alpha = (a, b)$ buscamos un $\beta = (x, y)$ tal que:

$$(a + x; b + y) = (0, 0).$$

Se tiene, igualando las partes reales e imaginarias

$$x = - a \quad y \quad y = - b.$$

Todo elemento (a, b) tiene entonces un opuesto (-a, -b) para la adición.

Se lo denota

$$(-a, -b) = -(a, b), \text{ en consecuencia:}$$

C es un grupo aditivo conmutativo.

Consecuencia: Para cada par de números complejos $\alpha = (a, b)$ y $\beta = (c, d)$, existe otro número complejo llamado la diferencia de α y β, denotado $\alpha - \beta$ y definido como la suma de α más el opuesto de β, y se escribe:

$$\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta.$$

Puesto que todo número complejo tiene opuesto aditivo único, las sustracción o diferencia entre números complejos siempre es posible y es única.

Además, como el conjunto de los números complejos con la adición así definida es un grupo conmutativo, y en un grupo todos los elementos son cancelables, se tiene entonces:

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma) \qquad \alpha + \beta = \alpha + \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \gamma$$

1.5. Propiedades de la multiplicación

1.5.1. Conmutatividad

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}), \qquad \alpha\beta = \beta\alpha$$

Sea $\alpha = (a, b)$ y $\beta = (c, d)$. Se tiene:

$$\alpha\beta = (ac - bd; ad + bc), \qquad \beta\alpha = (ca - db; da + cb)$$

Los dos números obtenidos son iguales ya que la multiplicación es conmutativa en **R**.

1.5.2. Asociatividad

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}), \qquad (\alpha\, \beta)\, \gamma = \alpha\, (\beta\, \gamma)$$

1.5.3. Elemento neutro

$$\varepsilon = (1, 0)$$

Se verifica inmediatamente que, cualquiera que sea $\alpha \in$ **C.** *La prueba a cargo del alumno.*

$$\alpha\varepsilon = \alpha.$$

1.5.4. Números complejos inversos

$$\forall\alpha\in(\mathbf{C} - \{\omega\}),\ \exists\beta\in \mathbf{C}, \qquad \alpha\beta = \varepsilon$$

Sea $\alpha = (a, b)$. Tomemos $\beta = (x, y)$ tal que

$$(a, b)\,(x, y) = (1, 0).$$

Notemos primero que si $(a, b) = (0, 0)$, se tiene, cualquiera sea (x, y),

$$(0, 0)\,(x, y) = (0, 0).$$

El número complejo $\omega = (0, 0)$ no tiene entonces inverso.

Supongamos $\alpha \neq (0, 0)$. La condición impuesta a β nos dá:

$$(ax - by;\ ay + bx) = (1, 0).$$

Igualamos las partes real e imaginarias:

$$ax - by = 1, \qquad bx + ay = 0,$$

Dado que $a^2 + b^2 \neq 0$, el sistema admite una única solución:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}; \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

De lo que resulta que todo número complejo $\alpha = (a, b) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$\beta = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; \frac{-b}{a^2 + b^2}\right), \text{ que se denota}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

Se designa $\mathbf{C^*} = \mathbf{C} - \{\ \omega\ \}$

Entonces **C*** es un <u>grupo multiplicativo conmutativo.</u>

Consecuencia: Al ser **C*** un grupo multiplicativo conmutativo, todos sus elementos serán simplificables, es decir:

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}^*), \quad \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \gamma$$

Por otra parte, cualquiera que sean los números complejos α, β, con $\beta \neq 0$, existe otro número complejo γ llamado cociente de α y de β, denotado por α/β y definido en la forma siguiente:

$$\gamma = \alpha/\beta = \alpha \cdot \beta^{-1}$$

1.5.5. Distributividad de la multiplicación respecto a la adición

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}), \qquad \alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$$

Tomando: $\alpha = (a, b)$; $\beta = (c, d)$; $\gamma = (e, f)$

se tiene:

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = (a, b)(c + e; d + f) =$$

$$= (a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)).$$

Por otra parte:

$$\alpha\beta = (ac - bd; ad + bc), \qquad \alpha\gamma = (ae - bf; af + be),$$

de donde

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (ac - bd + ae - bf;\ ad + bc + af + be)$$

y comparando se obtiene:

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

1.5.6. Cuerpo de los números complejos

La adición y la multiplicación definen sobre **C** una estructura de grupo conmutativo. Además la multiplicación es distributiva respecto a la adición. En consecuencia:

Teorema 1

C *es un cuerpo conmutativo.*

1.6. Inmersión de **R** en **C**

1.6.1. Conjunto de los números complejos: (a, 0)

Designemos por $\Re$ el conjunto de los números complejos (a, 0) cuando "a" recorre **R.** La aplicación f: a $\mapsto$ (a, 0) es evidentemente una *biyección* de **R** sobre $\Re$.

Para la adición se tiene:

$$\begin{aligned} f:\mathbf{R} &\rightarrow \Re \\ a &\mapsto f(a)=(a,0) \\ b &\mapsto f(b)=(b,0) \\ a+b &\mapsto f(a+b)=(a+b,0) \end{aligned}$$

O sea,

$$f(a) + f(b) = f(a + b)$$

pues

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$

En consecuencia, f es un isomorfismo para la adición.

Para la multiplicación, trabajando de la misma manera que con la suma tenemos:

$$(a, 0)(b, 0) = (ab – 0; 0 + 0) = (ab, 0)$$

se tiene finalmente que:

$$f(a) \cdot f(b) = f(ab)$$

es también un isomorfismo para la multiplicación.

Se tiene entonces a **R** inmerso en **C**, escribiendo:

$$(\forall a\in\mathbf{R}) \qquad (a, 0) = a$$

En particular, el elemento neutro de la adición en **C** es

$$\omega = (0, 0) = 0$$

El elemento neutro de la multiplicación en **C** es

$$\varepsilon = (1, 0) = 1$$

Se dice que **C** es un sobre cuerpo de **R** o una extensión de **R**. En resumen, para los conjuntos de números, tenemos la siguiente cadena de inclusión:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

Además, se debe observar que:

1- **C** es un espacio vectorial.
2- $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ es un anillo
3- $(\forall \alpha,\beta \in \mathbf{C}, \forall k \in \mathbf{R}) \quad (k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k(\alpha\beta)$.

Entonces decimos que <u>**C** es un **R**-álgebra</u>.

<u>Ejemplo 2</u>. Evalúe la expresión siguiente, utilizando las reglas de la adición y de multiplicación de los números complejos.

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) .$$

Solución:

Utilizando la definición de producto

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) = (3 \cdot 2 - 6 \cdot 1; 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2) + (4, 3);$$

haciendo las operaciones indicadas queda:

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) = (0; 15) + (4, 3);$$

finalmente, usando la definición de suma tenemos:

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) = (4, 18)$$

1.6.2. Imaginarios puros

Tomamos $(0, 1) = i$. Se tiene

$$(0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0),$$

que se escribe

$$i^2 = -1$$

Cualquiera que sea el número real a, se tiene

$$(0,1)(a, 0) = (0 - 0; 0 + a) = (0, a)$$

Es decir,

$$ia = (0, a)$$

Todo número complejo   ia   con $a \in \mathbf{R}$ se denomina *imaginario puro.*

Ahora, para todo número real a y b, se tiene

$$a + ib = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Recíprocamente, todo número complejo $\alpha = (a, b)$ es la suma de un número real y de un imaginario puro, y puede ser escrito,

$$\alpha = (a, b) = a + ib.$$

En el cálculo sobre los números complejos se pueden emplear cualquiera de estas formas y además reemplazar i^2 por -1.

Ejemplo 3. Evalúe la expresión siguiente, utilizando las reglas de la adición y multiplicación de los números complejos utilizando la forma a + bi de los números complejos con la regla $i^2 = -1$.

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3).$$

Solución: Escribimos la expresión a calcular en la forma:

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) = (3 + 6i)(2 + i) + (4 + 3i) =$$

$$= 3\cdot 2 + 6i^2 +3i \ + 2 \cdot 6i = 6 – 6 + 3i + 12 I,$$

por consiguiente:

$$(3, 6)\cdot(2, 1) + (4, 3) = 0 + 15 i$$

Ejemplo 4. Verifique la siguiente igualdad mediante cálculos directos. (Propiedad asociativa).

$$(3 + 2i) + [(2 + 6i) + (8 + 7i)] = [(3 + 2i) + (2 + 6i)] + (8 + 7i)]$$

Solución. $(3 + 2i) + [(2 + 6i) + (8 + 7i)] = (3, 2) + [(2, 6) + (8, 7)] =$

$$= (3, 2) + (10, 13) =$$

$$= (13, 15),$$

$$= 13 + 15 i$$

$$[(3 + 2i) + (2 + 6i)] + (8 + 7i)] = [(3,2) + (2, 6)] + (8, 7) =$$

$$=(5, 8) + (8, 7) =$$

$$=(13, 15),$$

$$= 13 + 15 i$$

1.7. Números complejos conjugados

1.7.1. Definición

Se llama *conjugado* del número complejo $a + ib$ al número complejo $a – ib$.

El conjugado de α se denota $\overline{\alpha}$:

$$\alpha = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\alpha} = a - ib.$$

Queda definida así una aplicación $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ de **C** en sí mismo.

Se tiene: $\alpha + \overline{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha)$; $\alpha - \alpha = 2i\mathrm{Im}\,(\alpha)$

Además: $\alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 + b^2$

Por ejemplo: Si $\alpha = -2 + 3i$ entonces será $\overline{\alpha} = -2 - 3i$;

se tendrá:

$$\alpha + \overline{\alpha} = -4 \qquad \text{y} \qquad \alpha \cdot \overline{\alpha} = (-2)^2 + 3^2 = 13$$

Problema: Halle dos números complejos α y β de manera que su suma dé por resultado un número real a y su diferencia un número imaginario bi.

Solución:
Puesto que la suma $\alpha + \beta$ es un número real, las partes imaginarias de α y de β deben ser iguales en valor absoluto, pero de signos opuestos. Además como la diferencia $\alpha - \beta$ es imaginario puro, las partes reales de α y de β deben ser iguales. Por lo tanto si $\alpha = x + iy$, tendrá que ser $\beta = x - iy$, para cualquiera x e y números reales. Tendremos entonces que:

$$\alpha + \beta = 2x = a \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}a$$

$$\alpha - \beta = 2iy = b \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}b$$

De esta manera los dos números complejos son: $\alpha = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}bi$ y $\beta = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}bi = \overline{\alpha}$

1.7.2. Propiedades

Propiedad 1

Por definición, el conjugado de a- ib es a + ib, entonces:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$$

Esto prueba que $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ es *involutiva*.

Propiedad 2

La *involución* $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ es un *automorfismo* para la suma

$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

Si $\alpha = a + ib$ y $\beta = c + id$, entonces: $\overline{\alpha} = a - ib$ y $\overline{\beta} = c - id$.

De donde

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a + c) - i(b + d) = \overline{\alpha+\beta}.$$

Por ejemplo si $\alpha = 5 + 2i$ y $\beta = 4 - 6i$, serán $\overline{\alpha} = 5 - 2i$ y $\overline{\beta} = 4 + 6i$,

De donde:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (5 - 2i) + (4 + 6i) = 9 + 4i;$$

$$\alpha + \beta = (5 + 2i) + (4 - 6i) = 9 - 4i \quad \text{luego} \quad \overline{\alpha+\beta} = 9 + 4i;$$

y se verifica que,

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 9 + 4i = \overline{\alpha+\beta}$$

Propiedad 3

La involución $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ es un automorfismo para la multiplicación:

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta}$$

Considerando las mismas notaciones, se tiene:

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

Por ejemplo si $\alpha = 5 + 2i$ y $\beta = 4 - 6i$, serán $\overline{\alpha} = 5 - 2i$ y $\overline{\beta} = 4 + 6i$, De donde:

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = (5 - 2i) \cdot (4 + 6i) = 20 + 12 + 30\,i - 8i = 32 + 22i$$

$$\alpha \cdot \beta = (5 + 2i) \cdot (4 - 6i) = 20 + 12 - 30i + 8i = 32 - 22i \quad \text{luego} \quad \overline{\alpha + \beta} = 32 + 22i$$

y se verifica que,

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 32 + 22i = \overline{\alpha + \beta}$$

De estas propiedades resulta que, en todo cálculo sobre los números complejos, si se reemplazan los números que intervienen por sus conjugados, el resultado se reemplaza por su conjugado. La conjugación es un automorfismo del cuerpo **C.**

Lema

$$\forall \beta \in \mathbf{C^*}, \text{ con } \beta = (a, b) \text{ se tiene que: } \beta^{-1} = \frac{\bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

Prueba:

Dado que $\bar{\beta} = (a, -b)$, será:

$$\frac{\bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}} = \frac{(a, -b)}{(a, b) \cdot (a, -b)} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} ; \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \beta^{-1}$$

Consecuencia

Dado un número complejo α cualquiera, se puede escribir:

$$\alpha \cdot \beta^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

Es decir, para escribir una fracción entre dos números complejos en la forma (a, b); multiplicamos y dividimos la fracción por el conjugado del denominador; esto es:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

Ejemplo 5: Siendo a y b números reales, escriba el siguiente número complejo en la forma a + bi:

$$\frac{3 + 2i}{1 + i}$$

Solución: De acuerdo a la fórmula $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$; tenemos que:

$$\frac{3+2i}{1+i}=\frac{3+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{5-i}{1^2+1^2}=\frac{5-i}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\,.$$

1.8. Módulo de un número complejo

1.8.1. Definición

Sea un número complejo $\alpha = a + ib$ y su conjugado. Calculamos el producto:

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a + ib)\cdot(a - ib) = a^2 + b^2$$

El producto de un número complejo por su conjugado es un número real, positivo o nulo. Este número $\alpha\cdot\overline{\alpha}$ admite por consiguiente una y sólo una raíz cuadrada positiva.

Definición:

Se llama *módulo* de un número complejo α al número real positivo o nulo, $\sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}}$

El módulo de α se denota $|\alpha|$.

Por definición,

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Queda así definida una aplicación de **C** en $\mathbf{R}^+$:

$$\alpha \mapsto |\alpha|.$$

Ejemplo 6. a) Si $\alpha = (3, 4)$, entonces $|\alpha| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) Si $\alpha = 1 + 2i$, entonces $|\alpha| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

En 1.9 estudiaremos el plano complejo. Sin embargo a esta altura conviene observar que es evidente que existe una función biyectiva que asocia a cada elemento del plano $\mathbf{R}^2$, un número complejo **C** y sólo uno. En 1.9 se establecerá que esta función es un isomorfismo, por lo que los números complejos pueden interpretarse geométricamente como puntos de un solo plano.

1.8.2. Valuación sobre **C**

Mostraremos que esta aplicación posee las tres propiedades que distinguen al valor absoluto.

Propiedad 4

$$|\alpha| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

En efecto, se tiene en **R**, las siguientes equivalencias lógicas:

$$(\sqrt{a^2+b^2} = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+b^2=0) \quad \Leftrightarrow \quad (a=0 \;\; y \;\; b=0)$$

Propiedad 5

$\alpha \mapsto |\alpha|$ es un morfismo del grupo multiplicativo de **C** sobre el grupo multiplicativo de **R***:

$$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|.$$

Por definición:

$$|\alpha|^2 = \alpha\cdot\overline{\alpha}, \quad |\beta|^2 = \beta\cdot\overline{\beta}, \qquad |\alpha\cdot\beta|^2 = \alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha\cdot\beta}$$

Aplicando la propiedad 3 (automorfismo del producto), y la conmutatividad, se obtiene:

$$|\alpha\cdot\beta|^2 = \alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \alpha\cdot\overline{\alpha}\cdot\beta\cdot\overline{\beta} = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2 = (|\alpha|\cdot|\beta|)^2.$$

Tomando las raíces cuadradas en $\mathbf{R}^+$, la propiedad queda demostrada.

Consecuencia

Si $\beta = \frac{1}{\alpha}$ entonces,

$$|\alpha|\frac{1}{|\alpha|} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

El módulo del inverso es igual al inverso del módulo.

Propiedad 6

El módulo de la suma de dos números complejos es a lo sumo igual, que la suma de los módulos de éstos números.

$$|\alpha+\beta| \;\leq\; |\alpha|+|\beta|$$

Lema

Cualquiera que sea el número complejo γ, se tiene:

$$\mathbf{R}\mathrm{e}(\gamma) \leq |\gamma|$$

Se debe precisar que la desigualdad que se trata de demostrar aquí, tiene lugar en **R**, hay que tener cuidado de no escribir la desigualdad en **C**, ya que no se puede definir ninguna estructura de orden parecida en **C**.

Se debe observar que ninguna estructura de orden en **C** confiere a **C** de una estructura de cuerpo ordenado, ya que en tal cuerpo todo cuadrado es positivo, mientras que en **C**: $i^2 = -1$.

Llamamos

$$\gamma = a + ib.$$

Se tiene $\mathbf{R}\mathrm{e}(\gamma) = a$ y $|\gamma| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (número real positivo o nulo). O sea, en **R,** se tiene que

$$a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Puesto que, si a es negativo, la desigualdad es evidente y si a es positivo, es suficiente comparar los cuadrados de los dos miembros y constatar que se tiene

$$a^2 \leq a^2 + b^2 .$$

Demostración de la propiedad 6

Se tiene, por definición,

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$$

Desarrollando en **C** esta expresión:

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \alpha\cdot\overline{\alpha} + \beta\cdot\overline{\beta} + \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta =$$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta$$

Aplicando el lema al número $\gamma = \alpha\cdot\overline{\beta}$:

$$\alpha\cdot\overline{\beta} + \overline{\alpha}\cdot\beta \leq 2\,|\alpha\cdot\overline{\beta}| = 2\,|\alpha|\cdot|\beta|$$

entonces:

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,|\alpha|\cdot|\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

Dos números reales positivos o nulos están en el mismo orden que sus cuadrados, la propiedad 6 queda demostrada y

$$|\,\alpha + \beta\,| \;\leq\; |\,\alpha\,| + |\,\beta\,|$$

Las propiedades 4, 5 y 6 muestran que el módulo tiene las mismas propiedades que el valor absoluto.

Desigualdades

Son indispensables ciertas desigualdades que contienen módulos de números complejos para el desarrollo de ciertos aspectos teóricos y la solución de problemas. Como el módulo de un número complejo es un número real, en la resolución de estas desigualdades se utilizan las propiedades del cuerpo totalmente ordenado.

1. a) $|\,\alpha\,| \geq |\,\mathrm{Re}(\alpha)|$; b) $|\,\alpha\,| \geq |\,\mathrm{Im}(\alpha)|$

2. $|\,\alpha\,|^2 \geq 2 \cdot |\,\mathrm{Re}(\alpha)| \cdot |\,\mathrm{Im}(\alpha)|$

3. $\sqrt{2}\,|\,\alpha\,| \geq |\,\mathrm{Re}(\alpha)| + |\,\mathrm{Im}(\alpha)|$

Solución de 1:

1.a) Puesto que todo número complejo α puede escribirse como $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + i\,\mathrm{Im}(\alpha)$, su módulo puede escribirse como $|\,\alpha\,| = \sqrt{[\mathrm{Re}(\alpha)]^2 + [\mathrm{Im}(\alpha)]^2}$. Como $[\mathrm{Im}(\alpha)]^2 \geq 0$, de deduce que:

$$\sqrt{[\mathrm{Re}(\alpha)]^2 + [\mathrm{Im}(\alpha)]^2} \geq \sqrt{[\mathrm{Re}(\alpha)]^2} = |\mathrm{Re}(\alpha)|.$$

Por consiguiente:

$$|\,\alpha\,| \geq |\,\mathrm{Re}(\alpha)|.$$

1.b) De la misma manera tenemos que: $|\,\alpha\,| = \sqrt{[\mathrm{Re}(\alpha)]^2 + [\mathrm{Im}(\alpha)]^2}$ y $[\mathrm{Re}(\alpha)]^2 \geq 0$, se sigue:

$$\sqrt{[\mathrm{Re}(\alpha)]^2 + [\mathrm{Im}(\alpha)]^2} \geq \sqrt{[\mathrm{Im}(\alpha)]^2} = |\mathrm{Im}(\alpha)|$$

De lo que resulta:

$$|\,\alpha\,| \geq |\,\mathrm{Im}(\alpha)|.$$

Solución de 2: Como el cuadrado de un número real no puede ser negativo, podemos escribir:

$$\big[|\mathrm{Re}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|\big]^2 \geq 0.$$ Por consiguiente,

desarrollando el cuadrado:

$$[|\mathrm{Re}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|]^2 = |\mathrm{Re}(\alpha)|^2 + 2\cdot|\mathrm{Re}(\alpha)|\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|^2 \geq 0;$$

Es decir que, $|\mathrm{Re}(\alpha)|^2 + |\mathrm{Im}(\alpha)|^2 \geq 2\cdot|\mathrm{Re}(\alpha)|\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)|$, o lo que es lo mismo:

$$|\alpha|^2 \geq 2\cdot|\mathrm{Re}(\alpha)|\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)|$$

Solución de 3: Si a la expresión de arriba, le sumamos $|\alpha|^2 = |\mathrm{Re}(\alpha)|^2 + |\mathrm{Im}(\alpha)|^2$ se obtiene:

$$2\cdot|\alpha|^2 \geq |\mathrm{Re}(\alpha)|^2 + 2\cdot|\mathrm{Re}(\alpha)|\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|^2, \text{ de donde}$$

$$2\cdot|\alpha|^2 \geq [|\mathrm{Re}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|]^2$$ y extrayendo las raíces positivas se concluye que:

$$\sqrt{2}\,|\alpha| \geq |\mathrm{Re}(\alpha)| + |\mathrm{Im}(\alpha)|$$

1.8.3. Sub-grupo multiplicativo U de los números complejos de módulo 1

Designamos por U al conjunto de números complejos de módulo 1:

$$U = \{\alpha\in\mathbf{C} \,/\, |\alpha| = 1\}$$

La propiedad 5 expresa que la multiplicación es interna en U:

$$(|\alpha| = 1 \text{ y } |\beta| = 1) \quad \Rightarrow \quad |\alpha|\cdot|\beta| = |\alpha\cdot\beta| = 1.$$

Por otra parte, el inverso de $\alpha \in U$ es un número de U.

$$|\alpha| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} = 1.$$

Entonces, U es un sub-grupo multiplicativo de **C**. Este es el núcleo del morfismo $\alpha \mapsto |\alpha|$ del grupo multiplicativo de **C** en el de $\mathbf{R} - \{0\}$.

1.8.4. Resolución de $z^2 = \alpha$.

La ecuación $z^2 = \alpha$ se denomina ecuación binomia de segundo grado. α está dado en **C** y la incógnita es z.

Llamando $z = x + iy$, $\alpha = a + ib$; con x, y, a, b son números reales..

La ecuación binomia se escribe

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

Igualando parte real y parte imaginaria de la ecuación, podemos escribir:

$$x^2 - y^2 = a \quad y \quad xy = b/2; \qquad (1)$$

o también:

$$(x^2 + (-y^2) = a \quad , \quad x^2(-y^2) = -b^2/4 \quad y \quad xyb \geq 0) \qquad (2)$$

Recíprocamente, cada solución (x, y) de (2), tal que a xy se le asigne b, es solución de (1); resolver (2) es determinar los dos números x^2 y $(-y^2)$, conociendo su suma y su producto, y son en consecuencia, raíces de la ecuación de coeficientes e incógnitas reales:

$$u^2 - au - b^2/4 = 0;$$

esta ecuación tiene una raíz positiva x^2 y una raíz negativa $(-y^2)$, entonces sin ambigüedad,

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \qquad\qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$$

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \qquad\qquad y = \varepsilon'\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

con $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$, siendo ε y ε' tales que $xyb > 0$, luego tales que $\varepsilon\varepsilon' b > 0$; de donde obtenemos dos soluciones

$$z_1 = \varepsilon_1\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\varepsilon_1'\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

una de ellas (con $\varepsilon_1\varepsilon_1'$ del signo de b), y $z_2 = -z_1$ la otra.

Para $b = 0$ y $a > 0$ se encuentra:

$$z_1 = \varepsilon_1\sqrt{a} \qquad z_2 = -z_1$$

para $b = 0$ y $a < 0$ (cuidado, que $\sqrt{a^2} = |a| = -a$) se encuentra:

$$z_1 = \varepsilon_1' i\sqrt{-a} \qquad z_2 = -z_1.$$

Si $a = b = 0$ se encuentra $z_1 = z_2 = 0$, luego:

Teorema

Todo número complejo tiene dos raíces cuadradas opuestas. Son distintas entre si, si y solo si, el número es no nulo.

Ejemplo 7. Encontrar las raíces de la ecuación $\alpha^2 = 1 + i$.

Solución. Tomamos $\alpha^2 = (x + iy)^2 = 1 + i$, o bien: $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + i$, es decir podemos formular, igualando la parte real y la parte imaginaria.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 1 \\ 4x^2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 1 \\ x^2(-y^2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$, de manera que:

podemos ahora considerar a x^2 y a $(-y^2)$, (la suma de las dos raíces es 1, y el producto es ¼) como las raíces de la ecuación: $u^2 - u - \dfrac{1}{4} = 0$, cuya solución es:

$$u_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $(-y^2)$ es una raíz negativa, tendremos que elegir $u_2 = (-y^2)$ y $u_1 = x^2$, luego tenemos:

$$y^2 = -u_2 \quad \Rightarrow \quad y = \varepsilon\sqrt{-u_2}\,, \text{ con } \varepsilon = \pm 1, \text{ es decir } y = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}\,;$$

$$x^2 = u_1 \quad \Rightarrow \quad x = \varepsilon'\sqrt{-u_1}\,, \text{ con } \varepsilon' = \pm 1, \text{ es decir } x = \varepsilon'\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}\,.$$

Si tomamos $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, y reemplazamos en $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + i$, la ecuación se verifica:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) i = 1 + i$$

Por consiguiente el conjunto solución de la ecuación será:

$$S = \left\{ \alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}; \ \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right\},$$

con α_1 igual al opuesto de α_2.

1.8.5. Ecuación de segundo grado con coeficientes complejos

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \text{ con } \ a \neq 0$$

se puede escribir

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

se presentan dos tipos de discusión según sean a, b, c reales o no;

1. a, b, c reales

$$b^2-4ac>0 \qquad x=\frac{-b+\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (\varepsilon^2=1),$$

$$b^2-4ac<0 \qquad x=\frac{-b+\varepsilon i\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (\varepsilon^2=1),$$

$$b^2-4ac=0 \qquad x=-\frac{b}{2a}.$$

2. a, b, c no reales.

Sea d un número complejo tal que:

$$d^2=b^2-4ac$$

$$b^2-4ac\neq 0 \qquad x=\frac{-b+\varepsilon d}{2a} \qquad (\varepsilon^2=1)$$

$$b^2-4ac=0 \qquad x=-\frac{b}{2a}$$

1.9. Plano Complejo

1.9.1. Representación geométrica de los números complejos

Sea $P=\mathbf{R}^2$ el plano euclidiano, $\{e_1, e_2\}$ su base canónica. La aplicación:

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}; \qquad f(a,b)=a+ib$$

es evidentemente biyectiva.

Todo punto $(a, b)\in P$ está así asociando a uno y sólo un elemento $\alpha=a+ib$ de **C**, y recíprocamente. Además, f es un isomorfismo de la adición del **R**-espacio vectorial P sobre la adición en **C**:

$$(a,b)\xrightarrow{f} a+ib; \qquad (c,d)\xrightarrow{f} c+id$$

implica

$$(a, b) + (c, d) \xrightarrow{f} (a + c) + i\,(b + d) = f(a, b) + f(c, d)$$

En la multiplicación de un número real por un número complejo será, para todo escalar $c \in \mathbf{R}$:

$$c(a, b) \xrightarrow{f} ca + icb = cf(a, b).$$

En consecuencia, los **R**-espacios P y **C** son isomorfos. Estos dos espacios vectoriales quedan identificados y se los denominan, **C** el **plano complejo**.

Todo $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $f(a, b) = \alpha$ se denominará **punto** del plano complejo **C**.

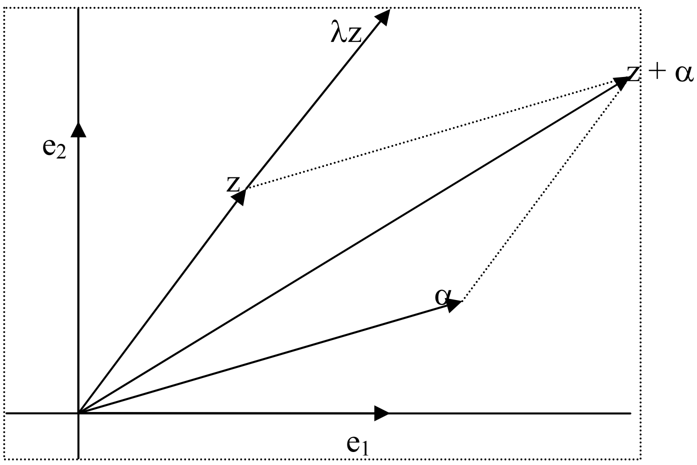
La adición en **C** tiene por imagen en el plano complejo a la adición vectorial.

