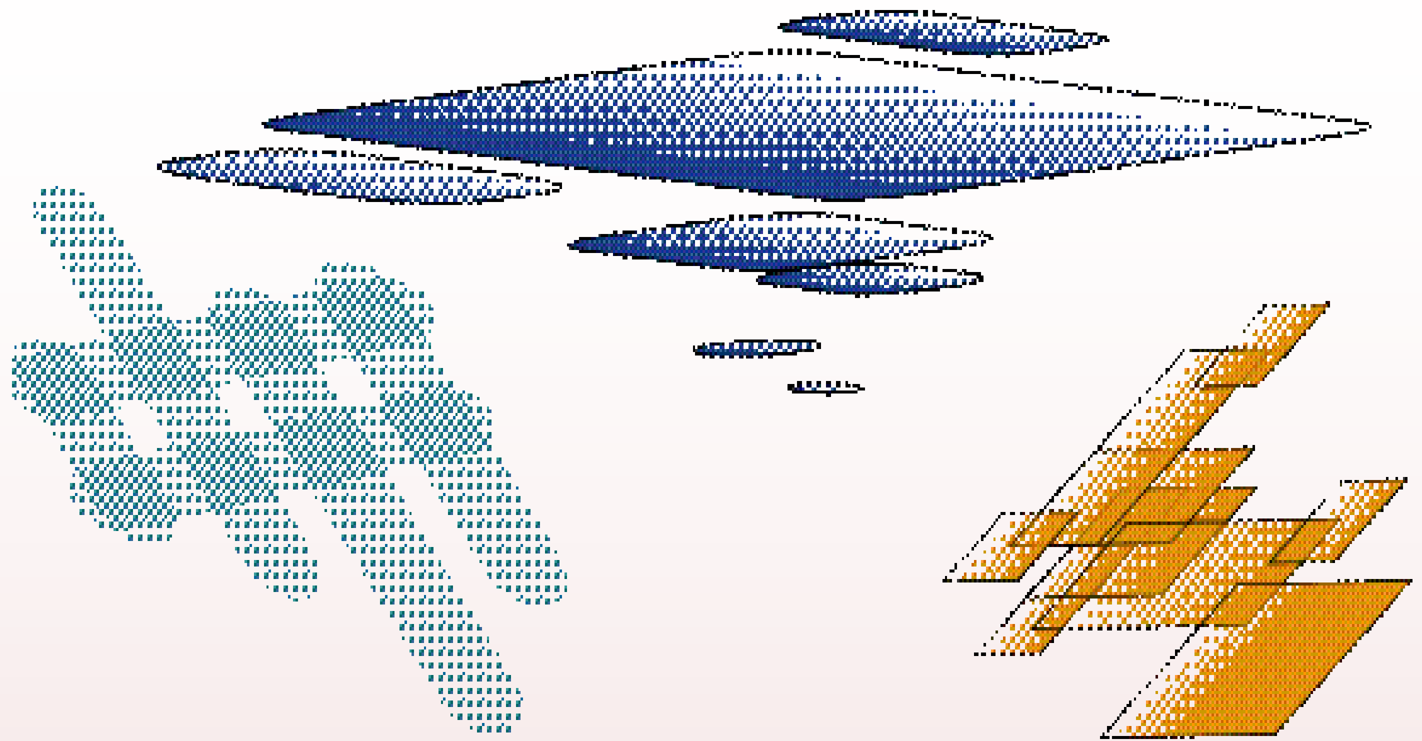
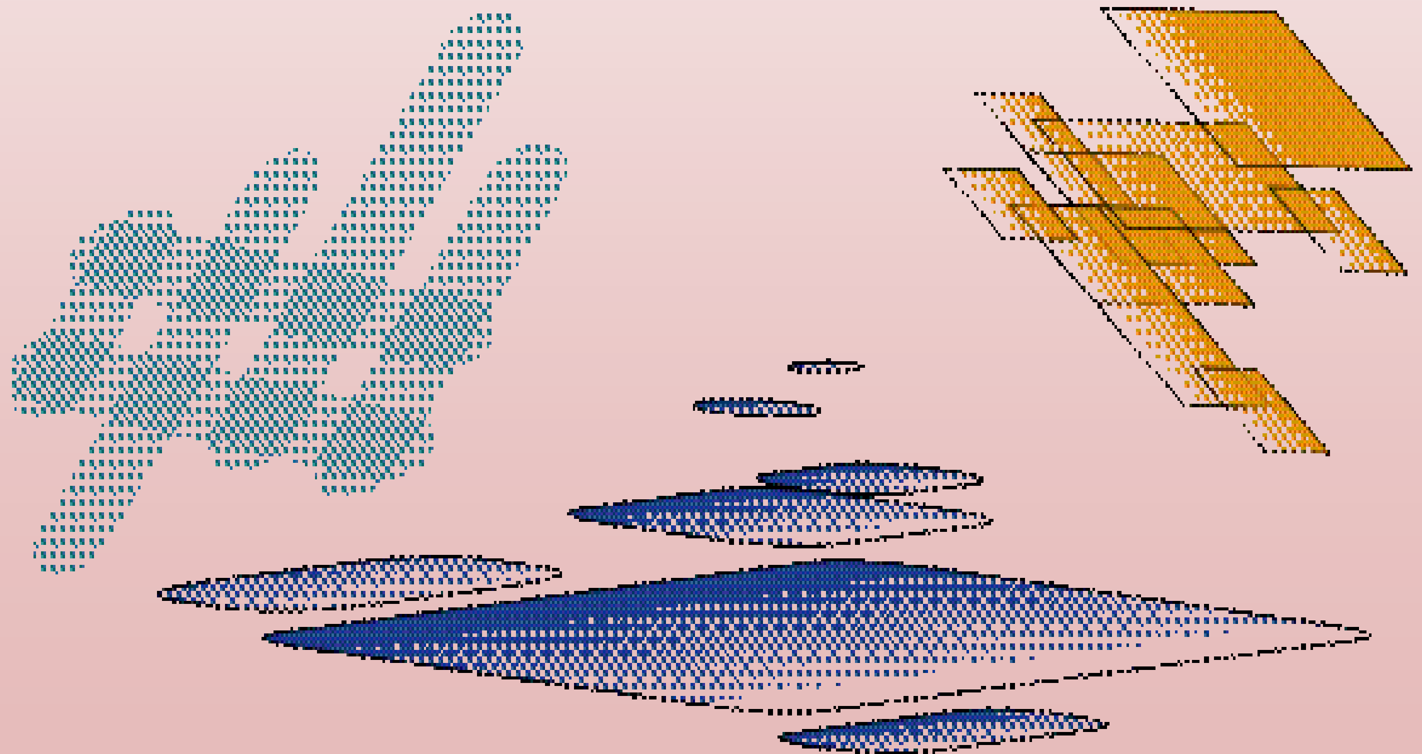
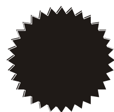


La Solución Numérica Elemental con Octave



MATIAUDA MARIO EUGENIO

YACHECEN CARLOS GUSTAVO



EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870

Posadas - Misiones – Tel-Fax: (03752) 428601

Correos electrónicos:

edunam-admini@arnet.com.ar

edunam-direccion@arnet.com.ar

edunam-produccion@arnet.com.ar

edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra

Coordinación de la edición: Claudio Oscar Zalazar

ISBN 978-950-579-190-3

Impreso en Argentina

©Editorial Universitaria

Matiauda, Mario Eugenio
La solución numérica elemental con octaves. - 1a ed. - Posadas : EDUNAM - Editorial Universitaria de la Universidad Nacional de Misiones, 2011.
Internet.
ISBN 978-950-579-190-3
1. Matemática . 2. Solución Numérica. I. Título.
CDD 510

Fecha de catalogación: 10/03/2011

INDICE

UNIDAD 1 : RESOLVER f(x) =0

1.1 Método de la bisección.. 6

1.2 Método del punto fijo 6

1.3 Método de Newton 7

1.4 Método de la secante 7

1.5 Método de la posición falsa 8

1.6 Método de Steffensen 8

1.7 Polinomios. Raíces. Métodos 8

1.7.1 Método de Horner para ubicar raíces de un polinomio P de grado n............ 9

1.7.2 Método de Muller 9

UNIDAD 2 : INTERPOLACIÓN

2.1 Interpolación. Empleo de polinomios... 11

2.2 Polinomio de Lagrange 11

2.3 Polinomio de Hermite 12

2.4 Método de Neville 13

2.5 Diferencias divididas 14

2.6 Polinomios osculadores. Polinomios de Hermite 16

2.7 Adaptador cúbico 16

UNIDAD 3 : DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRIA

3.1 Diferenciación numérica. Formulas de aproximación................................. 17

3.2 Diferenciación numérica. Técnica de Richardson 18

3.3 Integración numérica.. 18

3.3.1 Fórmula de Newton... 18

3.3.2 Regla compuesta del trapezio 19

3.3.3 Regla compuesta de Simpson 19

3.3.4 Integración de Romberg 20

3.3.5 Regla trapezoidal recursiva 21

3.4 Fórmulas Gaussianas 21

3.4.1 Fórmula de Gauss-Legendre 21

3.4.2 Fórmula de Gauss-Laguerré 22

3.4.3 Fórmula de Gauss-Chebyshev 22

3.5 Cuadratura adaptativa utilizando la regla de Simpson's....................................22
3.6 Regla de Simpson's 23
3.7 Cuadratura de Gauss-Legendre..23
UNIDAD 4 : ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
4.1 Métodos para resolver P.V.I. 24
4.1.1 Método de Euler 24
4.1.2 Serie de Taylor 24
4.1.3 Método de Runge-Kutta...25
4.1.4 Métodos multipasos...25
4.1.4.1 Método de Adams-Bashforth 26
4.1.4.2 Método de Adams-Moulton...27
4.1.5 Método de Milne 28
4.1.6 Predictor-Corrector 28
4.1.7 Uso de la extrapolación 28
UNIDAD 5 : SISTEMAS LINEALES
5.1 Representación de un sistema lineal. Sustitución hacia atrás...........................29
5.2 Técnica de Gauss Jordan 30
5.3 Pivoteo 30
5.4 Factorización matricial...31
5.4.1 Factorización LU 31
5.5 Técnicas de repetición para sistemas lineales 34
5.5.1 Técnica de Jacobi 35
5.5.2 Técnica de Gauss-Seidel...35
5.6 Técnica de relajación 36
5.7 Gradiente conjugado 38
UNIDAD 6 : APROXIMACIÓN
6.1 Polinomios de Chebyschev 39
6.2 Aproximación mínimo-máximo (o de Chebyshev)...39
6.3 Aproximación por valores propios 39
6.4 Técnicas de aproximación..39
6.4.1 Método de potencias...39
6.4.2 Método de la potencia inversa 40

6.4.3 Método simétrico de potencias 41
6.4.4 Método clásico de Jacobi 41
6.4.5 Técnicas de deflación 42
6.4.6 Técnicas de Householder 42
6.4.7 Algoritmo QR 42
6.5 Ortogonalización de Gram-Schmidt 42

UNIDAD 7 : SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

7.1 Método de Newton 43
7.2 Técnicas cuasi-Newton 43
7.3 Técnicas de mayor pendiente 44
7.4 Problema de valor de frontera para EDO's y en derivadas parciales 44
7.5 Técnica de disparo para el problema lineal 44
7.6 Técnica de disparo para el problema no lineal 45
7.7 Diferencias finitas para problemas lineales 45

UNIDAD 8 : ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

8.1 Ecuación general 47
8.2 Elíptica o de Poisson 47
8.3 Ecuación parabólica 48
8.4 Ecuación hiperbólica 49

Prólogo

En diversas ocasiones, situaciones del mundo físico se desean representar matemáticamente pero, esos problemas no encuentran una resolución analítica exacta o deben ser encarados desde la óptica Numérica.

Varias de esas situaciones se incluyeron en la Solucion Numérica Elemental del autor, conteniendo la alternativa de búsqueda de resultados a través de la computadora.

En esta presentación se aborda la misma línea, simplemente iniciando al uso de Octave, sofá libre y de permanente actualización y con amplia Potencialidad de emulación de software bajo licencia (caso MatLab).

Por ello no se abunda en desarrollo de los métodos sino directamente su ejecución bajo Octave.

RESOLVER f(x) =0

SOLUCIONES DE ECUACIONES UNIVARIABLES

Para una función $f(x)=0$, el problema más simple de la aproximación numérica será hallar la raíz x que anula f.

1.1 METODO DE LA BISECCIÓN

Se parte de f definida en I real con extremos a y b pertenecientes a I, bajo el supuesto de que $f(a).f(b)\langle 0$.

$$p_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$ Con p_i = punto medio

Se toma el punto medio $\frac{a+b}{2}$ si $f(\frac{a+b}{2})=0$ ya hemos encontrado la raíz $x=\frac{a+b}{2}$. En caso contrario, si $f(\frac{a+b}{2})f(b)<0$ entonces hacemos $a=\frac{a+b}{2}$ y volvemos a subdividir el nuevo intervalo [a, b]. Si, por el contrario, $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ entonces hacemos $b=\frac{a+b}{2}$ y volvemos a empezar. Las sucesivas subdivisiones del intervalo [a, b]. Van aproximando la raíz.

Criterio de detención $$|p_n - p_{n-1}| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \qquad n \geq 1$$

Algoritmo bisect

1.2 METODO DEL PUNTO FIJO

El problema de hallar raíces de $h(q)=0$ con q =Punto fijo

$$h(x)=x-f(x) \quad \text{o} \quad h(x)=x+\alpha f(x), \ \alpha \in \mathbf{R}$$

Si la función $h(x)$ tiene un punto fijo en p, entonces la función definida por $f(x)=x-h(x)$ tiene un cero en p.
La forma de punto fijo es más fácil de analizar que la búsqueda de raíces.

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Si $h \in C[a,b]$ y $h(x) \in [a,b]$ para toda $x \in [a,b]$, h tiene un punto fijo en $[a,b]$.

Si también $g'(x)$ existe en $]a,b[$ con una constante $m\langle 1$, de modo que

$$|h'(x)| \leq m\langle 1 \qquad \forall x \in]a,b[$$

Que garantiza que el punto fijo es único en $[a,b]$.

Algoritmo fixed_point

1.3 METODO DE NEWTON

Partiendo de un p_0 de arranque (requiere la elección adecuada de p_0), se genera la sucesión $\{p_n\}$ definida a través de:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{g(p_{n-1})}{g'(p_{n-1})} \qquad \text{para} \quad n \geq 1$$

Es una técnica de iteración funcional, donde las aproximaciones se obtienen usando tangentes sucesivas.

Criterio de detención $\qquad |p_n - p_{N-1}| \langle \varepsilon \qquad \varepsilon \rangle 0 \qquad$ o

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} \langle \varepsilon \qquad p_N \rangle 0$$

Algoritmo newton

1.4 METODO DE LA SECANTE

Se parte de las aproximaciones de arranque x_0 y x_1, donde las posteriores aproximaciones se obtienen usando secantes sucesivas; evitando así el problema de conocer la derivada de la función como en la técnica de Newton, así sustituye la derivada por la relación de las diferencias

.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})}$$

Algoritmo secant

MARIO EUGENIO MATIAUDA

1.5 METODO DE LA POSICIÓN FALSA

Genera aproximaciones del mismo modo que el método de la secante, pero incorpora el acorralamiento de la raíz, asegurando que la misma quede entre dos iteraciones sucesivas.

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$ Como x_1 es el valor de *x* para *y=0*, se tiene

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(x - a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad \text{si} \quad \left|\frac{x_1 - a}{x_1}\right| < \varepsilon \quad ó \quad \left|\frac{x_1 - b}{x_1}\right| < \varepsilon$$

para una ε pre-establecida, entonces x_1 es la raíz buscada. De lo contrario, se calcula f (x_1) y elegir entre a y b aquella cuya f tenga signo opuesto de f (x_1). Con x_1 *(en)ese punto calculado x_2 mediante la fórmula de la secante. El proceso iterativo debe continuar hasta obtener la raíz con la precisión pre-establecida.

Algoritmo regula

1.6 METODO DE STEFFENSEN

Genera la secuencia:

$$p_0^{(0)}, \quad p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), \quad p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), \quad p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}(p_0^{(0)}), \quad p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), \ldots\ldots.$$

$$donde \ \ \Delta^2 \ \ indica \ \ que \ \ se \ \ usa \ \ la \ \ ecuación \quad \hat{p} = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}, \quad para \ \ n \geq 0.$$

la cual genera cada tercer término; los demás usan la iteración del punto fijo en el término anterior.
Para encontrar rápidamente una solución de la ecuación de punto fijo x = g(x) dada una aproximación inicial P_0; donde se supone que tanto g(x) y g'(x) son continuas, |g’(x)|<1, y que la iteración de punto fijo ordinario converge lentamente (lineal) para p

Algoritmo steff

1.7 POLINOMIOS. RAÍCES. MÉTODOS

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$ Polinomio de grado *n*

Con $a_i =$ coeficientes de P (son constantes)

1.7.1 Método de Horner

Sea $b_n = a_n$

$$b_{n-k} = xb_{n-k+1} + a_{n-k} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n .$$ (Fórmula de recurrencia)

Basándonos en la fórmula de recurrencia dada, sustituyendo *x por z, si z* es una raíz de *P(x)*, podemos escribir que:

$$P(x) = (x-z)Q(x)$$

Donde $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_1 = \frac{P(x)}{x-z}$ en efecto

$$\begin{aligned}
&(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_1)(x-z) \\
&= b_n x^n + (b_{n-1} - zb_n)x^{n-1} + \ldots \\
&+ (b_1 - zb_2)x + (b_0 - zb_1) \\
&= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = P(x)
\end{aligned}$$

Concluimos que cualquier raíz de Q(x) es también una raíz de P(x), esto nos permite trabajar con un polinomio de grado n-1,o sea, con Q(x), para calcular las raíces subsecuentes de P(x), este proceso recibe el nombre de deflación, con este se evita que un mismo cero sea calculado varias veces.

Algoritmo horner

Algoritmo newtonhorner

1.7.2 Método de Muller

Es una extensión del método de la secante, utiliza tres aproximaciones iniciales: x_0 y x_1, x_2.

Considerando el polinomio cuadrático:

$$f_2(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$$

Con

MARIO EUGENIO MATIAUDA

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Hallando la raíz, se implementa la solución convencional, pero debido al error de redondeo potencial, se usará una formulación alternativa:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad \text{despejando} \qquad x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

La gran ventaja de este método es que se pueden localizar tanto las raíces reales como las imaginarias.

La elección de las fórmulas anteriores equivale a aproximar **f** (x) por la parábola que pasa por los puntos $(x_{n-3}, f(x_{n-3}), (x_{n-2}, f(x_{n-2}), (x_{n-1}, f(x_{n-1}),$ y calcular posteriormente las derivadas de dicha parábola.

Algoritmo muller

Algoritmo muller2

MARIO EUGENIO MATIAUDA

INTERPOLACION

2.1 INTERPOLACION. EMPLEO DE POLINOMIOS

El problema general de la interpolación de funciones consiste en, a partir del conocimiento del valor de una función (y eventualmente de sus derivadas) en un conjunto finito de puntos, aproximar el valor de la función fuera de ese conjunto finito de puntos.

Según el teorema de aproximación

$$|f(x)-P(x)|\langle\varepsilon \quad \text{Con } \varepsilon>0, \qquad \forall x\in[a,b]$$

El uso de los polinomios tiene consigo ventajas como su derivabilidad e integrabilidad, dando también polinomio.
El planteo del problema será hallar un polinomio interpolante que brinde una aproximación precisa en todo el intervalo, de allí la no adecuación de los polinomios de Taylor que concentran la información alrededor de un punto, dígase x_0.

2.2 POLINOMIO DE LAGRANGE

$$f(x_k)=P(x_k) \qquad\qquad k=0,1,2,....n$$

$$P(x)=f(x_0)L_{n,0}(x)+.....+f(x_n)L_{n,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_{n,k}(x)$$

Con

$$L_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

$$L_{n,k}(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad\qquad k=0,1,2,....n$$

Uno de los inconvenientes que presenta la interpolación de Lagrange, es que el grado del polinomio necesario, no se conoce, hasta la determinación de los cálculos necesarios.