Sea $\alpha \in \mathbf{C}$ un punto dado del plano complejo. Entonces la aplicación:

$$t_\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \qquad t_\alpha(z) = z + \alpha$$

es la **traslación** de **C** asociado a α. El conjunto T de las traslaciones cuando α recorre **C** es un grupo conmutativo, sub-grupo del grupo $\wp$(C) de las permutaciones del plano complejo **C**. T es isomorfo al grupo aditivo de **C**.

Sea $\lambda \in \mathbf{R}$, la aplicación $h_\lambda : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$; $h_\lambda(z) = \lambda z$ es una **homotecia de razón** λ. El conjunto H de las homotecias cuando λ recorre **R*** es un grupo conmutativo, sub-grupo de $\wp$(C), isomorfo al grupo multiplicativo de **R**.



1.9.2. Módulo de un número complejo

Dada la función $\begin{cases} g: \mathbf{C} \to \mathbf{R} \\ \quad z \mapsto g(z) = \| z \| \end{cases}$

Sea $z \in \mathbf{C}$ y $g(z)$ su imagen en $\mathbf{R}$. Entonces,

$$\| g(z) \| = \sqrt{a^2 + b^2} = \| z \|$$

El módulo de un número complejo es la norma del vector asociado en P.

1.9.3. Rotaciones

El círculo-unidad es la imagen, en el plano complejo, del sub-grupo U multiplicativo de números complejos de módulo 1.

Para identificar $\mathbf{C}$ con el plano, se dice que U es el círculo unidad.

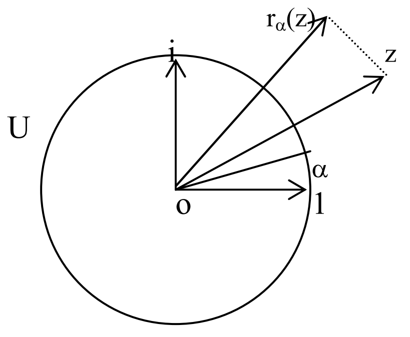
Definición:

A todo $\alpha \in U$, asociamos la aplicación r_α: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ siguiente:

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \quad r_\alpha(z) = \alpha z.$$

r_α se denomina rotación del plano complejo $\mathbf{C}$ asociado a α.

Sobre la figura, se muestra la imagen de un $z \in \mathbf{C}$. Se tiene:



$$\| r_\alpha(z) \| = | z |$$

Es evidente que toda rotación r_α es biyectiva.
Es una permutación del plano. Si se designa por R al conjunto de las rotaciones r_α cuando α recorre U, entonces R es una parte del grupo $\wp$(C) de las permutaciones del plano.

La recíproca de r_α está definido por:

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \qquad r^{-1}_{\alpha\,(z)} = \alpha^{-1} z,$$

$$r^{-1}_\alpha = r_{\alpha^{-1}},$$

y se tiene que $r^{-1}_\alpha \in R$.

Sean ahora dos rotaciones r_α y r_β. Se tiene:

$$(\forall z\in \mathbf{C}) \qquad (r_\beta \circ r_\alpha)_{(z)} = r_{\beta(\alpha z)} = \beta(\alpha z) = (\beta\alpha)z = r_{\beta\alpha(z)}$$

Luego

$$r_\beta \circ r_\alpha = r_\alpha \circ r_\beta = r_{\beta\alpha}.$$

y se tiene que $r_\beta \circ r_\alpha \in R$, y que la ley de composición de rotaciones es conmutativa. De lo que resulta que R es un sub-grupo conmutativo de $\wp(C)$. Se le denomina grupo de las rotaciones. (vectoriales).

Además la aplicación:

$$\varphi : U \to \wp(C)$$
$$(\forall\alpha\in U) \qquad \alpha \to \varphi_{(\alpha)} = r_\alpha$$

es un morfismo de grupos:

$$\varphi_{(\alpha\beta)} = \varphi_{(\alpha)} \circ \varphi_{(\beta)}.$$

Este morfismo es inyectivo:

$$r_\alpha = r_{\alpha'} \Rightarrow (\forall z\in \mathbf{C}) \qquad r_{\alpha(z)} = r_{\alpha'} \Rightarrow \alpha z = \alpha' z \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

y la imagen de este morfismo $\varphi(U) = R$. En consecuencia, el grupo multiplicativo U de los números complejos de módulo 1 es isomorfo al grupo de las rotaciones.

Teorema2

El conjunto R de las rotaciones del plano P es un sub-grupo conmutativo de grupo $\wp(C)$ de las permutaciones de P.

El grupo de las rotaciones R es isomorfo al grupo multiplicativo U de los números complejos de módulo

Ejemplo: Determinar la rotación $r_\alpha(z) = \alpha z$, para $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ en el punto $z = \frac{3}{2} + 2i$.

Solución: Tendremos que: $r_\alpha(z) = \alpha z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + 2i\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{4} + \frac{4\sqrt{3}+3}{4}i$.

Observar que: $|\alpha| = 1$; y que $|r_\alpha(z)| = |z| = \frac{5}{2}$. Es necesario que el lector, haga una representación gráfica, para visualizar la rotación.

1.9.4. Similitudes

Definición

A todo $\alpha \in \mathbf{C}^*$, asociamos la aplicación $s_\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ siguiente:

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \qquad s_{\alpha(z)} = \alpha z$$

s_α se denomina similitud del plano complejo $\mathbf{C}$ asociado a α.

Es evidente que s_α es biyectiva. Es una permutación del plano. Si se designa por S al conjunto de las similitudes s_α cuando α recorre $\mathbf{C}^*$, S es una parte del grupo $\wp(C)$ de las permutaciones del plano.

De lo que precede, se ve que, para cualquiera s_α y s_β en S:

$$s_\alpha^{-1} = s_{\alpha^{-1}},\ s_\beta \circ s_\alpha = s_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha\beta}.$$

Luego s_α^{-1} pertenece a S y $s_\beta \circ s_\alpha \in$ S. Además la ley de composición de similitudes es conmutativa. En consecuencia, S es un sub-grupo conmutativo del grupo $\wp(C)$ de las permutaciones del plano. Se lo llama grupo de las similitudes. (vectoriales).

Además el grupo R de las rotaciones es sub-grupo de S; la similitud s_α es una rotación si $\alpha \in U$. El grupo H de las homotecias es también sub-grupo de S; la similitud s_α es una homotecia si $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

Por último, la aplicación

$$\psi : \mathbf{C}^* \to \wp(C)$$

$$(\forall \alpha \in \mathbf{C}) \qquad \psi_{(\alpha)} = s_\alpha$$

es un morfismo inyectivo de grupos donde la imagen es $\psi(C) = S$.

En consecuencia, el grupo multiplicativo de $\mathbf{C}^*$ es isomorfo al grupo de las similitudes S. Resumiendo, tenemos este resultado:

Teorema 3

El conjunto S de las similitudes del plano P es un sub-grupo conmutativo del grupo $\wp(P)$ de las permutaciones de P. El grupo de las similitudes S es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbf{C}^*$ de los números complejos. El grupo R, de las rotaciones y el grupo H de las homotecias son sub-grupos de S.

1.9.5. Factorización canónica de una similitud

Observemos primero que el conjunto H^+ de las homotecias h_λ donde la razón λ recorre H_+^* es un subgrupo del grupo H de las homotecias, e isomorfo al grupo multiplicativo de $\mathbf{R}_+^*$.

Sea una similitud $s_\alpha \varepsilon S$ ($\alpha \in \mathbf{C}^*$). Tomamos $|\alpha| = \lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Para todo $z \in \mathbf{C}$, se tiene

$$s_\alpha(z) = \lambda z = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)(\lambda z) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\lambda} z\right).$$

Observemos que:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \in U$$

En consecuencia, si h_λ es la homotecia de razón λ (positivo) y r_α la rotación asociada a $\alpha' \in U$, se tiene:

$$s_\alpha = r_{\alpha'} \circ h_\lambda = h_\lambda \circ r_{\alpha'}.$$

Esta es, la factorización canónica de la similitud s_α.

Teorema 4

Toda similitud $s_\alpha \varepsilon S$ es compuesta, de manera única, de una homotecia $h_\lambda \varepsilon H^+$; ($\lambda = |\alpha| \in \mathbf{R}_+^*$) y de una rotación $r_{\alpha'} \varepsilon R$ ($\alpha' = \alpha \lambda^{-1} \in U$):

$$s_\alpha = r_{\alpha'} \circ h_\lambda = h_\lambda \circ r_{\alpha'}.$$

1.9.6. Similitudes afines

Definición

Para toda similitud $s_\alpha \in S$ y toda traslación $t_\beta \in T$, la compuesta $t_\beta \circ s_\alpha$ denotada $s_{\alpha,\beta}$ se denomina similitud afín del plano asociado a α y β.

- Si $\alpha \in U$, $s_{\alpha,\beta}$ se denomina *rotación afín* y se denota $r_{\alpha,\beta}$.
- Si $\lambda \in \mathbf{R}^*$, $s_{\alpha,\beta}$ se denomina *homotecia afín* de razón λ y se denota $h_{\lambda,\beta}$.

- Si $\alpha = 1$, entonces $s_{1,\beta} = t_\beta$, <u>*traslación asociada*</u> a β.

Propiedad 7

Para toda similitud $s_{\alpha,\beta}$, existe una y sólo una traslación, $t_\gamma \in T$ tal que

$$s_{\alpha\beta} = t_\beta \circ s_\alpha = s_\alpha \circ t_\gamma$$

Notemos que, para todo $\gamma \in \mathbf{C}$,

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \qquad (s_\alpha \circ t_\gamma)(z) = \alpha(z+\gamma).$$

Mostremos entonces que para todo $\alpha \neq 0$ y β en $\mathbf{C}$ existe uno y sólo un $\gamma \in \mathbf{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbf{C}) \qquad \alpha z + \beta = \alpha(z+\gamma).$$

Es decir, $\gamma = \beta\alpha^{-1}$. La propiedad queda demostrada.

Se ve también que, en el caso $\beta \neq 0$, $t_\beta \circ s_\alpha \neq s_\alpha \circ t_\beta$ si $\alpha \neq 1$, luego $s_\alpha \notin T$.

Designemos por SA al conjunto de las similitudes afines $s_{\alpha,\beta}$ cuando α recorre $\mathbf{C}$. SA es una parte del grupo $\wp(P)$ de las permutaciones del plano P y se tiene:

$$S \cap T \subset SA \subset \wp(P).$$

De acuerdo a la propiedad anterior, el sub-grupo $\wp(P)$ engendrado por la parte $S \cap T$ es precisamente SA.

Se ha obtenido entonces el siguiente teorema:

Teorema 4

El conjunto SA de las similitudes afines es un subgrupo del grupo $\wp(P)$ de las permutaciones del plano P, sub-grupo engendrado por la parte $S \cap T$.

Punto invariante de una similitud afin

Mostraremos que, para toda similitud afín $s_{\alpha\beta} \in SA$ distinta de una traslación, existe uno y sólo un punto $\zeta \in \mathbf{C}$ tal que

$$s_{\alpha\beta}(\zeta) = \zeta$$

En efecto, la ecuación en $\mathbf{C}$

$$\alpha\zeta + \beta = \zeta$$

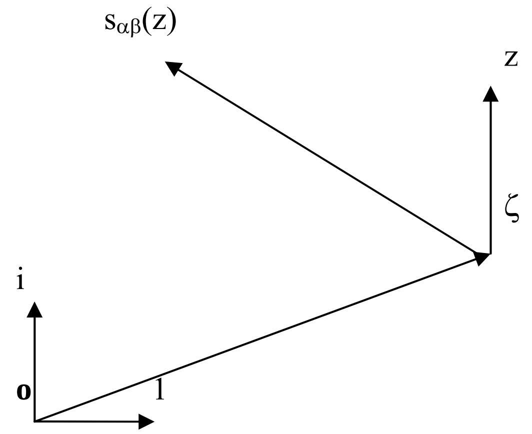
tiene una, y sólo una solución si, $\alpha \neq 1$

$$\zeta = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

Propiedad 8

Toda similitud afín $s_{\alpha\,\beta}$, distinta de una traslación $(\alpha \neq 1)$ posee uno y sólo un punto invariante, $\zeta = \beta(1 - \alpha)^{-1}$.

Se la denomina centro de la similitud afín $s_{\alpha\,\beta}$.
El centro de la similitud s_α es **o**.



Tenemos ahora la siguiente propiedad:

Propiedad 9

Para toda similitud $s_{\alpha\,\beta}$ $(\alpha \neq 1)$ de centro ζ:

$$s_{\alpha\,\beta} = t_\zeta \circ s_\alpha \circ t_\zeta$$

En efecto

$$(\forall\ z \in \mathbf{C}) \qquad s_{\alpha\beta}(z) = \alpha z + \beta$$

$$\zeta = \alpha\,\zeta + \beta$$

Restando miembro a miembro, se obtiene

$$s_{\alpha\beta}(z) - \zeta = \alpha\ (\ z - \zeta)$$

Tenemos entonces el siguiente esquema:

$$z \xrightarrow{t_\zeta^{-1}} z \longrightarrow \zeta \xrightarrow{s_\alpha} \alpha(z-\zeta) \xrightarrow{t_\zeta} \alpha(z - \zeta) + \zeta = s_{\alpha,\beta}(z)$$

ANEXO 1

En análisis matemático se estudiará que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta$$

en particular (k entero)

$$e^{2ik\pi} = 1 \qquad e^{i\pi} = -1$$

tendremos ($\pi \in \mathbf{Z}$)

$$e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \qquad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}, \qquad (e^{i\theta})^{n} = e^{ni\theta}.$$

Todo número complejo $z = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)$ puede entonces escribirse bajo la forma:

$$z = re^{i\theta}$$

llamada *forma exponencial*, particularmente cómoda gracias a las fórmulas recordadas anteriormente para efectuar productos y cocientes.

Ejercicios propuestos

1. Expresar cada uno de los siguientes ítems, en la forma ri ; donde r es un número real positivo.

   a) $\sqrt{\frac{-3}{4}}$; b) $-\sqrt{-49}$; c) $\sqrt{-\frac{4}{9}}$; d) $\sqrt{-72}$; e) $\sqrt{-75}$; f) $\sqrt{-\frac{27}{100}}$

2. Expresar cada uno de los siguientes como 1, -1, i o -i:

   a) i^{14} ; b) i^{20} ; c) i^{16} ; d) $(-i^{5})^{3}$; e) i^{13} ; f) i^{-10}.-

3. Si **a** = (2, 1); **b** = (4, 3) , determinar: a) **a** + **b** ; b) **a** - **b** ; c) 2**a** ; d) 3**b** ; e) **a.b** ; f) $\mathbf{b}^{-1}$; g) $\mathbf{a.b}^{-1}$

4. Si **a** = (-2,3); **b** = (6, 8), determinar: a) **a** + **b** ; b) **a** - **b**; c) 2**a**; d) 3**b** ; e) **a.b**; f) $\mathbf{b}^{-1}$; g) $\mathbf{a.b}^{-1}$.

5. Dar el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos:

   a) (7, 4); b) 2 + 3i; c) -3 - 4i ; d) 2/3 + 4/5 i ; e) (3/4 , 3/5).

6. Dar el módulo de cada uno de los números complejos del ejercicio 5.

7. En cada uno de los ítems, desarrolle las operaciones indicadas y exprese el resultado de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

a) $(-9)^{1/2} + (-25)^{1/2} + (64)^{1/2}$; b) $(-3)^{1/2}(-12)^{1/2}$; c) $(-2^2)^{1/2} - ((-2)^2)^{1/2}$;
d) $(1 + 4i) + (3 + 2i)$; e) $(3 - 2i)^2 (3 + 2i)^2$; f) $(5 + (-4)^{1/2})(5 - (-4)^{1/2})$;
g) $\dfrac{2 + 3\sqrt{-2}}{1 + \sqrt{-2}}$; h) $\dfrac{1+i}{(2+i)(3+i)}$; j) $\dfrac{(2+i)^2}{(2-i)^2}$.

8. En cada uno de los ítems, determinar los valores que deben tener x e y para que las igualdades se cumplan.

a) $(2,-5) = (x, y)$; b) $(2x, -3) = (-4, -y)$; c) $x - 2y + xi - yi = 2 + 5i$;
d) $x + 2xi - 7y - 6yi = 15 - 10i$.

9. Determinar el valor de $x^2 + 6x + 13$, donde $x = -3 + 2i$.

10. ¿Es $3 + i$ una solución de $y^2 - 6y + 10 = 0$?.
¿Es $3 - i$ una solución de $y^2 - 6y + 10 = 0$?.

11. Demostrar: $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq (0, 0)$, $\alpha x + \beta = \mathbf{0} \Rightarrow x = -\beta\alpha^{-1}$.

12. Resolver la ecuación dada y comprobar la solución:

a) $(3, 4)x + (5, 6) = (0, 0)$; b) $(3, -4)x + (1, -2) = (0, 0)$; c) $ix = 1$;
d) $(1 + i)x - 2 = 0$

13. Resolver la ecuación dada por completación de cuadrados. Comprobar cada una de sus soluciones por substitución.

a) $x^2 + 5x + 7 = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$;
d) $2x^2 + 10x + 15 = 0$; e) $3x^2 - 8x + 7 = 0$; f) $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

14. Resolver la ecuación dada usando la fórmula cuadrática y comprobar sus soluciones.

a) $x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^2 - 8x + 25 = 0$; c) $9x^2 - 24x + 41 = 0$;
d) $25x^2 + 2x + 52 = 0$; e) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 2x = 3$; f) $0.01x^2 - 0,03x + 0,2 = 0$;

15. Determinar k, tal que la solución de la ecuación dada en x contenga únicamente un elemento.

a) $kx^2 - 3x + k = 0$; b) $2kx^2 + 5x^2 - 3kx + k - 1 = 0$.

16. Determinar k, tal que el conjunto solución de la ecuación dada en x contenga: a) dos números reales; b) dos números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, donde a y $b \neq 0$ son números reales.

a) $x^2 + 4x + k = 0$; b) $x^2 - kx + 9 = 0$;

(Recordar que: $a^2 + b^2 = a^2 - (bi)^2 = (a - bi)(a + bi)$.

17. Factorizar la expresión dada, en factores de primer grado, en el cuerpo de números complejos.

a) $x^2 + x + 1$; b) $16/81x^2 + 49$; c) $2x^2 - 2x + 1$; d) $3x^2 - 2x + 1$.

18. Si z y z' son complejos, se consideran los tres números:

$$x = \frac{z + z'}{1 + zz'} \;;\quad y = i\frac{z' - z}{1 + zz'} \;;\quad u = \frac{1 - zz'}{1 + zz'}$$

Demostrar que: $x^2 + y^2 + u^2 = 1$. Verificar que si $\overline{z'} = z$, entonces x, y, u son reales.

19. Probar que si z, z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$,

a) $\overline{\overline{z}} = z$; b) $\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; c) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$; d) $\left(\overline{-z}\right) = -\overline{z}$; e) $\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Bibliografía

La Bibliografía sobre Números Complejos es muy amplia, pero para elaborar esta guía de estudio se han tenido en cuenta fundamentalmente los libros que se citan abajo. De todas maneras, cualquiera de los libros de Álgebra que aparecen en la Bibliografía general del Programa Analítico de la Asignatura Álgebra 2 pueden servir para completar el estudio sobre este tema.

Ayres, F.Jr. *Álgebra Moderna*. Libros McGraw-Hill.
Doneddu, A. *Cours de Mathématiques-Structures fondamentales*. Libraire Vuibert.
Gentile, E. *Notas de Álgebra*. Eudeba.
Leithold, L. *Matemáticas Previas al Cálculo*. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar.
Pécastaings, F. *Chemins vers l'Algèbre*. Vuibert.
Queysanne, M. *Álgebra Básica*. Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. *Cours de Mathématiques epéciales*. Masson.
Taylor, H.E.; Wade, T.L. *Matemáticas Básicas*. Editorial Limusa. Wiley, S. A.

2. Razones y funciones trigonométricas

2.1. Introducción

Se supone que el alumno tiene un mínimo conocimiento sobre "medidas de ángulos". De cualquier manera, se presenta aquí un resumen de la teoría de ángulos y su medida.

Se considera lo que sigue en el plano complejo $P = \mathbf{C}$, la semirrecta vectorial d_1 correspondiente al punto 1 de **C** se llamará eje polar. El círculo unidad U es el grupo multiplicativo de números complejos de módulo 1. Es isomorfo al grupo R de las rotaciones.

A todo $\alpha \in U$ le corresponde una y sólo una semirrecta vectorial d_α.

Recíprocamente a toda semirrecta vectorial le corresponde uno y sólo un punto $\alpha \in U$ de tal manera que esta recta vectorial sea d_α.

En consecuencia, si se designa por D al conjunto de las semirrectas vectoriales, existe una biyección

$$\begin{aligned} \varphi : U &\to D \\ \alpha &\to d_\alpha \end{aligned}$$

2.1.1. Propiedad 1

Existe una biyección $\varphi : \alpha \to d_\alpha$ del círculo unidad U sobre el conjunto D de las semirrectas vectoriales.

2.1.2. Ángulos

Un ángulo (en el plano), denotado por $(d_\alpha; d_\beta)$, consiste en dos semirrectas d_α y d_β con un punto final común y una rotación que lleva d_α sobre d_β. Al punto común se le llama vértice del ángulo; a la semirrecta d_α se le llama lado inicial y a la d_β lado terminal del ángulo. Como la rotación tiene una dirección y por lo tanto se le puede asignar una medida y un signo, el ángulo queda "orientado". A esta medida de la rotación se le llama la medida del ángulo y la denotaremos inicialmente por el número real x.

Vamos a decir que el ángulo es positivo, si su rotación es contra reloj. En caso contrario decimos que el ángulo es negativo. Se denota gráficamente por un arco con la cabeza de flecha sobre el lado terminal del ángulo.

Nosotros vamos a considerar por conveniencia, a un ángulo con su vértice en centro del círculo de radio 1. Luego se podrá extender a círculos de radio cualquiera. Tenemos entonces, a **o** el centro del círculo unidad; a α y β puntos sobre el círculo unidad. Los segmentos **o**α y **o**β tienen longitud 1. Por rotación de d_α alrededor del origen **o**, hasta que coincida con d_β, construímos el ángulo (d_α; d_β), (muchas veces denotado también $<\alpha\mathbf{o}\beta$), con medida x.

2.1.2.1. Ángulos orientados

Definición

Se llama ángulo orientado a todo par ordenado de dos semirrectas vectoriales d_α y d_β.

Se lo denota (d_α, d_β).

El conjunto de los ángulos orientado es entonces D^2.

Se dirá que un ángulo orientado (d_α, d_β) es congruente a un ángulo orientado ($d_{\alpha'}$, $d_{\beta'}$) si la rotación que envía d_α sobre d_β es la misma que envía $d_{\alpha'}$ sobre $d_{\beta'}$.

Recordemos que la rotación r_γ que envía α sobre β está definida por $\beta = \gamma \cdot \alpha$.

Esta relación binaria en el conjunto D^2, (congruencia) es una relación de equivalencia. Sea Q el conjunto–cociente. Se debe observar que todo ángulo orientado (d_α, d_β) es congruente a un y sólo un ángulo (d_1, d_α), donde el primer lado coincide con el eje polar d_1.

2.1.3. Propiedad 2

Sea Q el conjunto de clases de congruencia de ángulos orientados. Relativo al eje polar, existe una biyección de D sobre Q, $d_\alpha \rightarrow (d_1, d_\alpha)$.

O sea, podemos definir la biyección de D sobre el conjunto Q de las clases de ángulos orientados.

$$\psi : D \rightarrow Q$$

De acuerdo a lo expresado antes tenemos:

$\varphi : U \rightarrow D$; $\alpha \rightarrow d_\alpha$ y

$\psi : D \rightarrow Q$; $d_\alpha \rightarrow$ clase de (d_1, d_α).

Entonces $\psi \circ \varphi$ es una biyección de U sobre Q:

$$\psi \circ \varphi : U \rightarrow Q; \qquad \alpha \rightarrow \text{clase de } (d_1, d_\alpha).$$

Se transporta por lo tanto, la estructura del grupo multiplicativo U sobre Q, definiendo en Q una ley de composición interna, (denotada +) de la manera siguiente:

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha) + (\psi \circ \varphi)(\beta) = (\psi \circ \varphi)(\alpha\beta)$$

A partir de este concepto se deduce que (Q, +) es un grupo conmutativo, isomorfo al grupo multiplicativo U, por consiguiente al grupo R de las rotaciones.

Podemos ahora definir la siguiente función:

$$\theta : \alpha \rightarrow r_\alpha$$

que será un isomorfismo multiplicativo U sobre el grupo R de las rotaciones. Se denotará:

$U_1 = U^+ - \{\sigma\}$ con σ la rotación correspondiente al ángulo llano.

Se denota: $\theta(U_1) = R_1$ y $U^+ = \{\alpha \in U / \operatorname{Im}(\alpha) \geq 0\}$.

2.1.4. Medida de Ángulos

Definición:

Medir los ángulos es construir una aplicación μ: $R_1 \rightarrow \mathbf{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

1) u es un elemento diferente de 0 y elegido de una vez y para siempre en R_1 y denominado Unidad de Medida, se tiene:

$$\mu(u) = 1.$$

2- Cualesquiera que sean x e y de R_1, se tiene, cada vez que :

$$x + y \in R_1$$

$$\mu_{(x+y)} = \mu_{(x)} + \mu_{(y)}$$

2.1.5. Número π

Para definir la longitud de un círculo, se inscribe en el círculo un polígono regular de n lados luego se mide el perímetro por el número real p_n, y se le circunscribe a este círculo un polígono regular de n lados luego se mide el perímetro por el número p'_n. Se obtiene de esta manera dos sucesiones (p_n) y (p'_n) adyacentes, la primera creciente y la segunda decreciente. El número real

$$l = \lim_{n \to \infty} p_n$$

es la medida por definición de la longitud del círculo.

Si de es el diámetro, de denota π al número real

$$\pi = \frac{l}{d}$$

Este número π es el mismo para todos los círculos y es un número irracional.

Se llama **radián** la unidad de ángulo tal que, la medida del ángulo llano sea π.

En todo lo que sigue, se medirán a los ángulos eligiendo por unidad, el radián.

2.2. Seno y coseno

Sea U el círculo unidad en el plano P, la base canónica $\{e_1, e_2\}$

Definición.

Sea $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ la aplicación canónica.

Sea $\theta : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}$ el isomorfismo del toro sobre el círculo unidad **U** (Asimismo isomorfo al grupo de las rotaciones). Por consiguiente $\theta \circ g$ asocia a todo número real x un número $a + ib \in \mathbf{U}$. Se denota por definición:

$$a = \cos x, \qquad b = \operatorname{sen} x.$$

Se definen así simultáneamente dos aplicaciones de **R** en **R,** denominadas coseno y seno, según el esquema siguiente:

$$x \in \mathbf{R} \xrightarrow{g} \bar{x} \in \mathbf{R}/2\pi\,\mathbf{Z} \xrightarrow{\theta} a + ib \in \mathbf{U}$$

Si se reemplaza x por un número x' de la misma clase que x:

$$x \equiv x' \pmod{2\pi}$$

el correspondiente $\alpha = a + ib \in \mathbf{U}$ no cambia. Luego

$$\cos x' = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x'.$$

Como $\alpha \in \mathbf{U}$, entonces $|\alpha| = 1$ y

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Esta es la fórmula fundamental de la trigonometría.

Esta fórmula nos prueba que $x \rightarrow \cos x$ y $x \rightarrow \operatorname{sen} x$, aplican al conjunto de los números reales sobre el intervalo $[-1, +1]$.

Si tomamos un número $a \in [-1, +1]$, le corresponderá al menos un número b tal que $a^2 + b^2 = 1$ y además $\alpha = a + ib \in \mathbf{U}$.

Entonces existe $x \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\theta^{-1}(\alpha) = \bar{x}.$$

Por consiguiente, todo número a del intervalo $[-1, +1]$ es la imagen de un x de $\mathbf{R}$ por la función <u>coseno</u>, que es en consecuencia una <u>sobreyección</u> de **R** sobre ese intervalo. Se prueba de la misma manera que la función <u>seno</u> es una <u>sobreyección</u> de **R** sobre $[-1, +1]$.

Estas funciones no son inyectivas, ya que dos números distintos x y x', congruentes módulo 2π, tienen el mismo coseno y el mismo seno:

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x.$$

Se dice entonces que las funciones coseno y seno, son funciones periódicas de período 2π.

2.3. <u>Tangente y cotangente</u>

El conjunto de los números reales para los cuales la función coseno se anula es la siguiente:

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k \in Z}.$$

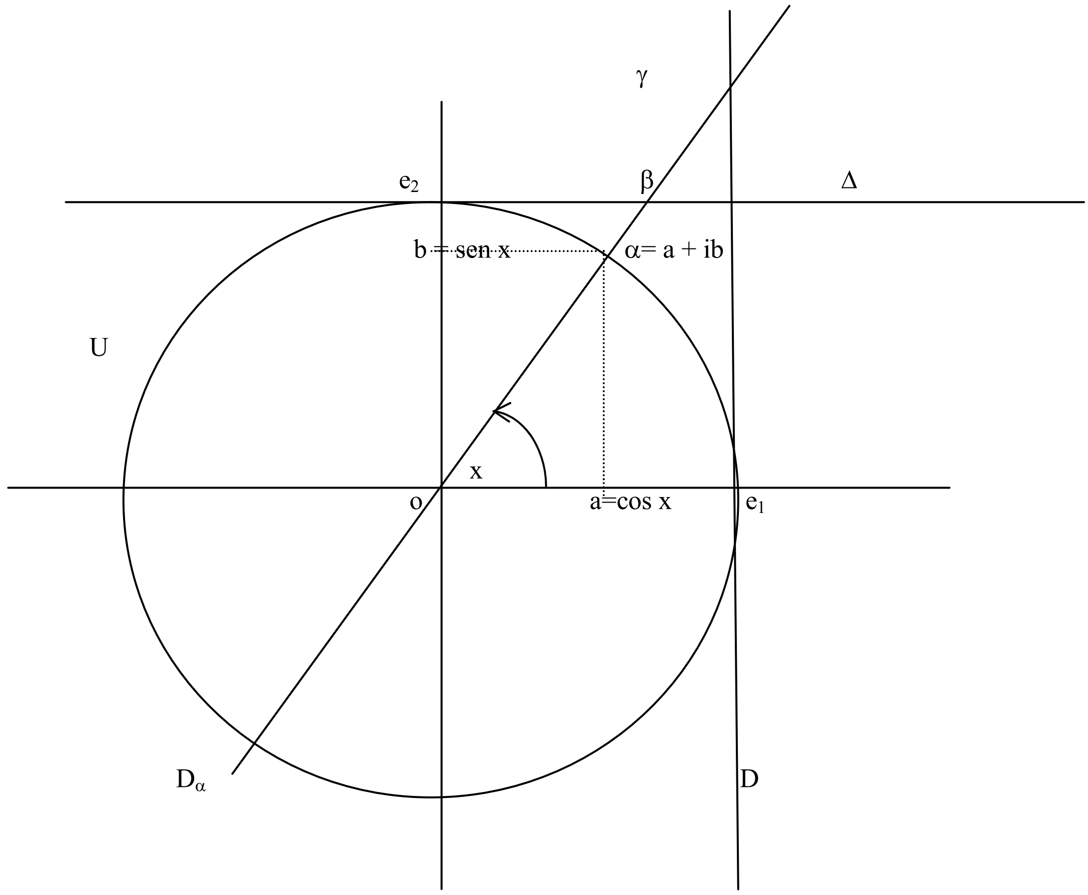
Designemos por A al complementario de este conjunto en **R**:

$$A = \bigcup_{k \in Z} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$$

<u>Definición</u>

Se llama tangente a la aplicación de A en **R**, denotada tg, siguiente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$



Consideremos, de acuerdo al dibujo de arriba, la tangente D sobre el círculo unidad en el punto e_1, y el punto $\alpha \in \mathbf{U}$ correspondiente de x por la composición $\theta \circ g$, para todo $x \in A$. La recta vectorial D_α corta a la recta tangente D en el punto γ y tg x es la ordenada de γ en $\{e_1, e_2\}$.

Todo número real $c \in \mathbf{R}$ es la ordenada de un punto γ sobre D y la recta vectorial D_γ corta entonces a **U** en dos puntos, a uno de ello lo designamos por α. Luego si $\overline{x} = \theta^{-1}(\alpha)$, se tiene que tg x = c, donde $c \in \mathbf{R}$, es la ordenada del punto γ. Por consiguiente la función tangente es una sobreyección sobre **R**.

Ahora, el conjunto de números reales para los cuales la función seno se anula es la siguiente: $\{k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$.

Designemos por B el complementario de este conjunto en **R**:

$$B = \bigcup_{k \in Z} \left]k\pi; (k+1)\pi\right[$$

<u>Definición:</u>

Se llama cotangente a la siguiente aplicación de B en **R**, denotada cotg:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Sea Δ la tangente al círculo unidad en el punto e_2 de la figura. A todo $x \in B$, le corresponde un punto $\alpha \in \mathbf{U}$. La recta vectorial D_α corta a Δ en un punto β y la cotg x es la abscisa de el punto β en $\{e_1, e_2\}$.

Todo número real $d \in \mathbf{R}$ será la abscisa de un punto β sobre Δ y la recta D_β corta a **U** en dos puntos, uno de los cuáles designamos por α. Luego si $\theta^{-1}(\alpha) = \bar{x}$, se tiene que cotg x = d. Por consiguiente la función cotangente es una sobreyección de B sobre **R**.

Es de hacer notar que la fórmula fundamental nos da inmediatamente:

$$(\forall x \in A) \qquad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

$$(\forall x \in B) \qquad 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} .$$

2.4. Fórmulas relativas a los ángulos asociados

Por simetría en torno de D_{e1}, se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x, \\ \text{sen}(-x) &= -\text{sen } x, \\ \text{tg}(-x) &= -\text{ tg } x. \end{aligned}$$

Por simetría en torno de D_{e2}:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \text{sen}(\pi - x) &= \text{sen } x, \\ \text{tg}(\pi - x) &= +\text{tg } x. \end{aligned}$$

Por simetría alrededor de O, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \text{sen}(\pi + x) &= -\text{ sen } x, \\ \text{tg}(\pi + x) &= +\text{ tg } x. \end{aligned}$$

Esta última relación prueba que $x \to$ tg x (y también $x \to$ cotg x) es periódica y de períodoπ.

Por último, por simetría alrededor de la bisectriz $\left(d_{e_1}, d_{e_2}\right)$:

$$\cos(\pi/2 - x) = \text{sen } x,$$
$$\text{sen}(\pi/2 - x) = \cos x,$$
$$\text{tg}(\pi/2 - x) = \text{cotg } x.$$

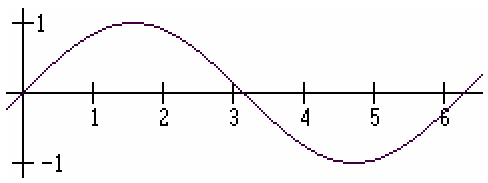
2.5. Funciones sinusoidales

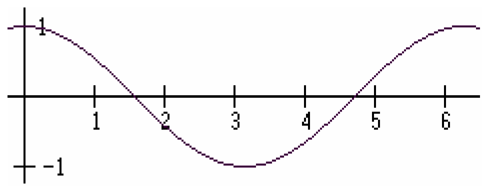
Nos interesa caracterizar los gráficos de las funciones trigonométricas más generales, en particular los que resulten de las funciones seno y coseno.

La regla de correspondencia para estas funciones cuya gráfica nos interesa caracterizar viene dada por: $f(x) = a\cdot\text{sen}(bx + c)$ o también por $g(x) = a\cdot\cos(bx + c)$; con a, b y c números reales, con a y b distintos de cero.

Para ello recordemos que el seno es una función periódica de período 2π, al igual que la función coseno, que el conjunto imagen es el intervalo [-1, 1], para ambas funciones, es decir que:

$$-1 \leq \text{sen}x \leq 1 \quad \text{y que} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad (1)$$





y = sen x

y = cos x

Ahora, fijaremos nuestra atención sobre la gráfica del seno y el efecto que tienen sobre las mismas los números a, b y c, en primer lugar tratar de responder la pregunta: ¿qué efecto sobre la gráfica del seno, tendremos al multiplicar por un número $a > 0$?

2.5.1. Gráfica de $y = a\cdot\text{sen } x$, $(a > 0)$

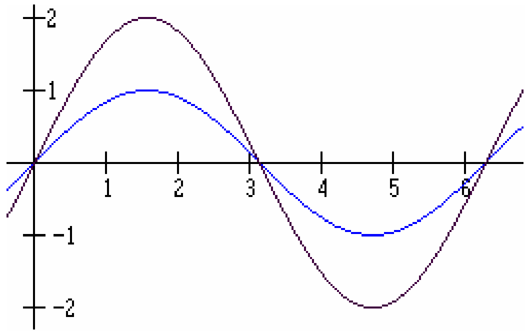
Es evidente que si consideramos la función $y = a\cdot\text{sen } x$, con $a > 0$, cambiará el conjunto imagen de la función. De acuerdo a la desigualdad dada en (1) se tiene que:

$-a \leq a\cdot\text{sen}x \leq a$, el conjunto imagen será entonces [-a, a].

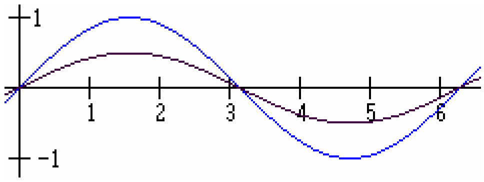
En cambio el período permanece inalterable, $p = 2\pi$, al igual que los ceros de la función.

Para ilustrar esta situación consideremos los siguientes ejemplos:

1º Ejemplo: $y = 2 \text{ sen } x$



2º Ejemplo: $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$



Como se aprecia, el número a (amplitud) nos indica la longitud del conjunto imagen. (ambos gráficos, comparadas con la función dada por $y = \text{sen } x$).

Comparemos ahora la función dada por $y = \text{sen } x$ y la dada por $y = \text{sen } bx$.

2.5.2. Gráfica de $y = \text{sen } bx$, ($a = 1$ y $c = 0$)

Al multiplicar la variable independiente por un número fijo b, cambiarán de lugar los ceros de la función, y por consiguiente el período. Observemos que:

El primer cero se obtiene cuando $bx = 0$, o sea en $x = 0$.

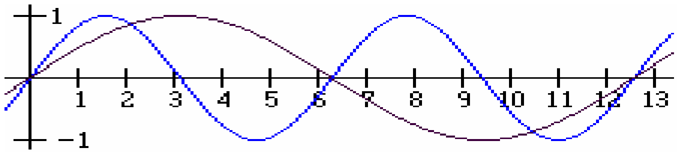
El segundo cero se obtiene cuando $bx = \pi$, o sea en $x = \frac{\pi}{b}$, y

El tercer cero cuando $bx = 2\pi$, es decir en $x = \frac{2\pi}{b}$.

El período de la función cambiará de $p = 2\pi$ a $p = \frac{2\pi}{b}$.

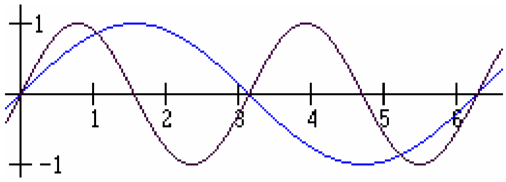
Para ilustrar este caso consideremos dos gráficas una con $0 < b < 1$ y otra con $b > 1$, cada una de ellas comparadas con la función dada por $y = \text{sen } x$.

3º <u>Ejemplo</u>: y = sen ½ x



Se debe observar para la función dada por y = sen ½ x, que el período es p = 4π, y que sus tres ceros están en: x = 0; x = 2π y x = 4π.

4º <u>Ejemplo</u>: y = sen 2x.



En cambio ahora, el período de la función dada por y = sen 2x es p = π, y los ceros para este período están en: x = 0; x = π/2 y x = π.

Las gráficas que hemos considerado hasta ahora, todas ellas están dibujadas para el número c = 0. Debemos observar que en todas el primer cero se encuentra siempre en x = 0. ¿Qué pasa si el número c es distinto de cero? O sea, las funciones del tipo y = sen(x + c) con c ≠ 0.

2.5.3. <u>Gráfica de y = sen (x+c)</u>, (a = 1, b = 1 y c ≠ 0)

Repasando lo anterior (para la función seno), dijimos que el primer cero lo determinábamos para argumento igual a cero, es decir los ceros para la función y = sen (c + c) serán:

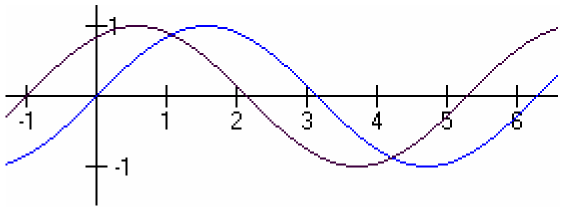
Primer cero: x + c = 0, es decir en: x = - c;

Segundo cero: x + c = π, o sea en: x = π - c;

Tercer cero: x + c = 2π, o también: x = 2π - c.

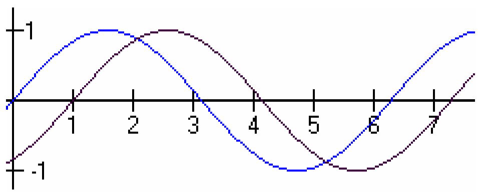
Por consiguiente la gráfica de la función dada por y = en (x + c) aparecerá desplazada respecto de la de y = sen x, como se puede observar en los ejemplos que siguen:

5º Ejemplo: $y = \text{sen}\,(x + 1)$



El período no cambia ($b = 1$), si cambian de lugar los ceros, observe que el primer cero para un período, lo podemos tomar como $x = -1$.

6º Ejemplo: $y = \text{sen}\,(x - 1)$

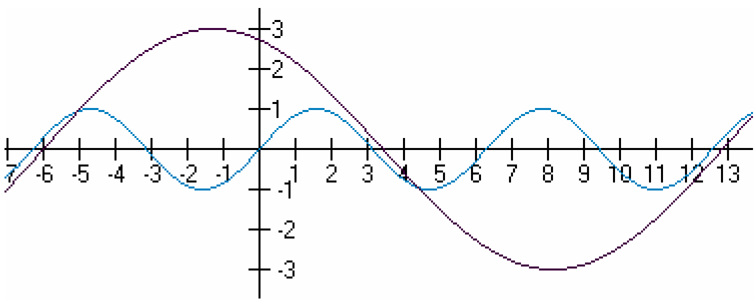


En este caso ubicamos al primer cero en $x = 1$.

Por último, dibujemos algunas gráficas, que tengan a los números a, b y c simultáneamente distintos de cero.

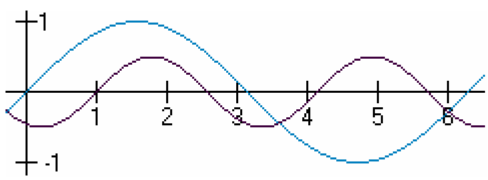
2.5.4. Gráfica de $y = a\cdot\text{sen}\,(bx + c)$. ($a \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$)

7º Ejemplo: $y = 3\,\text{sen}(1/3\,x + 2)$



Para esta función el primer cero se puede obtener en $1/3\,x + 2$, o sea en $x = -6$, y el período será $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}$, es decir $p = 6\,\pi$. Además tiene amplitud $a = 3$.

8º Ejemplo: $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x - 2)$.



El período es p = π; y el primer cero lo encontramos en x = 1.

En resumen, para dibujar la gráfica de una función sinusoidal, se deberá:

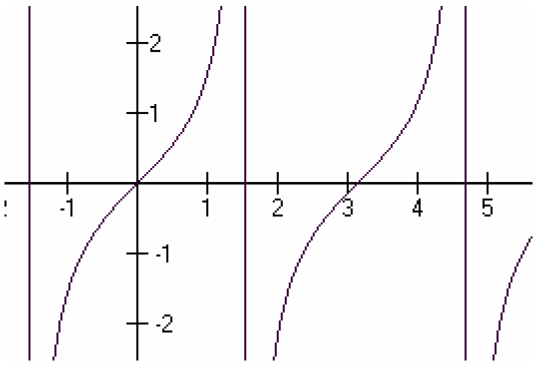
1º. Calcular el período como: p = $\frac{2\pi}{b}$

2º. Identificar la amplitud: el número a.

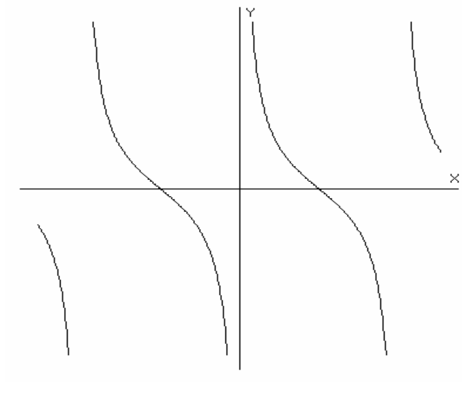
3º. Calcular los tres ceros para un período, recordando que el primer cero inicia el período, el tercero lo termina y el segundo está justo en el medio de los ceros extremos.

4º. También se debe observar que el valor máximo y el mínimo se alcanzan siempre en el centro de los intervalos que tienen como extremos a dos ceros consecutivos.

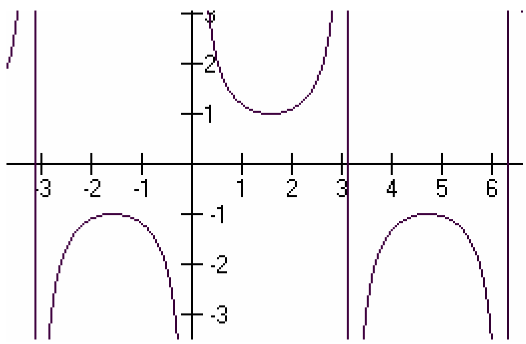
Recordatorio: gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.



y = tan x



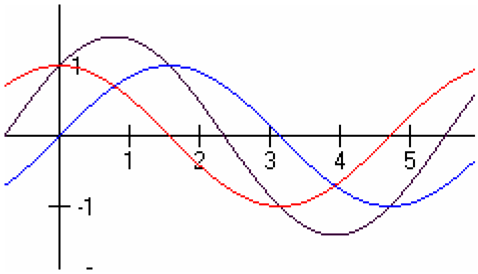
y = cotan x



y = cosec x

Muchas veces, necesitamos conocer las gráficas de sumas de funciones trigonométricas, para dibujarlas solamente tenemos que seguir las reglas del álgebra de funciones.

Por ejemplo: y = sen x + cos x



2.6. Amplitud, período, fase

Uno de los conceptos trigonométricos más importantes es el de curva sinusoidal. Se presenta en partes de Astronomía, matemáticas y todas las ciencias que incluyen a las ciencias sociales. Como ya dijimos, es simplemente la gráfica de:

y = a·sen (bx + c), siendo a, b, c constantes positivas.

Sabemos que el período es $p = \frac{2\pi}{b}$, y a recibe el nombre de amplitud, ahora bien, la frecuencia de una oscilación es el número de períodos que hay en un intervalo de unidad de tiempo, normalmente un segundo. La frecuencia de mide en períodos por segundos, o, en lenguaje más corriente en ciclos por segundo. O sea, un ciclo es lo mismo que un período. La unidad empleada en radiodifusión es el kilociclo (mil ciclos) por segundo. Estos son los números que marca el dial de un aparato de radio. La corriente eléctrica normal de las casas es de "50 ciclos" o de "60 ciclos", lo que significa una frecuencia de 50 ciclos/seg. o de 60 ciclos/seg.

Si una oscilación tiene un período de p seg., su frecuencia es de: $\omega = \frac{1}{p}$ ciclos/seg.

Por ejemplo, la frecuencia de y = a·sen Bx es $\omega = b/2\pi$, y la de $y = a\cdot\text{sen}(2\pi\omega t)$ es ω ciclos/seg. El período de ondas de radio se expresa, en términos de la distancia recorrida por la onda en p segundos. Esta distancia se llama longitud de onda λ. Como la velocidad de una onda de radio es $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg, la longitud de onda correspondiente a un período de p segundos será $3p \cdot 10^{10}$cm. De manera que;

$$\lambda = \frac{3\cdot 10^{10}}{\omega}\text{cm}$$

Con esta fórmula se pueden convertir frecuencias en longitudes de onda y viceversa.

Como se sabe, las ondas de radio transmiten los sonidos de las voces, de los instrumentos musicales, etc. Para más sencillez, consideremos un tono musical puro. Estos tonos musicales puros, se representan por una curva sinusoidal, en la que la amplitud corresponde a la altura del sonido y la frecuencia ω al tono.

2.7. Expresión trigonométrica del producto escalar

Dados dos vectores cualesquiera **u** *y* **v** *del plano (resp. cualquier espacio), el producto escalar de* **u** *y* **v** *es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo comprendido, (entendiéndose por ángulo comprendido, al menor de los ángulos formados por las dos semirrectas que contienen a esos vectores); es decir:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta$$

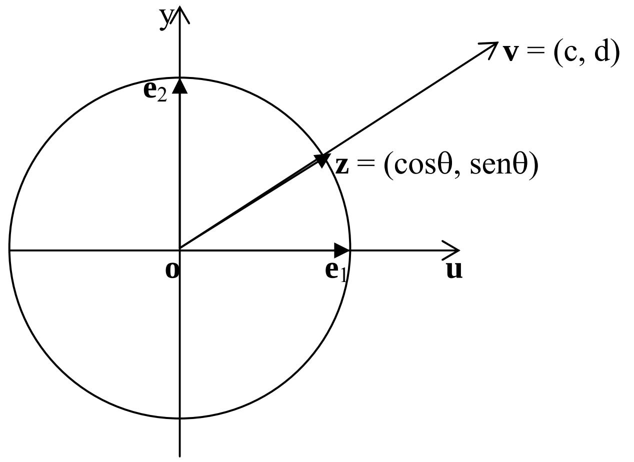
Dados el círculo unidad U, dos vectores cualesquiera **u** y **v**, y tomando el sistema de referencia ortonormal $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, donde $\mathbf{o} = (0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$; de manera que al vector **u** lo podemos escribir como:

$$\mathbf{u} = (a, 0) = a(1, 0) = a\,\mathbf{e}_1 \quad \text{y, al}$$

vector **v** como:

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{z}$$

siendo **z** el punto del círculo unidad, intersección de la semirrecta vectorial que contiene a **v**.



Entonces como, $\mathbf{z} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{z}$, el procucto escalar es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{z}, \quad \text{donde } a = \|\mathbf{u}\|$$

es decir:

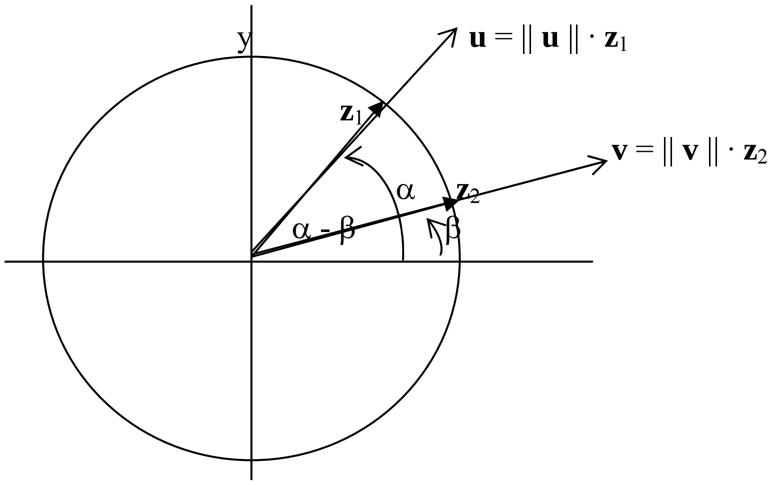
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{z}$$

$$= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot (1, 0) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

o sea,

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta}$$

2.8. Fórmulas trigonométricas de adición



Si consideramos los vectores **u** y **v**, como se muestran en la figura. La semirrecta vectorial que contiene al vector **u** forma un ángulo α con el eje polar; la semirrecta que contiene al **v** un ángulo β; el ángulo comprendido entre los dos vectores es entonces α - β.

Como $\mathbf{z}_1 \in U$ y $\mathbf{z}_2 \in U$, sus coordenadas serán:

$\mathbf{z}_1 = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $\mathbf{z}_2 = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y entonces:

$\mathbf{u} = \| \mathbf{u} \| \cdot \mathbf{z}_1 = \| \mathbf{u} \| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $\mathbf{v} = \| \mathbf{v} \| \cdot \mathbf{z}_2 = \| \mathbf{v} \| \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$

El producto escalar es:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos(\alpha - \beta)$, donde α - β es el ángulo comprendido

$$\| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos(\alpha - \beta) = \| \mathbf{u} \| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

Simplificando,

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

y haciendo el producto escalar:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

Si tomamos -β en lugar de β en la fórmula (1), y recordando que el cosβ = cos(-β) y que el sen β = - sen(-β); podemos escribir:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta} \qquad (2)$$

Como el cos (π/2 - α) = sen α, podemos aplicar la (1) al

$$\cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] = \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] = \cos[(\pi/2 - \alpha) - \beta)] = \cos(\pi/2 - \alpha) \cdot \cos\beta + \text{sen}(\pi/2 - \alpha) \cdot \text{sen}\,\beta$$

es decir:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta} \qquad (3)$$

Por último reemplazando β por -β en la fórmula (3) tenemos:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta} \qquad (4)$$

De las relaciones anteriores resulta:

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y}{1 - \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\,y} \qquad \text{y} \qquad \text{tg}(x - y) = \frac{\text{tg}\,x - \text{tg}\,y}{1 + \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\,y}$$

Se propone como ejercicio, determinar las relaciones similares correspondientes a las demás funciones circulares.

2.9. Fórmulas de transformación

De las anteriores relaciones, vamos a deducir las siguientes fórmulas de transformación de sumas en productos.

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = \cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \text{sen}\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y) = \text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sen}(x - y) - \text{sen}(x + y) = \text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2},$$

Estas fórmulas se obtienen, llamando:

$$x + y = p \quad \text{y} \quad x - y = q$$

es decir:

$$x = \frac{p+q}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{p-q}{2}$$

y sumando o restando las fórmulas obtenidas en el punto anterior. En definitiva, las fórmulas se pueden escribir como:

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cdot \cos y$$

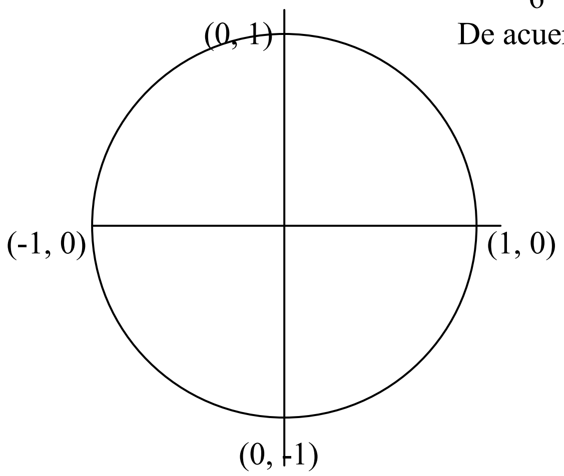
$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = -2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) - \operatorname{sen}(x + y) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos y$$

2.10. Valores de las funciones trigonométricas

Si bien los valores de las funciones trigonométricas las podemos obtener mediante el uso de la calculadora, los valores obtenidos son en general números irracionales. Con el objeto de lograr exactitud en el cálculo es útil conocer los valores exactos de cos x, sen x, tag x,...cuando $x = 0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; y $\frac{\pi}{2}$.



De acuerdo a las definiciones de la función seno y de la función coseno, se puede observar en el círculo unidad que:

$\cos 0 = 1$; $\operatorname{sen} 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

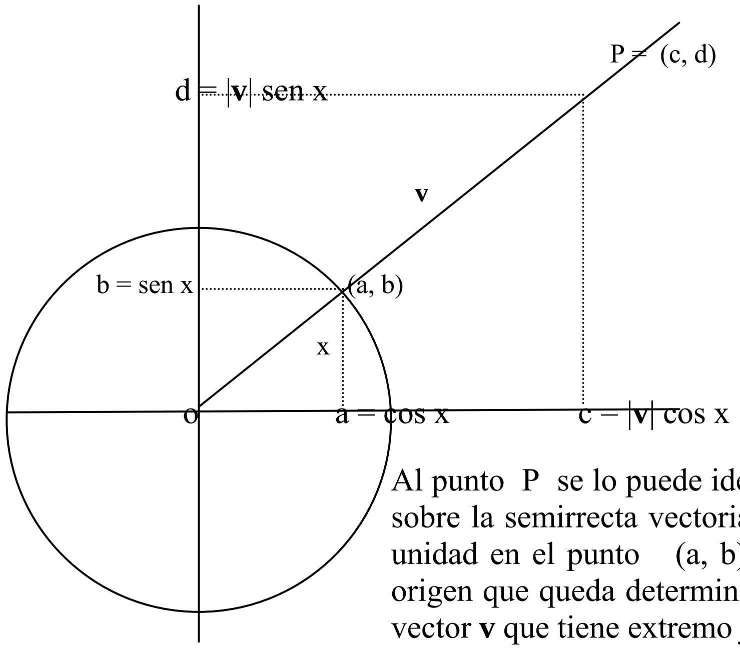
$\operatorname{tag} 0 = 0$; $\operatorname{tag} \frac{\pi}{2}$ no está definida

Además el alumno, puede determinar los valores usando la figura, los valores del sen, cos, tan de π, $3/2\,\pi$ y 2π.

2.11. Razones trigonométricas y vectores

En el círculo unidad U de la figura, tomamos un punto sobre el círculo:

(a, b) = (cos x, sen x) y consideremos un punto P, sobre la misma semirrecta vectorial que pasa por el punto (a, b), de coordenadas (c, d).



Al punto P se lo puede identificar como el punto sobre la semirrecta vectorial que corta al círculo unidad en el punto (a, b) y a una distancia del origen que queda determinada por la longitud del vector **v** que tiene extremo justamente en P.