Algoritmo lagrange

MARIO EUGENIO MATAUDA

2.3 POLINOMIO DE HERMITE

En ocasiones, resulta de interés interpolar no sólo el valor de la función en ciertos puntos $\{x_i\}_{i=0,..,N}$, sino también el valor de sus derivadas. Un ejemplo clásico de ello es el desarrollo de Taylor de una función en un punto a. En este caso, aproximamos **f** (x) por un polinomio de grado N , P_N (x) tal que **f** (x) y P_N (x) poseen las mismas derivadas en el punto a desde el orden 0 hasta el orden N.

$$P_N(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^{(N)}$$

El error de interpolación viene dado por la fórmula

$$f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N-1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{(N+1)}$$

donde ξ es un valor intermedio entre x y a. En el caso general, donde buscamos un polinomio P (x) tal que él y todas sus derivadas hasta un cierto orden M coincidan con una función **f** (x) en los puntos $\{x_i\}_{i=0,..,N}$, se utilizan los denominados polinomios base de Hermite $H_{i,j}$ (x), que son polinomios de grado menor o igual que
(N + 1)(M + 1) – 1 dados por las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial^l H_{i,j}}{\partial x^l}(x_k) = \begin{cases} 1 & si \quad l = j \quad y \quad k = i \\ 0 & si \quad l \neq j \quad o \quad k \neq i \end{cases}$$

A partir de los polinomios base de Hermite, el polinomio interpolador de Hermite se define como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x_i) H_{i,j}(x)$$

Algoritmo hermite

MARIO EUGENIO MATIAUDA

2.4 MÉTODO DE NEVILLE

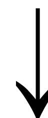
Si $N_{i,j}$ con $0 \le i \le j$ representa el polinomio interpolante de grado *j* en los $(j+1)$ números $x_{i-j,}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$

$$N_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}$$

Se dispondrá de un diagrama para los polinomios interpolantes:

$x_0 \; P_0 = N_{0,0}$

$x_1 \; P_1 = N_{1,0} \; P_{0,1} = N_{1,1}$



$x_2 \; P_2 = N_{2,0} \; P_{1,2} = N_{2,1} \; P_{0,1,2} = N_{2,2}$

i más grande

$x_3 \; P_3 = N_{30} \; P_{2,3} = N_{3,1} \; P_{1,2,3} = N_{3,2} \; P_{0,1,2,3} = N_{3,3}$

$x_4 \; P_4 = N_{4,0} \; P_{3,4} = N_{4,1} \; P_{2,3,4} = N_{4,2} \; P_{1,2,3,4} = N_{4,3} P_{0,1,2,3,4} = N_{4,4}$

→ Desplazarse hacia la derecha aumenta el grado del polinomio

$$N_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})N_{i,j-1} - (x - x_i)N_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Algoritmo neville1

Algoritmo neville2

MARIO EUGENIO MATIAUDA

2.5 DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Para calcular las diferencias divididas de una función $f(x) \quad en \quad x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ construimos una tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\dots$
x_0	$f[x_0] = f_0$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1] = f_1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$\dots$
x_2	$f[x_2] = f_2$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$\dots$
x_3	$f[x_3] = f_3$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$\vdots$	$\dots$
x_4	$f[x_4] = f_4$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

MARIO EUGEN

La primera columna contiene los puntos $x_k, \quad k = 0,1,...,n$

La segunda contiene los valores de la función en $x_k, \quad k = 0,1,...,n$

En las columnas 3, 4, 5,…., están las diferencias divididas de orden 1, 2, 3,…. Cada una de estas es, una fracción cuyo numerador es siempre una diferencia entre dos diferencias divididas consecutivas, y de orden inmediatamente inferior y, cuyo denominador es la diferencia entre los dos extremos de los puntos involucrados.

$$f(x_0, x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Para orden n :

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, ..., x_n) - f(x_0, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Fórmulas de diferencias divididas interpolantes de Newton

$$P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k](x - x_0)...(x - x_{k-1})$$ para cada $k = 0,1,...,n$

Fórmula de Newton de diferencias divididas hacia adelante

Una simplificación de la fórmula de interpolación de diferencias divididas se obtiene considerando igual espaciado entre los símbolo, $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Denotando $h = x_{i+1} - x_i$ para $i = 0,1,\ldots,n-1$ con $x = x_0 + sh$.

Será $x - x_i = (s-i)h$, convirtiendo a

$$P(x) = \sum_{k=o}^{n} s(s-1)\ldots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Fórmula de Newton de diferencias divididas hacia atrás

Si los nodos tienen espacios iguales con $x = x_n + sh$ y $x = x_i + (s+n-i)h$ entonces

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) = f[x_n] + sh\ f[x_n, x_{n-1}] + \ldots..$$

$$s(s+1)h^2\ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n\ f[x_n, \ldots, x_0].$$

Con $s = \dfrac{x - x_n}{h}$

Diferencias centradas de Stirling

Si se busca aproximar un valor de *x* que se ubica cerca del centro de la tabla, no son adecuadas las expresiones de Newton.
Se emplean las fórmulas de diferencias centradas, según sea el caso, y dada la amplitud de expresiones se mencionan la de Stirling.

$$P(x) = P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}\left(f[x_1, x_0] + f[x_0, x_1]\right) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_1, x_0]$$

$$+\frac{s(s^2-1)h^3}{2}\left(f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] + f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]\right) + \ldots$$

$$+s^2(s^2-1)(s^2-4)\ldots\left(s^2-(m-1)^2\right)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots.x_m]$$

$$+\frac{s(s^2-1)\ldots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}\left(f[x_{-m}, \ldots.x_{m+1}] + f[x_{-m-1}, \ldots.x_m]\right)$$

para *n=2m+1* impar, y si *n=2m* es par se elimina el último término de la misma expresión.

Algoritmo divdiff1

Algoritmo newpoly

MARIO EUGENIO MATIAUDA

2.6 POLINOMIOS OSCULADORES. POLINOMIOS DE HERMITE

Polinomio con grado $\leq 2n+1$ y oscilación de primer orden, expresado por

$$P_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)P_{n,j}(x)+\sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\bar{P}_{n,j}(x)$$

Siendo $P_{n,j}(x)=\left[1-2\left(x-x_j\right)L'_{n,j}(x_j)\right]L^2_{n,j}(x_j)$

$$\bar{P}_{n,j}(x)=\left(x-x_j\right)L^2_{n,j}(x_j)$$

Con $L_{n,j}$ el j-ésimo polinomio de coeficientes de Lagrange(grado *n*).

Dado lo laborioso de determinar los polinomios de Lagrange con sus derivadas, alternativamente para aproximar por Hermite se hace uso de la fórmula de diferencia para los polinomios de Lagrange.

2.7 ADAPTADOR CÚBICO

El empleo de polinomios cúbicos garantiza la derivabilidad en el intervalo y posee derivadas segundas continuas, sin suponer que coincidan derivadas del polinomio interpolantes con las de la función.

$$h_{j-1}c_{j-1}+2\left(h_{j-1}+h_j\right)c_j+h_jc_{j+1}=\frac{3}{h_j}\left(a_{j+1}-a_j\right)-\frac{3}{h_{j-1}}\left(a_j-a_{j-1}\right)$$

Para $j=0,1,\ldots,n-1$

h = al paso entre nodos para $j=0,1,\ldots,n-1$ y $a_n=f\left(x_n\right)$

Siendo:

$$c_{j+1}=c_j+3d_jh_j$$

$$a_{j+1}=a_j+b_jh_j+\frac{h_j^2}{3}\left(2c_j+c_{j+1}\right) \quad \text{con} \quad b_j=\frac{1}{h_j}\left(a_{j+1}-a_j\right)-\frac{h_j}{3}\left(2c_j+c_{j+1}\right)$$

$$b_{j+1}=b_j+h_j\left(c_j+c_{j+1}\right)$$

el conjunto $\left\{c_j\right\}_{j=0}^{n}$ serán las incógnitas.

Al conocer los c_j, se podrán hallar los coeficientes b_j y d_j, para poder generar los polinomios cúbicos $\left\{A_j\right\}_{j=0}^{n-1}$.

Algoritmo linear_spline
Algoritmo spline_eval

MARIO EUGENIO MATAUDA

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMERICAS

3.1 DIFERENCIACIÓN NUMERICA. FÓRMULAS DE APROXIMACIÓN

Para un intervalo con (*n+1*) puntos diferentes $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $f \in C^{n+1}$ sobre dicho intervalo

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L'_j(x) + \frac{f^{n+1}(\zeta(x))}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n}\left(x_k - x_j\right)$$

que combina linealmente (*n+1*) valores de $f(x)$, para $j = 0,1,...,n$, conocida como fórmula de (*n+1*) puntos.

Fórmulas de tres puntos

$$f(x) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^3(\zeta_0)$$

Con ζ_0 entre x_0 y $x_1 + 2h$, y

$$f(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\zeta_1)$$

Con ζ_1 entre $(x_0 - h)$ y $(x_0 + h)$

Fórmulas de cinco puntos

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\zeta)$$

Y

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) + 3f(x_0+4h)\right] + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\zeta)$$

Con ζ_0 entre x_0 y $x_0 + 4h$

La diferenciación basada en N+1 puntos para aproximar $f'(x_0)$ numéricamente mediante la construcción del polinomio de Newton de enésimo grado.

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + ... + a_N(x-x_0)...(x-x_{N-1})$$

Y usando $f'(x_0) \approx P'(x_0)$ como la aproximación esperada. El método debe ser utilizado en x_0. Los puntos se pueden cambiar $\{x_k, x_0, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_N\}$ para calcular $f'(x_k) \approx P'(x_k)$.

Algoritmo diffnew

MARIO EUGENIO MATIAUDA

La diferenciación usando límite para aproximar $f'(x_0)$, generando la secuencia

$$f'(x) \approx D_k = \frac{f(x+10^{-k}h) - f(x+10^{-k}h)}{2(10^{-k}h)} \quad k = 0,\dots,n$$

Ya que $|D_{n+1} - D_n| \geq |D_n - D_{n-1}| \quad o \quad |D_n - D_{n-1}| < tolerancia$, que es un intento de encontrar la mejor aproximación $f'(x) \approx D_n$.

Algoritmo difflim

3.2 DIFERENCIACIÓN NUMERICA. TÉCNICA DE RICHARDSON

La expresión general será:

$$R = R(h) + \sum_{j=1}^{m-1} M_j h^j + O(h^m) \quad \text{para} \quad c/\ j = 2,3,\dots,m$$

Llamando *R(h)* la expresión que aproxima el valor no conocido R, con un error de truncado $O(h)$, para ciertas constantes $M_1, M_2, M_3 \dots$:
Existe una aproximación para cada *j* del tipo:

$$R(h) = R_{j-1} + \frac{R_{h-1}(h/2) - R_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}$$

La técnica (extrapolante) es aplicable siempre y cuando el error de truncado para una fórmula sea del tipo:

$$\sum_{j=1}^{m-1} M_j h^{\alpha j} + O(h^{\alpha m})$$

Para constantes M_j y que se verifique $\alpha_1 \langle \alpha_1 \langle \dots \alpha_1 \langle \alpha_m$

Algoritmo diffext

3.3 INTEGRACIÓN NUMERICA

Si *P(x)* aproxima a *f(x)*, se tendrá: $\int_a^b P(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$

3.3.1 Fórmula de Newton

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

$$\int_{x_0}^{x_3} P(x)dx = \left(\frac{3h}{8}\right)\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right)$$

3.3.2 Regla Compuesta del Trapecio

Usa segmentos de recta como aproximación a $f(x)$.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Incluye nodos del intervalo abierto (x_0, x_n)

O también es posible expresarlo cómo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k)$$

$$por \quad muestreo \quad f(x) \quad en \quad los \quad M+1 \quad puntos \quad equiespaciados$$
$$x_k = a+kh, \quad para \quad k=0,1,2....,M. \quad Siendo \quad x_0 = a \quad y \quad x_M = b$$

Algoritmo traprl

3.3.3 Regla compuesta de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Incluye los puntos extremos del intervalo cerrado $[x_0, x_n]$.
O también es posible expresarlo cómo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(a)+f(b))+\frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k})+\frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

$$por \quad muestreo \quad f(x) \quad en \quad los \quad 2M+1 \quad puntos \quad equiespaciados$$
$$x_k = a+kh, \quad para \quad k=0,1,2....,2M. \quad Siendo \quad x_0 = a \quad y \quad x_{2M} = b$$

Algoritmo simprl

MARIO EUGENIO MATIAUDA

3.3.4 Integración compuesta de Romberg

Emplea la regla compuesta de los trapecios para una primaria aproximación y posteriormente utiliza la técnica de Richardson para mejoramientos de las aproximaciones.

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{k-2} f(a + (2i-1)h_k) \right] \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

Para cada $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ y $j = 2, \ldots, k$ se puede reducir la notación expresando

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Conformando un diagrama característico

$$\begin{array}{lllll}
R_{1,1} & & & & \\
R_{2,1} & R_{2,2} & & & \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & \\
. & & & & \\
. & & & \mathrm{O} & \\
R_{n,1} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & R_{n,n}
\end{array}$$

O también es posible expresarlo cómo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx R(J, J)$$

mediante la generación de una tabla de aproximaciones R (J, K) para J≥K y con R(J+1,J+1) como la respuesta final. Las aproximaciones R(J, K) se almacenan en una matriz triangular inferior especial. Los elementos de R(J,0) de la columna 0 se calculan usando la regla trapezoidal secuencial basado en 2^J subintervalos de [a, b], entonces R (J, K) se calcula utilizando la regla de Romberg.
Los elementos de la fila J son:

$$R(J, K) = R(J, K-1) + \frac{R(J, K-1) - R(J-1, K-1)}{4^K - 1}$$

$$para \quad 1 \le K \le J.$$

Algoritmo de romber

MARIO EUGENIO MATIAUDA

3.3.5 Regla trapezoidal recursiva

Para aproximar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{2^J} f(x_{k-1}) + f(x_k)$$

Mediante el uso de la regla del trapecio y sucesivamente cada vez mayor el número de subintervalos de [a, b]. En la iteración *J-ésima* para *f (x)* en los 2^J+1 puntos igualmente espaciados.

Algoritmo trapezoidal

3.4 FÓRMULAS GAUSSIANAS

Presentación general

$$\int_a^b \mu(x) f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Con $\mu(x)$ una función de peso, que en el caso de $\mu(x)=1$ se presenta la forma más simple.

$$a_i = \int_a^b \mu(x) L_i(x)dx \qquad L_i(x) = \text{función multiplicadora de Lagrange.}$$

Los $x_1,\ldots,x_n$ representan los ceros del polinomio $P_n(x)$, de grado *n*, de una familia que verifica ortogonalidad:

$$\int_a^b \mu(x) P_n(x) P_m(x)dx = 0 \qquad para \qquad m \neq n$$

con los coeficientes dependientes de $\mu(x)$, entonces $\mu(x)$ ejerce influencia sobre a_i, x_i aunque no esté taxativamente presente en la fórmula de Gauss.

3.4.1 Fórmula de Gauss-Legendre

$\mu(x) = 1$

$(a,b) = (-1,1)$

Los polinomios ortogonales son polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \qquad P_0(x) = 1$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

x_i raíces del polinomio y $a_i = \dfrac{2\left(1-x_i^2\right)}{n^2\left|P_{n-1}(x_i)\right|^2}$

Tanto los x_i como los a_i están tabulados para reemplazar en

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Algoritmo gausslegendre

3.4.2 Formula de Gauss-Laguerre

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} a_i f'(x_i)$$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$$

Y

$$a_i = \frac{(n!)^2}{x_i\left[L'(x_i)\right]^2}$$

3.4.3 Formula de Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \cong \left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

El polinomio n-simo de Chebyshev: $T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$

x_i los ceros del polinomio $T_n(x)$.

3.5 Cuadratura adaptativa utilizando la regla de Simpson's

Para aproximar la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{M} (f(x_{4k-4}) + 4f(x_{4k-3}) + 2f(x_{4k-2})$$

$$+ 4f(x_{4k-1}) + f(x_{4k})$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

La regla compuesta de Simpson's es ampliada para los 4M subintervalos $[x_{4k-4}, x_{4k}]$, donde $[a,b]=[x_0,x_{4M}]$ y $x_{4k-4+j}=x_{4k-4}+jh_k$, para cada k=1,…M y J=1,…4.

Algoritmo adapt

3.6 Regla de Simpson's

El algoritmo "srule", es una modificación de la regla de Simpson's. El resultado es un vector Z que contiene los resultados de la regla de Simpson en el intervalo $[a_0, b_0]$. El algoritmo "adapt" utiliza srule para llevar a cabo la regla de Simpson's en cada uno de los subintervalos generado por el proceso de cuadratura adaptativa.

Algoritmo srule

3.7 Cuadratura de Gauss-Legendre

Para aproximar la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} W_{N,k} f(t_{N,k})$$

Por muestreo f(x) en los N puntos desigualmente espaciados $\{t_{N,k}\}_{k=1}^{N}$.
Los cambios de variable:

$$t=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x \quad y \quad dt=\frac{b-a}{2}dx$$

Son usados. Las abscisas $\{x_{N,k}\}_{k=1}^{N}$ y el correspondiente peso $\{W_{N,k}\}_{k=1}^{N}$ se deben obtener de una tabla de valores conocidos.

Algoritmo gauss_q

MARIO EUGENIO MATIAUDA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

4.1 METODOS PARA RESOLVER P.V.I.

P.V.I. $y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$

En esta ecuación f es una función real dada de en t, donde y es una función incógnita de variable independiente t. Tanto y como pueden ser vectores, en cuyo caso tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una ecuación diferencial conjuntamente con una condición inicial constituye un problema de valor inicial; siendo:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

4.1.1 Método de Euler

Se basa en la ecuación diferencial, en el tamaño de paso y en el paso particular de la aproximación, con el error local de truncamiento = $O(h)$.

$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad i = 0,1,2,...,N-1$, (ecuación de diferencias)

h=tamaño de paso, con distribución uniforme en [a,b].

$t_i = a + ih, \quad para \quad cada \quad i = 0,1,2,...,N.$

$w_i \approx y(t_i)$ denota el valor exacto de la solución en t_i

se suele emplear para el método una expresión del tipo:

$\mu_0 = \alpha + \delta_0$

$\mu_{i+1} = \mu_i + hf(t_i, w_i) + \delta_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, ..., N-1$

Siendo δ_i error de redondeo asociado con μ_i.

El mínimo valor de $E(h)$ se da para $h = \sqrt{2\delta / M}$

O sea *h* superiores inducirán a incrementar el error total en la aproximación.

4.1.2 Serie de Taylor

El método de Euler es el método de Taylor de orden uno.
Para órden dos:

$w_0 = 0.5,$

$$w_{i+1} = w_i + h\left[(1 + \frac{h}{2})(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i \right]$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Para órden cuatro:

$$w_0 = 0.5,$$

$$w_{i+1} = w_i + h\left[(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{6}+\frac{h^3}{24})(w_i - t_i^2) - (1+\frac{h}{3}+\frac{h^2}{12})ht_i + 1 + \frac{h}{2}+\frac{h^2}{6}+\frac{h^3}{24}\right]$$

$$i = 0,1,\ldots,N-1.$$

para $\zeta_i \; en \; (t_i, t_{i+1})$

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}\left(\zeta_i, y(s_i)\right) \qquad i = 0,1,2,\ldots,N-1$$

con el error local de truncamiento = $\mathrm{O}(h^n)$ $\quad n = derivada \quad admitida$.

4.1.3 Métodos de Runge-Kutta

Fórmulas más difundidas

$$\kappa_1 = hf(t, y)$$

$$\kappa_2 = hf\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{\kappa_1}{2}\right) \qquad O(h^2)$$

$$\kappa_3 = hf\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{\kappa_2}{2}\right) \qquad O(h^3)$$

$$\kappa_4 = hf\left(t+h, y+\kappa_3\right) \qquad O(h^4)$$

$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{1}{6}\left(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right) \qquad cuarto\,orden$$

Algoritmo_rk4

4.1.4 MÉTODOS MULTIPASO

Dado el P.V.I. $y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = b$

La ecuación de diferencias w_{i+1} en t_{i+1} $\left(m \in Z^+, y\rangle 1\right)$será:

$$w_{i+1} = c_{m-1}w_i + c_{m-2}w_{i-1} + \ldots + c_0 w_{i+1-m} + h\left[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \ldots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})\right]$$

m = paso>1; t_i = paso de red; $h = \frac{(b-a)}{N}$; $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ y $b_0, b_1, \ldots, b_m$ son constantes.

$$i = m-1, m, \ldots, N-1$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Valores iniciales dados $w_0 = \alpha, w_1 = \alpha_1, w_2 = \alpha_2, ..., w_{m-1} = \alpha_{m-1}$

4.1.4.1 Métodos de Adams-Bashforth: EXPLICITOS

A. De dos pasos

$$w_0 = \alpha \qquad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})\right] \qquad i = 1,2,...,N-1$$

El error local de truncamiento es $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12} y^3(\mu_i)h^2$ con algún μ_i entre (t_{i-1}, t_{i+1}).

B. de tres pasos

$$w_0 = \alpha \qquad w_1 = \alpha_1 \qquad w_2 = \alpha_2$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

$$i = 2,3,...,N-1$$

El error local de truncamiento es $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_i)h^3$ con algún μ_i entre (t_{i-2}, t_{i+1}).

C. De cinco pasos

$$w_0 = \alpha, w_1 = \alpha_1, w_2 = \alpha_2, w_3 = \alpha_3, w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\left[1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4})\right]$$

$$i = 4,5,...,N-1$$

El error local de truncamiento es $\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288} y^{(6)}(\mu_i)h^5$ con algún μ_i entre (t_{i-4}, t_{i+1}).

Para los implícitos se debe usar $\left(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right)$ como un nodo de interpolación extra para aproximar la integral $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$.

MARIO EUGENIO MATIAUDA

4.1.4.2 Métodos de Adams-Moulton: IMPLICITOS

A. De dos pasos

Las diferencias ordinarias de orden 1 y 2, están dadas por:

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n,$$
$$\Delta^2 f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

para sustituir a las diferencias ordinarias en la expresión anterior y agrupando términos semejantes, obtenemos:

Dados $w_0 = \alpha$ y $w_1 = \alpha_1$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})\right]$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1$$

El error local de truncamiento es:

$$\tau_{i+1}(h) = -\frac{1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3 \qquad con\ t_{i-1} \langle \mu_i \langle t_{i+1}$$

B. De tres pasos

$$w_0 = \alpha \qquad w_1 = \alpha_1 \qquad w_2 = \alpha_2$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1$$

El error local de truncamiento es: $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4 \qquad con\ t_{i-2} \langle \mu_i \langle t_{i+1}$

C. De cuatro pasos

$$w_0 = \alpha \qquad w_1 = \alpha_1 \qquad w_2 = \alpha_2 \qquad w_3 = \alpha_3$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\left[251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) - 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3})\right]$$
$$i = 3, 4, \ldots, N-1$$

El error local de truncamiento es:

$$\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160} y^{(6)}(\mu_i) h^5 \qquad con\ t_{i-3} \langle \mu_i \langle t_{i+1}$$

Algoritmo abm

MARIO EUGENIO MATIAUDA

4.1.5 Método de Milne

Técnicas denominadas de predicción-corrección, empleando el explicito para predecir la aproximación y la implícita para corregirla.
Otros métodos multipasos se generan por integración o interpolación de polinomios en intervalos $\left[t_j, t_{i+1}\right]$ con $j \leq i-1$ parar aproximar a $y(t_{i+1})$.
Así está el método de Milne, entre $\left[t_{i-3}, t_{i+1}\right]$:

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})\right]$$

Algoritmo milne

4.1.6 Predictor-Corrector

Si usamos el primer orden (explícito) el método de Euler hacia adelante para inicializar el método de Crank-Nicolson, obtenemos el método de Heun (también llama método de Euler mejorado), que es un método de segundo orden explícito de Runge-Kutta

$$u_{n+1}^* = u_n + hf_n$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f(t_{n+1}, u_{n+1}^*)]$$

El paso explícito constituye un factor de predicción, mientras que la implícita se llama corrector. Este tipo de métodos disfrutan de la orden de precisión del método corrector. Sin embargo, el ser explícito, se somete a una restricción de estabilidad que suele ser el mismo que el del método predictor. Por lo tanto, no son adecuados para integrar un problema de Cauchy en intervalos no acotados.

Algoritmo heun

4.1.7 USO DE LA EXTRAPOLACIÓN

condición inicial $w_0 = \alpha = y(a)$ y para w_1 se utiliza la técnica de Euler.

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i) \qquad i \geq 1$$

Al llegar al valor *t*, se corrige el punto extremo que comprende las dos aproximaciones del punto medio, generando una aproximación $w(t,h)$ a $y(t)$ dada por.

$$y(t) = w(t,h), + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h^{2k}$$

Con δ_k ctes., ligadas a las derivadas de $y(t)$, pero es independiente de *h*.

MARIO EUGENIO MATIAUDA

SISTEMAS LINEALES

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Planteo generalizado:

$$\begin{array}{ll} R_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ R_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ R_n & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

5.1 REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA LINEAL. SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

Un sistema $\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$ puede llevarse a la forma:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & \ddots & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$ con $a_{i,n+1} = b_i$ para $c/_i = 1, 2, \ldots, n$

Permitiendo la sustitución hacia atrás.

Sustitución hacia atrás, solamente si todos los elementos de la diagonal son no ceros. Primero calcula $x_N = b_N / a_{NN}$ y entonces realiza:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \qquad para \quad k = N-1, N-2, \ldots, 1.$$

Algoritmo backsub

Triangularización superior, seguido por la sustitución hacia atrás. Para construir la solución AX = B, primero reducción de la matriz aumentada
[A | B] a la forma triangular superior y luego realizar la sustitución hacia atrás

Algoritmo uptrbk (utilizado por backsub)

MARIO EUGENIO MATIAUDA

5.2 TÉCNICA DE GAUSS-JORDAN

Partiendo de una matriz aumentada, por hipótesis tenemos
$a_{11} \neq 0, \quad pues \quad \det(A) \neq 0$

La solución se obtiene usando $x_i = \dfrac{a^{(i)}_{i,n+1}}{a^{(i)}_{ii}}$ para cada $i = 1,2,3,\ldots,n.$

Prescindiendo de la sustitución hacia atrás en la eliminación gaussiana.
Requiere $\left(\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}\right)$ productos/divisiones y $\left(\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}\right)$ sumas/ restas.

Algoritmo gjelim

5.3 PIVOTEO

Una pista para seleccionar es tomar el menor $p \geq k|$ tal que:

$$\left|a^{(k)}_{p,k}\right| = \max_{k \leq i \leq h} \left|a^{(k)}_{i,k}\right| \qquad \text{y efectuar} \qquad (R_k) \leftrightarrow (R_p)$$

(Técnica parcial de pivoteo)

Otra técnica es la de reescalonamiento de columnas. El primer paso del procedimiento consiste en definir, para cada renglón, un factor escalar s_i
Por medio de:

$s_i = máx\,|\,a_{ij}\,|$ con $1 \leq j \leq n$ cuando s_i =0 (solución múltiple); de no ser así, el intercambio adecuado de renglones para poner ceros en la primer columna se determina seleccionando el menor entero k con:

$$\frac{|ak_1|}{s_k} = \max_{j=1,2,\ldots,n} \frac{|a_{i,j}|}{s_j}$$

Y se realiza $(R_1) \leftrightarrow (R_k)$

Algoritmo gauss con pivoteo

MARIO EUGENIO MATIAUDA

5.4 FACTORIZACION MATRICIAL

Si *A* es no singular, admite el producto SI (triangular superior por triangular inferior), la factorización es de gran provecho, para la resolución de sistemas lineales.

Si la eliminación gaussiana para $A\vec{x} = \vec{b}$ se efectúa sin cambios de filas, *A* podrá factorizarse como el producto *IS.*

A=IS

Con

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$ Matriz triangular inferior $c_{ij} = 0 \quad para \quad i < j$

$$S=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \ddots & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix}$$ Matriz triangular superior $c_{ij} = 0 \quad para \quad i > j$

La solución para ISx=B puede ser obtenida definiendo y=Sx, entonces se resuelven los dos sistemas:

1°) Iy=B para y
2°) Sx=y para x

5.4.1 Factorización LU

Tenemos que demostrar que la descomposición se puede hacer a una matriz de orden n = k. Es entonces la matriz de orden k. Empezamos esta serie en sub-matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s^t & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Donde r y s son vectores columna, ambos con k - 1 componentes. Tenga en cuenta que la matriz A_{k-1} es de orden $_{k-1}$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción esta puede ser descompuesta en forma $A_{k-1} = L_{k-1}U_{k-1}$. Utilizando las matrices L_{k-1} y U_{k-1} formamos las siguientes matrices:

$$L = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m^t & 1 \end{pmatrix} \; ; \; U = \begin{pmatrix} U_{k-1} & p \\ 0 & u_{kk} \end{pmatrix}$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Donde m y p son vectores columna, ambos con k-1 componentes. Tenga en cuenta que m, p y u_{kk} son desconocidos.
Así, se establece que la matriz A se puede descomponer en LU trataremos de determinarlos.
Realización del producto LU, se deduce que:

$$LU = \begin{pmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}p \\ m^t S_{k-1} & m^t p + u_{kk} \end{pmatrix}$$

Estudiemos ahora la ecuación LU=A, esto es:

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}p \\ m^t U_{k-1} & m^t p + u_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s^t & a_{kk} \end{pmatrix}$$

De esta igualdad concluimos

$$\begin{aligned} &L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}, \\ &L_{k-1}p = r, \\ &m^t U_{k-1} = s^t, \\ &m^t p + u_{kk} = a_{kk}. \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que la primera ecuación tiene por hipótesis la inducción, y por lo tanto L_{k-1} y U_{k-1} son determinadas de manera única. Además, ni L_{k-1} ni U_{k-1} son singulares (o A_{k-1} también seria singular, contradiciendo la hipótesis). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &L_{k-1}p = r \Rightarrow p = L_{k-1}^{-1}r, \\ &m^t U_{k-1} = s^t \Rightarrow m^t = s^t U_{k-1}^{-1}, \\ &m^t p + u_{kk} = a_{kk} \Rightarrow u_{kk} = a_{kk} - m^t p \end{aligned}$$

Por lo tanto p, m y u_{kk} son determinadas unívocamente en este orden, L y U son determinados únicamente. Al final:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L) * \det(U) = 1 * \det(U_{k-1}) * u_{kk} \\ &= u_{11}u_{22} \ldots\ldots u_{k-1,k-1}u_{kk}, \end{aligned}$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Cabe señalar que la descomposición LU constituye uno de los algoritmos más eficientes para el cálculo del determinante de una matriz.

La resolución del sistema A**x** = **b** implica hacer L**y** = **b**, U**x** = **y**

Factorización con pivoteo

Algoritmo lufact

Según determinadas variaciones para la técnica se conocen los métodos:

- **Doolittle**: requiere que $i_{11} = i_{22} = ... = i_{nn} = 1$
- **Crout**: requiere que los elementos de la diagonal principal de *S* sean todos 1.
- **Choleski**: requiere $i_{ii} = s_{ii}$ para cada *i.*

Este tipo de factorización presentado es ventajoso cuando no se requiere el intercambio de filas para ajustar el error de redondeo.

Matrices de permutación

Se utiliza cuando se requieren intercambios de renglones

- Si *P* es matriz de permutación tiene inversa y $P^{-1} = P^t$.
- Para cualquier *A*, no singular, habrá una *P* tal que $PA\vec{x} = P\vec{b}$ se resuelve sin intercambiar filas, con lo que *PA* se puede factorizar como *PA=IS*

Y al ser $P^{-1} = P^t \Rightarrow A = \left(P^t I\right) S$

$(P^t I)$, no será triangular inferior (salvo que *P=Identidad*).

Ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 14/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix}$$

P será

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MARIO EUGENIO MATAUDA

Matrices características

- **a)** ***Choleski*** : para una definida positiva requiere menos operaciones que IDI^t pero implica hallar *n* raíces cuadradas; con *I* con $a_{ii} = 1$ y *D* diagonal con $a_{ii} \rangle 0$. A puede factorizarse como IDI^t.
- **b)** ***Doolittle o de Crout*** : para matrices de banda que disponen sus elementos no nulos en derredor de la diagonal. Las más comunes, *p=q=2* y los de *p=q=4,* pentadiagonales.
  Las primeras, asociadas a aproximaciones de splines cúbicos o aproximaciones lineales por parte en problemas de valores de contorno, los pentadiagonales de utilidad para problemas de valores de frontera.
  El trabajar con matrices de banda facilita los algoritmos de factorización (por el número de operaciones).

5.5 TÉCNICAS DE REPETICIÓN PARA SISTEMAS LINEALES

Transformar el sistema original $A\vec{x} = \vec{b}$ en uno equivalente $\vec{x} = W\vec{x} + \vec{c}$ para cierta matriz fija W y un vector $\vec{c}$.

La sucesión se va calculando como $\vec{x}^{(k)} = W\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} \qquad k = 1, 2, 3...,$

Métodos iterativos de resolución de sistemas lineales

Estas técnicas consisten en transformar un sistema de la forma

$$Au = b$$

en una ecuación de punto fijo de la forma: u = Mu + c

de tal manera que, al hacer iteraciones de la forma:

$$u^n = M u^{n-1} + c$$

se obtenga que u^n converge hacia u, la solución del sistema original.

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$2x - y = 1$$
$$-x + 2y - z = 0$$
$$-y + 2z = 1$$

Buscar la solución de este sistema es equivalente a buscar un vector u = (x, y, z) que verifique que

$$x = \frac{1+y}{2} \quad , y = \frac{x+z}{2} \quad , z = \frac{1+y}{2}$$

Hacer iteraciones de esta ecuación de punto fijo consiste en partir de una aproximación inicial (x_1, y_1, z_1) y hacer iteraciones de la forma:

$$x_n = \frac{1+y_{n-1}}{2} \quad , y_n = \frac{x_{n-1}+z_{n-1}}{2} \quad , z_n = \frac{1+y_{n-1}}{2}$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

En este caso, la solución exacta del sistema es u = (1, 1, 1).
Si hacemos iteraciones del esquema anterior a partir de la aproximación inicial u^1 = (0, 0, 0), obtenemos que

$$x_2 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \quad , y_2 = \frac{0+0}{2} = 0 \quad , z_2 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

las sucesivas iteraciones se van aproximando a la solución u = (1, 1, 1).
Si el esquema iterativo $u^n = M u^{n-1} + c$ converge hacia un vector u, entonces u verifica que u = Mu + c

Existen diferentes métodos para convertir un sistema de la forma Au = b en una ecuación de punto fijo u = Mu + c. Todas se basan en descomponer A de la forma A = L + D + U, donde D es la matriz diagonal que corresponde a la parte diagonal de A, L es la matriz triangular inferior que corresponde a la parte de A situada por de- bajo de la diagonal, y U es la matriz triangular superior que corresponde a la parte de A situada por encima de la diagonal.

5.5.1 Técnica de Jacobi

Este método consiste en tomar

$$M_j = D^{-1}(-L - U)$$
$$c_j = D^{-1} b$$

Es el que se ha utilizado en el ejemplo anterior. El paso de una iteración a otra del método de Jacobi puede expresarse de la siguiente forma:

$$u_1^n = \frac{-a_{12}u_2^{n-1} - \ldots - a_{1N}u_N^{n-1} + b_1}{a_{11}}$$

$$u_2^n = \frac{-a_{21}u_1^{n-1} - a_{23}u_3^{n-1} \ldots - a_{2N}u_N^{n-1} + b_2}{a_{22}}$$

$$u_N^n = \frac{-a_{N1}u_1^{n-1} - a_{N2}u_2^{n-1} \ldots - a_{NN-1}u_{N-1}^{n-1} + b_N}{a_{NN}}$$

Algoritmo jacobi

5.5.2 Técnica de Gauss-Seidel

Este método consiste en tomar:

$$M_{GS} = (D+L)^{-1}(-U)$$
$$c_{GS} = (D+L)^{-1} b$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

A efectos prácticos, la aplicación de este método no requiere el cálculo directo de la matriz inversa $(D + L)^{-1}$,puesto que el paso de una iteración a otra puede hacerse de la siguiente forma:

$$u_1^n = \frac{-a_{12}u_2^{n-1} - \ldots - a_{1N}u_N^{n-1} + b_1}{a_{11}}$$

$$u_2^n = \frac{-a_{21}u_1^n - a_{23}u_3^{n-1} \ldots - a_{2N}u_N^{n-1} + b_2}{a_{22}}$$

$$u_N^n = \frac{-a_{N1}u_1^n - a_{N2}u_2^n \ldots - a_{NN-1}u_{N-1}^n + b_N}{a_{NN}}$$

Si hacemos un barrido para el cálculo de la solución de arriba hacia abajo, y vamos actualizando las componentes del vector aproximación según las vamos calculando, obtenemos el método de Gauss-Seidel. Por tanto, básicamente, podemos decir que la diferencia entre el método de Gauss-Seidel y el método de Jacobi es que en el método de Gauss-Seidel se actualiza el vector aproximación después del cálculo de cada componente, y en el caso de Jacobi se actualiza sólo al final, después de haber calculado todas las componentes por separado.

Algoritmo gseid

5.6 Técnica de relajación

El objetivo de este método es intentar mejorar el método de Gauss-Seidel introduciendo un parámetro de relajación w. Se toman, en este caso:

$$M_w = (D + wL)^{-1} ((1 - w)D - wU)$$

$$c_w = w(D + wL)^{-1} b$$

Estas nuevas matrices permiten realizar un promediado entre el resultado obtenido por Gauss-Seidel y el estado de la solución en la etapa anterior, de la forma siguiente:

MARIO EUGENIO MATTAUDA

$$u_1^n = w\frac{-a_{12}u_2^{n-1} - \ldots - a_{1N}u_N^{n-1} + b_1}{a_{11}} + (1-w)u_1^{n-1}$$

$$u_2^n = w\frac{-a_{21}u_1^{n} \ldots - a_{2N}u_N^{n-1} + b_2}{a_{22}} + (1-w)u_2^{n-1}$$

$$u_N^n = w\frac{-a_{N1}u_1^{n} \ldots - a_{NN-1}u_{N-1}^{n} + b_N}{a_{NN}} + (1-w)u_2^{n-1}$$

La elección del parámetro w es, en general, un problema difícil. Sin embargo, en el caso de matrices tridiagonales, es decir, matrices con todos los elementos nulos salvo la diagonal principal y sus codiagonales, el siguiente resultado muestra la forma de calcular el valor óptimo de w.

Si A es una matriz tridiagonal y $\rho(M_j) < 1$,entonces el valor de w que optimiza la velocidad de convergencia del método es:

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(M_j)^2}}$$

Como puede observarse de la expresión anterior, el valor de w_{opt} se encuentra siempre entre 1 y 2.

CONCLUSIÓN: el teorema se concluye teniendo en cuenta que cualquier norma de una matriz es siempre mayor o igual que su radio espectral.

Este resultado se puede generalizar un poco al caso de matrices irreducibles de la siguiente forma:

A) Una matriz A es irreducible si un sistema de la forma Au = b no puede descomponerse en dos sub-sistemas independientes de dimensión menor.

B) Una matriz es irreducible si el cambio de cualquier valor del vector b del sistema Au = b afecta a todos los elementos del vector u.

Si A es una matriz irreducible y se verifica que

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \forall i$$

ó

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i\neq j} |a_{ij}| \quad \forall j$$

Con la desigualdad estricta en al menos una fila o columna, entonces los métodos iterativos convergen.

OTRA FORMA DE PLANTEAR LA TÉCNICA DE RELAJACIÓN

$$\vec{x}_i^{(k)} = \vec{x}_i^{(k-1)} + q\frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

vector residuo $r_{i+1}^{(k)}$ asociado al vector, definido por $\vec{r}=\vec{b}-A\vec{x}$ entonces habrá un $\vec{r}_i^{(k)}=\left(\vec{r}_{1i}^{(k)},\vec{r}_{2i}^{(k)},\dots,\vec{r}_{ni}^{(k)}\right)^t$ que se busca converja a cero.

- Si $0\langle q\langle 1$, técnicas de subrrelajación, para sistemas no convergentes por G-S.
- $q\rangle 1$, para acelerar convergencia de sistemas convergentes por G-S (métodos SOR o sobrerelajación).

Para el cálculo se usará:

$$\vec{x}_i^{(k)}=(1-q)\vec{x}_i^{(k-1)}+\frac{q}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}\vec{x}_j^{(k)}\right)-\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}\vec{x}_j^{(k-1)}\right)\right]$$

Matricialmente

$$\vec{x}^{(k)}=(D-qI)^{-1}\left[(1-q)D+qS\right]\vec{x}^{(k-1)}+q(D-qI)^{-1}\vec{b}$$

5.7 GRADIENTE CONJUGADO

Se busca una secuencia de *n* direcciones conjugadas, y luego se calculan los coeficientes.

La solución **x*** de $A\vec{x}=b$ es también el único minimizador de:

$$f(x)=\frac{1}{2}\vec{x}^T Ax-b^T\vec{x},\ \vec{x}\varepsilon R^n$$

$r_k=b-Ax_k$

r_k es el negativo del gradiente de *f* en $x=x_k$, con lo que se puede mostrar, ya que las direcciones p_k son conjugadas entre sí, que una expresión para tales direcciones es:

$$p_{k+1}=r_k-\frac{p_k^T Ar_k}{p_k^T Ap_k}p_k$$

Algoritmo conjgrad

MARIO EUGENIO MATIAUDA

APROXIMACIÓN

6.1 POLINOMIOS DE CHEBYSCHEV

$p(x) = a_0 H_0(x) + \ldots + a_m H_m(x)$ polinomio de aproximación

6.2 APROXIMACIÓN MÍNIMO –MÁXIMO (O DE CHEBYSHEV)

$$P(x) = mx + c$$

$$m = \frac{y(b) - y(a)}{b - a} \qquad c = \frac{y(a) - y(x_2)}{2} - \frac{(a + x_2)\left[y(b) - y(b)\right]}{2(b - a)}$$

6.3 APROXIMACIÓN POR VALORES PROPIOS

El teorema de descenso Gerschgorin es útil para determinar los límites globales a los valores propios de una matriz A_{nxn}. El término "global", los límites que encierran todos los valores propios.

Dada A_{nxn} $R_i = \left\{ z \in C / \left| z - a_{ii} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \neq}}^{n} \left| a_{ij} \right| \right\}$ R_i=es el círculo en el plano complejo con a_{ii} como centro.

Los auto-valores de A están dentro de R=$\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ (círculo de Gerschgorin)

El función Gerschgorin devuelve la parte inferior y superior de los límites globales a los valores propios de una matriz tridiagonal simétrica A.

Algoritmo Gerschgorin

6.4 Técnicas de Aproximación

6.4.1 Métodos de Potencias

Sea una matriz A que posee una base de autovectores tal que en módulo su autovalor máximo λ_{max} es único. Sea un vector u^1 no ortogonal al subespacio engendrado por los autovectores del autovalor λ max, entonces, si definimos la secuencia

$$Lim_{n \to \infty} sign((u^n, u^{n-1})) \left\| u^n \right\| = \lambda_{\max}$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

$$Lim_{n\to\infty}(sign((u^n,u^{n-1})))^n \frac{u^n}{\left\|u^n\right\|} \quad es \ un \ autovector \ de \ \lambda_{\max}$$

$$u^n = A\frac{u^{n-1}}{ku^{n-1}k}$$

Además, dicho autovector tiene norma 1.

$sign((u^n,u^{n-1}))$ *es el signo del producto escalar de* u^n u^{n-1}, *es decir* $sign((u^n,u^{n-1}))=1 \ si \ (u^n,u^{n-1})\geq 0 \ y \ sign((u^n,u^{n-1}))=-1 \ si \ (u^n,u^{n-1})<0$

Para calcular el valor propio dominante λ_1 y su vector propio asociado V_1 para la matriz A_{nxn} . se supone que los valores propios n tienen la propiedad de posición dominante $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$.