En consecuencia, si multiplicamos el punto (a, b) por la longitud del vector v, obtenemos el punto

$$P = |\mathbf{v}|\,(a, b) = |\mathbf{v}|\,(\cos x;\ \text{sen } x) =$$

$$=(c, d) = (|\mathbf{v}| \cos x;\ |\mathbf{v}|\ \text{sen } x).$$

Ahora, en la misma figura podemos observar que el origen o, el punto P y el punto c sobre el eje de abscisas, son los vértices de un triángulo rectángulo, que tiene por <u>*hipotenusa*</u> al módulo del vector **v**; por <u>*cateto adyacente*</u>, al número c = ||**v**||cos x y por <u>*cateto opuesto*</u>, a d = ||**v**|| sen x. Entonces podemos escribir:

de c = ||**v**|| cos x se tiene, $\cos x = \dfrac{c}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a x}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

de d = ||**v**|| sen x se obtiene, $\text{sen } x = \dfrac{d}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a x}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

Sabemos que:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a x}}{\text{longitud del cateto adyacente a x}};$$

$$\text{cotan } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a x}}{\text{longitud del cateto opuesto a x}};$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a x}}:$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a x}}$$

2.12. Ley de los senos y ley de los cosenos

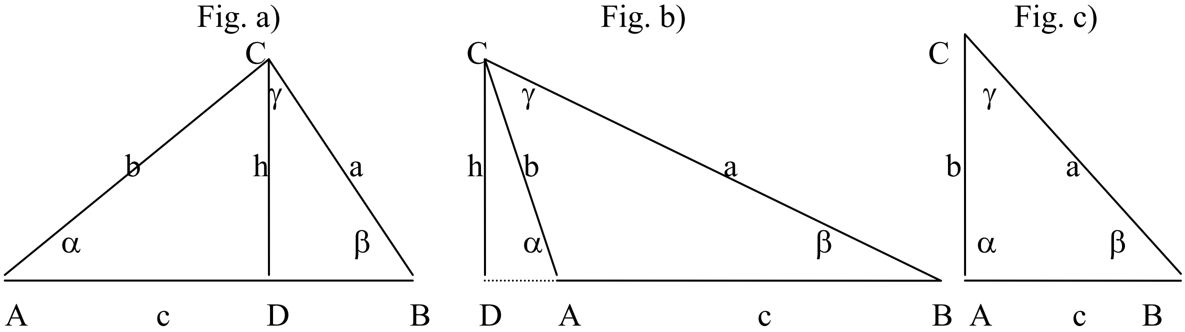
El siguiente teorema es particularmente útil en la resolución de triángulos oblicuos.

2.12.1. Teorema: Ley de los senos

Sean α, β y γ *los ángulos de un triángulo y* a, b y c *los lados opuestos respectivamente. Entonces:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma},$$

Primero demostremos que $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$. Dado cualquier triángulo ABC, existen tres posibilidades, como se indican en la figura. Trazamos un segmento lineal desde C perpendicular a su lado opuesto. En la figura a) este segmento toca al AB del triángulo en D. En la figura b) toca a la extensión de AB en D y en la figura c) se tiene que h = CD.



en la Fig. a) tenemos que: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$; por lo que: $h = b \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\beta$, por lo tanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

En la Fig. b), $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{h}{b} = \operatorname{sen}\alpha$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$; por lo que: $b \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\beta$, es decir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

En la Fig c), $\frac{h}{b} = 1 = \text{sen } 90º = \text{sen } \alpha$ o también $h = b \text{ sen } \alpha$; por otro lado se tiene que $h = a \text{ sen } \beta$, es decir: $b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta$, de donde se vuelve a verificar la igualdad:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} .$$

En forma similar, construyendo un segmento lineal desde B y perpendicular al lado opuesto, se puede demostrar que:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} ,$$

Por transitividad, se obtiene la ley de los senos.

2.12.2. Teorema: Ley de los cosenos

El teorema de Pitágoras que se aplica a triángulos rectángulos, puede generalizarse para triángulos que no sean necesariamente triángulos rectángulos. Esta generalización se denomina Ley de los cosenos, y una forma de mostrar la misma es la siguiente:

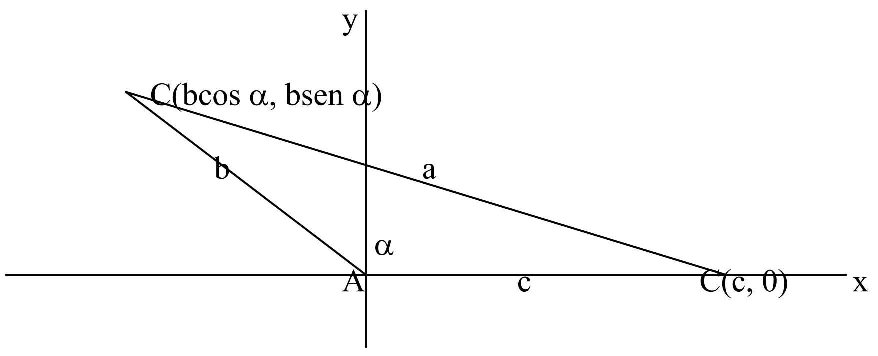
Sean α , β y γ *los ángulos de un triángulo y* a, b y c *los lados opuestos respectivamente. Entonces:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Colocamos el triángulo de manera que el vértice A del mismo coincida con el origen del sistema de referencia ortonormal, el vértice B sobre el eje de las “x”, es decir el vector que va de A a B con la misma dirección del eje de las x, como se observa en la figura que



El cateto a, lo podemos calcular como la longitud del vector con origen en C y extremo en B o también como la distancia desde C hasta B, es decir:

a = $\sqrt{(b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha - 0)^2}$ es decir: $a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha)^2$; de donde:

$$a^2 = b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2\alpha,$$

$$a^2 = b^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) - 2bc\cos\alpha + c^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

En forma similar, colocando el vértice B coincidiendo con el origen de coordenadas se puede demostrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Lo mismo se hace con C para obtener la fórmula: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Ejercicios propuestos

1. Expresar en radianes cada uno de los ángulos siguientes:

   a) 30°; b) 135°; c) 25° 30´; d) 42° 24´35”.

2. Expresar en grados, minutos y segundos cada uno de los ángulos siguientes:

   a) $\frac{\pi}{3}$ rad; b) $\frac{5}{9}\pi$ rad; c) $\frac{2}{5}\pi$ rad; d) $\frac{4}{3}\pi$ rad

3. Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central θ en radianes y en grados.

4. Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25° en un recorrido de 120 m?

5. Demostrar que las funciones trigonométricas de un ángulo θ no dependen del punto P que se escoja en el lado terminal del ángulo.

6. Encontrar los valores de:

   a) sen θ y cos θ , dada tan θ = -3/4; b) sen θ y cos θ = -4/5 y tan θ positiva.

7. Encontrar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados:

   a) a = 1, b = 1; b) a = 2 , b = 5.

8. Encontrar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) sen 30° + tan 45°; b) cot 45° + cos 60°; c) cos 30° cos 60°-sen30°sen 60°

d) $\dfrac{\csc 30° + \csc 60° + \csc 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

9. Resolver el triángulo rectángulo ABC donde:

a = 43,9 y b = 24,3.

10. Expresar como funciones de un ángulo agudo positivo:

a) sen 145°; b) cos 215°; c) tan 440° ; d) cot 155°; e) sec 325°;
d) csc 190°; e) sen (-200°); f) cos (-760°); g) tan (-1385°); h) cot 610°;
i) sec 455°; j) csc 825°

11. Demostrar que cuando θ es un ángulo del segundo cuadrante, tal que tan θ = -2/3, entonces:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(90° - \theta) - \cos(180° - \theta)}{\tan(270° + \theta) + \cot(360° - \theta)} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; b) $\dfrac{\tan(90° + \theta) + \cos(180° + \theta)}{\operatorname{sen}(270° - \theta) - \cot(-\theta)} = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2 - \sqrt{13}}$

12. Utilizar las relaciones fundamentales para encontrar los valores de las funciones de θ, dado:

a) sen θ = 3/5 b) tan θ = -5/12

13. Demostrar:

a) sen (45° + θ) - sen (45° - θ) = $\sqrt{2}$ sen θ; b) sen (30° + θ) + cos (60° + θ) = cos θ

14. Simplificar:

a) sen (α + β) + sen (α - β); b) cos (α + β) - cos (α - β)

c) $\dfrac{\tan(\alpha + \beta) - \tan\alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan\alpha}$.

15. Encontrar sen (α + β), cos (α + β), sen (α - β) y cos (α - β) y determinar los cuadrantes a que pertenecen (α + β) y (α - β), dados:

a) sen $\alpha = 4/5$ y cos $\beta = 5/13$; α y β en el cuadrante I
b) sen $\alpha = 2/3$ y cos $\beta = 4/3$; α en el cuadrante II y β en el cuadrante IV.

16. Evaluar:

a) cos(arc sen 3/5); b) sen(arc cos (-2/3)); c) tan(arc)-3/4))

17. Resolver el triángulo ABC, dados: $c = 25$, $A = 35°$ y $B = 68°$.

18. Resolver el triángulo ABC, dados: $a = 132$, $b = 224$ y $C = 28°40´$.

19. Demostrar que:

a) $\text{arc sen } \frac{1}{\sqrt{5}} + \text{arc sen} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$;
b) arc tan 1/2 + arc tan 1/5 + arc tan 1/8 = $\pi/4$

20. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para todos los valores de x tales que $0 \le x \le 2\pi$:

a) $2 \text{ sen } x - 1 = 0$; b) $\text{sen } x \,.\, \cos x = 0$; c) $(\tan x - 1)(4 \text{ sen}^2 x - 3) = 0$

d) $\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 2$; e) $2 \text{ sen } x - \csc x = 1$; f) $\tan 2x + 2 \text{ sen } x = 0$

21. Construir las gráficas de las siguientes funciones dadas por:

a) $y = \text{sen } 2x$; b) $y = 3\text{sen } 2x$; c) $y = \text{sen}(2x + \pi/4)$; d) $y = 2\text{sen}(1/2\ x - \pi/4)$

e) $y = \cos 1/2\ x$; f) $y = \cos(3x - 1)$; g) $y = \text{sen}x + \cos x$:

<u>Bibliografía</u>:

La Bibliografía referida al tema desarrollado es muy amplia pero, para elaborar esta guía de estudio se ha tenido en cuenta fundamentalmente a los libros que se citan abajo. De cualquier manera, cualquiera de los libros de Álgebra que aparecen en la Bibliografía general del Programa Analítico de la Asignatura Álgebra 2 pueden servir para completar el estudio de este tema.

Ayres, F.Jr. *Álgebra Moderna.* Libros McGraw-Hill.
Doneddu, A. *Cours de Mathématiques-Structures fondamentales*. Libraire Vuibert.
Gentile, E. *Notas de Álgebra*. Eudeba.
Leithold, L. *Matemáticas Previas al Cálculo*. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar.
Pécastaings, F. *Chemins vers l'Algèbre*. Vuibert.
Queysanne, M. *Álgebra Básica*. Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. *Cours de Mathématiques epéciales*. Masson.
Taylor, H.E.; Wade, T.L. *Matemáticas Básicas*. Editorial Limusa. Wiley, S. A.

3. Raíces de números complejos

3.1. Argumento de un número complejo

3.1.1. Definición

Sea un número complejo $\alpha \neq 0$. A este número α le corresponde una semirrecta vectorial d_α en el plano complejo que corta al círculo unidad U en el punto m. Sea θ: $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to$ U el isomorfismo del toro sobre U. Al número α le corresponde una única clase $\theta^{-1}(m)$ del conjunto cociente $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (toro).

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \theta : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} & \to & \mathbf{U} \\ \bar{\mathbf{x}} & \to & \mathbf{m} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \theta^{-1} : \mathbf{U} & \to & \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \\ \mathbf{m} & \to & \bar{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Definición:

Se llama argumento del número complejo $\alpha \neq 0$ a cualquiera de los números reales de la clase, módulo 2π, $\theta^{-1}(m)$. Se tiene entonces:

$$\mathbf{m} \xrightarrow{\theta^{-1}} \bar{\mathbf{x}} = \theta^{-1}(\mathbf{m}) \ .$$

Si $\bar{x} = \theta^{-1}(m)$, se denota

$$\arg\alpha \equiv \bar{\mathbf{x}} \,(\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Es de notar que una homotecia de razón $\lambda > 0$ no cambia la recta vectorial d_α. En consecuencia,

$$(\forall \lambda \in \mathbf{R}^{+}_{*}) \qquad \arg(\lambda\alpha) \equiv \arg\alpha \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

3.2. Expresión trigonométrica de un número complejo

Sea $\alpha \in \mathbf{C^*}$. Tomamos

$$|\alpha| = r \quad \text{y} \quad \arg \alpha \equiv x \pmod{2\pi}$$

Se tiene por definición de las funciones circulares:

$$\alpha/r = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Luego,

$$(|\alpha| = r \quad \text{y} \quad \arg \alpha \equiv x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = r(\cos x + i \operatorname{sen} x).$$

y esta es la expresión trigonométrica del número complejo $\alpha \in \mathbf{C^*}$.

Isomorfismo fundamental:

La función: θ^{-1}: $\mathbf{U} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, es un isomorfismo del grupo multiplicativo **U** sobre el grupo aditivo $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Para probar esta afirmación, consideramos dos números complejos, α y β cualesquiera del conjunto **U.** Tenemos que, $x = \arg\alpha$ e $y = \arg\beta \pmod{2\pi}$,

es decir:

$\alpha = \cos x + i \operatorname{sen} x$, y $\beta = \cos y + i \operatorname{sen} y$; hacemos el producto y tenemos,

$$\alpha \cdot \beta = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y + i(\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y)$$

$$\alpha \cdot \beta = \cos(x + y) + i (\operatorname{sen} (x + y)$$

Notemos que el isomorfismo θ^{-1}, para todo α y β de U

$$\operatorname{Arg} \alpha\beta \equiv \arg\alpha + \arg\beta \pmod{2\pi}$$

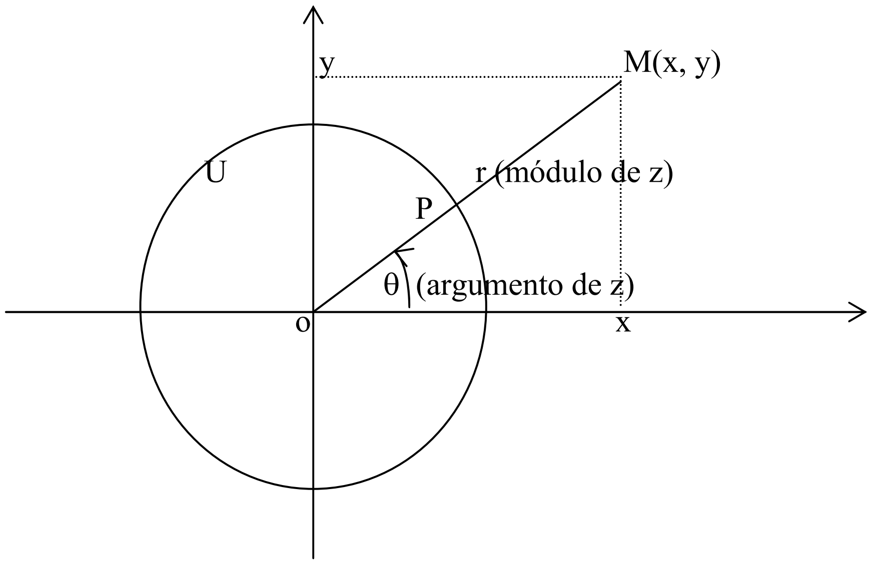
En efecto, esta relación es verdadera si α y β están simultáneamente en U. Para α y β cualquiera en **C**, es suficiente recordar, que llamando:

$$|\alpha| = r \quad \text{y} \quad |\beta| = r'$$

$$\operatorname{Arg} \alpha\beta \equiv \frac{\alpha\beta}{r\,r'}; \qquad \arg \alpha \equiv \arg\alpha/r; \qquad \arg \beta \equiv \arg\beta/r'$$

Es decir, si tomamos por ejemplo un número complejo z = x + iy, queda entonces determinado un punto M del plano euclidiano de coordenadas (x, y).

O sea, si hacemos una representación geométrica de ésta situación, se observa también que podemos asociar al número z, un módulo (distancia al origen de coordenadas) y un ángulo θ, (argumento de z (mod 2π)), como se muestra en el dibujo.



Con z un número complejo no nulo, existe un número complejo de módulo 1, que es único u tal que $z = |z| \cdot u$. Los números complejos de módulo 1 tienen por imagen a los puntos del círculo de centro o y de radio 1 (círculo unidad o también círculo trigonométrico); luego si M representa a el número complejo $z \neq 0$, la semirrecta oM corta a este círculo en el punto único P, y las coordenadas de P serán entonces $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$, de donde tenemos la ya conocida expresión trigonométrica para z, es decir:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Además entonces se podrá escribir:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases}$$

z = x + iy es la <u>forma algebraica</u> de z, y $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ su <u>forma trigonométrica</u>, las fórmulas precedentes permiten pasar de una a otra.

Observemos que las fórmulas determinan el número real θ módulo 2π, luego, para $k \in \mathbf{Z}$

$$r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r'(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta') \iff (r' = r \ \wedge \ \theta' = \theta + 2k\pi)$$

Consideremos finalmente la fórmula

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

válida para $x \neq 0$, a menudo útil, pero que no determina el argumento de $z = x + iy$, θ está definido por esta fórmula módulo π

Observemos por último que el argumento de $z = 0$ no está definido.

3.3. Fórmula de De Moivre

3.3.1. Potencias y raíces de números complejos

Sean dos números complejos:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad z' = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$$

Tendremos:

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta') + i(\cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta')]$$

$$\boxed{zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')]}$$

De donde por inducción se tiene:

El módulo del producto de un número finito de números complejos es igual al producto de sus módulos, su argumento es congruente módulo 2π a la suma de sus argumentos.

En particular (n entero, $n > 0$),

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Si $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}{r^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

y siempre que sea $z \neq 0$

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\theta'-\theta) + i\,\text{sen}(\theta'-\theta)]$$

en particular, si n = -n’ es un entero negativo

$$z^n = z^{-n'} = \frac{1}{z^{n'}} = \frac{1}{r^{n'}(\cos n'\theta + i\,\text{sen}\, n'\theta)}$$

$$= r^{-n'}\,[(\cos n'\theta - i\,\text{sen}\, n'\theta) = r^n (\cos n\theta + i\,\text{sen}\, n\theta)$$

Tenemos, pues, para n entero racional cualquiera la:

Fórmula de De Moivre

$$\boxed{[(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\, n\theta} \quad \text{con n entero}$$

Por otra parte la forma exponencial, nos permite escribir ahora:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

en particular (k entero racional),

$$e^{2ik\pi} = 1 \qquad e^{i\pi} = -1$$

tendremos (n un número entero)

$$e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta)}\,; \qquad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}\,; \qquad (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$$

Todo número complejo z = r (cos θ + i sen θ), puede entonces escribirse de la forma:

$$z = r\,e^{i\theta}$$

llamada forma exponencial, particularmente cómoda gracias a las fórmulas recordadas anteriormente para efectuar productos y cocientes.

3.3.2. Raíces n-nésimas de un número complejo

a) Sea el número complejo z = r (cos θ + i sen θ) distinto de cero, busquemos:

$$z' = r' (\cos\theta' + i\,\text{sen}\,\theta')$$

tal que para n entero estrictamente mayor que cero sea:

$$z'^n = z$$

$$[r' (\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')]^n = r'^n (\cos n\theta' + i \operatorname{sen} n\theta') = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

da (con k entero racional), puesto que r y r' son positivos,

$$\begin{cases} r^{n'} = r \\ n\theta' = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Todos los números obtenidos tienen el mismo módulo, serán distintos si sus argumentos no son congruentes módulo 2π: luego para obtenerlos a todos es necesario y suficiente dar a k, n valores enteros consecutivos; es decir 0, 1, 2, ..., n –1:

Teorema

Todo número complejo z = r (cos θ + i sen θ) no nulo tiene n raíces n-ésimas

$$\boxed{\begin{gathered} z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ 0 \le k \le n-1 \end{gathered}}$$

Por consiguiente:

$$|z_{k+1}| = |z_k| \qquad \arg z_{k+1} \equiv \arg z_k + 2\pi/n \pmod{2\pi}$$

Las n raíces de un número complejo no nulo determinadas de ésta manera y para n > 2, son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en o.

En el caso particular de las raíces cuadradas, estudiadas en la Unidad anterior, si usamos la forma trigonométrica $z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ distinto de cero, las raíces se calculan como:

$$z_0 = r (\cos \theta/2 + i \operatorname{sen} \theta/2), \quad \text{y} \quad z_1 = r\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -z_0$$

encontramos que son opuestas y que, por consiguiente son simétricas con respecto a o.

3.3.3. Raíces n-ésimas de la unidad

a) Si Z' es una raíz n-ésima de $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0$ todas las raíces n-ésimas z' de z son tales que:

$$z'^n = Z'^n = z$$

es decir,

$$\left(\frac{Z'}{z'}\right)^n = 1, \qquad z' = Z'\omega_k$$

donde ω_k es una de las n raíces n-ésimas de la unidad, por consiguiente:

Teorema

Se obtienen las n-raíces n-ésimas de un número complejo no nulo multiplicando una de ellas por las n raíces n-ésimas de la unidad.

Es suficiente, en consecuencia estudiar las n raíces n-ésimas de la unidad; tendremos , al ser el módulo y el argumento de 1, respectivamente, 1 y 0 (módulo 2π)

$$\omega\omega_k = \cos\frac{2k\pi\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi\pi}{n} = e^{\frac{2ik\pi\pi}{n}}$$

$$0 \le k \le n-1$$

3.4. Aplicaciones de los números complejos a los cálculos trigonométricos

3.4.1. Fórmulas trigonométricas de adición

Sean α y β dos puntos del círculo unidad U,

$$\alpha = \cos x + i \operatorname{sen} x; \qquad x \equiv \arg\alpha \pmod{2\pi};$$

$$\beta = \cos y + i \operatorname{sen} y; \qquad y \equiv \arg\beta \pmod{2\pi}.$$

Entonces, ya que $\arg\alpha\beta \equiv x + y \pmod{2\pi}$

$$\alpha\beta = \cos(x + y) + i \text{ sen } (x + y). \qquad (1)$$

Por otra parte, efectuando el producto y comparando con (1), se tendrán en consecuencia:

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y;$$

$$\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y.$$

Además reemplazando y por (-y), se obtienen:

$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{ sen } y;$$

$$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{ sen } y.$$

Se deduce asimismo:

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y} \quad \text{y} \quad \text{tg}(x - y) = \frac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + \text{tg } x \text{ tg } y}.$$

Tomando $x = y$ se obtienen las fórmulas:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2 \text{ sen}^2 x;$$

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x.$$

También se puede ver que:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$1 - \cos 2x = 2 \text{ sen}^2 x.$$

De las fórmulas precedentes, se deducen además las siguientes:

$$\cos(x - y) + \cos (x + y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos(x - y) - \cos (x + y) = 2 \text{ sen } x \cos y$$

Llamando $x + y = p$ y $x - y = q$, es decir:

$$x = \frac{p + q}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{p - q}{2},$$

se obtiene:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

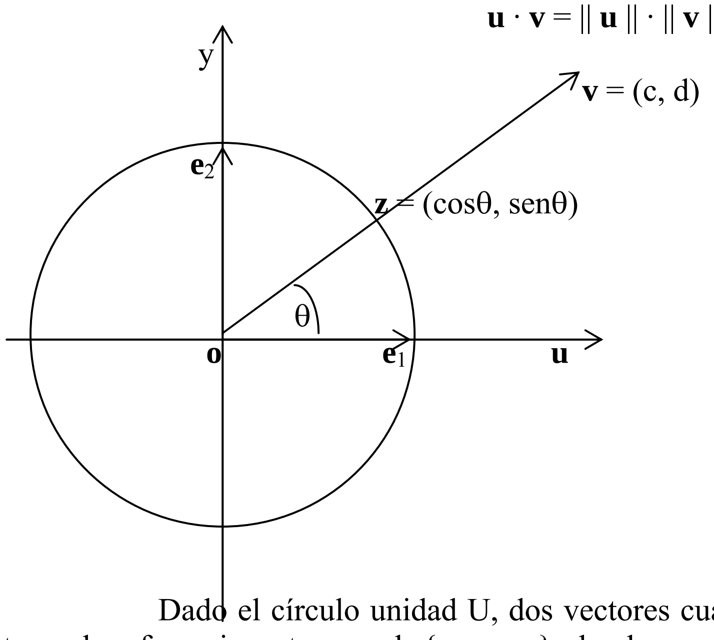
$$\operatorname{sen} p - \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}.$$

Que son todas fórmulas ya estudiadas en trigonometría.

3.4.1. Expresión trigonométrica del producto escalar

Dados dos vectores cualesquiera **u** *y* **v** *del plano, (resp. cualquier espacio), el producto escalar de* **u** *y* **v** *es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo comprendido, entendiéndose por ángulo comprendido, el menor de los ángulos formados por las dos semirrectas que contienen a esos vectores); es decir:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos \theta$$



Dado el círculo unidad U, dos vectores cualesquiera **u** y **v**, y tomando el sistema de referencia ortonormal $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, donde $\mathbf{o} = (0, 0)$; $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$; de manera que al vector **u** lo podemos escribir como:

$$\mathbf{u} = (a, 0) = a(1, 0) = a\mathbf{e}_1 \text{ y,}$$

el vector **v** como:

$$\mathbf{v} = \| \mathbf{v} \| \cdot \mathbf{z},$$

siendo **z** el punto del círculo unidad, intersección de la semirrecta vectorial que contiene a **v.**

Entonces:

$$\mathbf{z} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta); \qquad \mathbf{v} = (c, d).$$

De manera que el producto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (a, 0) \cdot (c, d)$$

$$= ac + 0d = ac$$

y, por consiguiente tenemos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 \, \| \mathbf{v} \| \cdot \mathbf{z}, \text{ donde } a = \| \mathbf{u} \|$$

es decir:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{z} =$$

$$= \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot (1, 0) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos\theta}$$

Bibliografía:

Si bien la bibliografía de este tema es muy abundante, se recomienda para complementar esta guía de estudios:

Ayres, F.Jr. *Álgebra Moderna*. Libros McGraw-Hill.
Doneddu, A. *Cours de Mathématiques-Structures fondamentales*. Libraire Vuibert.
Gentile, E. *Notas de Álgebra*. Eudeba.
Leithold, L. *Matemáticas Previas al Cálculo*. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar.
Pécastaings, F. *Chemins vers l'Algèbre*. Vuibert.
Queysanne, M. *Álgebra Básica*. Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. *Cours de Mathématiques epéciales*. Masson.
Taylor, H.E.; Wade, T.L. *Matemáticas Básicas*. Editorial Limusa. Wiley, S. A.

Además de todos los libros de Álgebra mencionados en el programa analítico de la asignatura.

Ejercicios propuestos

1. Representar gráficamente el número complejo dado α , y dar la forma trigonométrica de α (usando el valor no negativo más pequeño de su ángulo).

a) $\alpha = (3, 0)$; b) $\alpha = 4i$; c) $\alpha = 3 + 3i$; d) $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$;

e) $\alpha = -3 + 3i$; f) $\alpha = (-4, 0)$; g) $\alpha = (0, -3)$; h) $\alpha = (3, -3\sqrt{3})$.

2. Determinar la forma rectangular del número complejo cuya forma trigonométrica está dada.

a) $2\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$; b) $8\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$;

c) $\sqrt{2}\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$; d) $6\sqrt{3}\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$.

3. En cada uno de los siguientes, desarrollar las operaciones indicadas. Comprobar en cada caso su resultado, expresando cada uno de los números complejos que aparecen, en la forma a + ib y entonces desarrollar las operaciones por medios algebraicos directos.

a) $\sqrt{6}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \,.\, \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$,

b) $2\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$,

c) $2\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) \,.\, 2\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$,

d) $2\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \,.\, 4\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$.

4. Si $\alpha = r_1 (\cos t_1 + i \operatorname{sen} t_1)$ y $\beta = r_2 (\cos t_2 + i \operatorname{sen} t_2)$, demostrar que:

$$\alpha / \beta = r_1 / r_2\, [\cos (t_1 - t_2) + i \operatorname{sen} (t_1 - t_2)].$$

5. Determinar α/β, donde $\alpha = 4\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$ y $\beta = 2\,(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$.

6. Pruébese que : $|1 - z| = |1 - \bar{z}|$ e interprétese geométricamente.

7. Identifíquese geométricamente los conjuntos de números complejos con la propiedad de que:

a) $|z| = 1$, b) $\operatorname{Arg} z = \pi / 2$, c) $\mathbf{Re}(z) = -2$, d) $\mathbf{Re}(z) \geq -2$,

e) $\mathbf{Im}(z) = 1$, f) $\mathbf{Im}(z) > 0$, g) $\mathbf{Re}(z) > 0$, h) $|z + 1| < 1$,

i) $|z - 1| < 1$.

8. En cada uno de los ejercicios, escribir la expresión dada , primero, como un número complejo en la forma $r(\cos t + i \operatorname{sen} t)$ y después como un número complejo en la forma $a + i\,b$.

a) $(-1 + i)^4$, b) $(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\,)^5$, c) $(2\sqrt{3} + 2i)^3$, d) $(3 - i\,\sqrt{3})^4$,

e) $(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)^3$, f) $(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)^{12}$, g) $(-2\sqrt{3} + 2i)^4$,

h) $(-\sqrt{3} + i)^5$.