Algoritmo power1

6.4.2 Método de la potencia inversa

El método anterior también se puede utilizar para el cálculo del autovalor de módulo menor λ_{min}, teniendo en cuenta que:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{\max\{\lambda_i' \text{ autovalores de } A^{-1}\}}$$

Por tanto, si aplicamos el método anterior a A^{-1}, obtenemos que la secuencia $u = A^{-1}\frac{u^{n-1}}{\left\|u^{n-1}\right\|}$ verifica que $Lim_{n\to\infty}sign((u^n,u^{n-1}))\left\|u^n\right\| = \frac{1}{\lambda_{\min}}$

$$Lim_{n\to\infty}sign((u^n,u^{n-1}))\frac{u^n}{\left\|u^n\right\|} \quad es \ un \ autovector \ de \ \lambda_{\min}$$

En los casos prácticos, se evita calcular directamente A^{-1}, y se obtiene u^n resolviendo el sistema

$$Au^n = \frac{u^{n-1}}{\left\|u^{n-1}\right\|}$$

Para calcular el valor propio dominante λ_1 y su vector propio asociado V_j para la matriz A_{nxn}. Se supone que los *n* valores propios tienen la propiedad $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ y que α es un número real tal que:

$$|\lambda_j - \alpha| < |\lambda_i - \alpha| \quad para \quad cada \quad i = 1,2,\ldots, j-1, j+1,\ldots,n$$

Algoritmo invpow

6.4.3 Método simétrico de Potencias

$$\vec{x}^{(0)} : q = \frac{\vec{x}^{(0)t} A \vec{x}^{(0)}}{\vec{x}^{(0)t} \vec{x}^{(0)}}$$

Para elegir q se considera que si $\vec{x}$ es vector propio de A respecto al valor propio λ, se dará que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, entonces $\vec{x}^t A\vec{x} = \lambda\vec{x}^t\vec{x}$ y $\lambda = \frac{\vec{x}^t A\vec{x}}{\vec{x}^t\vec{x}}$

6.4.4 METODO CLASICO DE JACOBI

El clásico método de Jacobi, o simplemente el método de Jacobi, es un método numérico utilizado para determinar la auto-valores y la auto-vectores de matrices simétricas. Teniendo en cuenta la matriz A, se realiza una secuencia de rotación

$$A_1 = A \quad ; \quad A_2 = U_1^t A_1 U_1 \to A_3 = U_2^t A_2 U_2 \to$$
$$\to \ldots \to A_{k+1} = U_k^t A_k U_k \approx D$$

$donde \;\; U_i, \;\; i = 1,2,\ldots,k$ son matrices de rotación, y D es una matriz diagonal.

La secuencia de las matrices de A_k es calculada a través de una repetición de:

$$A_{k+1} = U_k^t A_k U_k \qquad (K = 1,2,\ldots)$$
$$Como \quad A_1 = A \;, \; obtenemos:$$
$$A_{k+1} = U_k^t U_{k-1}^t \ldots U_2^t U_1^t A U_1 U_2 \ldots U_{k-1} U_k = V^t A V$$

$$Donde \;\; V = U_1 U_2 \ldots U_{k-1} U_k.$$

Con la hipótesis de que $A_k \approx D$, obtenemos que $D = V^t AV$, donde V es una matriz ortogonal, porque la matriz V es producto de matrices ortogonales. Así, D contiene la auto-valores de A y V contiene su correspondientes
auto-vectores (en columnas), es decir, la j-ésima columna de V es un auto-vector correspondiente a auto-valor λ_j.

Para calcular tanto los auto-valores como los auto-vectores $\{\lambda_j, V_j\}_{j=1}^n$ de la matriz simétrica A_{nxn}:

Algoritmo jacobi1

MARIO EUGENIO MATIAUDA

6.4.5 Técnicas de Deflación

Se emplean para la determinación de aproximaciones a los otros valores propios de una matriz después de haber encontrado la aproximación al valor propio dominante.
Consiste en generar una nueva matriz *B*, con valores propios iguales a los de *A*, salvo que el valor propio dominante de *A* se sustituya por el valor propio 0 en *B*.
La técnica es muy sensible a errores de redondeo.

6.4.6 Técnica de Householder

Para reducir la matriz simétrica A_{nxn} a la forma tridiagonal mediante el uso de *n - 2* transformaciones de householder.
La transformación puede ser expresada como:

$$QA'Q = A' - wu^T - uw^T$$

que nos da el siguiente procedimiento de cálculo que ha de llevarse a cabo con: $i = 1,2,\ldots,n-2$.

Algoritmo house

6.4.7 Algoritmo QR

Supongamos que A es una matriz simétrica real, En la sección anterior vimos cómo el método de Householder se utiliza para construir una matriz tridiagonal similar. El método QR se utiliza para encontrar todos los valores propios de una matriz tridiagonal. rotaciones similares a los que utiliza el método de Jacobi se utilizan para construir una matriz ortogonal Q1 = Q y una triangular superior R = R1 de manera que A1 = A tiene la factorización:

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = \left(Q^{(i)t}A^{(i)}\right)Q^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}Q^{(i)}$$

Algoritmo qr1

Algoritmo qr2

6.5 Ortogonalización de Gram-Schdmidt

Este método permite obtener de una matriz A_{nxn} una matriz Q con columnas ortonormales y R, una matriz triangular superior de tal forma que A = Q*R.

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}.$$

Algoritmo grams

MARIO EUGENIO MATIAUDA

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Forma general:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= o \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= o \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= o \end{aligned}$$

7.1 MÉTODO DE NEWTON

$$\vec{x}^{(k)} = F(\vec{x}^{(k-1)}) = \vec{x}^{(k-1)} - J(\vec{x}^{(k-1)})^{(-1)} G(\vec{x}^{(k-1)}) \qquad k \geq 1$$

Método de Newton para sistemas no lineales, esperando convergencia cuadrática, si se conoce $\vec{x}^{(0)}$ preciso y exista $J(\vec{q})^{-1}$.

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

En la búsqueda de un punto fijo, vimos la transformación $x = g(x)$. Para el caso de funciones de R^n en R^n => Una función G de $D \subset R^n$ en R^n tiene un punto fijo en $p \in D\ si\ G(p) = p$

Algoritmo newtons

7.2 TÉCNICAS CUASI-NEWTON

Método de Broyden

$$A_1 = J(\vec{x}^{(0)}) + \frac{\left[\vec{G}(\vec{x}^{(1)}) - \vec{G}(\vec{x}^{(1)}) - J(\vec{x}^{(1)})\left(\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right)\right]\left(\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right)^t}{\left\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right\|_e^z}$$

$\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}$ es el vector ortogonal

Algoritmo broyden

MARIO EUGENIO MATIAUDA

7.3 TÉCNICAS DE MAYOR PENDIENTE

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - a\vec{\nabla} g(\vec{x}^{(0)}), \ a \rangle 0$$

La dirección de la máxima disminución del valor de $g \ en \ x$ es la dirección dada por $-\vec{\nabla} g(x)$

7.4 PROBLEMA DE VALOR DE FRONTERA PARA ECUACIONES IFERENCIALES ORDINARIAS Y EN DERIVADAS PARCIALES

$$y'' = f(x, y, y') \qquad en \qquad [a,b]$$

Sujeta a: $y(a) = \alpha \wedge y(b) = \beta$

Cuando $y'' = f(x, y, y') \quad en \quad [a,b]$ tiene la forma:

$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad en \quad [a,b]$ el problema es **lineal**,

Si además Satisface:

1. $p(x), q(x), y\, r(x)$ continuas en $[a,b]$
2. $q(x) \rangle 0$ en $[a,b]$

El problema tiene solución única.

7.5 TECNICA DE DISPARO PARA EL PROBLEMA LINEAL

$$y_1(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0$$

$$y_2(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \le x \le b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1$$

Ambos problemas tienen solución única y se cumple:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

(Solución única de la ecuación diferencial con valor en la frontera).

Algoritmo disparo Lineal

MARIO EUGENIO MATIAUDA

7.6 TECNICA DE DISPARO PARA EL PROBLEMA NO LINEAL

y''=f(x,y,y'), a≤x≤b, y(a)=α, y'(a)=t

donde se eligen los parámetros

$$t = t_k \quad de \quad manera \quad que \quad \lim_{k \to \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

la solución en *x* como en *t*, requerirá la forma de los PVI como:

- y''(x,t)=f(x,y(x,t),y'(x,t)), a≤x≤b, y(a,t)=α, y'(a,t)=t y
- z''(x,t)=(∂f/∂y)(x,y,y')z(x,t)+(∂f/∂y')(x,y,y')z'(x,t) , a≤x≤b, z(a,t)=0, z'(a,t)=1

simbolizando *z(x,t)* a *(∂y/∂t)(x,t)*
entonces en cada iteración se deberá resolver ambos PVI, con:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}$$

Algoritmo disparo no Lineal

7.7 DIFERENCIAS FINITAS PARA PROBLEMAS LINEALES

para la ecuación general de orden dos $y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$ en [a,b] con alpha=y(a), beta=y(b) y N el número de etapas.

Al desarrollar *y* en el tercer polinomio de Taylor evaluando $x_i \;\; entre \;\; x_{i+1} \;\; y \;\; x_{i-1}$, suponiendo que $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$ tendremos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-)$$

Sumando estas dos ecuaciones y aplicando el teorema del valor intermedio, podemos llegar a las fórmulas de diferencias centradas para $y''(x_i) \;\; e \;\; y'(x_i)$ (aquí no se detalla).
La utilización de las fórmulas de diferencias centradas de:
$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$ genera la ecuación:

MARIO EUGENIO MATIAUDA

$$\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}=p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}\right]+\ldots$$

$$q(x_i)y(x_i)+r(x_i)-\frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i)-y^{(4)}(\xi_i)\right]$$

Este método de deferencias finitas con $\mathrm{O}(h^2)$ para el error de

truncamiento, junto con las condiciones de frontera alpha=*y(a),* beta=*y(b)* se emplea para definir: $w_0=\alpha, \quad w_{N+1}=\beta$ y

$$\frac{-w_{i+1}+2w_i-w_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\left[\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}\right]+\ldots$$

$$q(x_i)w_i=-r(x_i) \quad para \quad i=1,2,\ldots,N$$

El sistemas de ecuaciones resultantes se expresa en forma de una matriz tridiagonal de N*N como $Aw=b$.

MARIO EUGENIO MATIAUDA

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

8.1 ECUACIÓN GENERAL

$$\lfloor Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} \rfloor + Df_x + Ef_y + Ff = G$$

con $A, B, ..., G$ funciones reales de x e y, en base a su analogía con el discriminante de secciones cónicas:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,
se las describirá como hiperbólicas, elípticas y parabólicas.

El objetivo es buscar un método numérico de aproximación de la solución exacta.
Se formularán las EDP clásicas en base a su aproximación por diferencias finitas

8.2 ELÍPTICA O DE POISSON

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y)$$ Si $g(x,y) \equiv 0$ se obtiene la ecuación de Laplace.

Si la función representa un campo de temperaturas, las restricciones del problema a través de la distribución de temperatura en el borde de la región, son las condiciones de frontera de Dirichlet, dadas por:

$f(x,y) = r(x,y)$ $\forall (x,y)$ en S, frontera de la región U.

$$U = \{(x,y) / a\langle x \langle b, c \langle y \rangle d\}$$

El método de resolución consiste en una adaptación del método de diferencias finitas para problemas con valor de frontera tomando:

$h = \frac{(a-b)}{n}$ y $k = \frac{(d-c)}{m}$ obteniendo una cuadrícula con los puntos de red, en cada punto de red utilizamos la serie de Taylor en la variable x alrededor de x_i para generar la fórmula de la diferencias centradas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) = \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\zeta_i, y_j)$$

$$\zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Lo mismo para la variable y alrededor de y_i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_i) = \frac{f(x_i, y_{j+1}) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1})}{k^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)$$

$$\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

El uso de estas fórmulas permite expresar la ecuación de Poisson en los puntos (x_i, y_i) como:

$$\frac{f(x_{i+1},y_j)-2f(x_i,y_j)+f(x_{i-1},y_j)}{h^2}+\frac{f(x_i,y_{j+1})-2f(x_i,y_j)+f(x_{i-1},y_{j-1})}{k^2}-$$

$$=g(x_i,y_j)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\zeta_i,y_j)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_i,\eta_j)$$

$i=1,2,...(n-1)$ $j=1,2,...(m-1)$

Para condiciones de frontera:

$f(x_0,y_j)=r(x_0,y_j) \quad j=0,1,...,m$

$f(x_n,y_j)=r(x_n,y_j) \quad j=0,1,...,m$

$f(x_i,y_0)=r(x_i,y_0) \quad i=1,2,...,n-1$

$f(x_i,y_m)=r(x_i,y_m) \quad i=1,2,...,n-1$

Para un error de truncado del orden $O(h^2+k^2)$, se tendrá:

con $\mu_{i,j}$ aproximando a $f(x_i,y_j)$

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2+1\right]\mu_{i,j}-(\mu_{i+1,j}+\mu_{i-1,j})-\left(\frac{h}{k}\right)^2(\mu_{i,j+1}+\mu_{i,j-1})=-h^2g(x_i,y_j) \qquad \text{(A)}$$

(diferencias centradas)

$i=1,2,...,n-1 \qquad j=0,1,...,m$

$\mu_{0,j}=r(x_0,y_j) \qquad j=0,1,...,m$

$\mu_{n,j}=r(x_n,y_j) \qquad j=0,1,...,m$

$\mu_{0,j}=r(x_i,y_0) \qquad i=1,2,...,n-1$

$\mu_{0,j}=r(x_i,y_m) \qquad i=1,2,...,n-1$

A través de (A) se aproxima a $f(x,y)$ en los puntos $(x_{i-1},y_j),(x_i,y_j),(x_{i+1},y_j),(x_i,y_{j-1})\ y\ (x_i,y_{j+1})$.

Algoritmo dirich (Método de Dirichlet para la ecuación de Laplace's)

Para aproximar la solución de $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$ *más*
$R=\{(x,y):0\le x\le a,\ 0\le y\le b)$ *con* $u(x,0)=f_1(x),\ u(x,b)=f_2(x),$
para $0\le x\le a,$ *y* $u(0,y)=f_3(y),\ u(a,y)=f_4(y),$ *para* $0\le y\le b.$
Asumiendo que $\Delta x=\Delta y=h$ *y que los enteros* n *y* m *existen*
tal que $a=nh$ *y* $b=mh.$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

8.3 ECUACION PARABÓLICA

Para la ecuación de **Calor** (parabólica)- unidimensional

$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ su fórmula en diferencias regresivas (incondicionalmente estable) será:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

$$para \quad i = 1,2,\ldots,m-1; \quad y \quad j = 1,2,\ldots$$

este método de diferencias tiene la representación matricial

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & & & \\ 0 & & & 0 \\ & & & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ . \\ . \\ u_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ . \\ . \\ u_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

O sea $A\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{w}^{(j-1)}$ para toda $j = 1, 2, \ldots$.
Indicando la necesidad de resolver un sistema lineal para hallar $w^{(j)}$ a partir de $w^{(j-1)}$, siendo estable para cualquier $\boldsymbol{\lambda}$.
Dado que $\boldsymbol{\lambda > 0}$**,** la matriz *A* es definida positiva y con dominancia diagonal estricta, tridiagonal, pudiendo resolverse por algoritmos ya vistos (caso Crout).
Para evitar la falta de precisión, generada por el error de truncado, se requiere que los intervalos de tiempo sean mucho más pequeños que los de espacio ($h > k$), haciendo necesario un método que permita tomar valores similares para *h* y *k*, y estable para todo λ.

Algoritmo crnich (Crank-Nicholson método para la ecuación del calor)

$$Para \quad aproximar \quad la \quad solución \quad de \quad u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad más$$
$$R = \{(x,t) : 0 \le x \le a, \quad 0 \le t \le b) \quad con \quad u(x,0) = f(x), \quad para \quad 0 \le x \le a.$$
$$y \quad u(0,t) = c_1, \quad u(a,t) = c_2, \quad para \quad 0 \le t \le b.$$

8.4 ECUACIÓN HIPERBÓLICA

Se presenta la ecuación hiperbólica a través de una situación problema

Sea la EDP $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

con las condiciones de frontera $u(0, t) = 0 = u(1, t), 0 < t < 1$
y con las condiciones iniciales $u(x, 0) = sen(\pi x), 0 \le x \le 1$ y $u_t(x, 0) = 0$,
$0 \le x \le 1$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Sn exacta: u(x, t) = sen(πx)cos(2πt)

La división rectangular del dominio (x,t): : 0≤ x ≤ a, 0 ≤ t ≤ b, denominando

$u(x, t) = u_{i,j}$

$u(x + h, t) = u_{i+1,j}$

$u(x - h, t)) = u_{i-1,j}$

$u(x, t + k)) = u_{i,j+1}$

$u(x, t - k)) = u_{i,j-1}$

la ecuación en diferencias será

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

Haciendo $\alpha = ck/h$

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \alpha^2(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})$$

Colocando en términos de $u_{i,j+1}$ y reordenando, se tiene

$$u_{i,j+1} = (2 - 2\alpha^2)u_{i,j} + \alpha^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}$$

La ecuación (arriba) es aplicable para $i = 2, 3, ..., n - 1$ y $j = 2, 3, ...,m - 1$, con el paso $(j + 1$ de tiempo requiriendo de los j-ésimo y los $(j - 1)$ ésimo pasos; los valores del $(j - 1)$ésimo paso vienen dados por las condiciones iniciales $u_{i,1} = f(x_i)$ pero, los valores del j ésimo paso no
se suelen proporcionar, por lo que se usa $g(x)$ para conseguir los valores de este paso.
Para asegurar la estabilidad de este método es necesario que:
$\alpha = ck/h \leq 1$.

Algoritmo finedif (diferencia finita para la ecuación de onda)

Para aproximar la solución de $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ *más*
$R = \{(x,t): 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq b)$ *con* $u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0,$
para $0 \leq t \leq b$, *y* $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$, *para* $0 \leq x \leq a.$

MARIO EUGENIO MATIAUDA

ANEXO
GNU OCTAVE

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Octave es un lenguaje de ordenador de alto nivel, orientado al cálculo numérico. Y su vez es un programa que permite interpretar este lenguaje de forma interactiva, mediante órdenes o comandos. Estas órdenes pueden ser introducidas a través de un entorno en forma de terminal o consola de texto. Por supuesto, *Octave* incluye, además, la posibilidad de ser utilizado de forma no interactiva, interpretando las órdenes contenidas en un fichero.

Estas características se pueden resumir diciendo que *Octave* es un lenguaje interpretado orientado al cálculo numérico matricial. Por supuesto, existe una gran variedad de lenguajes interpretados orientados a las matemáticas, algunos de ellos con licencia libre, como Máxima, Axiom, Scilab, EULER, Sage o R y otros con licencia privativa, como Matlab, Maple, Mathematica o S.

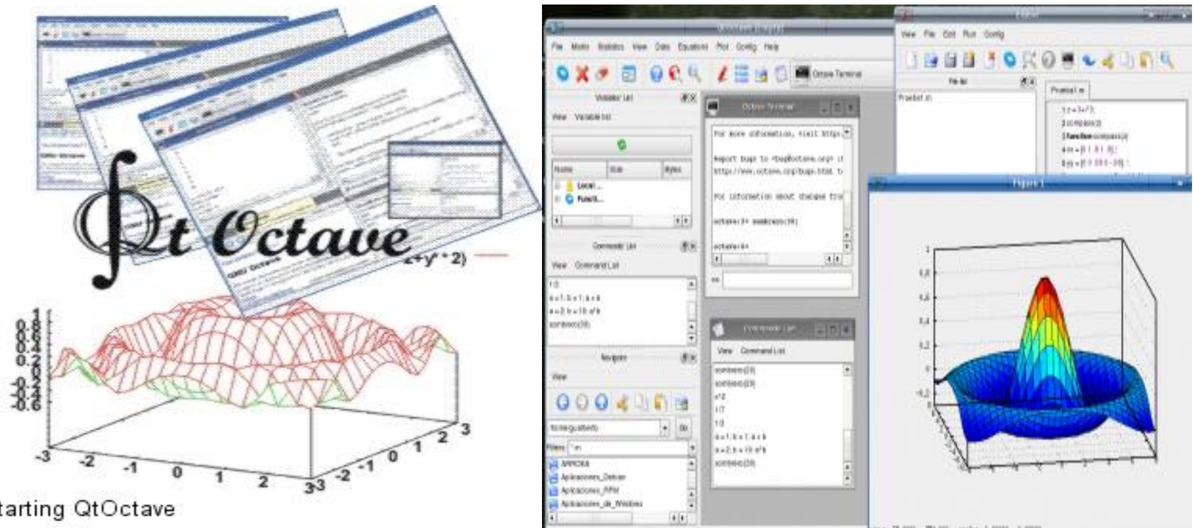
Los lenguajes interpretados, entre los cuales destaca la menor velocidad de proceso que lenguajes compilados como C, C++, Fortran, etc. Sin embargo, *Octave* y el resto de los lenguajes interpretados presentan una serie de ventajas muy significativa: la razón entre el esfuerzo empleado en el desarrollo del programa y el resultado final es muy pequeña, es decir, permiten obtener resultados razonables con un esfuerzo no demasiado importante. Este hecho, que está relacionado con la eliminación de la segunda etapa dentro del ciclo clásico de desarrollo de programas (escritura-compilado-depurado), es vital en:

a) Desde sus orígenes, *Octave* es software libre, gracias a lo cual, su comunidad de desarrolladores y usuarios ha ido creciendo hasta llegar a ser muy significativa. Es un proyecto en colaboración cuyos miembros nos prestarán ayuda cuando la solicitemos, a través de sus listas de correo. Éstas son públicas y una gran fuente de información.
b) Su lenguaje de programación es altamente compatible con el de Matlab, el conocido entornode cálculo numérico (con licencia privativa) desarrollado por The MathWorks, Inc. De hecho, la mayor parte de la materia desarrollada en las siguientes páginas es, de hecho, un análisis del amplio lenguaje que es común a Matlab y *Octave* y al que, indistintamente, denominaremos “lenguaje *Octave*” o “lenguaje Matlab”.
c) Está disponible en numerosos plataformas, entre ellas sistemas Unix (para los que fue originalmente desarrollado), Windows y MacOsX. Su código fuente contiene una potente librería de cálculo matricial para C++. De hecho, ha sido diseñado de forma que sea extensible dinámicamente, a través de nuevos procedimientos escritos en C++. Estas extensiones son programas “especiales” que tienen la extensión .oct y, como programas compilados, cuentan con un rendimiento mucho mayor que las funciones escritas en el lenguaje interpretado de *Octave*.
d) interfaces gráficas de usuario que, en la actualidad, ofrece prestaciones más interesantes para un usuario medio: *qtOctave*. Este programa recibe su nombre de las bibliotecas QT. desarrolladas con la finalidad de facilitar la creación de interfaces gráficas.

MARIO EUGENIO MATANDA

Interfaz qtOctave

La interfaz gráfica permite, entre otras cosas, trabajar con el interprete de órdenes de Octave, ver el listado de variables, editar un archivo .m, y ver el histórico de órdenes.



qtOctave está disponible:

A través de su página web, http://qtoctave.wordpress.com/. Esta página es el centro de comunicación con el autor y la comunidad de usuarios de *qtOctave*.

MARIO EUGENIO M

```
function[c,yc,err,P]=bisect(a,b,delta)
```

METODO DE LA BISECCIÓN

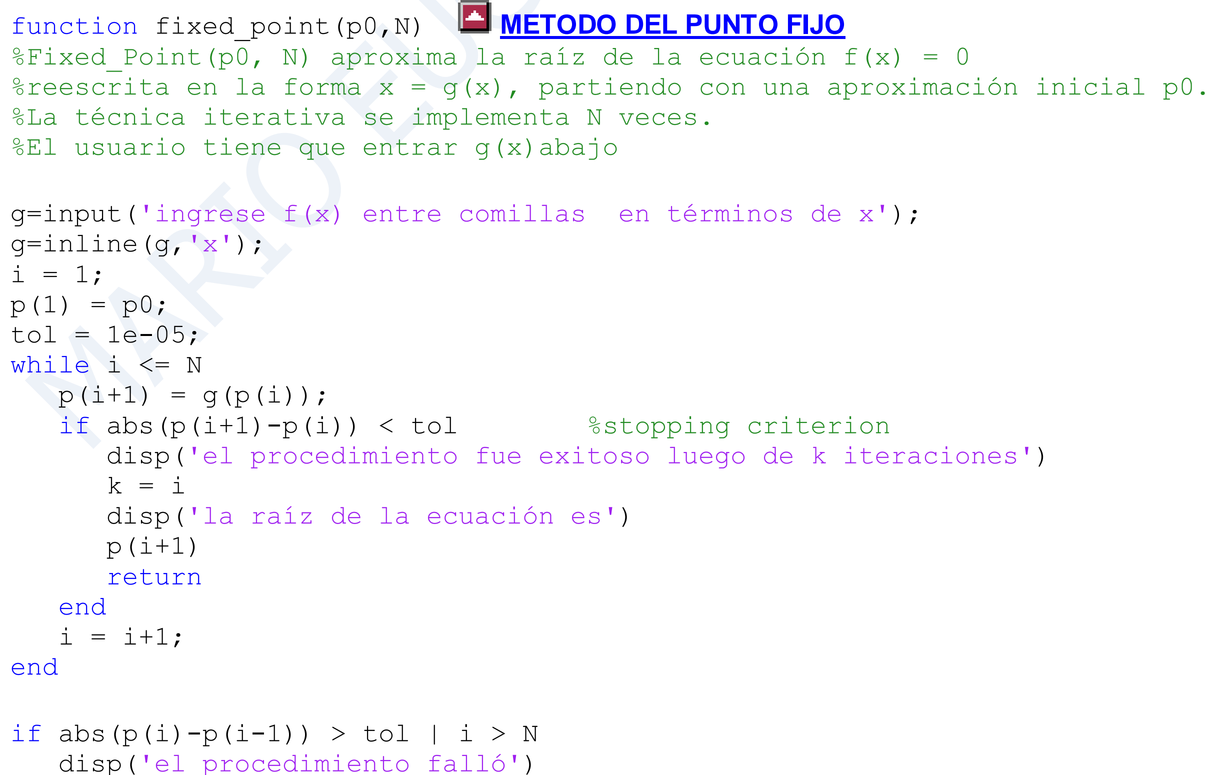
```
# Ejemplo de carga
# [c,yc,err,P]=bisect(0,2,0.001)
# función 'x*sin(x)-1'
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
err=0;
P=[a b err];
ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);
if ya*yb>0,break,end
    max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
    for k=1:max1,
        c=(a+b)/2;
        yc=feval(f,c);
        if yc==0,a=c;
            b=c;
            elseif yb*yc>0,
            b=c;
            yb=yc;
            else
             a=c;
            ya=yc;
            end
            err=abs(b-a)/2;
            P=[P;a b err];
            if b-a<delta,break,end
                end
                c=(a+b)/2;
                yc=feval(f,c);
                err=abs(b-a)/2;
                disp(c);
                disp(yc);
                disp(err);
                disp('             X0              X1          ERROR');
                disp(P);
                end
```

Dada la función *f(x)= xsenx-1*, hallar una raíz en el intervalo [0,2] por el método de la bisección y una tolerancia de 10^{-3}. Igual para x^3+4x^2-10 en [1,2] y tolerancia de 10^{-4}

```
octave:4> [c,yc,err,P]=bisect(0,2,0.001)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'x*sin(x)-1'
'x*sin(x)-1'
1.1138
-5.3832e-004
4.8828e-004
X0 X1 ERROR
0.00000 2.00000 0.00000
1.00000 2.00000 0.50000
1.00000 1.50000 0.25000
1.00000 1.25000 0.12500
1.00000 1.12500 0.06250
1.06250 1.12500 0.03125
1.09375 1.12500 0.01563
1.10938 1.12500 0.00781
1.10938 1.11719 0.00391
```


MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
1.11328 1.11719 0.00195
1.11328 1.11523 0.00098
1.11328 1.11426 0.00049
c = 1.1138
yc = -5.3832e-004
err = 4.8828e-004
P =
0.00000 2.00000 0.00000
1.00000 2.00000 0.50000
1.00000 1.50000 0.25000
1.00000 1.25000 0.12500
1.00000 1.12500 0.06250
1.06250 1.12500 0.03125
1.09375 1.12500 0.01563
1.10938 1.12500 0.00781
1.10938 1.11719 0.00391
1.11328 1.11719 0.00195
1.11328 1.11523 0.00098
1.11328 1.11426 0.00049
```



```
function fixed_point(p0,N)     METODO DEL PUNTO FIJO
%Fixed_Point(p0, N) aproxima la raíz de la ecuación f(x) = 0
%reescrita en la forma x = g(x), partiendo con una aproximación inicial p0.
%La técnica iterativa se implementa N veces.
%El usuario tiene que entrar g(x)abajo

g=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
g=inline(g,'x');
i = 1;
p(1) = p0;
tol = 1e-05;
while i <= N
   p(i+1) = g(p(i));
   if abs(p(i+1)-p(i)) < tol        %stopping criterion
      disp('el procedimiento fue exitoso luego de k iteraciones')
      k = i
      disp('la raíz de la ecuación es')
      p(i+1)
      return
   end
   i = i+1;
end

if abs(p(i)-p(i-1)) > tol | i > N
   disp('el procedimiento falló')
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   disp('Condición |p(i+1)-p(i)| < tol no se satisfizo')
   tol
   disp('Por favor, examine la secuencia de iteraciones')
   p = p'
   disp('Si observa convergencia, incremente el número máximo de
iteraciones')
   disp('Si hay divergencia, intente otro p0 o reescriba g(x)')
   disp('si |g''(x)|< 1 cerca de la raíz')
end
```

Dada la función $f(x)=x-x^3+4x^2-10/3x^2+8x$, encontrar la raíz por el método de punto fijo

Para la función y = x - (x.^3 + 4*x.^2 - 10)/(3*x.^2 + 8*x);

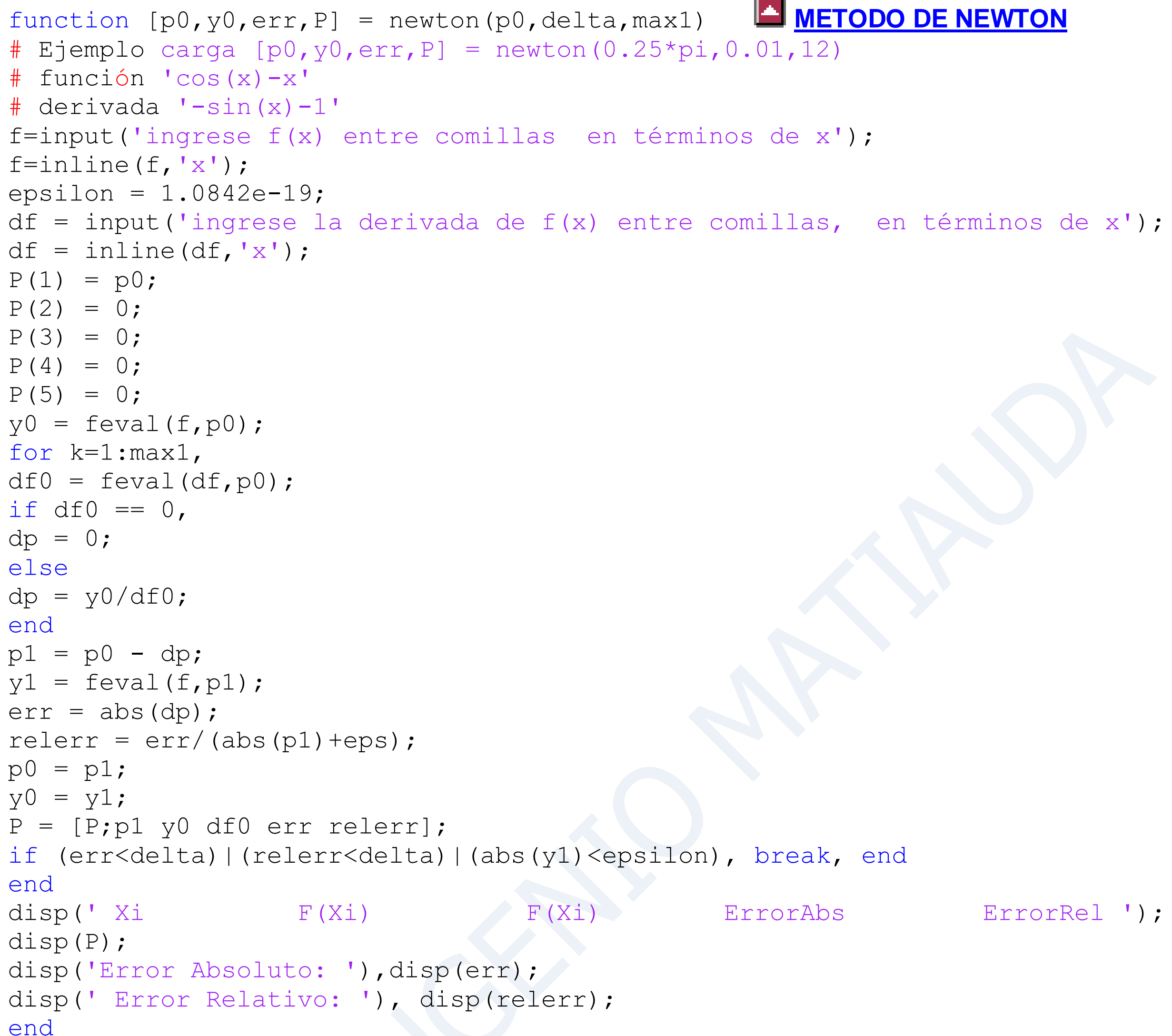
```
octave:7> fixed_point(1.5, 10)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'x- x^3-4*x^2+10'
'x- x^3-4*x^2+10'
el procedimiento falló
Condición |p(i+1)-p(i)| < tol no se satisfizo
tol = 1.0000e-005
Por favor, examine la secuencia de iteraciones
p =
1.5000e+000
-8.7500e-001
6.7324e+000
-4.6972e+002
1.0275e+008
-1.0849e+024
1.2771e+072
-2.0827e+216
NaN
NaN
NaN
Si observa convergencia, incremente el número máximo de iteraciones
Si hay divergencia, intente otro p0 o reescriba g(x)
si |g'(x)|< 1 cerca de la raíz
```

Tomando su equivalente

y = sqrt(10./x - 4*x);

```
octave:8> fixed_point(1.5, 10)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'sqrt(10./x - 4*x)'
'sqrt(10./x - 4*x)'
el procedimiento falló
Condición |p(i+1)-p(i)| < tol no se satisfizo
tol = 1.0000e-005
Por favor, examine lasecuencia de iteraciones
p =
1.50000 - 0.00000i
0.81650 - 0.00000i
2.99691 - 0.00000i
0.00000 - 2.94124i
2.75362 + 2.75362i
1.81499 - 3.53453i
2.38427 + 3.43439i
2.18277 - 3.59688i
2.29700 + 3.57410i
2.25651 - 3.60656i
2.27918 + 3.60194i
```


MARIO EUGENIO MATIAUDA



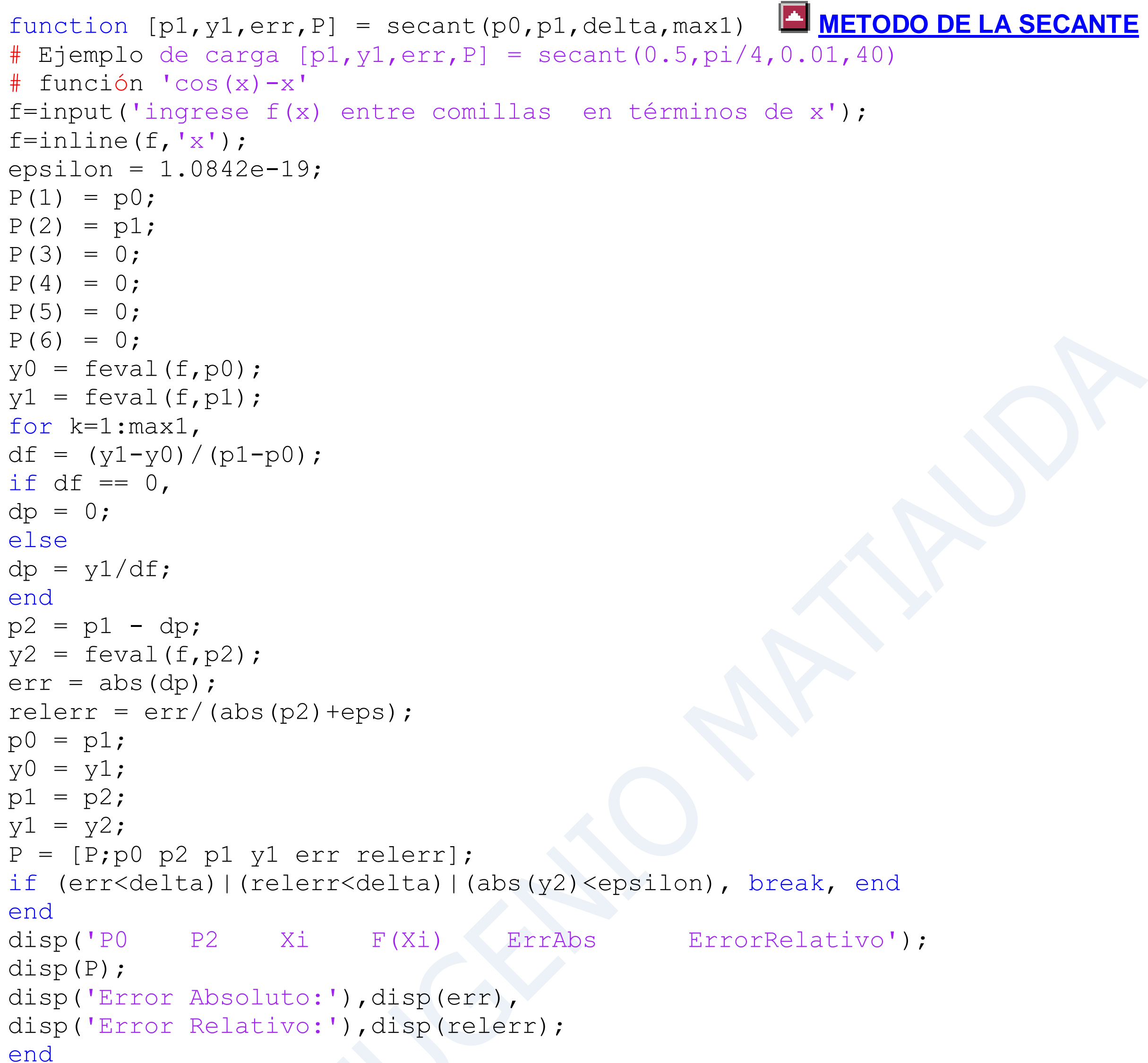
METODO DE NEWTON

```
function [p0,y0,err,P] = newton(p0,delta,max1)
# Ejemplo carga [p0,y0,err,P] = newton(0.25*pi,0.01,12)
# función 'cos(x)-x'
# derivada '-sin(x)-1'
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
epsilon = 1.0842e-19;
df = input('ingrese la derivada de f(x) entre comillas,  en términos de x');
df = inline(df,'x');
P(1) = p0;
P(2) = 0;
P(3) = 0;
P(4) = 0;
P(5) = 0;
y0 = feval(f,p0);
for k=1:max1,
df0 = feval(df,p0);
if df0 == 0,
dp = 0;
else
dp = y0/df0;
end
p1 = p0 - dp;
y1 = feval(f,p1);
err = abs(dp);
relerr = err/(abs(p1)+eps);
p0 = p1;
y0 = y1;
P = [P;p1 y0 df0 err relerr];
if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y1)<epsilon), break, end
end
disp(' Xi          F(Xi)          F(Xi)        ErrorAbs         ErrorRel ');
disp(P);
disp('Error Absoluto: '),disp(err);
disp(' Error Relativo: '), disp(relerr);
end
```

Dada la función $f(x)=x-x^3+4x^2-10$, hallar una raíz por el método de Newton con aprox. inicial *1.5*, tolerancia para la raíz de 10^{-4} y 10^{-5} para los valores de *f*, con *10* iteraciones.
Sea la función x^3+4*x^2-10
Su derivada es 3*x^2+8*x

```
octave:9> newton(1.5,0.0001,10)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'x^3+4*x^2-10'
'x^3+4*x^2-10'
ingrese la derivada de f(x) entre comillas, en términos de x '3*x^2+8*x'
'3*x^2+8*x'
Xi F(Xi) F(Xi) ErrorAbs ErrorRel
1.50000 0.00000  0.00000 0.00000 0.00000
1.37333 0.13435 18.75000 0.12667 0.09223
1.36526 0.00053 16.64480 0.00807 0.00591
1.36523 0.00000 16.51392 0.00003 0.00002
ErrorAbsoluto:
3.2001e-005
Error Relativo:
2.3440e-005
ans = 1.3652
```

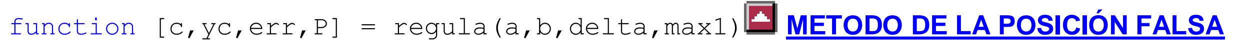
MARIO EUGENIO MATIAUDA



```
function [p1,y1,err,P] = secant(p0,p1,delta,max1)    METODO DE LA SECANTE
# Ejemplo de carga [p1,y1,err,P] = secant(0.5,pi/4,0.01,40)
# función 'cos(x)-x'
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
epsilon = 1.0842e-19;
P(1) = p0;
P(2) = p1;
P(3) = 0;
P(4) = 0;
P(5) = 0;
P(6) = 0;
y0 = feval(f,p0);
y1 = feval(f,p1);
for k=1:max1,
df = (y1-y0)/(p1-p0);
if df == 0,
dp = 0;
else
dp = y1/df;
end
p2 = p1 - dp;
y2 = feval(f,p2);
err = abs(dp);
relerr = err/(abs(p2)+eps);
p0 = p1;
y0 = y1;
p1 = p2;
y1 = y2;
P = [P;p0 p2 p1 y1 err relerr];
if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y2)<epsilon), break, end
end
disp('P0     P2     Xi     F(Xi)     ErrAbs      ErrorRelativo');
disp(P);
disp('Error Absoluto:'),disp(err),
disp('Error Relativo:'),disp(relerr);
end
```

Para la función *cosx-x* , hallar una raíz con aprox. iniciales *0.5* y *π/4*, tolerancia para p_1=*0.01*, para *f* de *0 01* y *10* iteraciones, por el método de la secante