9. Determinar las tres raíces cúbicas de -1.

10. Determinar las tres raíces cúbicas de i.

11. Determinar las cinco raíces quintas de $1 - i$.

12. Determinar las dos raíces cuadradas de $2 - 2i\sqrt{3}$.

13. Determinar las seis raíces sextas de -1.

14. Determinar las cinco raíces quintas de $1 + i$.

15. Efectúese las operaciones indicadas y exprésese el resultado en la forma $a + ib$.

a) $3.e^{i\frac{\pi}{3}}.2.\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$; b) $5.e^{i\frac{2\pi}{3}}.4e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

16. Exprésese en términos de la exponencial compleja:

a) $(1 + i)^3$; b) $(-3 + i\sqrt{3})^4$, c) $(5 - 5i)^{-6}$, d) $(-1 + i\sqrt{3})^5$.

17. En cada uno de los siguientes, determinar la solución de la ecuación dada:

a) $x^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$, b) $x^5 - 1 = 0$; c) $x^3 + 4 = -4i\sqrt{3}$.

4. Anillos de Polinomios

4.1. Introducción

Sea A un dominio de integridad, es decir, un anillo conmutativo con elemento neutro, sin divisores de cero.

Si n es un entero positivo y "a" un elemento de A, entonces la aplicación de A en A que a x asocia ax^n, recibe el nombre de función monomia, hace intervenir sólo la multiplicación en A.

Si damos n + 1 elementos de A, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$; la aplicación:

$$x \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

conocida como función polinómica de A en A, hace intervenir las estructuras aditiva y multiplicativa de A.

No vamos a considerar a x en lo que sigue como un elemento más del anillo A, sino como un símbolo indeterminado, hasta el extremo que podemos prescindir de él, al principio de la teoría.

Abandonamos, pues, el aspecto funcional del polinomio y hacemos intervenir tan solo su aspecto formal. Vamos a desarrollar una teoría algebraica de los polinomios formales, y la indeterminada x aparecerá por último como un polinomio formal particular.

4.1.1. Polinomio formal

Se llama polinomio con una indeterminada sobre un dominio de integridad A toda sucesión

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$$

de elementos a_i de A tal que, a partir de un determinado lugar, todos los términos de la sucesión son iguales al cero de A.

Los términos de la sucesión se numeran a partir de 0 y reciben el nombre coeficientes del polinomio. Los polinomios definidos de esta manera son entes matemáticos que designaremos con letras minúsculas latina, p, q, r,...:

$$p = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$$

El conjunto de los polinomios con una indeterminada sobre A se escribe:

$$A[x]; \quad p \in A[x].$$

4.1.2. Polinomio nulo

Por definición, el polinomio nulo, o 0, es aquél en el que todos los coeficientes a_i, son iguales a cero:

$$0 = (0, 0, 0, ..., 0, ...)$$

4.1.3. Grado, valuación

1°. El mayor entero n tal que $a_n \neq 0$, se denomina grado del polinomio. Para expresar que p es de grado n, escribimos:

$$p = (a_0, a_1, a_2, ... , a_n, 0, 0, 0, ...)$$

y también el símbolo g°(p) expresará el grado de p. La definición tiene sentido para todo p de A[x], salvo para el polinomio 0.

2°. El menor entero k, tal que $a_k \neq 0$ recibe el nombre de valuación del polinomio p.. Emplearemos la notación v(p). La definición tiene sentido para todo p de A[x], salvo el polinomio 0.

Ejemplo.

Tomemos A = Z, anillo de los enteros en el conjunto Z[x], consideramos: p = (0, 0, -2, 0 , 1, -3, 0 , 0, ...) donde los puntos suspensivos expresan que el cero se repite indefinidamente. Según las definiciones dadas, tendremos: g°(p) = 5 y v(p) = 2.

4.1.4. Igualdad

Consideremos dos elementos de A[x]:

$$p = (a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_i, ...) \quad y \quad q = (b_0 , b_1 , b_2 , ... , b_i, ...),$$

cuyos coeficientes generales escribimos a_i y b_i ; el subíndice i toma todos los valores de N. Por definición, p y q son iguales, que escribimos p = q si $(\forall i \in N) \quad a_i = b_i$.

Evidentemente en estas condiciones:

$$g°(p) = g°(q) \quad y \quad v(p) = v(q).$$

4.2. Adición en A[x]

4.2.1. Definición

A todo par ordenado (p, q) de polinomios de A[x] asociamos p + q, polinomio del mismo conjunto, que recibe el nombre de suma de p y q, definido como sigue:

Si $p = (a_0, a_1, \dots , a_i, \dots)$ y $q = (b_0, b_1, \dots , b_i, \dots)$

entonces

$$p + q = (a_0 + b_0;\ a_1 + b_1; \dots ; a_i + b_i ; \dots)$$

Para todo orden i, el coeficiente de p + q es igual a la suma de los coeficientes de lugar i en p y q.

4.2.2. Propiedades

La estructura de grupo aditivo conmutativo de A proporciona inmediatamente las siguientes propiedades de la adición en A[x]: esta operación es asociativa y conmutativa, tiene como elemento neutro el 0 (polinomio nulo), y todo polinomio $p = (a_0, a_1, \dots , a_i, \dots)$ admite un opuesto, que escribimos -p, cuyos coeficientes son, respectivamente los opuestos:

$$-p = (-a_0, -a_1, \dots , -a_i, \dots).$$

La adición que acabamos de definir confiere pues, a A[x] estructura de grupo conmutativo. Se verifican, además, las propiedades siguientes en relación con el grado y la valuación de la suma. Para descartar el polinomio nulo, escribimos:

$$A^*[x] = A[x] - \{0\}.$$

1) $(\forall p,q \in A^*[x]) \quad g°(p+q) \leq \text{máx } \{g°!(p), g°(q)\},$

2) $(\forall p,q \in A^*[x]) \quad v(p+q) \geq \text{ mín } \{v(p), v(q)\}.$

4.3. Multiplicación por un elemento de A

4.3.1. Definición

A todo polinomio $p \in A[x]$ y a todo elemento h de A asociamos un elemento, hp, definido como sigue:

Si $p = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots)$, entonces $hp = (ha_0, ha_1, \dots, ha_i, \dots)$, queda así definida una ley de composición externa, aplicación de $A \times A[x]$ en $A[x]$. Puesto que A es un anillo con elemento 1, se obtienen inmediatamente las siguientes propiedades:

$(\forall p, q \in A[x] \wedge \forall h, k \in A)$,

$$1.\, p = p;$$

$$(h + k)p = hp + kp;$$

$$h(p + q) = hp + hq;$$

$$h(kp) = (hk)p.$$

Sabemos que $A[x]$ es un grupo conmutativo aditivo. Las propiedades de la ley de composición externa, en el caso de ser A un cuerpo, ponen de manifiesto que $A[x]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo A.

En el caso general de que A sea un anillo conmutativo con elemento unidad $A[x]$ es un <u>módulo sobre el anillo A</u> (o simplemente un A- módulo).

<u>Consecuencia:</u>

Para todo natural n, sea u_n el polinomio:

$$u_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \text{ tal que } a_n = 1, \text{ y } a_i = 0 \text{ para todo } i \neq 0.$$

Tenemos:

$$\begin{array}{lll}
u_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) & \Rightarrow & a_0u_0 = (a_0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\
u_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) & \Rightarrow & a_1u_1 = (0, a_1, 0, 0, 0, \dots) \\
. \quad \dots & \dots & \dots \\
. \quad \dots & \dots & \dots \\
. \quad \dots & \dots & \dots \\
u_n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) & \Rightarrow & a_nu_n = (0, 0, \dots, a_n, 0, 0, \dots)
\end{array}$$

Sumando:

$$a_0u_0 + a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = (a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots) = p.$$

Sea entonces $p \in A[x]$ con $g°(p) = n$:

$$p = (a_0, a_1, \dots , a_n, \dots)$$

En virtud de la estructura de módulo de A[x] sobre el anillo A se tiene:

$$p = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \ .$$

4.4. Multiplicación en A[x]

4.4.1. Definición

A todo par ordenado (p, q) de polinomios asociamos otro polinomio pq, denominado producto de p y q que se define como sigue:

Si $p = (a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_i , \dots)$ *y* $q = (b_0 , b_1 , b_2 , \dots , b_i , \dots)$

entonces:

$$pq = (a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ \ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots).$$

En general, el término de lugar i en pq es:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0 = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

4.4.2. Propiedades

Conmutatividad: $pq = qp$.

Asociatividad: $(pq)r = p(qr)$

Con la notación anterior para p y q, supongamos que r sea el polinomio: $r = (c_0, c_1, \dots , c_i, \dots)$. El término de lugar i del producto pq es:

$$u_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_o \ .$$

El término general de lugar n en el producto (pq)r es:

$$\sum_{i=0}^{n} u_i c_{n-i} = u_0 c_n + u_1 c_{n-1} + \cdots + u_n c_0 =$$

$$= a_0 b_0 c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) c_0$$

o sea, es una suma de la forma $\sum a_{j1} b_{j2} c_{j3}$, en la que los índices j_1, j_2, j_3 toman todos los valores soluciones de la ecuación $j_1 + j_2 + j_3 = n$.

Como los elementos a, b y c desempeñan el mismo papel, se llegaría al mismo resultado hallando el término general de lugar n del producto p(qr). La asociatividad queda, por tanto, demostrada.

Elemento neutro.

Sea $e = (1, 0, 0, \ldots)$ el polinomio tal que $a_0 = 1$ y $a_i = 0$ para $i \geq 1$.

Se comprueba que:

$$(\forall p \in A[x]) \qquad ep = p,$$

por lo que "e" es el elemento neutro de la multiplicación.

Distributividad: $(p + q)r = pr + qr$.

Escribamos los respectivos términos de lugar i para cada uno de los polinomios:

-para pr: $\sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}$,

-para qr : $\sum_{k=0}^{i} b_k c_{i-k}$,

-para pr + qr: $\sum_{k=0}^{i} (a_k c_{i-k} + b_k c_{i-k})$

-para (p + q)r : $\sum_{k=0}^{i} (a_k + b_k) c_{i-k}$.

Los dos últimos son iguales, en virtud de la ditributividad en A lo que demuestra la propiedad.

Por último, si p y q son dos polinomios, se verifica que:

$$(pq = 0 \quad y \quad p \neq 0) \quad \Rightarrow \quad q = 0.$$

Teorema 1:

El anillo A[x] de los polinomios con una indeterminada sobre un dominio de integridad A, es también un dominio de integridad.

4.5. Propiedades de los grados y las valuaciones

Propiedad 3:

Si A es un dominio de integridad:

$$(\forall\ p, q \in A[x]^*) \qquad g^o(pq) = g^o(p) + g^o(q)$$

Propiedad 4:

Si A es un dominio de integridad:

$$(\forall\ p, q \in A[x]^*) \qquad v(pq) = v(p) + v(q)$$

4.5.1. Notación definitiva

Tomemos los vectores del tipo $u_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ para los cuales se verifica que $g^o(u_n) = v(u_n) = n$.

Si $n = 0$, u_0 es el elemento unidad "e" de la multiplicación. El producto $u_n u_m$ nos dá que:

$$g^o(u_n u_m) = v(u_n u_m) = n + m.$$

Por lo tanto:

$$u_n u_m = u_{n+m}$$

Para el componente k, se comprueba inmediatamente que:

$$(\forall n, k \in N) \qquad (u_n)^k = u_{nk}.$$

En particular, si $n = 1$, designamos con x el polinomio u_1

$$x = (0, 1, 0, \ldots) = u_1.$$

Entonces $x^k = (u_1)^k = u_k$. Como todo polinomio $p = (a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_i , ...)$, se escribe:

$$p = a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n ,$$

tendremos:

$$p = a_0 e + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ,$$

y por lo tanto, todo polinomio p es la suma de *monomios* $a_k x^k$; donde x es el polinomio particular definido anteriormente y e el elemento neutro de la multiplicación en A[x].

4.6. División euclidiana

4.6.1. Definición

Dados dos polinomios a y b de K[x], (anillo sobre un cuerpo conmutativo K) decimos que "b divide al a" y escribimos b|a, si existe un polinomio q de K[x], tal que a = bq:

$$b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, q \in K[x], \qquad a = bq.$$

Se dice también que "a es múltiplo de b", o que "b es divisor de a".

4.6.2. División euclidiana en K[x]

Teorema 2 (fundamental).

Dados los polinomios a y b de K[x], con $b \neq 0$, existe un par único de polinomios (q, r) tales que:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ g^o(r) < g^o(b) \end{cases}$$

1ºExistencia. Ordenemos los polinomios a y b según las potencias decrecientes.

$$a = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$b = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + ... + \beta_1 x + \beta_0 \qquad (\beta_0 \neq 0).$$

Probemos (calculándolos) que existen q y r.

Si $g^o(a) < g^o(b)$, entonces $q = 0$ y $r = a$ satisfacen las condiciones deseadas.

Supongamos que $g^o(a) \geq g^o(b)$. Dividimos el primer término $\alpha_n x^n$ por $\beta_m x^m$, y hacemos:

$$q_1 = \frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m}$$

Efectuando la diferencia $a - bq_1 = r_1$ se tiene que $g^o(r_1) < g^o(a)$ (1)

La desigualdad en sentido estricto proviene de que por este procedimiento se ha hecho desaparecer el monomio de mayor grado de a.

-Si $g^o(r_1) < g^o(b)$ la existencia queda demostrada, ya que el par de polinomios (q_1, r_1) cumple las condiciones impuestas.

-Si $g^o(r_1) \geq g^o(b)$ repetimos con el par (r_1, b) lo que acabamos de hacer con el par (a, b); si designamos con q_2 el cociente de los monomios de mayor grado de r y de b, y se efectúa la diferencia:

$$r_1 - bq_2 = r_2 \quad \text{se tiene que} \quad g^o(r_2) < g^o(r_1). \qquad (2)$$

-Si $g^o(r_1) < g^o(b)$ la existencia queda demostrada, ya que $(q_1 + q_2, r_2)$ responde a la cuestión.

-Si $g^o(r_1) > g^o(b)$ se continúa como se indica:

$$r_2 - bq_3 = r_3 \qquad g^o(r_3) < g^o(r_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-1} - bq_n = r_n \qquad g^o(r_n) < g^o(r_{n-1}). \qquad (n)$$

Los $g^o(r_i)$ forman una sucesión decreciente en N:

$$g^o(r_1) > g^o(r_2) > \ldots > g^o(r_n) .$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1) hasta (n), se obtiene:

$$a - b(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) = r_n$$

y por tanto

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \, ; \qquad r = r_n$$

con lo que la existencia queda demostrada.

2.-Unicidad. Demostremos que el par (q, r) así encontrado es único. Supongamos que hubiera otro par (q_1, r_1) que respondiese a la cuestión.

Entonces se verificarían a la vez las relaciones:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ g^{o}(r) < g^{o}(b) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ g^{o}(r_1) < g^{o}(b) \end{cases}$$

de lo que se deduce:

$$bq + r = bq_1 + r_1 \;\Rightarrow\; b(q - q_1) = r_1 - r,$$

por consiguiente:

$$g^{o}(b) + g^{o}(q - q_1) = g^{o}(r_1 - r) \qquad (1)$$

además tendría que ser:

$$g^{o}(r_1 - r) \;\leq\; \text{máx}\{g^{o}(r);\, g^{o}(r_1)\} < g^{o}(b) \qquad (2)$$

Las relaciones (1) y (2) son incompatibles si $g^{o}(q - q_1) \geq 0$, es decir, si $q - q_1 \neq 0$. Por lo tanto tendría que ser $q = q_1$ y $r = r_1$ y queda satisfecha la unicidad.

Propiedad 5.

Para que $b|a$, *es necesario y suficiente que sea nulo el resto de la división euclidiana de a por b.*

Anexo A: La noción clásica de polinomio

a) Un ejemplo sencillo.

Sea x un número real cualquiera (lo cual recordamos se escribe $\forall x \in \mathbf{R}$).

Supongamos que x designa una longitud indeterminada (medida en metros), entonces x^2 designará la superficie de un cuadrado de lado x y x^3 el volumen de un cubo de arista x.

Imaginemos que una persona compra una cuerda cuya longitud equivale tres veces la longitud de x, es decir $3 \cdot x$ metros y cuyo precio es de 2 pesos el metro, esta cuerda cuesta pues: $3x \cdot 2 = 6x$ pesos.

Un tablero de madera de superficie $2x^2$ (en metros cuadrados), al precio de 12 pesos el metro cuadrado: por lo tanto, este tablero cuesta $2x^2 \cdot 12 = 24x^2$ pesos.

Un tonel de vino de capacidad igual x^3 (en metros cúbicos), al precio de 2 pesos el litro es decir, 2.000 pesos el metro cúbico, puesto que en un metro cúbico hay mil litros; costo: $2.000x^3$ pesos.

Después de estas compras le quedan 50 pesos. Se pide expresar la suma que esta persona tenía inicialmente. Es perfectamente evidente que la suma depende de "x" y que no se puede conocer, puesto que x es indeterminado; sin embargo, puede expresarse en pesos bajo la forma

$$50 + 6x + 24\,x^2 + 2.000\,x^3 \qquad (1)$$

Una expresión como (1) se denomina polinomio de una indeterminada (la indeterminada es x); se representa con frecuencia por p(x), que se lee "p de x".

Notación y ejemplos prácticos

Si escribimos $6x^2 + 2x + 5$, decimos que esto es una expresión algebraica. Este término se usa, para representar una constante, una variable o una combinación de variables y constantes que impliquen un número finito de operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división etc.). Ejemplos de expresiones algebraicas son:

$$3x^2y^5; \qquad 5x^2 - 8x + 2; \qquad \frac{3x^2 - \sqrt{x+y} - 4}{(z+2)^3 - 2x}.$$

Una expresión algebraica que comprende únicamente potencias enteras no negativas de una o más variables, que no contenga variable alguna en el denominador es lo que llamamos polinomio. Por ejemplo:

$3x$; $4x + b$; $5x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; son polinomios en la variable x.

$3x^2y^4$; $6x^2 + 8y^3 + 2$; son polinomios en las variables x e y.

Un *término* de un polinomio es una constante multiplicada por potencias enteras no negativas de variables o bien una constante. Por ejemplo los términos del polinomio

$$5x^2 + (-8x) + 2 \quad \text{son:} \quad 5x^2; \quad (-8x); \quad 2.$$

A los términos que difieren únicamente en sus coeficientes constantes se los denomina *términos semejantes*. Por ejemplo $6x^2$, x^2, $-3x^2$ son términos semejantes. En particular, si se tiene el polinomio dado por: $2 + 6x^2 + 2x + x^2 - 4x - 3x^2 + 7$, se puede escribir como: $4x^2 - 2x + 9$.

Cuando un polinomio es de un solo término, se lo denomina <u>monomio</u>, si tiene dos términos, <u>binomio</u> y si tiene tres términos, <u>trinomio.</u>

Debido a que un polinomio es una suma de monomios y un monomio representa un número real, a los polinomios pueden aplicarse las definiciones, axiomas y teoremas que comprenden los números reales.

Por ejemplo:

a) $ax + bx = (a + b)x$,

b) $ax – bx = (a - b)x$,

c) $ax + bx + cx = (a + b + c)x$,

d) $8x^2 + 5x + 2x – 4x = (8 + 2)x^2 + (5 – 4)x$
$= 10x^2 + x$,

e) $7\,a^2b – 3\,a^2b + 8ab^2 – 5ab^2 – 6ab^2 = (7\text{-}3)\,a^2b + (8\text{-}5\text{-}6)\,ab^2$
$= 4a^2b + (-3\,ab^2)$
$= 4a^2b - 3\,ab^2$

Si tenemos que sumar los polinomios: $4y^3 + 7y^2 + 3y – 8$, y el dado por $6y^3 – 2y^2 + 4$, se realiza como sigue:

$$\begin{array}{rrrr} 4y^3 & +\ 7y^2 & +\ 3y & -\ 8 \\ \underline{6y^3} & \underline{-\ 2y^2} & & \underline{+\ 4} \\ 10y^3 & +\ 5y^2 & +\ 3y & -\ 4 \end{array}$$

El producto de los monomios $4x^3$ y $5x^4$ puede escribirse como:

$4x^3 \cdot 5x^4 = 4 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x^4$
$= 20x^{3+4}$
$= 20\,x^7$.

O por ejemplo : $4t^3\,(5t^3 – 7t^2 – 3t) = 4t^3 \cdot 5t^3 - 4t^3 7t^2 - 4t^3 \cdot 3t = 20t^6 - 28t^5 – 12t^4$.

En el caso del producto: $(3x^2 - 2x + 1)(x - 4x^2 + 3)$, se deberá aplicar la propiedad distributiva. Una forma práctica de hacer las cuentas es disponer el producto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 3x^2 & -\ 2x & +\ 1 \\ & & \underline{-4x^2} & \underline{+\ \ x} & \underline{+\ 3} \\ -12x^4 & +\ 8x^3 & -\ 4x^2 & & \\ & 3x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & \\ & & \underline{9x^2} & \underline{-\ 6x} & \underline{+\ 3} \\ -12x^4 & +\ 11x^3 & -\ 3x^2 & -\ 5x & +\ 3 \end{array}$$

4.6.3. Ejemplo y disposición práctica para efectuar la división de polinimios

Efectuemos la división euclidiana de $a = 3x^5 + 4x^2 + 1$ por $b = x^2 + 2x + 3$.

La disposición práctica es la siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
a = \; 3x^5 \qquad\qquad\quad + 4x^2 \qquad + 1 & x^2 + 2x + 3 \qquad = b \\ \cline{2-2}
-bq_1 = -3x^5 - 6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & 3x^3 - 6x^2 + 3x + 16 \qquad = q \\ \hline
r_1 = \quad - 6x^4 - 9x^3 + 4x^2 \qquad + 1 & \\
-bq_2 = \quad - 6x^4 + 12x^3 + 18x^2 \qquad\qquad & \\ \hline
r_2 = \qquad 3x^3 + 22x^2 - 9x \qquad & \\
-bq_3 = \qquad -3x^3 - 6x^2 - 9x \qquad & \\ \hline
r_3 = \qquad\qquad 16x^2 - 9x + 1 & \\
-bq_4 = \qquad\qquad - 16x^2 - 32x - 48 & \\ \hline
r_4 = \qquad\qquad\qquad -41x - 47 &
\end{array}
$$

Se tiene, pues:

$$3x^5 + 4x^2 + 1 = (x^2 + 2x + 3)(3x^3 - 6x^2 + 3x + 16) – 41x – 47.$$

El grado del resto $-41x –47$ es estrictamente inferior al del divisor b.

4-7. Divisores comunes

-Dado un polinomio a. Sea $D(a)$ el conjunto de sus divisores:

$$D(a) = \{d \in K[x] \ / \ d|a\}.$$

Si a y b son dos polinomios, todo polinomio de la intersección $D(a) \cap D(b)$ recibe el nombre de divisor común de a y b.

Vamos a estudiar esta intersección; para ello observemos que:

$$\begin{array}{ll} (\forall u \in K[x]) & d \,|\, a \Rightarrow d \,|\, au \\ (\forall v \in K[x]) & d \,|\, b \Rightarrow d \,|\, bv \end{array} \Bigg\} \Rightarrow d \,|\, (au + bv) \quad ;$$

Por consiguiente, cualesquiera que sean los polinomios u y v:

$$D(a) \cap D(b) \subset D(au + bv) \qquad (1)$$

Consideremos el conjunto I de los polinomios $au + bv$ para todo u y todo v de K[x]. Se puede ver en I que:

$$(au + bv) - (au' + bv') = a(u - u') + b(v - v') \in I;$$

$$(\forall p \in K[x]) \qquad p(au + bv) = a(pu) + b(pv) \in I.$$

Por lo tanto, todo polinomio de I es múltiplo de uno de los del I, d, de grado mínimo:

$$g^o(d) = \text{mín}\{g^o(p)\} \text{ con } p \in I^* \qquad I^* = I - \{0\}.$$

En estas condiciones, se tiene:

$$(\forall u, v \in K[x]) \qquad d \mid au + bv.$$

En particular:

$$\text{si } u = 1 \text{ y } v = 0, \quad \text{entonces} \quad d \mid a;$$

$$\text{si } u = 0 \text{ y } v = 1, \quad \text{entonces} \quad d \mid b.$$

Por consiguiente, d es un divisor común de a y b; $d \in D(a) \cap D(b)$, de donde:

$$D(d) \subset D(a) \cap D(b) \qquad (2)$$

Por otra parte, puesto que $d \in I$, existen dos polinomios u_0 y v_0 tales que, $au_0 + bv_0 = d$, es decir aplicando (1), $D(a) \cap D(b) \subset D(d)$, relación que comparada con (2) da:

$$D(a) \cap D(b) = D(d).$$

Definición

El polinomio d se llama ***máximo común divisor*** *de a y b, y se escribe d = m.c.d.(a, b).*

Teorema3

El conjunto de los divisores comunes a los polinomios a y b coincide con el conjunto de los divisores de su m.c.d.

4.7.1. Polinomios primos entre sí

Dos polinomios a y b son primos entre sí, cuando su m.c.d. es una constante (que puede tomarse igual a 1).

Teorema de Bezout

La condición necesaria y suficiente para que dos polinomios a y b sean primos entre sí, es que existan dos polinomios u y v tales que: au + bv = 1.

Teorema de la divisibilidad

Si "a" divide a *"bc" y es primo con "b", entonces divide* a *"c".*

En efecto: m.c.d.(a,b) = 1 $\Rightarrow$ m.c.d.(ac, bc) = c

Puesto que "a" divide a "bc", y es obvio que divide a "ac", divide al m.c.d.(ac,bc) = c.

4.7.2. Forma práctica de calcular el m.c.d.

Teorema:

Si a y b son dos polinomios no nulos tales que, el $g^o(b) \leq g^o(a)$ el m.c.d. (a, b) es el m.c.d.(b, r), donde r es el resto de la división euclidiana de a por b.

Se puede entonces determinar el m.c.d. de dos polinomios por el método del algoritmo de Euclides como se ilustra en el ejemplo que sigue en R[x].

Ejemplo:

Si $a = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2$ y $b = x^2 + x - 2$; dividiendo se observa que:

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2 = (x^2 + x - 2)(x^2 + 2x - 2) + (6x - 6) \qquad \text{(o sea, } a = bq_1 + r_1\text{);}$$

dividiendo ahora,

$b = x^2 + x - 2$ por $r_1 = 6x - 6$, se obtiene que:

$$x^2 + x - 2 = (6x - 6)(1/6x + 1/3) + 0 \qquad (b = r_1q_2 + r_2);$$

El m.c.d. de a y b, es el último resto no nulo del algoritmo, por consiguiente de lo expuesto precedentemente m.c.d.(a, b) = $2x - 2$; que *normalizado* nos da que:

$$\text{m.c.d.}(a, b) = x - 1$$

Una forma de ordenar el algoritmo es hacer la siguiente tabla.

	$q_1 = x^2 + 2x - 2$	$q_2 = 1/6x + 1/3$	cocientes
$a = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2$	$b = x^2 + x - 2$	$6x - 6$	dividendos y divisores
	$r_1 = 6x - 6$	0	restos

Se llama *polinomio normalizado* al polinomio cuyo monomio de mayor grado tiene por coeficiente la unidad 1 del cuerpo K:

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

4.8. Polinomio primo o irreducible

4.8.1. Definición

En $K[x]_1$ se da el nombre de primo o irreducible a todo polinomio divisible sólo por sí mismo.

Por ejemplo, todo polinomio $x + \alpha$ normalizado de grado 1 es un polinomio irreducible.

Observación: La característica de irreductibilidad de un polinomio depende del cuerpo K, así, $x^2 - 3$ es un polinomio irreducible de Q[x], pero no es irreducible sobre R[x].

De la definición resulta que, si un polinomio p primo no divide a un polinomio a, entonces los polinomios p y a son primos entre sí.

Propiedad 7

Si un polinomio irreducible divide a un producto de polinomio, divide al menos a uno de ellos.

En efecto, si p divide a ab y es primo con a, por el teorema de la divisibilidad tiene que dividir a b.

Propiedad 8

Si p primo divide a un producto de factores primos, es igual a uno de ellos.

4.8.2. Descomposición en factores primos

Teorema 6

Todo polinomio no primo, es el producto de polinomios primos (irreducibles). Esta descomposición es única, salvo el orden de los factores.

4.9. Derivación

4.9.1. Derivada de un polinomio

Sea p un polinomio de A[x] sobre un anillo A: $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Si damos a x, un valor de A, es decir, si reemplazamos x por el elemento α de A, obtenemos otro elemento bien determinado de A que representamos $p(\alpha)$.

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$$

Queda así definida una aplicación $\alpha \to p(\alpha)$ de A en sí mismo, que recibe el nombre de *función polinómica*.

En el estudio de Análisis Matemático se demuestra que:

$$p'(\alpha) = a_1 + 2a_2\alpha + \dots + na_n\alpha^{n-1}$$

4.9.2. Definición

Se llama polinomio derivado de polinomio $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, al siguiente polinomio:

$$p' = a_1 + 2\,a_2x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

En particular, si p es una constante, o es el polinomio cero, su derivada p' es 0. En los restantes casos, se tiene que $g^o(p') = g^o(p) - 1$.