```
octave:10> [p1,y1,err,P]=secant(0.5,pi/4,0.01,10)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'cos(x)-x'
'cos(x)-x'
P0 P2 Xi F(Xi) ErrAbs ErrorRelativo
0.50000 0.78540 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.78540 0.73638 0.73638 0.00452 0.04901 0.06656
0.73638 0.73906 0.73906 0.00005 0.00267 0.00362
ErrorAbsoluto:
0.0026740
ErrorRelativo:
0.0036181
p1 = 0.73906
y1 = 4.5177e-005
err = 0.0026740
P =
    0.50000 0.78540 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
    0.78540 0.73638 0.73638 0.00452 0.04901 0.06656
    0.73638 0.73906 0.73906 0.00005 0.00267 0.00362
```



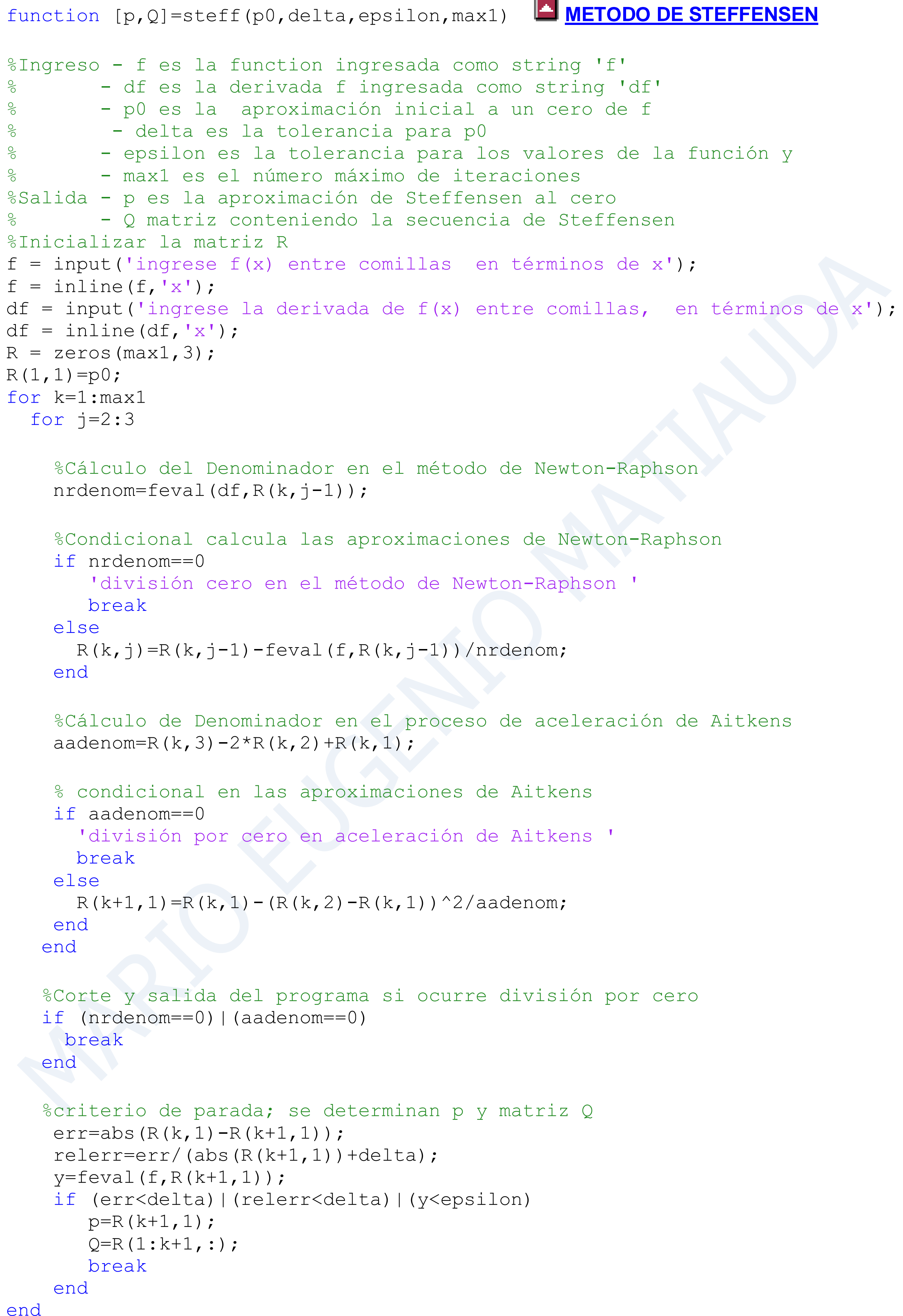
METODO DE LA POSICIÓN FALSA

```
function [c,yc,err,P] = regula(a,b,delta,max1)

# Ejemplo carga [c,yc,err,P] = regula(1.38,1.0,0.001,10)
# función 'x^3+4*x^2-10'
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
epsilon = 1.0842e-19;
P = [a b 0 0 0];
ya = feval(f,a);
yb = feval(f,b);
if ya*yb > 0, break, end
for k=1:max1,
dx = yb*(b - a)/(yb - ya);
c = b - dx;
ac = c - a;
yc = feval(f,c);
end
if yc == 0,
break;
elseif yb*yc > 0,
b = c;
yb = yc;
else
a = c;
ya = yc;
end
dx = min(abs(dx),ac);
err = abs(dx);
if abs(dx) < delta, break, end
if abs(yc) < epsilon, break, end
end
err = abs(dx);
P = [a b c yc err];
disp(' X0 X1 Raiz FunctValor Error')
disp(P)
end
```

Utilizar la falsa posición para a) x^3+4x^2-10 en *[1.38 1]*, tolerancias de 10^{-3} y *10* iteraciones

```
octave:12> [c,yc,err,P] = regula(1.38,1.0,0.001,10)
ingresef(x) entre comillas en términos de x 'x^3+4*x^2-10'
'x^3+4*x^2-10'
X0X1 Raiz FunctValor Error
1.380000 1.362203 1.362203 -0.049906 0.017797
c = 1.3622
yc = -0.049906
err = 0.017797
P =
    1.380000 1.362203 1.362203 -0.049906 0.017797
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA



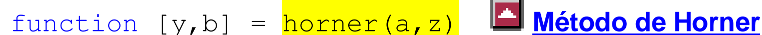
METODO DE STEFFENSEN

```
function [p,Q]=steff(p0,delta,epsilon,max1)

%Ingreso - f es la function ingresada como string 'f'
%        - df es la derivada f ingresada como string 'df'
%        - p0 es la  aproximación inicial a un cero de f
%         - delta es la tolerancia para p0
%        - epsilon es la tolerancia para los valores de la función y
%        - max1 es el número máximo de iteraciones
%Salida - p es la aproximación de Steffensen al cero
%        - Q matriz conteniendo la secuencia de Steffensen
%Inicializar la matriz R
f = input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f = inline(f,'x');
df = input('ingrese la derivada de f(x) entre comillas,  en términos de x');
df = inline(df,'x');
R = zeros(max1,3);
R(1,1)=p0;
for k=1:max1
  for j=2:3

    %Cálculo del Denominador en el método de Newton-Raphson
    nrdenom=feval(df,R(k,j-1));

    %Condicional calcula las aproximaciones de Newton-Raphson
    if nrdenom==0
       'división cero en el método de Newton-Raphson '
       break
    else
      R(k,j)=R(k,j-1)-feval(f,R(k,j-1))/nrdenom;
    end

    %Cálculo de Denominador en el proceso de aceleración de Aitkens
    aadenom=R(k,3)-2*R(k,2)+R(k,1);

    % condicional en las aproximaciones de Aitkens
    if aadenom==0
      'división por cero en aceleración de Aitkens '
      break
    else
      R(k+1,1)=R(k,1)-(R(k,2)-R(k,1))^2/aadenom;
    end
   end

   %Corte y salida del programa si ocurre división por cero
   if (nrdenom==0)|(aadenom==0)
     break
   end

   %criterio de parada; se determinan p y matriz Q
    err=abs(R(k,1)-R(k+1,1));
    relerr=err/(abs(R(k+1,1))+delta);
    y=feval(f,R(k+1,1));
    if (err<delta)|(relerr<delta)|(y<epsilon)
       p=R(k+1,1);
       Q=R(1:k+1,:);
       break
    end
end
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Aplicar el método de Steffensen. Recordando el problema de f(x)=cos x -x con newton.

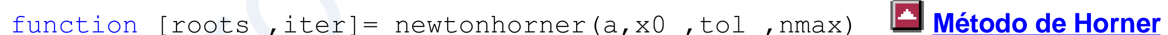
```
octave:14> [p,Q]=steff(0.25*pi,0.01,0.01,4)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'cos(x)-x'
'cos(x)-x'
ingrese la derivada de f(x) entre comillas, en términos de x '(x)-sin(x)-1'
'(x)-sin(x)-1'
p = 0.73819
Q =
    0.78540 0.70046 0.76834
    0.73819 0.00000 0.00000
```



```
function [y,b] = horner(a,z)
```

Método de Horner

```
%HORNER Horner algorithm
% Y=HORNER(A,Z) calcula
% Y = A(1)*Z^N + A(2)*Z^(N-1) + ... + A(N)*Z + A(N+1)
% usando el algoritmo de division sintética de Horner.
n = length(a)-1;
b = zeros(n+1 ,1);
b(1) = a(1);
for j=2:n+1
b(j) = a(j)+b(j -1)*z;
end
y = b(n+1);
b = b(1:end -1);
return
```



```
function [roots ,iter]= newtonhorner(a,x0 ,tol ,nmax)
```

Método de Horner

```
%NEWTONHORNER Newton -Horner
% [roots ,ITER ]= NEWTONHORNER(A,X0) calcula las raíces del
% polinomio
% P(X) = A(1)*X^N + A(2)*X^(N-1) + ... + A(N)*X +
% A(N+1)
% usando el método de Newton -Horner partiendo de los datos iniciales X0. El
método para dada raíz
% luego de 100 iteraciones o luego que el valor absoluto de la diferencia
entre dos iteraciones consecutivas es menor que
% 1.e -04.
% [roots ,ITER ]= NEWTONHORNER(A,X0 ,TOL ,NMAX) permite definir la
tolerancia en el criterio de parada y el número máximo de iteraciones.
if nargin == 2
tol = 0.0001; nmax = 100;
elseif nargin == 3
nmax = 100;
end
n=length(a)-1; raiz = zeros(n ,1); iter = zeros(n ,1);
```


MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
for k = 1:n
% iteraciones de
niter = 0; x = x0; diff = tol + 1;
while niter <= nmax & diff >= tol
[pz ,b] = horner(a,x); [dpz ,b] = horner(b,x);
xnew = x - pz/dpz; diff = abs(xnew -x);
niter = niter + 1; x = xnew;
end
if niter >= nmax
fprintf(' falla de convregencia con máximo ' ,...
'número de iteraciones\n');
end
% Deflación
[pz ,a] = horner(a,x); raiz(k) = x; iter(k) = niter;
end
return
```

```
octave:36>[roots ,iter]= newtonhorner([-3 1 0],2,0.001,50)
roots =
        3.3334e-001
       -2.8529e-006
iter =
        6
        2
```

```
function [p2,y2,err,P]=muller(p0,p1,p2,delta,max1)
```

Método de Muller

```
# Ejemplo carga [p2,y2,err,P]=muller(0.5,pi/3.5,pi/4,0.01,12)
# función 'cos(x)-x'
f=input('ingrese f(x):');
f=inline(f,'x');
epsilon = 1.0842e-19;
P(1) = p0;
P(2) = p1;
P(3) = p2;
P(4) = 0;
P(5) = 0;
y0 = feval(f,p0);
y1 = feval(f,p1);
y2 = feval(f,p2);
for k=1:max1;
h0 = p0 - p2;
h1 = p1 - p2;
c = y2;
e0 = y0 - c;
e1 = y1 - c;
det1 = h0*h1*(h0-h1);
a = (e0*h1 - h0*e1)/det1;
b = (h0^2*e1 - h1^2*e0)/det1;
if b^2 > 4*a*c,
disc = sqrt(b^2 - 4*a*c);
else
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
disc = 0;
end
if b < 0
disc = - disc;
end
z = - 2*c/(b + disc);
p3 = p2 + z;
if abs(p3-p1) < abs(p3-p0)
u = p1;
p1 = p0;
p0 = u;
v = y1;
end
end
```

Emplear el método de Muller para *cosx−x* con $p_o=0.5$ $p_1=\pi/3.5$, $p_2=\pi/3.5$

```
octave:17> [p2,y2,err,P]=muller(0.5,pi/3.5,pi/4,0.01,0.001,12)
ingresef(x): 'cos(x)-x '
'cos(x)-x '
p2 = 0.78540
y2 = -0.078291
err = [](0x0)
P =
0.50000 0.89760 0.78540 0.00000 0.00000
```

```
function [p,y,err]=muller2(p0,p1,p2,delta,epsilon,max1)
```

Método de Muller

```
# Ejemplo carga [p2,y2,err,P]=muller2(0.5,pi/3.5,pi/4,0.01,0.001,12)
# funcion 'cos(x)-x'
%Ingresos - f es la function como string 'f'
%        - p0, p1,  p2 son las aproximaciones iniciales
%        - delta tolerancia para p0, p1, p2
%        - epsilon la tolerancia para los valores de la función y
%        - max1 número máximo de iteraciones
%salida- p aproximación de Muller al cero de f
%        - y valor de la function y = f(p)
%        - err  error en la aproximación de p.
%Inicializar las  matrices P e Y
f=input('ingrese f(x):');
f=inline(f,'x');
P=[p0 p1 p2];
Y=feval(f,P);
%Calcula a y b de formula (15)
for k=1:max1
   h0=P(1)-P(3);h1=P(2)-P(3);e0=Y(1)-Y(3);e1=Y(2)-Y(3);c=Y(3);
   denom=h1*h0^2-h0*h1^2;
   a=(e0*h1-e1*h0)/denom;
   b=(e1*h0^2-e0*h1^2)/denom;

   %Suprime las raíces complejas
   if b^2-4*a*c > 0
      disc=sqrt(b^2-4*a*c);
   else
      disc=0;
```

```
   end
   %halla la menor raíz de (17)
   if b < 0
      disc=-disc;
   end

   z=-2*c/(b+disc);
   p=P(3)+z;
   %clasifica las entradas de p para hallar las dos más cercanas a p
   if abs(p-P(2))<abs(p-P(1))
      Q=[P(2) P(1) P(3)];
      P=Q;
      Y=feval(f,P);
   end
   if abs(p-P(3))<abs(p-P(2))
      R=[P(1) P(3) P(2)];
      P=R;
      Y=feval(f,P);
   end
   %Reemplaza las entradas de P más alejadas de  p con p
   P(3)=p;
   Y(3) = feval(f,P(3));
   y=Y(3);

   %Determina criterio de parada
   err=abs(z);
   relerr=err/(abs(p)+delta);
   if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y)<epsilon)
      break
   end
end
```

```
[p2,y2,err,P]=muller2(0.5,pi/3.5,pi/4,0.01,0.001,12)
ingresef(x): 'cos(x)-x'
'cos(x)-x'
p2 = 0.73897
y2 = 1.9532e-004
err = 0.046430
```

```
function [C,L]=lagrange(X,Y)
```

POLINOMIO DE LAGRANGE

```
# Ejemplo carga [C,L]=lagrange([1.0 1.3 1.6 1.9 2.2],[0.7651977 0.6200860
0.4554022 0.2818186 0.1103623])
%Ingreso  - X es el vector de abcisas
%        - Y es el vector de ordenadas
%salida - C es una matriz que contiene los coeficientes del
%         polinomio interpolatorio de Lagrange
%        - L es una matriz que contiene los coeficientes polinomiales de
%         Lagrange
```

```
w=length(X);
n=w-1;
L=zeros(w,w);

%Forma los coeficientes polinomiales de Lagrange

for k=1:n+1
   V=1;
   for j=1:n+1
      if k~=j
         V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
      end
   end
   L(k,:)=V;
end
%Determina los coeficientes del polinomio interpolatorio de Lagrange
C=Y*L;
```

```
Dados los siguientes valores x-y:
x=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
y=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];
encontrar el polinomio interpolante de Lagrange

octave:19> [C,L]=lagrange([1.0 1.3 1.6 1.9 2.2],[0.7651977 0.6200860
0.4554022
0.2818186 0.1103623])
C =
     0.0018251 0.0552928 -0.3430466 0.0733913 0.9777351
L =
     5.1440  -36.0082  93.3642  -106.2243   44.7243
   -20.5761  137.8601 -338.2716  358.6008 -137.6132
    30.8642 -197.5309  460.1852 -461.2346  167.7160
   -20.5761  125.5144 -279.0123  268.2305  -94.1564
     5.1440  -29.8354   63.7346  -59.3724   20.3292
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

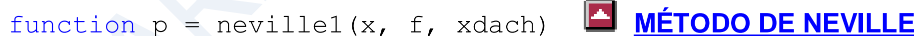
```
function hp=hermite(x,y,dy)
```

POLINOMIO DE HERMITE

```
% busca los polinomios interpolantes de Hermite para múltiples subintervalos
%Ingreso : [x,y],dy - puntos y sus derivadas
%salida: H = coeficientes de polinomio interpolante cúbico de Hermite
%
%Polinomio interpolante de Hermite. Considere el problema de hallar
%el polinomio de interpolaciónn para los N + 1 = 4 datos
%{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 5)}
%>>x = [0 1 2 3]; y = [0 1 4 5]; dy = [2 0 0 2]; xi = [0:0.01:3];
%>>H = hermite(x,y,dy);
%yi = ppval(mkpp(x,H), xi);
```

```
for n = 1:length(x)-1
H(n,:) = hermit(0,y(n),dy(n),x(n + 1)-x(n),y(n + 1),dy(n + 1));
end


function H = hermit(x0,y0,dy0,x1,y1,dy1)
% para obtener los coef. de Hermite para un conjunto de  múltiples
subintervalos.
A = [x0^3 x0^2 x0 1; x1^3 x1^2 x1 1;
3*x0^2 2*x0 1 0; 3*x1^2 2*x1 1 0];
b = [y0 y1 dy0 dy1]'; %
H = (A\b)';
```

```
octave:20> H = hermite([0 1 2 3],[0 1 4 5],[2 0 0 2])
H =
    0.00000 -1.00000 2.00000 0.00000
   -6.00000  9.00000 0.00000 1.00000
    0.00000  1.00000 0.00000 4.00000
octave:21> yi = ppval(mkpp([0 1 2 3],H), [0:0.1:3])
yi =
Columns 1 through 7:
0.00000 0.19000 0.36000 0.51000 0.64000 0.75000 0.84000
Columns 8 through 14:
0.91000 0.96000 0.99000 1.00000 1.08400 1.31200 1.64800
Columns 15 through 21:
2.05600 2.50000 2.94400 3.35200 3.68800 3.91600 4.00000
Columns 22 through 28:
4.01000 4.04000 4.09000 4.16000 4.25000 4.36000 4.49000
Columns 29 through 31:
4.64000 4.81000 5.00000
```



```
function p = neville1(x, f, xdach)
```
MÉTODO DE NEVILLE

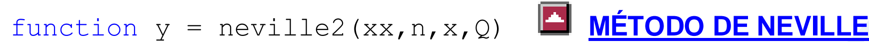
```
% Algoritmo Aitken- Neville-
%
% usar: p = neville(x, f, xdach)
%
% ingreso: vector x - ,x-coordenadas
%          vector f - ,y-coordenadas
%                escalar xdach - punto a evaluar
%
% salida: escalar p - valor interpolado en xdach


    n = length(x);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
    for k = n-1:-1:1
        f(1:k) = f(2:k+1) + ...
                          ( xdach - x(n-k+1:n) ) ./ ...
                          ( x(n-k+1:n) - x(1:k) ) .* ...
                 ( f(2:k+1) - f(1:k) );
    end
    p = f(1);
```

Dados los siguientes valores x-y, generar el valor de *x=1.4* por Neville
x=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
y=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];

octave:23> **p=neville1([1.0 1.3 1.6 1.9 2.2],[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623],1.4)**
p = 0.56685



```
function y = neville2(xx,n,x,Q)
```

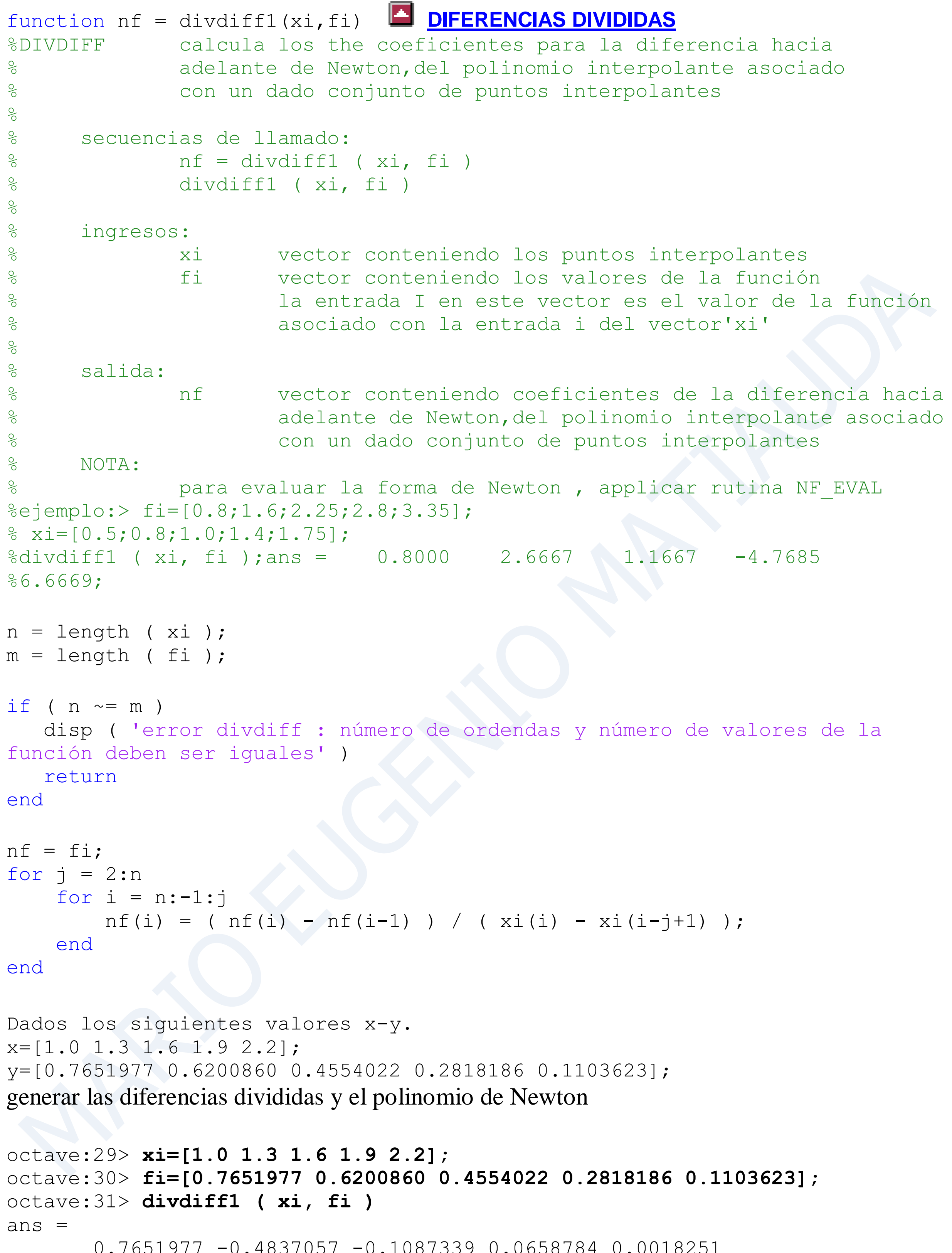
MÉTODO DE NEVILLE

```
% Algoritmo de Neville como una funcióon (guardar como "nev.m")
%
% ingresos:
%    n = orden de interpolación (n+1 = # de puntos)
%    x(1),...,x(n+1)    x coordenadas
%    Q(1),...,Q(n+1)    y coordenadas
%    xx=punto de evaluación para polinomio interpolante p
%
% salida:  p(xx)
% x=1940:10:1990;
% Q=[132165 151326 179323 203302 226542 249633];
% neville2(2000,5,x,Q)

%rpta =       251654
for i = n:-1:1
   for j = 1:i
      Q(j) = (xx-x(j))*Q(j+1) - (xx-x(j+n+1-i))*Q(j);
      Q(j) = Q(j)/(x(j+n+1-i)-x(j));
   end
end

y = Q(1);
```

Recordando el ejercicio de neville1.
Con el algoritmo de neville2, para el mismo punto, grado 4

octave:23> **p=neville1([1.0 1.3 1.6 1.9 2.2],[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.28**
18186 0.1103623],1.4)
p = 0.56685
octave:24> **y=neville2(1.4,4,[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2],[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623])**
y = 0.56685

MARIO EUGENIO MATIAUDA



```
function nf = divdiff1(xi,fi)    DIFERENCIAS DIVIDIDAS
%DIVDIFF      calcula los the coeficientes para la diferencia hacia
%             adelante de Newton,del polinomio interpolante asociado
%             con un dado conjunto de puntos interpolantes
%
%     secuencias de llamado:
%             nf = divdiff1 ( xi, fi )
%             divdiff1 ( xi, fi )
%
%     ingresos:
%             xi      vector conteniendo los puntos interpolantes
%             fi      vector conteniendo los valores de la función
%                     la entrada I en este vector es el valor de la función
%                     asociado con la entrada i del vector'xi'
%
%     salida:
%             nf      vector conteniendo coeficientes de la diferencia hacia
%                     adelante de Newton,del polinomio interpolante asociado
%                     con un dado conjunto de puntos interpolantes
%     NOTA:
%             para evaluar la forma de Newton , applicar rutina NF_EVAL
%ejemplo:> fi=[0.8;1.6;2.25;2.8;3.35];
% xi=[0.5;0.8;1.0;1.4;1.75];
%divdiff1 ( xi, fi );ans =    0.8000    2.6667    1.1667   -4.7685
%6.6669;

n = length ( xi );
m = length ( fi );

if ( n ~= m )
   disp ( 'error divdiff : número de ordendas y número de valores de la
función deben ser iguales' )
   return
end

nf = fi;
for j = 2:n
    for i = n:-1:j
        nf(i) = ( nf(i) - nf(i-1) ) / ( xi(i) - xi(i-j+1) );
    end
end
```

```
Dados los siguientes valores x-y.
x=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
y=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];
```

generar las diferencias divididas y el polinomio de Newton

```
octave:29> xi=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
octave:30> fi=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];
octave:31> divdiff1 ( xi, fi )
ans =
       0.7651977 -0.4837057 -0.1087339 0.0658784 0.0018251
```

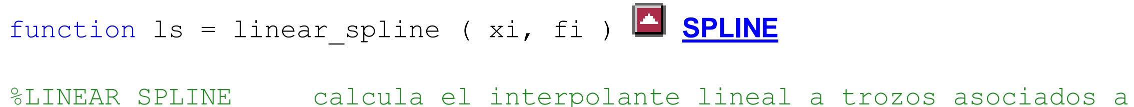
MARIO EUGENIO MATAIDA

```
function [C,D] = newpoly(X,Y)
```

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

```
%Ingreso    - X  vector de abcisas
%          - Y  vector de ordenadas
%salida   - C es un vector que contiene los coeficientes
%            del polinomio interpolante de Newton
%          - D es la tabla de diferencias divididas

%

n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';

%

for j=2:n
   for k=j:n
      D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
   end
end

%Determina los coeficientes del polinomio interpolante de Newton

C=D(n,n);

for k=(n-1):-1:1
   C=conv(C,poly(X(k)));
   m=length(C);
   C(m)=C(m)+D(k,k);
end
```

```
Dados los siguientes valores x-y.
x=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
y=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];
generar los coeficientes del polinomio interpolante de Newton
y la tabla de diferencias divididas

octave:29> xi=[1.0 1.3 1.6 1.9 2.2];
octave:30> fi=[0.7651977 0.6200860 0.4554022 0.2818186 0.1103623];
octave:32> [C,D] = newpoly(xi,fi)
C =
    0.0018251 0.0552928 -0.3430466 0.0733913 0.9777351
D =
    0.76520  0.00000  0.00000 0.00000 0.00000
    0.62009 -0.48371  0.00000 0.00000 0.00000
    0.45540 -0.54895 -0.10873 0.00000 0.00000
    0.28182 -0.57861 -0.04944 0.06588 0.00000
    0.11036 -0.57152  0.01182 0.06807 0.00183
```



```
function ls = linear_spline ( xi, fi )
```

SPLINE

```
%LINEAR_SPLINE     calcula el interpolante lineal a trozos asociados a
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
%                   un conjunto dado de puntos de interpolación y los valores
%                   de la función
%
%     forma de la llamada:
%             ls = linear_spline ( xi, fi )
%             linear_spline ( xi, fi )
%
%     Entrada:
%             xi      vector que contiene los puntos de interpolación
%                     (orden ascendente)
%             fi      vector que contiene los valores de la función
%



%
%     Salida:
%             ls      matriz de tres columnas
%                     - primer columna: puntos de interpolación
%                     - segunda columna: valores de la función
%                     - tercer columna: piezas lineales
%
%     Nota:
%             para evaluar el interpolante lineal a trozos aplicar el
%             algoritmo SPLINE_EVAL para la salida de esta rutina
%

n = length ( xi );
m = length ( fi );

if ( n ~= m )
   disp ('Número de ordenadas y valores de la función, debe ser igual')
   return
end

b = zeros (n,1);
b(1:n-1) = ( fi(2:n) - fi(1:n-1) ) ./ ( xi(2:n) - xi(1:n-1) );

if ( nargout == 0 )
   disp ( [ xi' fi' b ] )
else
   ls = [ xi' fi' b ];
end
```

Dados los valores de *x*-*f*(*x*), encontrar el trazador lineal:
xi=[0.1 0.2 0.3 0.4]; fi=[-0.62049958 -0.2839668 0.00660095 0.24842440];

```
octave:7> xi=[0.1 0.2 0.3 0.4];
octave:8> fi=[-0.62049958 -0.2839668 0.00660095 0.24842440];
octave:9> linear_spline ( xi, fi )
0.10000 -0.62050 3.36533
0.20000 -0.28397 2.90568
0.30000  0.00660 2.41823
0.40000  0.24842 0.00000
```

La tercera columna da las pendientes de los trozos lineales
Los valores del pol se obtienen con "***spline_eval***". Ver a continuación

```
function y = spline_eval ( sp, x )
```

ADAPTADOR CÚBICO

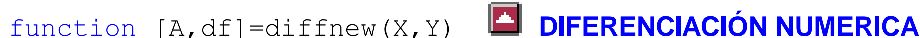
```
%SPLINE_EVAL      evalúa una dada función spline function en un dado
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
%                  conjunto de valores de la variable independiente
%
%     secuencia de llamado:
%             y = spline_eval ( sp, x )
%             spline_eval ( sp, x )
%
%     ingresos:
%             sp      matriz conteniendo la información que define la
%                     función spline
%                     - típicamente será la la salida de
%                       LINEAR_SPLINE, CUBIC_NAK o CUBIC_CLAMPED
%             x       valor(es) de la variable independiente donde se
%                     evalúa la función spline
%                     - escalar o vector
%
%     salida:
%             y       valor(es) de la función spline
%
%     NOTA:
%             rutina que acompaña a las CUBIC_NAK,
%             CUBIC_CLAMPED y LINEAR SPLINE
%

[p c] = size ( sp );
npts = length ( x );

for i = 1 : npts
    piece = max ( find ( sp(1:p-1) < x(i) ) );
    if ( length ( piece ) == 0 )
       piece = 1;
    end

    temp(i) = sp(piece,2) + sp(piece,3) * ( x(i) - sp(piece,1) );
    if ( c == 5 )
       temp(i) = temp(i) + sp(piece,4) * ( x(i) - sp(piece,1) )^2;
       temp(i) = temp(i) + sp(piece,5) * ( x(i) - sp(piece,1) )^3;
    end
end
if ( nargout == 0 )
   disp ( temp )
else
   y = temp;
end
```

Los valores del polinomio obtenidos con *spline_eval*

```
octave:10> sp=[3.3653 2.9057 2.4182 0];
octave:11> x=[0.1 0.2 0.3 0.4];
octave:12> spline_eval( sp, x )
-4.9904 -4.7486 -4.5068 -4.2650
```



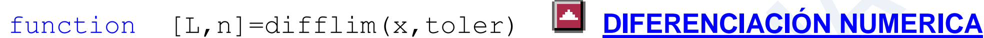
```
function [A,df]=diffnew(X,Y)
```

DIFERENCIACIÓN NUMERICA

```
%Ingreso     - X vector abcisa 1xn
%             - Y vector ordenada  1xn
%salida  - A vector 1xn que contiene los coeficientes del polinomio de grado
%              n de Newton
%             - df derivada aproximada
A=Y;
N=length(X);
for j=2:N
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   for k=N:-1:j
      A(k)=(A(k)-A(k-1))/(X(k)-X(k-j+1));
   end
end

x0=X(1);
df=A(2);
prod=1;
n1=length(A)-1;

for k=2:n1
   prod=prod*(x0-X(k));
   df=df+prod*A(k+1);
end
```



```
function  [L,n]=difflim(x,toler)
```

DIFERENCIACIÓN NUMERICA

```
%Ingreso  - x punto de diferenciación
%        - toler tolerancia deseada
%Salida - L=[H' D' E']: H vector de tamaños de etapas
%                       D vector de derivadas aproximadas



%        -  E vector de cotas de error
%        - n coordenda de la mejor aproximación


f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
max1=15;
h=1;
H(1)=h;
D(1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
E(1)=0;
R(1)=0;

for n=1:2
   h=h/10;
   H(n+1)=h;
   D(n+1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
   E(n+1)=abs(D(n+1)-D(n));
   R(n+1)=2*E(n+1)*(abs(D(n+1))+abs(D(n))+eps);
end

n=2;

while((E(n)>E(n+1))&(R(n)>toler))&n<max1
   h=h/10;
   H(n+2)=h;
   D(n+2)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
   E(n+2)=abs(D(n+2)-D(n+1));
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   R(n+2)=2*E(n+2)*(abs(D(n+2))+abs(D(n+1))+eps);
   n=n+1;
end

n=length(D)-1;
L=[H' D' E'];
```

Dada la función x^2-3x, hallar su derivada en x=3 con tolerancia 0.01

```
difflim(3,0.01)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'x^2-3*x'
'x^2-3*x'
ans =
      1.00000 3.00000 0.00000
      0.10000 3.00000 0.00000
      0.01000 3.00000 0.00000
```

La salida es L=[H' D' E']: H vector de tamaños de paso;D el de deriv.aprox,E error

```
function [D,err,relerr,n]=diffext(f,x,delta,toler)
```

TÉCNICA DE RICHARDSON

```
%Ingreso    - f es la función
%            - x es el punto de diferenciación
%            - delta es la tolerancia para el error
%            - toler es la tolerancia para el error relativo
%Salida - D es la matriz de derivadas aproximadas
%            - err es la cota de  error
%            - relerr es la cota de error relativo
%            - n es la coordenada de la "mejor aproximación"
% Si f es archivo M usar el llamado
%[D,err,relerr,n]=diffext(@f,x,delta,toler).
% Si f es una función anónima llamar como
%[D,err,relerr,n]=diffext(f,x,delta,toler).
%
err=1;
relerr=1;
h=1;
j=1;
D(1,1)=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);

while relerr > toler & err > delta & j <12
   h=h/2;
D(j+1,1)=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
for k=1:j
  D(j+1,k+1)=D(j+1,k)+(D(j+1,k)-D(j,k))/((4^k)-1);
end
err=abs(D(j+1,j+1)-D(j,j));
relerr=2*err/(abs(D(j+1,j+1))+abs(D(j,j))+eps);
j=j+1;
end
```


MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
[n,n]=size(D);
```

Dada la función x^2-3x, hallar su derivada en x=3 con tolerancia 0.0001

```
octave:23> f=@(x)x^2-3*x;
octave:24> [D,err,relerr,n]=diffext(f,3,0.01,0.0001)
D =
    3 0
    3 3
err = 0
relerr = 0
n = 2
```

```
function s=traprl(a,b,M)
```

Regla Compuesta del Trapecio

```
%Ingreso    - f es el integrando ingresado como string 'f'
%          - a y b son los límites de integración
%          - M es el número de subintervalos
%Salida    - s es la suma de la regla  trapezoidal


f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
h=(b-a)/M;
s=0;

for k=1:(M-1)
   x=a+h*k;
   s=s+feval(f,x);
end
s=h*(feval(f,a)+feval(f,b))/2+h*s;
```

Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Trapezoidal compuesta

```
octave:29> traprl(0,pi/3,6)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'sin(x)'
'sin(x)'
ans = 0.49873
```

```
function s=simprl(a,b,M)
```

Regla compuesta de Simpson

```
# Ejemplo carga s=simprl(0,pi/3,6)
# funcion 'sin(x)'
# - a Limite inferior de integración
# - b Limite superior de integración
# - M Numero de subintervalos
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
```


MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
h=(b-a)/(2*M);
s1=0;
s2=0;
for k=1:M
x=a+h*(2*k-1);
s1=s1+feval(f,x);
end
for k=1:(M-1)
x=a+h*2*k;
s2=s2+feval(f,x);
end
s=h*(feval(f,a)+feval(f,b)+4*s1+2*s2)/3;
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Simpon's compuesta
octave:30> simprl(0,pi/3,6)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'sin(x)'
'sin(x)'
ans = 0.50000
```

```
function [R,quad,err,h]=rômber(a,b,n,tol)
```

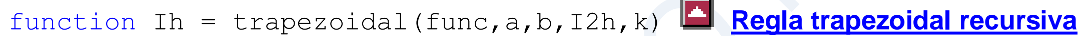
Integración compuesta de Romberg

```
%Ingreso  - f es el integrando entrado como string 'f'
%        - a y b son los límites de integración
%        - n es el número máximo de filas en la tabla
%        - tol is the tolerance
%salida - R es la tabla de Romberg
%        - quad es el valor de cuadratura
%        - err es la estimación de error
%        - h es el menor tamaño de paso usado
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
M=1;
h=b-a;
err=1;
J=0;
R=zeros(4,4);
R(1,1)=h*(feval(f,a)+feval(f,b))/2;

while((err>tol)&(J<n))|(J<4)
   J=J+1;
   h=h/2;
   s=0;
   for p=1:M
      x=a+h*(2*p-1);
      s=s+feval(f,x);
   end
   R(J+1,1)=R(J,1)/2+h*s;
   M=2*M;
   for K=1:J
      R(J+1,K+1)=R(J+1,K)+(R(J+1,K)-R(J,K))/(4^K-1);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   end
   err=abs(R(J,J)-R(J+1,K+1));
end
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Romberg compuesta
octave:31> romber(0,pi/3,6,0.001)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'sin(x)'
'sin(x)'
ans =
         0.45345 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
         0.48852 0.50022 0.00000 0.00000 0.00000
         0.49714 0.50001 0.50000 0.00000 0.00000
         0.49929 0.50000 0.50000 0.50000 0.00000
         0.49982 0.50000 0.50000 0.50000 0.50000
```



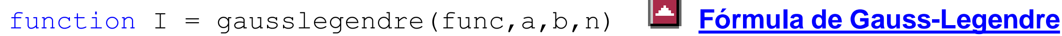
```
function Ih = trapezoidal(func,a,b,I2h,k)
```

Regla trapezoidal recursiva

```
% regal trapezoidal recursiva.
% USAR: Ih = trapezoid(func,a,b,I2h,k)
% func = handle de function a integrar.
% a,b = límites de integración.
% I2h = integral con 2^(k-1) paneles.
% Ih = integral con 2^k paneles.
if k == 1
fa = feval(func,a); fb = feval(func,b);
Ih = (fa + fb)*(b - a)/2.0;
else
n = 2^(k -2 ); % Número de nuevos puntos
h = (b - a)/n ; % espaciado de nuevos puntos
x = a + h/2.0; % Coord. Del primer punto nuevo
suma = 0.0;
for i = 1:n
fx = feval(func,x);
suma = suma + fx;
x = x + h;
end
Ih = (I2h + h*suma)/2.0;
end
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
trapezoidal recursive
octave:32> f=@(x)sin(x);
octave:33> Ih = trapezoidal(f,pi/3,6,1,0)
Ih = 0.50000
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA



```
function I = gausslegendre(func,a,b,n)
```

[Fórmula de Gauss-Legendre]

```
% Cuadratura de Gauss-Legendre.
% USAR I = gaussQuad(func,a,b,n)
% Ingreso:
% func = handle de la function a integrar.
% a,b = límites de integración.
% n = orden de integración.
% Salida:
% I = integral
c1 = (b + a)/2; c2 = (b - a)/2; % constants de mapeo
[x,A] = gaussNodos(n); % pesos y abcisas nodales
sum = 0;
for i = 1:length(x)
y = feval(func,c1 + c2*x(i)); % Función en nodo i
sum = sum + A(i)*y;
end
I = c2*sum;


function [x,A] = gaussNodos(n,tol)
% Calcula abcisas nodales x y pesos  A de
% cuadratura del punto n de Gauss-Legendre.
% USAR: [x,A] = gaussNodes(n,epsilon,maxIter)
% tol = tolerancia de error (default = 1.0e4*eps).
if nargin < 2; tol = 1.0e4*eps; end
A = zeros(n,1); x = zeros(n,1);
nRoots = fix(n + 1)/2; % Número de raíces no-neg.
for i = 1:n
t = cos(pi*(i - 0.25)/(n + 0.5)); % raíces aproximadas
for j = i:30
[p,dp] = legendre(t,n); % método de Newton
dt = -p/dp; t = t + dt; % búsqueda de raíz
if abs(dt) < tol %
x(i) = t; x(n-i+1) = -t;
A(i) = 2/(1-t^2)/dp^2; %
A(n-i+1) = A(i);
break
end
end
end


function [p,dp] = legendre(t,n)
% Evalua polinomio de Legendre  p de grado n
% y su derivada dp en x = t.
p0 = 1.0; p1 = t;
for k = 1:n-1
p = ((2*k + 1)*t*p1 - k*p0)/(k + 1); % Eq. (6.19)
p0 = p1;p1 = p;
end
dp = n *(p0 - t*p1)/(1 - t^2);
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Gauss-Legendre
octave:35> f=@(x)sin(x);
octave:36> I = gausslegendre(f,0,pi/3,25)
I = 0.50000
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Cuadratura adaptativa

```
function [SRmat,quad,err]=adapt(a,b,tol)
%Ingresos  - f es el integrando como string 'f'
%       - a y b límites inferior y superior de integración
%      - tol es la tolerancia
%salida - SRmat tabla de valores
%       - quad valor de cuadratura
%       - err error estimado
%Initialize values
f=input('ingrese f(x) entre comillas  en términos de x');
f=inline(f,'x');
SRmat = zeros(30,6);
iterating=0;
done=1;
SRvec=zeros(1,6);
SRvec=srule(f,a,b,tol);
SRmat(1,1:6)=SRvec;
m=1;
state=iterating;

while(state==iterating)
   n=m;
   for j=n:-1:1
      p=j;
      SR0vec=SRmat(p,:);
      err=SR0vec(5);
      tol=SR0vec(6);
      if (tol<=err)