4.9.3. Derivadas sucesivas

Definición. *El polinomio* derivado de orden n, *designado por* $p^{(n)}$ *del polinomio* p*, se define como sigue:*

1º $p^{(0)} = p$

2º Supuesto definido $p^{(h)}$*, definimos* $p^{(h+1)} = [p^{(h)}]'$

Según lo anterior, se tiene sucesivamente:

$$p^{(0)} = p; \qquad p^{(1)} = p'; \qquad p^{(2)} = (p')' = p''; \qquad p^{(3)} = (p'')' = p'''; \ \dots$$

Hallemos en primer lugar la derivada de orden h del monomio x^k. Se verifica la siguiente propiedad:

- $h \leq k \;\Rightarrow\; (x^k)^{(h)} = (V_{k,\,h}) \cdot x^{k-h}$ ($V_{k,\,h}$; variaciones de k elementos tomados de a h)
- $h > k \;\Rightarrow\; (x^k)^{(h)} = 0.$

Demostración:

Se demuestra por inducción:

- *La primera implicación se verifica si* $h = 0$.

- *Suponiendo que es cierta para* $h < k$, vamos a demostrar que es válida para $h + 1 \leq k$ (inducción limitada a k) y observando que:

$$(k-h) \cdot V_{k,\,h} \;=\; (k-h) \cdot \frac{k!}{(k-h)!} \;=\; (k-h) \cdot \frac{k!}{(k-h) \cdot (k-h-1) \cdot (k-h-2) \cdot \ldots \cdot 1},$$

Simplificando $(k - h)$ nos queda:

$$(k-h) \cdot \frac{k!}{(k-h)!} \;=\; \frac{k!}{(k-h-1) \cdot (k-h-2) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{k!}{[k-(h+1)]!} = V_{k,\,h+1}$$

Es decir que:

$$(k-h) \cdot V_{k,\,h} \;=\; V_{k,\,h+1}$$

Por consiguiente podemos escribir ahora:

$$(x^k)^{(h+1)} \;=\; [(x^k)^{(h)}]' \;=\; [(V_{k,\,h}) \cdot x^{k-h}]' =$$

$$= (k-h)\cdot(V_{k,h})\cdot x^{k-h-1} = (V_{k,h+1})\cdot x^{k-(h+1)}.$$

- *La primer implicación, es por tanto, cierta para todo* $h < k$.

- Si $h = k$, resulta:

$$(x^k)^{(k)} = V_{k,k}\, x^0 = k!,$$

y se obtiene una constante, lo que dice que, si $h > k$ $(x^k)^{(k)} = 0$.

- *Esto prueba la segunda implicación*.

4.9.3. Derivada de orden n de un polinomio

Sea el polinomio $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, del que vamos a hallar su derivada de orden h. Derivando término a término y aplicando la propiedad anterior a cada monomio resulta:

$$h \le n \;\Rightarrow\; p^{(h)} = \sum_{k=h}^{n} a_k V_{k,h} x^{k-h} \qquad (1)$$
$$h > n \;\Rightarrow\; p^{(h)} = 0.$$

4.9.4. Fórmula de Mac-Laurin

Consideremos ahora los elementos de A[x] como funciones polinómicas de A en A, en el supuesto que la indeterminada x toma valores en un cuerpo A, que puede ser **C** o un sub-cuerpo de **C**.

Si damos a x el valor cero en la igualdad (1):

$(h \le n)$ $\quad p^{(h)}{}_{(0)} = a_h h!$; de donde deducimos que:

$$a_h = \frac{p^{(h)}_{(0)}}{h!},$$

y por consiguiente,

$$p(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{p^{(h)}_{(0)}}{h!} x^h, \quad \text{es decir:} \quad p(x) = p_{(0)} + \frac{p_{(0)}}{1!}x + \frac{p''_{(0)}}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n$$

Esta es la fórmula de Mac-Laurin para un polinomio.

4.9.5. Fórmula de Taylor

Sea un polinomio de una variable x; $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, *sustituyendo* x *por* x + y*, se obtiene otro polinomio de* x *e* y*:* $p(x+y) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+y)^k$.

Aplicando a cada término de lugar k la fórmula del binomio de Newton y recordando cómo escribir las derivadas sucesivas de $(x + y)^k$ y luego trabajando algebraicamente se obtienen la fórmula:

$$p(x+y) = p(x) + \frac{p'(x)}{1!} y + \frac{p''(x)}{2!} y^2 + \ldots + \frac{p^n(x)}{n!} y^n ;$$

que es la llamada Fórmula de Taylor para los polinomios.

4.9.6. Ceros de un polinomio

Consideramos ahora el anillo K[x] de los polinomio con una indeterminada sobre un cuerpo conmutativo K (que puede ser **Q**, **R**, o **C**) y las correspondientes funciones polinómicas.

Definición

El elemento a de K es un ***cero*** *(o raíz) del polinomio* $p \in K[x]$*, si* $P(a) = 0$.

Teorema

Para que a sea cero de $p \in K[x]$ *es necesario y suficiente que* $p \in K[x]$ *sea divisible por* $x - a$*:*

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x), \quad \text{con} \quad g^o(r) < g^o(x - a) = 1 \qquad (1)$$

o sea que r es una constante.

4.9.7. Teorema del resto

El resto de la división euclidiana de p(x) por "x – a" es p(a).

Si en (1) damos a x el valor a queda que p(a) = r(a) y por consiguiente

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a).$$

O sea, que para $p(x)$ sea divisible por $x - a$ es necesario y suficiente que $p(a) = 0$, es decir que, a sea un cero de $p(x)$.

4.9.8. Orden de multiplicidad de un cero

Sea a un cero de $p(x)$. entonces $x - a$ divide a $p(x)$; por tanto, existen $p_1(x)$ tal que $p(x) = (x - a)p_1(x)$.

- Si $p_1(a) \neq 0$, decimos que a es un *cero simple* de $p(x)$.

- Si $p_1(a) = 0$, entonces $p_1(x)$ es divisible por $(x - a)$ y existe un $p_2(x)$ tal que $p_1(x) = (x - a)\, p_2(x)$, de donde:

$$p(x) = (x - a)^2 p_2(x).$$

- Si $p_2(x) \neq 0$, se dice que a es un *cero doble* de $p(x)$.

- De manera general, si existe un entero natural $h \geq 1$ tal que:

$$p(x) = (x - a)^h p_h(x), \qquad \text{con } p_h(a) \neq 0,$$

se dice que a es un cero múltiple de orden h de $p(x)$, o cero de multiplicidad h.

Definición

Se llama multiplicidad de un cero de p(x) el número natural $h \geq 1$ que verifica a:

$$p(x) = (x - a)^h p_h(x), \qquad \text{con } p_h(a) \neq 0$$

Propiedad

Si $a_1, a_2, \cdots, a_r$ son ceros diferentes de un polinomio $p(x)$, de multiplicidades $h_1, h_2, \cdots, h_r$, existe un polinomio $q(x)$ tal que:

$$p(x) = (x - a_1)^{h_1} \cdots (x - a_r)^{h_r} q(x),$$

siendo además $q(a_i) \neq 0$ *para* $i \in \{1, 2, \cdots, r - 1\}$.

Demostración:

Razonemos por inducción sobre el número r de ceros distintos considerados.

- La propiedad es cierta para $r = 1$.

- Supongamos cierta para $r - 1$; es decir, supongamos que exista un polinomio $t(x)$ tal que:

$$p(x) = (x - a_1)^{h_1} (x - a_2)^{h_2} \ \dots \ (x - a_{r-1})^{h_{r-1}} t(x) \qquad (1)$$

con $t(a_i) \neq 0$ *para* $i \in \{1, 2, \cdots, r - 1\}$.

Vamos a demostrar que existe un polinomio q(x) tal que:

$$p(x) = (x - a_1)^{h_1} \cdots (x - a_r)^{h_r} q(x),$$

siendo además $q(a_i) \neq 0$ *para* $i \in \{1, 2, \cdots, r - 1\}$.

Puesto que a_r es una raíz de orden h_r de $p(x)$, existe el polinomio $p_r(x)$ tal que :

$$p(x) = (x - a_r)^{h_r} p_r(x), \qquad \text{con} \quad p_r(a_r) \neq 0 .$$

Ahora bien: $x - a_r$ es primo con $x - a_i$ para todo $i \in [1, r\text{-}1]$, ya que estos a_i son distintos de a_r. Por consiguiente, $(x - a_r)^{h_r}$ es primo con $(x - a_i)^{h_i}$, cualquiera que sea para $\underline{i \in \{1, r - 1\}}$. Según el teorema de la divisibilidad y la hipótesis de inducción:

$$(x - a_r)^{h_r} \mid p(x) \quad \Rightarrow \quad (x - a_r)^{h_r} \mid t(x)$$

y existe un polinomio $q(x)$ tal que $t(x) = (x - a_r)^{h_r} \cdot q(x)$.

Además:

$(1 \leq i \leq r\text{-}1$ y $t(a_i) \neq 0) \Rightarrow q(a_i) \neq 0$, que sustituida en (1) dá:

$$p(x) = (x - a_1)^{h_1} \cdots (x - a_r)^{h_r} q(x),$$

Por último, sabemos que $p(a_i) \neq 0$ para $i \in \{1, 2, \cdots, r - 1\}$, y, como para estos valores de i es $a_i \neq a_r$ se ve que:

$$p_r(a_r) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad q(a_r) \neq 0.$$

Propiedad

Todo polinomio p de grado $n \geq 1$ *admite, como máximo n ceros distintos.*

4.10. Teorema de D'ALEMBERT

*Todo polinomio de **C**[x], de grado $n \geq 1$, admite al menos un cero en **C**.*

4.10.1. Consecuencia

Sea $p \in \mathbf{C}[x]$ con $g^o(p) = n \geq 1$. Por el teorema de d'Alembert, p admite al menos un cero $\alpha_1 \in \mathbf{C}$, y existe un $p_1 \in \mathbf{C}[x]$ tal que $p = (x - \alpha_1)p_1$.

Si $n = 1$, $g^o(p_1) = 0$, y p_1 es una constante.

- Si $n > 1$, entonces $g^o(p_1) \geq 1$, y es posible aplicar de nuevo el teorema de d'Alembert a p_1, que admitirá al menos un cero $\alpha_2 \in \mathbf{C}[x]$ tal que,

$p_1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)p_2$, de donde:

$$p = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)p_2.$$

- Para $n = 2$, $g^o(p_2) = 0$, y p_2 es una constante.

- Si $n \geq 2$, razonemos por inducción sobre el grado n del polinomio p; supongamos que:

$$p = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})p_{n-1} \quad \text{con} \quad g^o(p_{n-1}) = 1.$$

Existe entonces una constante $\lambda \in \mathbf{C}^*$ y un número $\alpha_n \in \mathbf{C}$ tales que:

$p_{n-1} = \lambda (x - \alpha_n)$ y, por consiguiente: $p = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$.

De ahí resulta que todo polinomio $p \in \mathbf{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ admite n ceros, distintos o no.

Nota. En **C**[x], todo *polinomio primo* es de grado 1. Se dice que el cuerpo **C** de los números complejos es *algebraicamente cerrado.*

4.11. Ceros racionales de polinomios

Los ceros de un polinomio p son las raíces de la ecuación $p(x) = 0$, esto significa que si α es un cero, deberá ser $p(\alpha) = 0$.

Por ejemplo si $p = 2x^4 + 5x^3 + 11x + 6$, entonces $p(-3) = 0$. Por lo tanto, -3 es un cero del polinomio.

En el caso de que el polinomio sea de segundo grado, los ceros se determinan resolviendo la ecuación de segundo grado correspondiente mediante factorización o por la fórmula cuadrática.

Para un polinomio de tercer o cuarto grado, el método general para obtener los ceros es complejo, y se estudian en el último capítulo de esta guía de estudios. Para los polinomios de grado mayor a cuatro, no existe una fórmula general para su resolución.

Nosotros vimos que un polinomio: $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $n \geq 1$, se puede escribir como:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})(x - r_n), \quad a_n \neq 0$$

donde cada r_i ($i = 1, 2, ..., n$) es un cero complejo de p. Los ceros complejos pueden ser números reales, números imaginarios o números complejos. Además si un factor $(x - r_i)$ se representa k veces, entonces decimos que r_i es un cero de multiplicidad k.

Ya dijimos que es difícil determinar los ceros de un polinomio, excepto en casos especiales. Uno de estos se presenta cuando los coeficientes son enteros; en ese caso si existen ceros racionales se podrán hallar aplicando el siguiente teorema:

Teorema

Supóngase que $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ donde $a_0, a_1, ..., a_n$, son enteros. Si $\frac{r}{q}$, en su mínima expresión, es un número racional y un cero de p, entonces r es un factor entero de a_0 y q es un factor entero de a_n.

Demostración

Como $\frac{r}{q}$ es una solución de la ecuación $p(x) = 0$.

Por lo tanto: $$a_n\left(\frac{r}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{r}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando cada miembro de esta ecuación por q^n, se obtiene:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} q + a_{n-1} r^{n-1} q + a_{n-2} r^{n-2} q^2 + \cdots + a_1 r q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (1)$$

A continuación se suma $-a_0 q^n$ a cada miembro de la ecuación (1) y se factoriza r de cada término del primer miembro resultante. De esta manera se tiene la ecuación equivalente.

$$r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} q + a_{n-2} r^{n-3} q^2 + a_{n-3} r^{n-4} q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}) = - a_0 q^n \quad (2)$$

Como a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$), r y q son enteros, y la suma del producto son enteros, la expresión en paréntesis del primer miembro de (2) es un entero, que se representa por t. Por consiguiente (2) puede escribirse como:

$$r\,t = -\,a_0 q^n \quad (3)$$

El primer miembro de (3) es un entero que tiene a r como factor. Por lo tanto, r debe ser un factor del segundo miembro, $-\,a_0q^n$. Como $\left(\frac{r}{q}\right)$ es una fracción irreducible, r carece de factor común con q. Así r debe ser un factor de a_0.

La Ecuación (1), (sacando factor común q) es también equivalente a la ecuación:

$$q(a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}\, r^{n-2}\, q + \cdots + a_1\, rq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -\,a_nr^n \quad (4)$$

Ahora, como el primer miembro de (4) es un entero que tiene a q como factor; q debe ser un factor del segundo miembro $-\,a_nr^n$. Como q carece de factor común con r, se deduce que q debe ser un factor de a_n.

Conviene aclarar que el teorema no garantiza que un polinomio con coeficientes enteros tenga un cero racional; sin embargo, el teorema indica los medios para hallar los números que podrían ser ceros racionales.

Ejemplo. Supóngase $p = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$.

Solución: Sabemos que cualquier cero racional $\frac{r}{q}$ de p debe ser tal que r sea un factor entero de -2 y q sea un factor entero de 3. Por lo tanto los posibles valores de r son 1, -1, 2 y -2; y los posibles valores de q serán 1, -1, 3 y -3. De esta manera el conjunto posible de ceros racionales de p es:

$$\{1, -1, 2, -2, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3\}$$

Como p es de grado 3, no más de tres números de este conjunto pueden ser raíces del polinomio.

Utilizando el teorema del resto se tiene que $p(-1) = 0$, por lo que -1 es una de las raíces del p y además $x + 1$ tendrá que ser un factor de p y se tiene que.

$$p = (x + 1)(3x^2 - 5x - 2)$$

Los otros dos ceros de p se pueden calcular resolviendo la ecuación:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Resumen

Cuando se trabajan con polinomios, conviene tener bien presentes los siguientes teoremas y propiedades.

Teorema 1. *Algoritmo de la división.*

Sean, p(x) un polinomio de grado $n \geq 1$ y d(x) un polinomio de grado m con $1 \leq m \leq n$. Entonces existen polinomio únicos q(x) y r(x), que tienen la propiedad de que:

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

y si r(x) tiene un grado (es decir, si r(x) no es el polinomio nulo), entonces este grado es menor que el grado de d(x).

Teorema de Bezout

Si a y b son dos polinomios primos entre sí, existe un único par (u, v) de polinomios tales que:

$$au + bv = 1 \qquad g^o(u) < g^o(b); \quad g^o(v) < g^o(a).$$

Teorema de Gauss

Si un polinomio "a" divide al polinomio producto "bc" y si "a" es primo con "b", "a" divide "a c".

Polinomio irreducible

Definición:

Un polinomio a de K[x] de grado estrictamente positivo es irreducible si, y solamente si, a no es divisible por ningún polinomio de K[x] de grado no nulo estrictamente inferior al grado de a.

Por ejemplo, todo polinomio de grado 1 es un polinomio irreducible.

OBSERVACIÓN. El carácter de irreducibilidad de un polinomio depende del cuerpo K. Así, $x^2 - 3$ es un polinomio irreducible de Q[x] y no lo es de R[x].

Teorema 2. *Teorema fundamental del Álgebra.*

Cualquier polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene, al menos, una raíz.

Teorema 3

El polinomio complejo $p(x) = ax^2 + bx + c$ es siempre reducible sobre el cuerpo C.

Teorema 4. *Teorema del residuo.*

Si un polinomio $p(x)$ es dividido por $x - r$, para obtener un cociente $q(x)$ y un residuo R, entonces $p(r) = R$.

Teorema 5. *Teorema del factor*

Sean, $p(x)$ un polinomio y r un escalar. Entonces r es una raíz de $p(x)$ sí y sólo sí $x - r$ es un factor de $p(x)$.

Ejemplo: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$.

Teorema 6.

Un polinomio complejo $p(x)$ de grado $n \geq 1$, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$, puede ser expresado como el producto del número complejo a_0 y n factores de primer grado de la forma $x - r_i$ donde $r_i \in C$ ($i = 1,2,3,\cdots,n$). Es decir, la factorización completa de $p(x)$ es:

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})(x - r_n).$$

Cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición.-

Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si, y solamente sí, todo polinomio de grado estrictamente positivo de $K[x]$ admite al menos un cero en K.

Teorema 7.

Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si, y solamente si, los únicos polinomios irreducibles de $K[x]$ son los polinomios de primer grado.

Q no es algebraicamente cerrado ya que el polinomio $x^2 - 3$ no tiene ceros en **Q**.

R no es algebraicamente cerrado ya que el polinomio $x^2 + 4$ no tiene ceros en **R.**

Corolario

Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si, y solamente si, todo polinomio de K[x] es divisible sobre K.

Teorema 8.

Un polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene cuando más n raíces. Un polinomio de grado cero no tiene raíz.

Consecuencias

- Todo polinomio no nulo de grado n de C[x] admite n ceros en C.
- Todo polinomio no nulo de C[x] es divisible sobre C.

Bibliografía:

La Bibliografía referida al tema desarrollado es muy amplia pero, para elaborar ésta guía de estudio se ha tenido en cuenta fundamentalmente los libros que se citan abajo. De cualquier manera, cualquiera de los libros de Álgebra que aparecen en la Bibliografía general del Programa Analítico de la Asignatura Álgebra 2, pueden servir para completar el estudio de éste tema.

Ayres, F.Jr. *Álgebra Moderna*. Libros McGraw-Hill.
Gentile, E. *Notas de Álgebra*. Eudeba.
Leithold, L. *Matemáticas Previas al Cálculo*. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar.
Pécastaings, F. *Chemins vers l'Algèbre*. Vuibert.
Queysanne, M. *Álgebra Básica*. Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. *Cours de Mathématiques epéciales*. Masson.
Taylor, H.E.; Wade, T.L. *Matemáticas Básicas*. Editorial Limusa. Wiley, S. A.

Ejercicios propuestos

1. Dar el grado y los coeficientes, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, para cada uno de los siguientes polinomios.

a) $p(x) = 6x^3 - 17x^2 + 11x - 2$; b) $p(x) = x^2 + 2$; c) $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$;
d) $p(x) = x^4 - 3x^3$; e) $p(x) = 5x^2 - 7x^3 + 9x - 7 + x^5$; f) $p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$;

2. Para p(x) dado en el ejercicio 1a, calcular los valores : p(-1); P(0); p(1); p(2); p(3).

3. Para p(x) dado en el ejercicio 1b, calcular los valores: p(-5); p(-4); p(-3); p(-2); p(-1); p(0); p(1); p(2); p(3); p(4).

4. Para $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$, determinar: p(0); p(1); p(-2) y verificar si la igualdad dada por 2p(-1) = p(3) -1 es verdadera.

5. Sean los polinomios: $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 5x - 1$; $q(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 5$, determine:

a) $g°(p^2 - q^3)$; b) el coeficiente de x^6 en p(x) . q(x);
c) g°(p + q); d) el coeficiente de x^{10} en p(x) q(x)

6. Sean $p(x) = x^3 - 2x + 3$; $q(x) = 2x^5 -5x^4 - 3x^3 + 2x^2$.

Determinar polinomios t(x) y r(x) tales que: $q(x) = p(x)·t(x) + r(x)$.

7. En cada uno de los siguientes ejercicios, determinar la solución de la ecuación dada, si el referencial es **C**.

a) $(2 - 5i)x + 7 - 4i = 0$; b) $(6 + 7i)x + 11 = 0$;
c) $(5^{1/2} - 3)x + 4 - 7^{1/2} = 0$; d) $11/6\ x + 13/8 = 0$.

8. Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ por $x^2 - 3x + 1$; b) $x^5 - x^4 + 1$ por $2x^3 - 2x$;
c) $-4x^3 + x^2$ por $x + ½$; d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x - 1$;
e) $x^2 + x + 1$ por x^2; f) $x^3 + x^2 + 1$ por $x + 1$.

9. Hallar el cociente y el resto de la división de: $x^m - 1$ por $x^n - 1$.

10. Factorizar:

a) $5x^4 – 245$; b) $7x^4 - 847$; c) $x^4 - 5x^2 + 6$ (hacer $z = x^2$); d) $x^4 - x^2 - 20$.

11. Dividir $x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 49x + 3$ por $2x^2 + 3x - 2$, identificar el cociente y el resto en esta división, y escribir su resultado en la forma de la igualdad: p/q = c + r/q.

12. Dividir $x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 49x - 36$ por x + 2 , identificar el cociente y el resto en esta división y escribir su resultado en la forma de la igualdad p = qc + r.

13. En cada uno de los siguientes ejercicios comprobar el teorema del residuo para el polinomio, dado p(x) y el número a, primero calculando p(a) y luego determinando el resto cuando p(x) es dividido por x - a hasta obtener un resto cte, y finalmente, observar que p(a) = resto.

a) $p(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$, a =5; b) $p(x) = x^5 - 3x^3 + 5x - 7$, a= -2 ;

c) $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $a = k$.

14. En cada uno de los ejercicios siguientes, demostrar que el primer polinomio es un factor del segundo.

a) $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$; b) $x + 2$, $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; c) $y + 1$, $y^4 - 1$.

15. En cada uno de los ejercicios, dar las raíces del polinomio y la multiplicidad de cada uno.

a) $(x + 3)^2 \cdot (x - 2)^3 \cdot x$; b) $(x^2 + 3x + 2)^2 \cdot (x + 2)$; c) $(x^2 + 9) \cdot (x + 3i)^2 \cdot (x - 3i)^3$.

16. Factorizar completamente los siguientes polinomios.

a) Si una raíz de $p(x) = x^3 - 5x^2 - 17x + 21$ es 7;
b) Si una raíz de $p(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x$ es -2;
c) Si $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$, tiene a 1 como raíz de multiplicidad 3.

17. Determinar una ecuación polinomial compleja si la solución es la dada por:

$$\{1, 2, 2 + i\,(3)^{1/2} ; 2 - i\,(3)^{1/2}\}$$

18. Determinar un polinomio p(x) de tercer grado, que tenga como raíces: $1 + (3)^{1/2}$ y $1 - (3)^{1/2}$; ésta última con multiplicidad dos.

19. Encontrar el máximo común divisor de:

a) $2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ y $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; b) $x^4 - 6x^2 - 8x - 3$ y $x^3 - 3x - 2$
c) $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ y $x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1$.

Ejercicios y problemas resueltos

Ejemplo 1. – Sean $p = x^3 + 1$ y $q = x^4 + 1$.

- Mostrar que son primos entre sí y entonces $u\,p + v\,q = 1$. Determinar u y v.

Solución. Dividimos q por p, es decir:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3 + 1 \\ \cline{2-2} x^4 \qquad\qquad\quad + x & x \\ \hline -x + 1 & \end{array}$$

por consiguiente:

$$x^4 + 1 = x(x^3 + 1) - x + 1; \text{ es decir } q = x\,p - x + 1 \text{ o también } q = x\,p - (x - 1),$$

ahora dividimos:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & + 0x^2 & + 0x & + 1 & x - 1 \\ \hline x^3 & - x^2 & & & x^2 + x + 1 \\ \hline & x^2 & & + 1 & \\ & x^2 & - x & & \\ \hline & & x & + 1 & \\ & & x & - 1 & \\ \hline & & & 2 & \end{array}$$

por lo tanto:

$$p = x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + 2, \text{ o también } \qquad 2 = p - (x^2 + x + 1)(x - 1),$$

y entonces como $x - 1 = x\,p - q$, podemos escribir:

$$2 = p - (x^2 + x + 1)(x\,p - q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2 = p - [(x^2 + x + 1)x\,p - (x^2 + x + 1)q] \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2 = p - (x^2 + x + 1)x \cdot p + (x^2 + x + 1)q \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2 = p\,[1 - (x^3 + x^2 + x)] + (x^2 + x + 1)q \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2 = p\,(- x^3 - x^2 - x + 1) + (x^2 + x + 1)q \quad \text{luego:}$$

$$u = \tfrac{1}{2}(1 - x - x^2 - x^3) \quad \text{y} \quad v = \tfrac{1}{2}(x^2 + x + 1)$$

<u>Ejemplo 2</u>. – Demostrar que el polinomio de $R[x]$

$$P = 36\,x^4 + 12\,x^3 - 11\,x^2 - 2x + 1,$$

tiene dos raíces dobles; determínese esas raíces.

<u>Solución:</u>

Si α_1 y α_2 son raíces dobles de P; entonces:

$$P(\alpha_i) = 0 \qquad \text{y} \qquad P'(\alpha_i) = 0$$

y luego los reales α_i son raíces del polinomio R resto de la división euclidiana de P por P':

$$P = P'Q + R \qquad \text{con} \quad g^o(R) < 3$$

y el resto será de grado inferior o igual a dos, α_1 y α_2 son entonces raíces de R.

Se tiene $P' = 2[72x^3 + 18x^2 - 11x - 1]$ de donde se deduce:

$$R = -\frac{25}{24}(6x^2 + x - 1)$$

Por consiguiente si P admite dos raíces dobles α_1 y α_2 necesariamente

$$\alpha_1 = -1/2 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 1/3$$

Ejemplo 3. Sea n un entero estrictamente positivo, $F_n = (x^2 - 1)^n$ y P_n el polinomio derivado de orden n de F_n.

1º- Calcular: P_1; P_2 y P_3; $F_1 = (x^2 - 1)^1$; $F_2 = (x^2 - 1)^2$; $F_3 = (x^2 - 1)^3$.

Solución:

$P_1 = 2x$; $F_1' = 4x(x^2 - 1) \Rightarrow P_2 = 4(x^2 - 1) + 4x \,.\, 2x = 4(x^2 - 1 + 2x^2) = 4(3x^2 - 1)$

$F_3 = (x^2 - 1)^3. \Rightarrow F_3' = 3 \cdot 2x(x^2 - 1)^2 = 6x(x^2 - 1)^2$

$F_3'' = 6(x^2 - 1)^2 + 6x \cdot 2x \cdot 2(x^2 - 1) = 6(x^2 - 1)^2 + 24x^2(x^2 - 1) \Rightarrow$

$P_3 = 6 \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 1) + 48x(x^2 - 1) + 24x^2 \cdot 2x = 24x(x^2 - 1) + 48x(x^2 - 1) + 48x^3 =$

$P_3 = 24x[(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) + 2x^2] = 24x(x^2 - 1 + 2x^2 - 2 + 2x^2) = 24x(5x^2 - 3)$.

Ejemplo 4. Determínese los ceros del polinomio $p = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$, sabiendo que admite dos ceros distintos, donde el producto es igual a -6.

Solución:

Sean x_1 y x_2 dos ceros distintos de P, tales que $x_1 \cdot x_2 = -6$.

Tomamos $x_1 + x_2 = \alpha$. Entonces el polinomio P es divisible por polinomio $x^2 - \alpha x - 6$.

Luego de $P = (x^2 - \alpha x - 6)(x^2 - \beta x - 6)$, se deduce que:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 &= x^4 - \beta x^3 - \alpha x^3 - 6x^2 - 6x^2 + \alpha\beta x^2 + 6\beta x + 6\alpha x + 36 = \\ &= x^4 - (\alpha + \beta)x^3 - (12 - \alpha\beta)x^2 + (6\beta + 6\alpha)x + 36 \end{aligned}$$

por consiguiente:

$(\alpha + \beta) = 2;\qquad 12 - \alpha\beta = -11 \;\Rightarrow\; \alpha\beta = 1;\qquad 6\beta + 6\alpha = 12 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 2;$

α y β son las raíces del trinomio: $t^2 - 2t + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 1$

de lo que resulta que:

$P = (x^2 - \alpha x - 6)^2 = (x - 3)^2(x + 2)^2$ y los ceros son -2 y 3 y son dobles.

Ejemplo 5. Determinar un complejo α para que el polinomio $P = x^3 + 6x^2 - 6x + \alpha$, admita dos raíces donde la suma y el producto sean iguales. $P(x) \in \mathbf{C}[x]$.

Solución:

Sean x_1 y x_2 dos raíces de P tales que $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 = a$

De $P = x^3 + 6x^2 - 6x + \alpha = Q\cdot(x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + a) = Q\cdot(x^2 - a\cdot x + a)$; podemos ahora determinar Q y el resto haciendo el cociente entre P(x) y $x^2 - a\cdot x + a$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 6x^2 - 6x + \alpha & x^2 - a\cdot x + a: \\ \cline{2-2}
x^3 - ax^2 + ax & x + (6 + a) \\ \cline{1-1}
\quad (6 + a)x^2 - (6 + a)x + \alpha & \\
\quad (6 + a)x^2 - (6 + a)ax + (6 + a)a & \\ \cline{1-1}
\quad\quad -(6 + a)x + (6 + a)ax + (\alpha - (6 + a)a) &
\end{array}
$$

Observar que:

$$
\begin{aligned}
-(6 + a)x + (6 + a)ax + (\alpha - (6 + a)a) &= (6 + a)x(-1 + a) - (6 + a)a + \alpha = \\
&= - 6x + 6ax - ax + a^2x - (6a + a^2 + \alpha)
\end{aligned}
$$

De acuerdo al algoritmo de la división, se tiene:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x^2 - a\cdot x + a)(x + 6 + a) - 6x + 6ax - ax + a^2x - (6a + a^2 + \alpha) = \\
&= (x^2 - a\cdot x + a)(x + 6 + a) + (a^2x + 6ax - ax - 6x) - (a^2 + 6a - \alpha) = \\
&= (x^2 - a\cdot x + a)(x + 6 + a) + (a^2 + 5a - 6)x - (a^2 + 6a - \alpha) =
\end{aligned}
$$

y como P es múltiplo de $x^2 - a\cdot x + a$ tendrá que ser el resto de la división igual a cero, es decir:

$(a^2 + 5a - 6) = 0$ y $a^2 + 6a - \alpha = 0$, por lo tanto será ($a = 1$ o $a = - 6$) y $\alpha = a^2 + 6a$

Se distinguen dos casos:

1º $a = 1$; de donde $\alpha = 7$. Entonces las raíces tendrán que verificar:

$$P = (x^2 - x + 1)(x + 7)$$

Entonces, de $x + 7 = 0$, se deduce que una raíz es $x_1 = 7$ y las otras resultan de resolver $x^2 - x + 1 = 0$.

O sea: $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; es decir: $x_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2º $a = -6$ de donde $\alpha = 0$, y las raíces de P son:

0; $-3 + \sqrt{15}$; $3 - \sqrt{15}$

5. Cuerpo de las fracciones racionales

5.1. Cuerpo de las fracciones racionales

Sabemos que el conjunto $K[x]$ de los polinomios con una indeterminada sobre un cuerpo conmutativo K de un dominio de integridad. Sin embargo, la multiplicación de polinomios no define estructura de grupo en tal conjunto, puesto que no todo polinomio admite inverso; por consiguiente, $K[x]$ no es un cuerpo.

Se plantea ahora en $K[x]$ el mismo problema que se estudió en Álgebra 1 a propósito de la construcción del cuerpo de los números racionales a partir del anillo de los enteros relativos. Se trata aquí de prolongar el dominio de integridad $K[x]$ a un conjunto más amplio, y que sea un cuerpo conmutativo. O sea, el problema es la *construcción del cuerpo de las fracciones de un dominio cualquiera de integridad.*

Escribiremos $K[x]^* = K[x] - \{0\}$.

5.1.1. Fracciones racionales

Recibe el nombre de *fracción racional* un par (a, b) de $K[x] \times K[x]]^*$; a se llama *numerador*, y b *denominador*. Se denota por a/b.

Dos fracciones racionales a/b y c/d son *equivalentes* si $ad = bc$, y se escribe $a/b \equiv c/d$.

La anterior equivalencia en $K[x] \times K[x]^*$, cuyo conjunto cociente, $F_K[x]$, es el conjunto de las clases de equivalencia de las fracciones racionales con una indeterminada sobre el cuerpo K. Cuando se desee poner en evidencia un representante a/b de una clase de $F_K[x]$ se utilizará la notación $\left[\frac{a}{b}\right]$ para designar dicha clase.

5.1.2. Fracción irreducible

Sea $\left[\frac{a}{b}\right] \in F_K[x]$. Si $d = \text{m.c.d.}(a,b)$, existen entonces dos polinomios a_1 y b_1 de $K[x]$ tales que:

$$a = da_1; \quad b = db_1; \quad \text{m.c.d.}(a_1,b_1) = 1,$$

de donde se deduce que:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a_1}{b_1} \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a_1}{b_1}\right].$$

La fracción a_1/b_1, cuyos términos son primos entre sí, se llama *irreducible.* Es el representante más sencillo de la clase $\left[\frac{a}{b}\right]$.

Toda fracción c/d equivalente a la a/b es de la forma pa_1/pb_1 con $p\in K[x]$. En efecto:

$$\frac{c}{d} \approx \frac{a_1}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad cb_1 = da_1$$

Entonces:

$$[\, a_1/da_1 \;\Rightarrow\; a_1/cb_1 \;\text{ y }\; \text{m.c.d.}(a_1,b_1)= 1] \quad\Rightarrow\quad a_1 / c.$$

Por consiguiente, existe $p \in K[x]$ tal que $c = pa_1$, de donde $d = pb_1$ y la propiedad queda demostrada.

5.1.3. Leyes de composición en $F_K[x]$

Definamos en $F_K[x]$ dos leyes de composición (al igual que en el conjunto Q de los racionales).

Adición: $$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad+bc}{bd}\right].$$

Multiplicación: $$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ac}{bd}\right].$$

Estas dos leyes en $F_K[x]$ no dependen de los representantes elegidos para las clases; son asociativas y conmutativas.

La adición admite como elemento neutro $\left[\frac{0}{b}\right]$, y la multiplicación, $\left[\frac{b}{b}\right]$- Estas dos leyes dan a $F_K[x]$ estructura de grupo conmutativo.

El opuesto de $\left[\frac{a}{b}\right]$ para la adición es $\left[\frac{-a}{b}\right]$. Para la multiplicación, el inverso de $\left[\frac{a}{b}\right]$ es $\left[\frac{b}{a}\right]$.

Además, como la segunda operación es distributiva respecto de la adición, se verifica el teorema siguiente:

Teorema 1

$F_K[x]$ *es un cuerpo conmutativo.*

5.2. Descomposición de una fracción racional sobre un cuerpo conmutativo

5.2.1. Parte entera de una fracción racional

Consideremos el conjunto $F_K[x]$ de las clases de fracciones racionales sobre un cuerpo conmutativo cualquiera K. A todo elemento de $F_K[x]$ asociamos su representante irreducible a/b (m.c.d. $(a,b) = 1$).

Hagamos la división euclidiana de a por b en $K[x]$:

$$a = bq + r \qquad g^o(r) < g^o(b).$$

En $F_K[x]$, se podrá entonces escribir:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \qquad g^o(r) < g^o(b).$$

La fracción r/b es irreducible [puesto que m.c.d.(a, b) = m.c.d.(b, r)], y el grado de su numerador es estrictamente inferior al de su denominador. El polinomio q se llama *parte entera de la fracción racional a/b*. Es claro que la descomposición es única, debido a la unicidad de la división euclidiana en $K[x]$.

Teorema 2

Sea $r/b \in F_K[x]$ tal que: m.c.d.$(r, b) = 1$; $g^o(r) < g^o(b)$ y $b = b_1 b_2 \cdots b_n$, siendo los n polinomios b_i primos entre sí dos a dos; existen entonces n polinomios r_i tales que:

$(\forall i \in [1, n]$ $\quad g^o(r_i) < g^o(b_i);$ $\quad$ m.c.d.$(r_i, b_i) = 1$ $\quad$ y

$$\frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} + \cdots + \frac{r_n}{b_n}$$

Además, a cada descomposición $b_1 b_2 \cdots b_n$ de b en factores primos dos a dos, corresponde una única descomposición de r/b tal como la anterior.

Demostración.

1º.-Veamos primero que el teorema es cierto para $n = 2$. Supongamos que $b = b_1 b_2$ con m.c.d.$(b_1, b_2) = 1$.

Por el teorema de Bezout, existen dos polinomios v_1 y v_2 de $K[x]$ tales que $v_2 b_1 + v_1 b_2 = 1$. Por consiguiente, cualquiera que sea $r \in K[x]$, hay dos polinomios

$$u_1 = v_1 r \quad \text{y} \quad u_2 = v_2 r,$$

es decir que:

$$v_1 = \frac{u_1}{r} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{u_2}{r};$$

reemplazando en la ecuación $v_2 b_1 + v_1 b_2 = 1$ nos queda,

$$\frac{u_2}{r} b_1 + \frac{u_1}{r} b_2 = 1$$

de manera que:

$$u_2 b_1 + u_1 b_2 = r \qquad (1)$$

Efectuemos las divisiones euclidianas de u_1 por b_1 y de u_2 por b_2:

$$u_1 = b_1 q_1 + r_1 \qquad g^o(r_1) < g^o(b_1)$$
$$u_2 = b_2 q_2 + r_2 \qquad g^o(r_2) < g^o(b_2).$$

sustituyendo en (1), se obtiene:

$$b_1 b_2 \, (q_1 + q_2) + r_2 b_1 + r_1 b_2 = r.$$

Probemos que $q_1 + q_2 = 0$. En efecto, si fuera $q_1 + q_2 \neq 0$, el grado del primer miembro sería al menos igual al de $b_1 b_2$; ahora bien, el polinomio r del segundo miembro tiene, por hipótesis, un grado estrictamente inferior al de $b = b_1 b_2$ y, por tanto, suponer $q_1 + q_2 \neq 0$ implica una contradicción. Luego $q_1 + q_2 = 0$ y, por consiguiente:

$$r_2 b_1 + r_1 b_2 = r,$$

de donde

$$\frac{r}{b_1 b_2} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} \qquad \text{con} \quad g^o(r_1) < g^o(b_i) \qquad (i = 1, 2).$$

Demostremos ahora que m.c.d.$(r_i,b_i) = 1$ $(i = 1,2)$.

Como el razonamiento es el mismo para los dos índices, lo haremos para $i = 1$.

1º. Sea $d = \text{m.c.d.}(r_1,b_1)$. Entonces, como r_1 es el resto de la división euclidiana de u_1 por b_1, se tiene que $d \mid u_1$.

En virtud de (1), y de que $b = b_1b_2$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} (d \mid u_1 \ \text{ y } \ d \mid b_1) \Rightarrow d \mid r \\ d \mid b_1 \qquad \Rightarrow d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow \ d \mid \text{m.c.d.}(b,r).$$

Como, por hipótesis, m.c.d. = 1; entonces $d = 1$, y r_1 y b_1 son primos entre sí.

Queda por demostrar que la descomposición hallada de r/b, asociada al producto b_1b_2 de b, es única. En efecto, si existieran dos pares (r_1, r_2) y (r_1', r_2') asociados a $b_1b_2 = b$, entonces:

$$r_1b_2 + r_2b_1 = r_1' b_2 + r_2' b_1,$$

de donde:

$$(r_1 - r_1')b_2 = (r_2' - r_2)b_1.$$

Teniendo en cuenta el teorema de la divisibilidad:

$$\left.\begin{array}{r} b_1 \mid (r_1 - r_1')b_2 \\ \text{m.c.d.}(b_1, b_2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ b_1 \mid (r_1 - r_1').$$

Como, $g^o(r_1) < g^o(b_1)$ y $g^o(r_1') < g^o(b_1)$, se tiene:

$$g^o(r_1 - r_1') \leq \text{máx}\{g^o(r_1), g^o(r_1')\} < g^o(b_1).$$

Por consiguiente:

$$\left.\begin{array}{r} g^o(r_1 - r_1') < g^o(b_1) \\ b_1 \mid (r_1 - r_1') \end{array}\right\} \Rightarrow \ r_1 - r_1' = 0.$$

La igualdad $r_1 = r_1'$ implica que $r_2 = r_2'$, y la descomposición es única.

2º. Razonemos por inducción sobre n. Supongamos que, dada una fracción irreducible r/b con $g^o(r) < g^o(b)$ y m.c.d.$(r, b) = 1$, para toda descomposición de b en producto de $n - 1$ polinomios $b_1b_2 \cdots b_{n-1}$ primos entre sí dos a dos, exista una descomposición única:

$$\frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{b_{n-1}}$$

con

$$g^o(r_i) < g^o(b_i) \quad y \quad m.c.d.(r_1, b_i) = 1 \qquad (\forall i \in [1, n[\subset N).$$

Demostremos entonces el teorema para toda descomposición de b en un producto $b_1 b_2 \cdots b_n$ de n polinomios primos entre sí dos a dos. Observemos que $b = (b_1 b_2 \cdots b_{n-1})\, b_n$ y, por ser b_n primo con cada uno de los b_i $(i < n)$, es primo con su producto $b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$.

Apliquemos la primera parte de la demostración a la descomposición de b en producto de dos factores primos entre sí; se obtiene:

$$\frac{r}{b} = \frac{c}{b_1 \cdots b_{n-1}} + \frac{r_n}{b_n}$$

con

$$g^o(\, c) < g^o\,(b_1 b_2 \cdots b_{n-1}), \qquad g^o(r_n) < g^o\,(b_n)$$

$$m.c.d.\,(c, b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) = 1 \qquad m.c.d.(r_n, b_n) = 1$$

y esta descomposición es única.

Apliquemos ahora la hipótesis de inducción a la fracción $\dfrac{c}{b_1 \cdots b_{n-1}}$ y se obtiene:

$$\frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{r_n}{b_n}$$

con

$$g^o(r_i) < g^o(b_i) \quad y \quad m.c.d.(r_1, b_i) = 1 \qquad (\forall i \in [1, n] \subset N)$$

y esta descomposición es única. El teorema 2 está demostrado.

CONSECUENCIA

Apliquemos al denominador b de la fracción irreducible a/b la descomposición en *factores primos* en K[x]. Sabemos que esta descomposición, $b = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n}$, es única, salvo el orden de los factores.

Puesto que p_i y p_j son primos y distintos para $i \neq j$, también los son $p_i^{h_i}$ y $p_j^{h_j}$, y se puede aplicar el teorema 2 a tal descomposición de b en factores primos. Se obtiene:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{p_1^{h_1}} + \cdots + \frac{r_n}{p_n^{h_n}} \qquad g^o(r_i) < g^o(\, p_i^{h_i}\,)$$

donde q es la parte entera de a/b.

5.3. Descomposición de una fracción irreducible

Vamos a proseguir la descomposición sobre cada una de las fracciones del tipo r/p^h, con $g^o(r) < g^o(p^h)$. Como paso previo, vamos a demostrar la siguiente propiedad:

Propiedad 1

Toda fracción irreducible racional r/p^h *con* $g^o(r) < g^o(p^h)$ *puede descomponerse de manera única en la forma:*

$$\frac{r}{p^h} = \frac{\rho_h}{p^h} + \frac{\rho_{h-1}}{p^{h-1}} + \cdots + \frac{\rho_1}{p}$$

Con

$$(\forall i \in [1, h]) \qquad g^o(\rho_i) < g^o(p).$$

Razonemos por inducción sobre h.

-La propiedad es cierta para $h = 1$.

-Supongamos que se verifica para $h - 1$; es decir, supongamos que toda fracción racional irreducible q/p^{h-1}, se descompone en la forma:

$$\frac{q}{p^{h-1}} = \frac{\rho_{h-1}}{p^{h-1}} + \cdots + \frac{\rho_1}{p} \qquad g^o(\rho_i) < g^o(p) \quad (1 \le i \le h - 1),$$

y supongamos también que esta descomposición es única. Demostremos entonces la propiedad para cualquier fracción irreducible r/p^h.

Efectuemos la división euclidiana de r por p en $K[x]$:

$$r = pq + \rho_h, \qquad g^o(\rho_h) < g^o(p).$$

Dividamos los dos miembros por p^h:

$$\frac{r}{p^h} = \frac{q}{p^{h-1}} + \frac{\rho_h}{p^h}$$

Esta descomposición es única, a causa de la unicidad de la división euclidiana en $K[x]$.

5.3.1. Descomposición en elementos simples

Teorema 3

Toda fracción irreducible a/b *en* $F_K[x]$*, tal que* $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n}$ *sea la descomposición de* b *en factores primos en* K[x]*, se descompone de manera única en una suma de la forma:*

$$\frac{a}{b} = q + \frac{\alpha_{h_1}}{p_1^{h_1}} + \frac{\alpha_{h_1-1}}{p_1^{h_1-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{p_1} \qquad g^o(\alpha_i) < g^o(p_i)$$

$$+ \frac{\beta_{h_2}}{p_2^{h_2}} + \frac{\beta_{h_2-1}}{p_2^{h_2-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{p_1} \qquad g^o(\beta_i) < g^o(p_i)$$

$$+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\lambda_{h_n}}{p_n^{h_n}} + \frac{\lambda_{h_n-1}}{p_n^{h_n-1}} + \cdots + \frac{\lambda_{11}}{pn} \qquad g^o(\lambda_i) < g^o(p_i).$$

DEFINICIONES

Toda fracción racional λ/p^h, con $g^o(\lambda) < g^o(p)$ y p primo en K[x], se llama *elemento simple o fracción simple* en F[x].

Cuando se ha determinado la suma del teorema 3, se dice que la *fracción* a/b *se ha descompuesto en elementos simples.*

5.3.2. Descomposición sobre el cuerpo de los números complejos

5.3.2.1. Parte principal relativa a un polo

Sabemos que el cuerpo C es algebraicamente cerrado; es decir, que todo polinomio primo en C[x] es de primer grado. La descomposición en factores primos de cualquier polinomio $b \in C[x]$ es de la forma:

$$b = \beta(x - \alpha_1)^{h_1}(x - \alpha_2)^{h_2} \cdots (x - \alpha_n)^{h_n}$$

donde $\beta \in \mathbf{C}$ y, para todo i, $\alpha_i \in \mathbf{C}$ y $h_i \in \mathbf{N}$.

Los ceros α_i del denominador de la fracción a/b, que pertenecen a $F_C[x]$, se llaman *polos de la fracción*; el orden de multiplicidad h_i del cero α_i es el *orden del polo* α_i de la fracción a/b.

Todo *elemento simple* en $F_C[x]$ es de la forma $\lambda/(x-\alpha)^n$, donde λ es una *constante* ($\lambda \in$ **C**) y n un número natural.

Según el teorema 3, la descomposición en elementos simples de una fracción $a/b \in F_C[x]$ es, en general, el resultado de sumar la parte entera (polinomio de C[x]) con sumas parciales del tipo:

$$\frac{\lambda_h}{(x-\alpha)^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{(x-\alpha)^{h-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{x-\alpha},$$

siendo α un polo de orden h de la fracción a/b.

Tal suma de elementos simples recibe el nombre de *parte principal relativa al polo* α.

5.3.3. Determinación de la parte principal

En la práctica, para obtener esta parte principal se pasa a las *funciones racionales;* observemos que:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x)}{(x-\alpha)c(x)}, \qquad \text{con } c(\alpha) \neq 0.$$

Se toma entonces $x - \alpha$ como una nueva indeterminada y, haciendo $y = x - \alpha$.

Efectuada esta sustitución, a(x) se convierte en un polinomio $a_1(y)$, y c(x), en $c_1(y)$, con lo que la fracción a/b toma la forma $a_1(y)/y^h c_1(y)$.

Hagamos la división de $a_1(y)$ por $c_1(y)$, según las potencias crecientes hasta el orden h –1 se obtiene:

$$a_1(y) = [\lambda_h + y\lambda_{h-1} + \cdots + y^{h-1}\lambda_1]c_1(y) + y^h d(y), \qquad (1)$$

donde los números λ_i son los coeficientes del cociente, e $y^h d(y)$ es el resto de la división.

En $F_C[y]$, obtendremos:

$$\frac{a_1(y)}{y^h c_1(y)} = \frac{\lambda_h}{y^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{y^{h-1}} + \cdots \frac{\lambda_1}{y} + \frac{d(y)}{c_1(y)},$$

y, como $c_1(0) \neq 0$, el teorema 3 prueba que la suma $\lambda_h/y^h + \cdots + \lambda/y$ es la parte principal relativa al polo cero, de orden h, de $a_1(y)/y^h c_1(y)$.

Por consiguiente, los $\lambda_i \cdots, \lambda_h$ así determinados son los coeficientes de la parte principal relativa la polo α de $a/b \in F_C[x]$.

Para tener en cuenta

1º. Si en (1) reemplazamos y por 0, se obtiene $a_1(0) = \lambda_h c_1(0)$. Por consiguiente:

$$\lambda_h = \frac{a(\alpha)}{c(\alpha)} \qquad (2)$$

relación que da el coeficiente del elemento simple de mayor grado del polo α

Señalemos que (1) es también cierta si $h = 1$, es decir, en el caso de un *polo simple*, de manera que la relación anterior determina en tal caso el único elemento simple de la parte principal relativa a un polo simple.

2º. En el caso de un polo simple, cabe emplear aún otra relación. Si α es un polo simple de a/b, entonces:

$$b(x) = (x - \alpha)c(x), \text{ con } c(\alpha) \neq 0.$$

Tomando los polinomios derivados, se obtiene:

$$b'(x) = c(x) + (x - \alpha)c'(x),$$

de donde $b'(\alpha) = c(\alpha)$, y la relación (2) da entonces como coeficiente λ relativo al polo simple α la expresión $\lambda = a(\alpha)/b'(\alpha)$.

Ejemplos

1. En $F_C[x]$, descompóngase la fracción $\frac{1}{x^3 - 1}$. Como el grado del numerador es estrictamente inferior al del denominador, la parte entera de la descomposición es nula. Por otra parte, la descomposición en factores primos del denominador es:

$$x^3 - 1 = (x - i)(x - j)(x - k),$$

siendo i, j, k las raíces cúbicas de la unidad, además k es el conjugado de j.

Ya que cada uno de estos números es un polo simple, se tiene la descomposición:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{\lambda}{x-1}+\frac{\mu}{x-j}+\frac{\nu}{x-k}$$

Para determinar λ, μ, ν, sabemos que

$$b(x) = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad b'(x) = 3x^2.$$

y de acuerdo a 2º anterior lo coeficientes se pueden calcular como:

$$\lambda = a(1)/b'(1) = 1/3; \qquad \mu = a(j)/b'(j) = 1/3j^2; \qquad \nu = a(k)/b'(k) = 1/3k^2.$$

con lo que la descomposición buscada es:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{\lambda}{x-1}+\frac{j}{x-j}+\frac{k}{x-k}\right].$$

5.3.4. Descomposición sobre el cuerpo de los números reales

Elementos simples en $F_R[x]$.-

Sabemos que el cuerpo R no es algebraicamente cerrado, y que los polinomios primos en R[x] son de dos clases:

1º Los polinomios de primer grado.

2º Los de segundo grado $ax^2 + bx + c$, para los cuales $b^2 - 4ac < 0$.

En $F_R[x]$ existen, por tanto, dos clases de elementos simples:

- el elemento simple de *primera especie*, del tipo:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \qquad \text{con} \qquad A \in R \qquad \text{y} \qquad n \in N.$$

- Y el elemento de *segunda especie, de la forma:*

$$\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \qquad \text{con } A, B \in R; \qquad n \in N \qquad y \qquad b^2 - 4ac < 0.$$

Determinación de los elementos de primera especie

Todo lo dicho al tratar la descomposición en $F_C[x]$ es aplicable a los elementos de primera especie en $F_R[x]$.

Ejemplo: Descompóngase la fracción $\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}$ en $F_R[x]$.

Puesto que el grado del numerador es inferior al del denominador, la parte entera es nula. Por otra parte los divisores primos del denominador son de primer grado en **R**[x]:

$$(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2;$$

Por consiguiente, en la descomposición pedida hay sólo elementos simples de primera especie:

$$\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)} \quad (1)$$

La función es par, entonces:

$$\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{A}{(-x-1)^2} + \frac{A_1}{(-x-1)} + \frac{B}{(-x+1)^2} + \frac{B_1}{(-x+1)}$$

$$\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} - \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)^2} - \frac{B_1}{(x-1)} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), tenemos que: $A = B$ y $A_1 = - B_1$.

Determinación de los elementos de segunda especie

Veamos en primer lugar el caso en que el denominador b de fracción a/b tiene un solo divisor primo, y éste es de segundo grado.

Haciendo la división euclidiana de a por b, llegamos a una fracción $\frac{r}{b}$, con $g^o(r) < g^o(b)$, por hipótesis, $b = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^h$ con $\beta^2 + 4\alpha\gamma < 0$.

De lo estudiado antes, podemos efectuar las divisiones euclidianas sucesivas y descomponer la fracción irreducible.

Ejemplo:

$\frac{x^5 + 2}{(x^2 + x + 1)^3}$. El grado del numerador es inferior al grado del denominador.

Hacemos la división de $x^5 + 2$ por $x^2 + x + 1$, y obtenemos:

$$x^5 + 2 = (x^2 + x + 1)\cdot (x^3 - x^2 + 1) - x + 1,$$

y dividiendo por $(x^2 + x + 1)^3$, obtenemos:

$$\frac{x^5 + 2}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{-x + 1}{(x^2 + x + 1)^3},$$

La última fracción es un elemento de segunda especie. Hacemos lo mismo con la fracción restante, es decir, dividimos $x^3 - x^2 + 1$ por $x^2 + x + 1$ y resulta: $x^3 - x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)\cdot (x - 2) + x + 3$. Ahora dividimos por $(x^2 + x + 1)^2$ y tenemos:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x - 2}{(x^2 + x + 1)} + \frac{x + 3}{(x^2 + x + 1)^2},$$

y finalmente la descomposición buscada será:

$$\frac{x^5 + 2}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{x - 2}{(x^2 + x + 1)} + \frac{x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{-x + 1}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

La forma de determinación de estos elementos de primera y segunda especie se hará según los ejercicios de trabajo práctico.

Bibliografía

Doneddu, A. *Curso de Matemática*. Tomo 1.
Taylor, W. E.; Thomas, L. W. *Matemáticas Básica*.
Leithold, Louis. *Matemáticas Previas al Cálculo*.
Queysanne, Michel. *Álgebra Básica*.

Ejercicios propuestos

Nº 1. Descomponer en elementos simples sobre **R** las siguientes fracciones recionales:

$$a)\ \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\ ; \qquad b)\ \frac{1}{1-x^2}\ ; \qquad c)\ \frac{x}{x^2+4x-5}\ ;$$

$$d)\ \frac{2x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)}\ ; \qquad e)\ \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+3)}\ ; \qquad f)\ \frac{7x-1}{x^2-x-6}.$$

Nº 2. Descomponer en elementos simples sobre **R**, las siguientes:

$$a)\ \frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)^2}\ ; \qquad b)\ \frac{1}{x^3+3x^2}\ ; \qquad c)\ \frac{1}{(t+2)^2(t+1)}\ ;$$

$$d)\ \frac{x^2}{x^2+x-6}\ ; \qquad e)\ \frac{w^2+4w-1}{w^3-w}.$$

Nº 3. Descomponer en elementos simples:

$$a)\ \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\ ; \qquad b)\ \frac{1}{x(x+1)^2}\ ; \qquad c)\ \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\ ; \qquad d)\ \frac{1}{x^4+x^2+1}\ ;$$

$$e)\ \frac{7x^3+2x^2+15x+6}{(x^2+x-2)(x^2+4)}\ ; \qquad f)\ \frac{2x^6+5x^5+3x^4+5x^3+4x^2+7x+1}{(x+2)(x^4+x^2+1)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 3d). Solución.

$p = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2$, de donde (por diferencia de cuadrados)

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Los dos factores son primos en R[x], de donde la descomposición es:

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}.$$

Como p es una función par p(x) = p(-x) por lo tanto $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p(-x)}$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} = \frac{A(-x) + B}{(-x)^2 + (-x) + 1} + \frac{C(-x) + D}{(-x)^2 - (-x) + 1}$$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} = \frac{-Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{-Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

De la unicidad de la descomposición, resulta:

$$C = -A \quad \text{y} \quad B = D$$

$$\frac{1}{p(0)} = \frac{1}{0^4 + 0^2 + 1} = 1 = B + D \quad \Rightarrow \quad B + D = 1 \quad \Rightarrow \quad B = D = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p(1)} = \frac{1}{3} = \frac{A + 1/2}{3} + \frac{C + 1/2}{1} \qquad \text{como} \quad C = -A \quad \text{resulta:}$$

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{A}{3} + \tfrac{1}{6} - A + \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{A}{3} - A$$

de donde:

$$A = ½ \qquad \text{y} \quad C = - ½ .$$

Ejercicio 3e) $\dfrac{7x^3 + 2x^2 + 15x + 6}{(x^2 + x - 2)(x^2 + 4)}$

Solución

-El trinomio $x^2 + x - 2$ admite los ceros simples 1 y -2.

-El polinomio $x^2 + 4$ no tiene raíces reales.

-El grado del numerador es estrictamente inferior al del denominador. De ello resulta que la parte entera es nula y que la descomposición en elementos simples de la fracción es de la forma:

$$\frac{7x^3+2x^2+15x+6}{(x^2+x-2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Respuesta:

A = 2; B = 3; C = 2; D = -1.

Ejercicio 3f) $\dfrac{2x^6+5x^5+3x^4+5x^3+4x^2+7x+1}{(x+2)(x^4+x^2+1)}$

Solución

El grado del numerador p es mayor que el grado del denominador q

$$q = (x + 2)(x^4 + x^2 + 1) = x^5 + x^3 + x + 2x^4 + 2x^2 + 2 = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Al dividir p por q se obtiene un cociente $c = 2x + 1$ y un resto $r = -x^4 + 2x - 1$, por lo que resulta:

$$\frac{2x^6+5x^5+3x^4+5x^3+4x^2+7x+1}{x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+2}=2x+1+\frac{-x^4+2x-1}{x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+2}$$

Parte entera $2x + 1$

Fracción irreducible:

$$\frac{-x^4+2x-1}{(x+2)(x^4+x^2+1)}$$

del ejercicio 3 d) tenemos:

$$\frac{-x^4+2x-1}{(x+2)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Queda entonces determinar A, B, C, D y E por algunos de los métodos ya conocidos.

6. Ecuaciones Algebraicas

6.1. Ecuaciones Algebraicas

Generalidades

1) En esta unidad K designa un cuerpo conmutativo, el caso usual de aplicación será $K = C$. La función polinómica asociada al polinomio $p \in K[x]$ será denotado p.

2) Una igualdad de la forma $A = B$ entre dos expresiones que contienen combinaciones de números pertenecientes al conjunto C, estando estos números escritos tanto en forma numérica como en forma de letras, puede ser:

- siempre cierta, cualesquiera que sean los valores dados a las letras que figuran en A y B se denominará *identidad*.

- solamente cierta para ciertos valores dados a las letras que figuran en A y B, se denominará *ecuación*. Por ejemplo, la igualdad:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

es una identidad, ya que se puede dar a a y b cualquier valor sin alterarla. En cambio, la igualdad:

$$3x + 7 = 5x + 15$$

sólo es cierta para $x = -4$; para todo otro valor de x la igualdad no se verifica, es una ecuación.

3) Resolver una ecuación es encontrar el valor de las incógnitas en términos de las cantidades conocidas. Para ciertos tipos de ecuaciones, se ha establecido una fórmula de resolución que permite encontrar rápidamente las soluciones. El o los números que puestos en lugar de la incógnita verifican la ecuación dada, se denominan raíces o soluciones de la ecuación. Por ejemplo, en el ejemplo anterior $x = -4$ es la raíz de la ecuación propuesta.

4) Dos ecuaciones que admitan las mismas soluciones se llaman *equivalentes*, pueden reemplazarse la una por la otra en los cálculos.

6.1.1. Ecuaciones algebraicas y polinomios

1º.Teorema y definición

Sea p un polinomio de $K[x]$. La ecuación $p(x) = 0$ admite por raíces las raíces del polinomio p. Se dice que es la ecuación algebraica asociada al polinomio p.

Vocabulario

Se llama *grado* (resp. coeficiente; resp. orden de multiplicidad de una raíz α) de una ecuación algebraica $p(x) = 0$ al grado (resp. coeficiente; resp. el orden de multiplicidad de la raíz α) del polinomio p.

Observación

Como para un polinomio, la noción de raíces de una ecuación, está ligado al cuerpo sobre el cual esté definido.

Consideraremos únicamente las ecuaciones algebraicas $p(x) = 0$ de grado al menos igual a 1; este grado será denotado n.

2º.Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones algebraicas $p(x) = 0$ y $q(x) = 0$ se dicen equivalentes sobre el cuerpo K si admiten en K las mismas raíces y los mismos órdenes de multiplicidad.

6.1.2. Relaciones entre los coeficientes y las raíces de un polinomio

Consideremos el polinomio p de grado $n \geq 1$:

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son los ceros de p, distintos o no, entonces podemos descomponer p en un producto de polinomios de primer grado:

$$p = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \qquad (1).$$

- Desarrollemos este producto por ejemplo, para el caso de un polinomio de *segundo grado* con dos raíces reales.

$p = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ por lo que resulta:

$$a_2 = \lambda; \qquad a_1 = -\lambda(\alpha_1 + \alpha_2); \qquad a_0 = \lambda\alpha_1\,\alpha_2.$$

- Para el caso de un polinomio de *tercer grado*:

$$p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

entonces será:

$$p = \lambda[x^3 - x^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

es decir:

$$a_3 = \lambda; \quad a_2 = - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3); \quad a_1 = \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\,\alpha_3); \quad a_0 = - \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

- Para uno de *cuarto grado*:

$$p = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

$= \lambda[x^4 - x^3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + x^2 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) - x(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4].$

Es decir:

$a_4 = \lambda; \quad a_3 = - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4); \quad a_2 = \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)$
$a_1 = - \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4); \quad a_0 = \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4).$

Tomemos otro ejemplo:

$p = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, que factoreado queda:

$$p = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6) \qquad (2)$$

Supongamos que queremos encontrar el coeficiente de x^2, es decir a_2. En el desarrollo de (2) tenemos que considerar el producto de x por si mismo, quedan entonces 4 raíces libres. Es decir el producto de raíces será del tipo $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$; y el número total de éstos productos lo podemos calcular por medio de las combinaciones de 6 elementos (6 raíces) tomados de a 4:

$C_{6,2} = 15$; los productos serán (tomamos sólo los sub-índices de 1 a 6).

1234	1235	1236	1245	1246	1256	1345	1346	1356
1456	2345	2346	2356	2456	3456.			

Es decir: $a_2 = \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \cdots + \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)$; el signo será positivo, porque multiplicamos las raíces un número par de veces.

El coeficiente de x o sea a_1: k = 1, n = 6, y $C_{6,1} = 6$ serán:

12345 12346 12356 12456 13456 23456 .

Y, si desarrollamos el polinomio p dado en (1), para el término de grado n, se obtienen $a_n = \lambda$; para el término n – 1, tendremos la suma de raíces:

$$a_{n-1} = - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

En general, hallemos el coeficiente del término x^{n-k} para $1 \leq k \leq n$.

Hay que tomar x en n – k factores de (1) y los α_i en los k restantes, y efectuar el producto $(-1)^k \alpha_{i1}\, \alpha_{i2} \cdots \alpha_{ir}$.

Existen $C_{n,\,k}$ productos de esta clase, número de las combinaciones de los n índices tomado en [1, n]; para tener el coeficiente de x^{n-k} que buscamos, hay que sumar los $C_{n,k}$ productos obtenido.

Emplearemos la siguiente notación:

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n; \qquad \sigma_2 = \alpha_1\, \alpha_2 + \alpha_1\, \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$
$$\sigma_3 = \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 + \alpha_1\, \alpha_2 \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\, \alpha_{n-1}\alpha_n; \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

son respectivamente, la suma y el producto de las raíces.

Según los expuesto antes, puesto que $\lambda = a_n$, se tendrá:

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = \frac{(-1)^k\, \lambda \sigma_k}{a_n} = (-1)^k\, \sigma_k \qquad k \in [1, n]$$

que proporciona las n relaciones entre los coeficientes y los ceros. El polinomio p se puede expresar en la forma:

$$p = a_n[x_n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^k\, \sigma_k\, x^{n-k} + \cdots + (-1)^n\, \sigma_n]$$

Como todo polinomio que admite como raíces $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ puede escribirse en la forma $p = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$, se verifica el teorema que damos a continuación.

Teorema 4

Para que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *sean los ceros del polinomio:*

$$p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

es necesario y suficiente que, para todo $k \in [1, n]$*, se verifique:*

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sigma_k, \qquad \text{con} \qquad \sigma_k = \sum \alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{ik}.$$

Ejemplos.

1º. Polinomios de segundo grado:

$$p = ax^2 + bx + c \qquad (p \in C[x]).$$

El polinomio p posee dos ceros α_1 y α_2 en C, distintos o no, se tiene:

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = -b/a;$$
$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 = c/a$$

y

$$p = a(x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2)$$

2º. Polinomios de tercer grado:

$$p = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (p \in C[x]).$$

El polinomio p admite tres ceros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en C. Se tiene:

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -b/a;$$

$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = c/a;$$

$$\sigma_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = d/a;$$

y

$$p = a(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3).$$

Problema 1.

Determinar los ceros del polinomio $p = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$, sabiendo que admite dos ceros distintos, donde la suma es igual a -1.

Solución:

Sean x_1 y x_2 los dos ceros distintos de p tal que: $x_1 + x_2 = -1$.

Tomamos $x_1x_2 = \lambda$. Entonces p es divisible por polinomio $x^2 + [-(x_1 + x_2)x] + x_1x_2$, es decir, por $q = x^2 + x + \lambda$. Hacemos el cociente entre p y q, (el resto tendrá que ser cero) y obtenemos según el algoritmo de Euclides:

$$x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = (x^2 + x + \lambda)\, x + 4) - (8 + \lambda + 4)x - 48 - 4\lambda$$
$$=(x^2 + x + \lambda)(x + 4) - (12 + \lambda)x - 48 - 4\lambda$$

O sea: $(12 + \lambda)x + 4(\lambda + 12) = 0$, de donde $\lambda = -12$.

Se deduce que $p = (x^2 + x - 12)(x + 4) = (x - 3)(x + 4)(x + 4) = (x - 3)(x + 4)^2$,

Luego los ceros de p son los valores $+3$ y -4.

Problema 2.

Determinar los ceros del polinomio: $p = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$, sabiendo que admite dos ceros distintos, y donde su producto es igual a -6.

Sean x_1 y x_2 dos ceros distintos de p tal que $x_1x_2 = -6$, llamamos $\alpha = x_1 + x_2$. El polinomio p por lo tanto es divisible por $x^2 - \alpha x - 6$; Ahora, vamos a determinar un polinomio de segundo grado, tal que multiplicado por $x^2 - \alpha x - 6$ nos permita comparar los coeficientes del producto de ambos con los del dado p, con la condición de que el coeficiente de x^4 sea 1 y que el término independiente sea $+36$. Dicho polinomio tendrá que tener la forma:

$$x^2 - \beta x - 6$$

Entonces: $p = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = (x^2 - \alpha x - 6)(x^2 - \beta x - 6)$

de los que se deduce, haciendo el producto indicado:

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (-6 + \alpha\beta - 6)x^2 + (6\beta + 6\alpha)x + 36,$$

tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha + \beta = 2; \ \alpha\beta - 12 = -11 \ \Rightarrow \ \alpha\beta = 1; \qquad 6\beta + 6\alpha = 12 \ \Rightarrow \ \beta + \alpha = 2;$$

α y β son las raíces de $t^2 - 2t + 1$. es decir: $\alpha = \beta = 1$.

6.2. Polinomio en R[x]

Es evidente la implicación:

$$R \subset C \quad \Rightarrow \quad R[x] \subset C[x],$$

por consiguiente, todo lo dicho para polinomios de coeficientes complejos se aplica en particular a los polinomios de coeficientes reales. Así por ejemplo, todo polinomio de coeficientes reales admite al menos un cero real o complejo.

Hay que tener presente que los ceros de un polinomio de R[x] no son siempre números reales; así por ejemplo, el polinomio de segundo grado y coeficientes reales: $p = ax^2 + bx + c$ posee ceros reales sólo si se verifica que $b^2 - 4ac \geq 0$. En el caso en que $b^2 - 4ac < 0$, los ceros pertenecen a $C - R$. El cuerpo R de los números reales no es, por tanto algebraicamente cerrado. Todo polinomio primo en R[x] no es necesariamente de primer grado.

Queremos hacer ver en lo que sigue que todo polinomio primo en R[x] es de primer grado o de segundo grado.

Propiedad

Sean $p \in R[x]$ y $\alpha \in C$. Entonces $p(\alpha(= \overline{p(\alpha)}$ (con $\overline{\alpha}$ designamos al conjugado de α)

Tomemos un polinomio de coeficientes reales:

$$p = a_n x^n + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{con } a_k \in R\text{, cualquiera que sea } k \in [0, n]$$

Recordemos que la involución de C; $\alpha \to \overline{\alpha}$, que asocia a cada complejo α su conjugado $\overline{\alpha}$, es un automorfismo para la adición y la multiplicación:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \qquad \overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}.$$

Sabemos también que $a \in R$, su conjugado satisfase a $\overline{a} = a$, tendremos, por tanto:

$$p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k .$$

Ahora bien, puesto que: $\alpha \to \overline{\alpha}$ es un automorfismo multiplicativo, $(\overline{\alpha})^k = \overline{\alpha^k}$, de donde, ya que $a_k \in R$, será $a_k (\overline{\alpha})^k = \overline{a_k \alpha^k}$

Por último, debido al automorfismo aditivo de $\alpha \to \overline{\alpha}$

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k \quad \Rightarrow \quad p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{(a_k \alpha^k)} = \overline{p(\alpha)},$$

la propiedad queda demostrada.

Teorema 5

Si α es un cero de orden h de un polinomio con coeficientes reales, también su conjugado $\overline{\alpha}$ *es cero de orden h.*

En efecto:

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{h-1}(\alpha) = 0 \qquad \text{y} \qquad p^{h}(\alpha) \neq 0.$$

Puesto que 0 es conjugado se si mismo, se tiene:

$$p(\overline{\alpha}) = p'(\overline{\alpha}) = \cdots = p^{(h-1)}(\overline{\alpha}) = 0 \qquad y \qquad p^{(h)}(\overline{\alpha}) \neq 0$$

Por consiguiente $\overline{\alpha}$ es un cero de orden h de p.

6.2.1. Polinomios primos en R[x]

Sea $q \in R[x]$; q admite n ceros reales o complejos, distintos o no. Si es h_i el orden de multiplicidad del cero α_i, entonces:

$q = \lambda(x - \alpha_1)^{h1}(x - \alpha_2)^{h2} \cdots (x - \alpha_r)^{hr}$; con $\lambda \in R$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in C$, $h_1 + h_2 + \cdots + h_r = n$.

En esta descomposición a todo cero $\alpha_i \in C - R$ le corresponde otro distinto $\alpha_j = \overline{\alpha_i}$ con $h_i = h_j$.

Fijemos la atención sobre dos de tales ceros conjugados; en la descomposición anterior se obtendrá para ellos un producto de la forma:

$$(x-\alpha)^h (x-\overline{\alpha}) = \left[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\right]^h$$

Ahora bien,

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha}) + \alpha\overline{\alpha},$$

Observemos que:

$\alpha + \overline{\alpha} = s \in R$ y $\alpha\overline{\alpha} = p \in R^+$; por consiguiente:

$$(x-\alpha)^h (x-\overline{\alpha})^h = \left[x^2 - sp + p\right]^h \in R[x].$$

De lo dicho se desprende que todo polinomio $q \in R[x]$, puede descomponerse en producto de polinomios de dos tipos, en R[x].

1º. Factores de primer grado $(x - \alpha)$ para todo real α.

2º. Factores de segundo grado, $x^2 - sx + p$, para todo par de ceros complejos

$$(s^2 - 4p < 0).$$

Teorema

Por lo estudiado anteriormente podemos enunciar:

"Los polinomios primos en R[x] son de primero o de segundo grado".

6.3. Ceros comunes a dos polinomios

Consideremos dos polinomios p y q de C[x], y veamos si existen ceros comunes a ambos. Para que p y q tengan un cero común α, es necesario y suficiente que ambos sean divisibles por $x - \alpha$, o, lo que es igual, que dicho monomio divida al m.c.d.(p, q).

Por consiguiente, para ver si p y q admiten algún cero común, debemos primero hallar el m.c.d.(p, q). Después se sigue:

1º. Si el grado del m.c.d.(p,q) es nulo, los polinomios son primos entre sí y carecen de ceros comunes.

2º. Si el grado es igual por lo menos a 1, entonces el polinomio m.c.d.(p,q) tiene al menos un cero α en C; $x - \alpha$ divide al m.c.d.(p, q), lo que implica que divide a la vez a p y a q. Por consiguiente es un cero común de p y q.

Podemos incluso decir que si α es cero de orden h del m.c.d.(p, q), entonces h es el orden del cero α para uno de los dos polinomios; para el otro, el orden de dicho cero es al menos igual a h.

Ejemplo

Determínese "a" para que los polinomios:

$p = x^4 - x + a, \qquad q = x^2 - ax + 1,$ admitan ceros comunes.

Sabemos que: $g^o[\text{m.c.d.}(p, q)] \leq \text{mín}\{g^o(p), g^o(q)\} = 2.$

Si deseamos que p y q tengan dos raíces comunes deberá cumplirse, según lo que hemos visto antes, que g^o [m.c.d.(p, q)] = 2; es decir , m.c.d.(p, q) = q.

Por consiguiente para que se verifique la condición impuesta, es necesario y suficiente que q divida a p. Efectuando la división euclidiana, se obtiene:

$$x^4 - x + a =(x^2 - ax + 1)(x^2 + ax + a^2 - 1) + (a+ 1)(a^2 - a - 1)x - a^2 + a + 1$$

Para que $q \mid p$ es necesario y basta que el resto sea nulo:
es decir,

$$(a + 1)(a^2 – a – 1)x - a^2 + a + 1 = 0$$

o sea,

$$\begin{cases}(a+1)(a^2-a-1)=0 \\ -a^2+a+1=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ a^2-a-1=0\right.$$

Sistema que es equivalente a la segunda ecuación. Existen por lo tanto dos valores para a:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Los ceros comunes son los ceros de los correspondientes polinomios q:

$$q_1 = x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1$$

$$q_2 = x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1$$

Sus valores se calculan:

q_1: $$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

y para q_2 será entonces:

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

6.4. Eliminación

Siendo $x \to p(x)$ una función polinómica de C en C, la relación $p(x) = 0$ recibe el nombre de ecuación algebraica.

Resolverla es hallar los ceros de $p \in C[x]$; tales ceros se llaman también raíces de la ecuación.

Definición

Eliminar x entre dos ecuaciones algebraicas $p(x) = 0$ y $q(x) = 0$ es hallar la condición necesaria y suficiente para que ambas ecuaciones tengan al menos una raíz común.

Esta condición es una relación entre los coeficientes de los polinomios p y q (coeficientes que dependen de ciertas variables llamadas parámetros), tal relación recibe el nombre de resultante (de la eliminación).

6.4.1. Métodos de eliminación

Primer caso:

- Una de las ecuaciones es fácil de resolver

Se calculan las raíces de esta ecuación y se expresa que la otra se verifica para cada una de las raíces halladas.

Ejemplo.

Elimínese x entre las dos ecuaciones:

$$x^3 - \lambda x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Las raíces de la segunda ecuación son -1 y 3. Expresando que -1 y 3 son raíces de la primera, dividiendo entonces $(x^3 - \lambda x + 1)$ por $(x + 1)$ y por $(x - 3)$ se obtienen usando el algoritmo de la división:

$$x^3 - \lambda x + 1 = (x + 1) \cdot [\, x^2 - x + (1 - \lambda)] + [1 - (-\lambda + 1)] \quad (1)$$

$$x^3 - \lambda x + 1 = (x - 3) \cdot [x^2 + 3x + (9 - \lambda)] + [1 + 3(9 - \lambda)] \quad (2)$$

Los restos de las dos divisiones expresadas en (1) y (2) tendrán que ser iguales a cero, esto es:

$$1 - (-\lambda + 1) = 0 \quad \text{y} \quad 1 + 3(9 - \lambda) = 0$$

Se obtienen así los valores:

$$\lambda = 0 \ \text{ y } \ \lambda = 28/3.$$

La resultante de la eliminación es $\lambda(\lambda - 28/3) = 0$

Segundo caso

Método del m.c.d.

Los polinomios p y q tienen al menos un cero común, si el grado del m.c.d.(p,a) es igual o mayor que 1. Expresemos pues esta condición.

Observemos que el conjunto engendrado por p y q es el conjunto de los polinomios up + vq cuando u y v recorren C[x]. Cabe pues sustituir p o q por un polinomio up + vq, eligiendo convenientemente u y v.

<u>Ejemplo.</u>

Elimínese x entre:

$$p = a x^2 + b x + c = 0$$

$$q = a'x^2 + b'x + c' = 0$$

Sustituyamos p y q por los polinomios siguientes:

$$p_1 = a'p - aq = (a'b - ab')x + a'c - ac'$$

$$q_1 = b'p - bq = (ab'-a'b)x^2 + cb' - bc'$$

Cabe considerar dos casos:

<u>Primero:</u> $ab'-a'b \neq 0$.

El polinomio p_1 es de primer grado; para que p y q tengan un cero común, es necesario y suficiente que m.c.d.(p,q) = p_1, dicho cero común será:

$$p_1 = 0 = (a'b - ab')x + a'c - ac' = 0 \quad \Rightarrow \quad (a'b - ab')x = ac' - a'c$$

de donde,

$$x = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} = -\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Expresando que este número es un cero de q_1, se obtiene la resultante de la eliminación:

$$q_1 = 0 \qquad (ab' - a'b)x^2 + cb' - bc' = 0$$

$$(ab' - a'b)\left(-\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)^2 + cb' - bc' = 0$$

$$(ac' - a'c)^2 = (bc' - cb')(ab' - ba') \qquad (1)$$

<u>Segundo</u>. $ab' - ba = 0$.

En estas condiciones $p_1 = a'c - c'a$.

Si $a'c - c'a \neq 0$, es decir $a/a' = b/b' \neq c/c'$ entonces $g^o(p_1) = 0$, al ser p y q primos entre sí, carecen de cero común.

Si a’c - c’a = 0, es decir: a/a’ = b/b’ = c/c’, entonces p y q tienen comunes sus dos ceros.

En resumen, cabe decir que la relación (1) es la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones de segundo grado propuestas tengan al menos una raíz común.

6.5. Resolución de ecuaciones particulares

6.5.1. Ecuación de tercer grado

La ecuación general de tercer grado es:

$$u^3 + au^2 + bu + c = 0 \qquad (\text{con } a, b, c \in C) \qquad (1)$$

Efectuando el cambio $u = x + h$, la ecuación (1) se escribe:

$$(x + h)^3 + a(x + h)^2 + b(x + h) + c = 0$$

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + a(x^2 + 2xh + h^2) + b(x + h) + c = 0$$

Determinemos h de manera que se anule el coeficiente en x^2. Se obtiene:

$$3x^2h + ax^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3h + a = 0 \quad \text{o sea,} \quad h = -a/3$$

De donde resulta que, haciendo $u = x – a/3$, la ecuación (1) se escribe en su <u>forma reducida</u>:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

Vamos a exponer el <u>método de Cardan</u> para la resolución de la ecuación (2). Hagamos el cambio:

$$x = y + z,$$

sustituyendo la incógnita x por otras dos, con objeto de poder expresar entre estas últimas una condición que simplifique el problema, según vamos a ver.

La ecuación toma la forma:

$$\begin{aligned}(y + z)^3 + p(y + z) + q &= y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0 \\ &= y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + p(y + z) + q = 0 \\ &= y^3 + z^3 + (3yz + p)(y + z) + q = 0\end{aligned}$$

Elijamos la condición de simplificación de manera que el coeficiente de $y + z$ sea nulo; es decir:

$$3yz + p = 0 \qquad (4)$$

Entonces la ecuación reducida ($x^3 + px + q = 0$), se escribe:

$$y^3 + z^3 + q = 0 \qquad (5)$$

Si (y, z) es una solución del sistema formado por (4) y (5), entonces $y + z$ es una solución de (2).

De los números y^3 y z^3 sabemos que:

$$y^3 + z^3 = - q; \quad yz = -p/3, \text{ o sea, } y^3z^3 = -p^3/27,$$

luego tales números son solución de la ecuación:

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

la cual admite dos raíces t' y t'' en C que sabemos hallar. Tenemos $t' = y^3$ y $t'' = z^3$.

Si α es una de las raíces cúbicas de t' las otras dos serán: $j\alpha$ y $j^2\alpha$; con:

$$j = \cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3.$$

Se obtienen así para y los tres valores: $y_1 = \alpha$; $y_2 = j\alpha$; $y_3 = j^2\alpha$

Los valores de z vienen dados, de $3yz + p = 0 \Rightarrow z = -p/3y$, es decir son:

$$z_1 = -\frac{p}{3\alpha}; \qquad z_2 = -\frac{p}{3\alpha j}; \qquad z_3 = -\frac{p}{3\alpha j^2}$$

(obsérvese que z_1, $z_2 = j^2z_1$ y $z_3 = jz_1$ son las raíces de la ecuación $z^3 = t''$).

Por consiguiente, las raíces de la ecuación (2) son:

$$x_1 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}; \qquad x_2 = j\alpha - \frac{p}{3\alpha} j^2; \qquad x_3 = j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha} j$$

donde α es una raíz cúbica de una solución de (6).

6.5.2. <u>Resolución trigonométrica en el caso</u>: $4p3 + 27q^2 < 0$.

En este supuesto, la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tiene sus tres raíces reales.

Designemos con r y θ el módulo y el argumento del complejo α que interviene en la resolución precedente:

$$\alpha = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta).$$

Si se designa con Re(z) la parte real del complejo z, de acuerdo con lo anterior, las raíces reales son:

$$x_1 = \alpha + \overline{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2\mathrm{Re}(\alpha) = 2r\cos\theta$$

$$x_2 = j\alpha + \overline{j\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 2\mathrm{Re}(j\alpha) = 2r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}),$$

$$x_3 = j^2\alpha + \overline{j^2\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 2\mathrm{Re}(j^2\alpha) = 2r\cos(\theta + \frac{4\pi}{3}),$$

Sólo falta determinar r y θ para que las fórmulas anteriores nos den las raíces. Ahora bien: para este caso $\alpha\overline{\alpha}$ = - p/3. Por consiguiente, puesto que $r^2 = \alpha\overline{\alpha}$, $r = (-p/3)^{1/2}$.

Para calcular el arg α, hay que volver a la ecuación (6), una de cuyas raíces es α^3. Como el discriminante es real negativo, se ve inmediatamente que $\mathrm{Re}(\alpha^3) = -q/2$. Ahora bien:

$$|\alpha|^3 = r^3 \quad \text{y} \quad \arg \alpha^3 \equiv 3\theta \;\; (\text{mód } 2\pi),$$

y por consiguiente:

$$r^3\cos 3\theta = -\frac{q}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 3\theta = -\frac{q}{2r^3} = +\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}$$

En resumen: la resolución trigonométrica consiste en calcular primero el ángulo φ por su coseno:

$$\cos\varphi = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}$$

y hallar a continuación las raíces, mediante las fórmulas:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

<u>Ejemplo.</u>

Resuélvase la ecuación: $8y^3 - 12y^2 - 18y + 19 = 0$ (1)

<u>Solución:</u>

Haciendo el cambio $y = x + ½$, la ecuación se reduce a: $x^3 - 3x + 1 = 0$ (2)

Se observa que:

$$4p^3 + 27q^2 = 27(-4 + 1) = -3 \cdot 27 < 0,$$

y por lo tanto, la ecuación (2) tiene sus tres raíces reales. Apliquemos la resolución trigonométrica. Tendremos $\cos \varphi = -1/2$, y podemos tomar $\varphi = -2\pi/3$, con lo que las raíces de (2) son:

$$x_1 = 2 \cos 2\pi/9 \;; \qquad x_2 = 2 \cos 4\pi/9 \;; \qquad x_3 = 2\cos 10\pi/9 \;;$$

es decir, sus valores con tres cifras decimales exactas son:

$$x_1 = 1{,}532; \qquad x_2 = 0{,}347; \qquad x_3 = -1{,}879.$$

Por último, con el mismo grado de aproximación, se obtiene para la ecuación (1):

$$y_1 = 2{,}032; \qquad y_2 = 0{,}847; \qquad y_3 = -1{,}379.$$

6.5.3. Resolución de una ecuación de 4º grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

El método de Ferrari consiste en:

- dividir todos los términos por a, para obtener una ecuación de la forma:

  $$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

- descomponer el primer miembro en un producto de trinomios de Segundo grado considerando que $x^4 + px^3$ es el comienzo del desarrollo del cuadrado de $(x^2 + p/2\, x + \lambda)$, estando determinado λ por las condiciones del cálculo (condiciones que llevan a una ecución de tercer grado, cuya incógnita es λ y que es resuelta por la fórmula Cardano).

Se obtiene entonces la ecuación bajo la forma:

$$(Ax^2 + Bx + C) \cdot (A'x^2 + B'x + C') = 0$$

y se encuentran sin dificultad sus cuatro raíces (dos por cada trinomio), que son todas complejas si los coeficientes a, b, · · · son complejos, y reales o complejas conjugadas si los coeficientes son reales.

El método de Ferrari conduce generalmente a cálculos complicados. En la práctica, se intenta simplificar el problema utilizando – con la astucia que proporciona la experiencia del cálculo algebraico- las particularidades de la ecuación propuesta.

En general, las ecuaciones algebraicas de grado mayor que dos, son complicadas de resolverlas en forma analítica y para resolverlas, en la práctica, se utilizan métodos del Cálculo Numérico.

Sin embargo es interesante estudiar esta unidad, por sus implicancias teóricas, que constituye un buen "test" de lo aprendido antes y por su riqueza en la historia de la Matemática.

Bibliografía

Además de la señalada, en este apunte, el alumno deberá recurrir a la lista de libros que figuran en el programa de la materia, o aquella que el Profesor les recomiende durante el cursado de la Asignatura.

Ayres, F.Jr. *Álgebra Moderna.* Libros McGraw-Hill.
Gentile, E. *Notas de Álgebra*. Edeba.
Leithold, L. – Matemáticas Previas al Cálculo. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar.
Pécastaings, F. *Chemins vers l'Algèbre*. Vuibert.
Queysanne, M. *Álgebra Básica*. Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. *Cours de Mathématiques epéciales*. Masson.
Taylor, H.E.; Wade, T.L. *Matemáticas Básicas*. Editorial Limusa. Wiley, S. A.