         %intervalo Bisecccionado,aplica regla de Simpson
         %recursivamente, y determina error
         state=done;
         SR1vec=SR0vec;
         SR2vec=SR0vec;
         a=SR0vec(1);
         b=SR0vec(2);
         c=(a+b)/2;
         err=SR0vec(5);
         tol=SR0vec(6);
         tol2=tol/2;
         SR1vec=srule(f,a,c,tol2);
         SR2vec=srule(f,c,b,tol2);
         err=abs(SR0vec(3)-SR1vec(3)-SR2vec(3))/10;

         %prueba de exactitud
         if (err<tol)
            SRmat(p,:)=SR0vec;
            SRmat(p,4)=SR1vec(3)+SR2vec(3);
            SRmat(p,5)=err;
         else
            SRmat(p+1:m+1,:)=SRmat(p:m,:);
            m=m+1;
            SRmat(p,:)=SR1vec;
            SRmat(p+1,:)=SR2vec;
            state=iterating;
         end
      end
   end
end
quad=sum(SRmat(:,4));
err=sum(abs(SRmat(:,5)));
SRmat=SRmat(1:m,1:6);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
function Z=srule(f,a0,b0,tol0)     Regla de Simpson's

%Ingreso   - f es el integrando como string 'f'
%         - a0 y b0 límites inferior y superior de integración
%         - tol0 es la tolerancia
% salida - Z es un vector 1 x 6  [a0 b0 S S2 err tol1]
h=(b0-a0)/2;
C=zeros(1,3);
C=feval(f,[a0 (a0+b0)/2 b0]);
S=h*(C(1)+4*C(2)+C(3))/3;
S2=S;
tol1=tol0;
err=tol0;
Z=[a0 b0 S S2 err tol1];
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Cuadratura adaptativa de Simpson's
octave:37> adapt(0,pi/3,0.0001)
ingrese f(x) entre comillas en términos de x 'sin(x)'
'sin(x)'
ans = 0.00000 1.04720 0.50022 0.50001 0.00002 0.00010
```

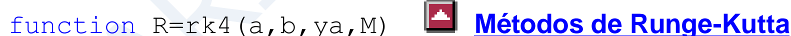
```
function I= gauss_q(f,a,b,n)     Cuadratura de Gauss-Legendre
p=Legen_pw(n);
x=roots(p)';
x=sort(x);
for j=1:n
y=zeros(1,n);
y(j)=1;
p=polyfit(x,y,n-1);
P=poly_itg(p);
w(j)=polyval(P,1)- polyval(P,-1);
end
x=0.5*((b-a)*x+a+b);
y= feval(f,x);
I=sum(w.*y)*(b-a)/2;
fprintf('\n x                y                w\n')
for j=1:n
fprintf('%e %e %e\n', x(j) , y(j) , w(j))
end
```

```
function pn=legen_pw(n)
pbb=[1]; if n==0, pn=pbb; break; end
pb=[1 0]; if n==1, pn=pb; break; end
for i=2:n;
pn=((2*i-1)*[pb,0]-(i-1)*[0, 0, pbb])/i;
pbb=pb; pb=pn;
end
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
function py = poly_itg(p)
% poly_itg(p) integra un polinomio p que es una
% serie de potencias. El resultado también es una serie de potencias.
n=length(p);
py = [p.*[n:-1:1].^(-1),0];
```

```
Hallar la integral de la función f(x)=sen x entre 0 y π/3
Cuadratura de Gauss-Legendre
octave:37> I= gauss_q(@(x)sin(x),0,pi/3,20)
   x              y               w
3.597857e-003 3.597849e-003 1.761401e-002
1.886425e-002 1.886314e-002 4.060143e-002
4.595395e-002 4.593777e-002 6.267205e-002
8.423816e-002 8.413857e-002 8.327674e-002
1.328203e-001 1.324301e-001 1.019301e-001
1.905618e-001 1.894106e-001 1.181945e-001
2.561094e-001 2.533188e-001 1.316886e-001
3.279267e-001 3.220809e-001 1.420961e-001
4.043304e-001 3.934032e-001 1.491730e-001
4.835296e-001 4.649070e-001 1.527534e-001
5.636680e-001 5.342903e-001 1.527534e-001
6.428672e-001 5.994927e-001 1.491730e-001
7.192708e-001 6.588363e-001 1.420961e-001
7.910881e-001 7.111187e-001 1.316886e-001
8.566357e-001 7.556433e-001 1.181945e-001
9.143772e-001 7.921827e-001 1.019301e-001
9.629594e-001 8.208853e-001 8.327674e-002
1.001244e+000 8.421423e-001 6.267205e-002
1.028333e+000 8.564397e-001 4.060143e-002
1.043600e+000 8.642209e-001 1.761401e-002

I =

    0.5000
```



```
function R=rk4(a,b,ya,M)
```

Métodos de Runge-Kutta

```
%Ingresos    - f es la función como string 'f'
%          - a y b extremos derecho e izquierdo
%          - ya condición inicial y(a)
%          - M es el número de etapas
%salida  - R = [T' Y'] con T  vector de abcisas
%          e Y vector de ordenadas


f=input('ingrese f entre comillas  en términos de t,y');
f=inline(f,'t','y');
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
Y(1)=ya;
for j=1:M
   k1=h*feval(f,T(j),Y(j));
   k2=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j)+k1/2);
   k3=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j)+k2/2);
   k4=h*feval(f,T(j)+h,Y(j)+k3);
   Y(j+1)=Y(j)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end

R=[T' Y'];
```

Sea la ecuación y'=0.5*(t-y) con y(0)=1 en [0,3], se plantean los métodos de Adams Basforth-Moulton(4 pasos);Milne- Simpson (3 pasos), Hamming(3 pasos); todos requieren el cálculo previo de coordenadas T e Y (por ej con Runge Kutta de cuarto orden)
Seleccionando un paso de 0.25

```
octave:10> R=rk4(0,3,1,12)
ingrese f entre comillas en términos de t,y '0.5*(t-y)'
'0.5*(t-y)'
R =
   0.00000 1.00000
   0.25000 0.89749
   0.50000 0.83640
   0.75000 0.81187
   1.00000 0.81959
   1.25000 0.85579
   1.50000 0.91710
   1.75000 1.00059
   2.00000 1.10364
   2.25000 1.22396
   2.50000 1.35952
   2.75000 1.50852
   3.00000 1.66939
```

```
function A=abm(T,Y)
```

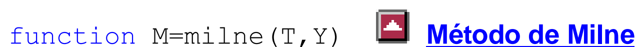
Métodos de Adams-Moulton

```
%Ingreso   - f función como string 'f'
%         - T vector de abcisas
%         - Y vector de ordenadas
%  Las primeras cuatro coordendaas de T e Y deben
%          tener valores iniciales obtenidos con RK4
%salida - A=[T' Y'] con T  vector de abcisas e
%          Y  vector de ordenadas


f=input('ingrese f entre comillas  en términos de t,y');
f=inline(f,'t','y');
n=length(T);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
if n<5, return, end;

F=zeros(1,4);
F=feval(f,T(1:4),Y(1:4));
h=T(2)-T(1);

for k=4:n-1
   %Predictor
   p=Y(k)+(h/24)*(F*[-9 37 -59 55]');
   T(k+1)=T(1)+h*k;
   F=[F(2) F(3) F(4) feval(f,T(k+1),p)];
   %Corrector
   Y(k+1)=Y(k)+(h/24)*(F*[1 -5 19 9]');
   F(4)=feval(f,T(k+1),Y(k+1));
end

A=[T' Y'];
```

```
Empleando los datos optenidos con el algoritmo rk4.
Desde la ventana de comandos hacemos:
octave:11> T=zeros(1,13);
octave:12> Y=zeros(1,13);
octave:13> T=0:1/4:3;
octave:14> Y(1:4)=[1 0.8975 0.8364 0.8119];
octave:15> abm(T,Y)
ingrese f entre comillas en términos de t,y '0.5*(t-y) '
'0.5*(t-y) '
ans =
      0.00000 1.00000
      0.25000 0.89750
      0.50000 0.83640
      0.75000 0.81190
      1.00000 0.81962
      1.25000 0.85580
      1.50000 0.91711
      1.75000 1.00060
      2.00000 1.10365
      2.25000 1.22396
      2.50000 1.35952
      2.75000 1.50852
      3.00000 1.66939
```



```
function M=milne(T,Y)
```

Método de Milne

```
%Ingreso   - f función como 'f'
%         - T  vector de abcisas
%         - Y  vector de ordenadas
%. Las primeras cuatro coordendaas de T e Y deben
%          tener valores iniciales obtenidos con RK4

%salida - M=[T' Y'] con T  vector de abcisas e
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
%          Y vector de ordenadas

f=input('ingrese f entre comillas  en términos de t,y');
f=inline(f,'t','y');
n=length(T);
if n<5, break, end;

F=zeros(1,4);
F=feval(f,T(1:4),Y(1:4));
h=T(2)-T(1);
pold=0;
yold=0;

for k=4:n-1
   %Predictor
   pnew=Y(k-3)+(4*h/3)*(F(2:4)*[2 -1 2]');
   %Modifier
   pmod=pnew+28*(yold-pold)/29;
   T(k+1)=T(1)+h*k;
   F=[F(2) F(3) F(4) feval(f,T(k+1),pmod)];
   %Corrector
   Y(k+1)=Y(k-1)+(h/3)*(F(2:4)*[1 4 1]');
   pold=pnew;
   yold=Y(k+1);
   F(4)=feval(f,T(k+1),Y(k+1));
end
```

```
Empleando los datos optenidos con el algoritmo rk4.
Desde la ventana de comandos hacemos:
octave:11> T=zeros(1,13);
octave:12> Y=zeros(1,13);
octave:13> T=0:1/4:3;
octave:14> Y(1:4)=[1 0.8975 0.8364 0.8119];

octave:15> milne(T,Y)
ingrese f entre comillas en términos de t,y '0.5*(t-y) '
'0.5*(t-y) '
ans =
      0.00000 1.00000
      0.25000 0.89750
      0.50000 0.83640
      0.75000 0.81190
      1.00000 0.81958
      1.25000 0.85582
      1.50000 0.91709
      1.75000 1.00062
      2.00000 1.10362
      2.25000 1.22399
      2.50000 1.35950
      2.75000 1.50855
      3.00000 1.66937
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
function H=heun(a,b,ya,M)
```

Método Predictor-Corrector

```
# - a y b son los puntos finales de izquierda y derecha
# - ya condicion inicial y(a)
# - M Tamaño de paso
#Salidas - H=[T' Y'] T: vector de abcisas Y: vector de ordenadas
# Ejemplo carga H=heun(0,1,1,5)
# funcion '3*y+3*t'
f=input('ingrese f entre comillas  en términos de t,y');
f=inline(f,'t','y');
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
for j=1:M
 k1=feval(f,T(j),Y(j));
 k2=feval(f,T(j+1),Y(j)+h*k1);
 Y(j+1)=Y(j)+(h/2)*(k1+k2);
end
H=[T' Y'];
```

```
Dada la ecuación diferencial en PVI
 y' =3t+3y
y(0) = 1 , en [0,1]
Solución Exacta: -1/3-t+4/3*exp(3*t)
H1 = heun(0,1,1,5)
ingrese f entre comillas en términos de t,y '3*y+3*t'
'3*y+3*t'
H1 =
     0.00000 1.00000
     0.20000 1.84000
     0.40000 3.49120
     0.60000 6.58634
     0.80000 12.25168
     1.00000 22.49199
```

```
function X = backsub(A,B)
```

SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

```
# --------
# Llamada
# X = backsub(A,B)
# Parametros
# A Matriz de coeficientes triangular
# superior obtenida de gauss(A)
# B Vector lado derecho de la ecuacion
# Devuelve
# X Vector de Solucion
#Ejemplo carga    X = backsub([4 -1 2 3;0 -2 7 -4;0 0 6 5;0 0 0 3],[20;-
7;4;6])
n = length(B);
det1 = A(n,n);
X = zeros(n,1);
X(n) = B(n)/A(n,n);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
for r = n-1:-1:1,
det1 = det1*A(r,r);
if det1 == 0, break, end
X(r) = (B(r) - A(r,r+1:n)*X(r+1:n))/A(r,r);
end
end
```

```
Resolver un sistema triangular (cuadrada), dada la matriz de coefcientes A y
el vector independiente B
octave:17> A=[4 -1 2 3;0 -2 7 -4;0 0 6 5;0 0 0 3];
octave:18> B=[20;-7;4;6];
octave:19> backsub(A,B)
ans =
       3
      -4
      -1
       2
```

```
function X = uptrbk(A,B)
```

SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

```
%Ingreso  - A matriz N x N no singular
%         - B  N x 1 matriz
%salida - X es matriz N x 1 con la solución de AX=B.

%Iniciaalizar X y la matriz temporario de almacenaje C
[N N]=size(A);
X=zeros(N,1);
C=zeros(1,N+1);

%Forma la matriz aumentada: Aug=[A|B]
Aug=[A B];
for p=1:N-1
   %Pivoteo parcial para columna p
   [Y,j]=max(abs(Aug(p:N,p)));
   %Intercambio fila  p y j
   C=Aug(p,:);
   Aug(p,:)=Aug(j+p-1,:);
   Aug(j+p-1,:)=C;

   if Aug(p,p)==0
      'A es singular.  No hay solución única'
     break
  end
  %etapa de eliminación para columna p
  for k=p+1:N
     m=Aug(k,p)/Aug(p,p);
     Aug(k,p:N+1)=Aug(k,p:N+1)-m*Aug(p,p:N+1);
  end
end
%sustituación hacia atrás en [U|Y]
X=backsub(Aug(1:N,1:N),Aug(1:N,N+1));
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
Resolver un sistema triangular (cuadrada), dada la matriz de coefcientes A y
el vector independiente B , empleando triangularización superior más
sustitución hacia atrás
octave:22> A=[1 2 2 4;2 0 4 3;4 2 2 1;-3 1 3 2]; % no singular
octave:23> B=[13 28 20 6]';
octave:24> uptrbk(A,B)
ans =
       3.00000
      -1.33333
       5.00000
       0.66667
```

```
function Gjelim(P)
```

TÉCNICA DE GAUSS-JORDAN

```
%Gjelim
%eliminación de Gauss-Jordan.
%Opciones: formato en numero racional
%          conteo de operaciones
%         todas las etapas
%forma de llamado: Gjelim(A)

%puede usarse tolerancia de 1e-20
%o cambiar a una propia
%MATLAB calcula hasta 16 dígitos decimales
%
%valores iniciales
adds=0;totadds=0;mults=0;totmults=0;swaps=0;totswaps=0;
ops=[0];

%hold off
%
tol=1e-20;
[n,m]=size(P);
format compact

disp(' ')
h=input('Números racionales? y/n: ','s');
q=input('Conteo de operaciones? y/n: ','s');
g=input('todas las etapas? y/n: ','s');

disp(' ')
disp('matriz inicial')
if h=='y'
  disp(rats(P))
 else
  disp(P)
end

if g=='y';
 disp('[presione Enter en cada paso para seguir]')
 disp(' ')
 pause
end
```

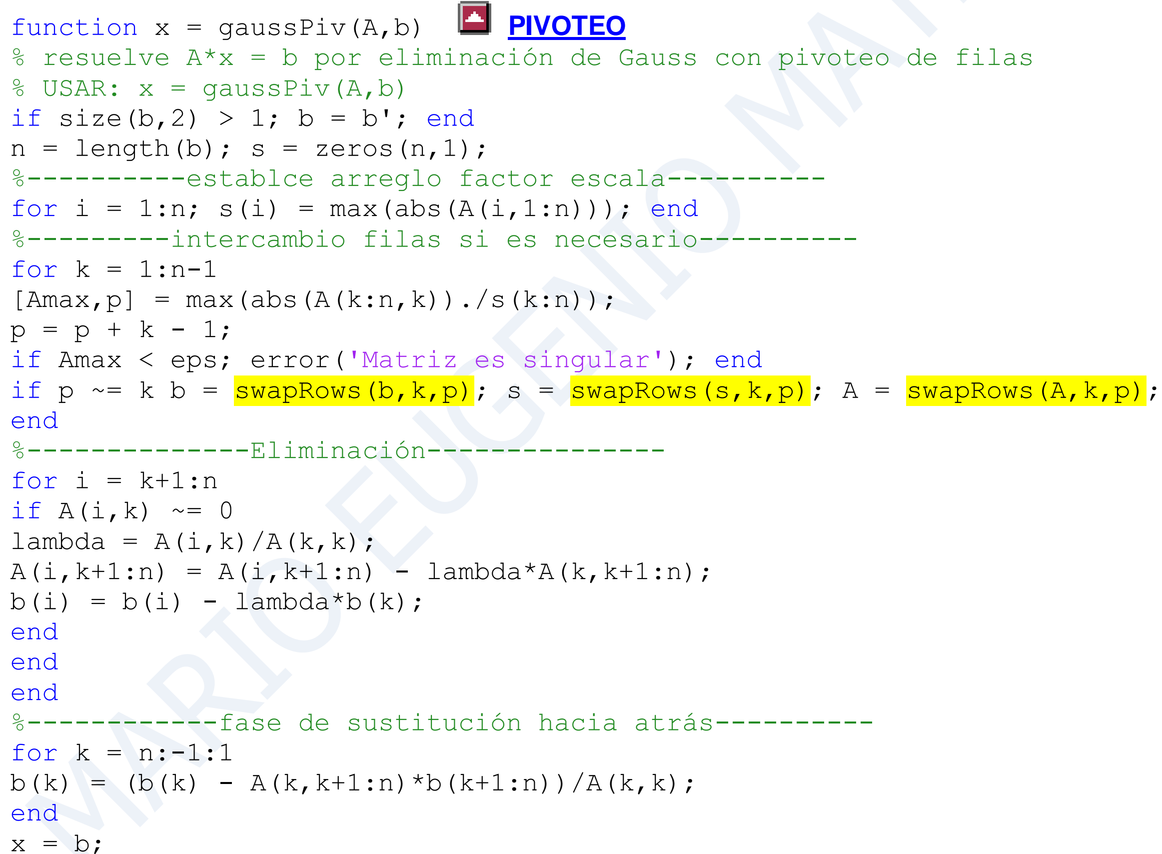
MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
%busca un pivot
j=1;
for i=1:n,
 if j <= m
  found=0;
  if abs(P(i, j)) <= tol %fin está en línea 101
    while (found == 0) %
%busca de unos e intercambio de filas si hace falta
     for s=i:n,
      if (abs(P(s, j)) > tol)
        if  (found == 0)
        found=1;
        if s~=i
         for r=j:m,
          temp=P(i, r);
          P(i, r)=P(s, r);
          P(s, r) = temp;
         end
         swaps = m-j+1;
         totswaps = totswaps + swaps;
         if g=='y'; %todas las etapas
          disp('intercambio filas')
          if h=='y'
            disp(rats(P))
           else
            disp(P)
          end
          if q=='y'
           disp('intercambio de elmentos:')
           disp(swaps)
          end
          disp('----------------------')
          pause
         end %todas las etapas
        end
       end
      end
     end

     if (found==0)
      if (j <= m)
       j = j + 1;
      end
     end

     if j>m
      found=1;
     end
    end  %
    if  j > m
     found = 0;
    end
   else
    found = 1;
  end  %parte línea 51

%normaliza elemento lider en la fika ajustándo el resto
  if found == 1
   k=i;
   if (P(k, j) ~= 1)
```

```
    if (abs(P(k, j)) > tol)
     y = P(i, j);
     for l=j:m,
      P(k, l) = P(k, l)/y ;
     end
     mults = m-j;
     totmults = totmults + mults;
     if g=='y'; %todas las etapas
      disp('normaliza')
      if h=='y'
        disp(rats(P))
       else
        disp(P)
      end
      if q=='y'
       disp('multiplicaciones:')
       disp(mults)
      end
      disp('--------------------')
      pause
     end %todas las etapas
    end
   end
   for r=1:n,
    if (abs(P(r, j)) >tol)
     if (r ~= i)
      z=P(r, j);
      for c=j:m,
       P(r, c)=P(r, c) - z * P(i, c);
      end
      adds = m-j;
      mults = m-j;
      totadds = totadds + adds;
      totmults = totmults + mults;
      if g=='y'; %todas las etapas
       disp('crea cero')
       if h=='y'
         disp(rats(P))
        else
         disp(P)
       end
       if q=='y'
        disp('sumas, multiplicaciones:')
        ops=[adds mults];
        disp(ops)
       end
       disp('--------------------')
       pause
      end %todas las etapas
     end
    end
   end
  end

  j = j + 1;

 end
end %fin loop i

%muestra matriz final
disp('-forma escalonada reducida-')
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
if h=='y'
   disp(rats(P))
else
   disp(P)
end

if q=='y'
 disp('Total de sumas, multiplicaciones, intercambio elementos:')
 ops=[totadds totmults totswaps];
 disp(ops)
 disp('--------------------')
end

disp(' ')
format loose
```



```
function x = gaussPiv(A,b)
% resuelve A*x = b por eliminación de Gauss con pivoteo de filas
% USAR: x = gaussPiv(A,b)
if size(b,2) > 1; b = b'; end
n = length(b); s = zeros(n,1);
%----------establce arreglo factor escala----------
for i = 1:n; s(i) = max(abs(A(i,1:n))); end
%---------intercambio filas si es necesario----------
for k = 1:n-1
[Amax,p] = max(abs(A(k:n,k))./s(k:n));
p = p + k - 1;
if Amax < eps; error('Matriz es singular'); end
if p ~= k b = swapRows(b,k,p); s = swapRows(s,k,p); A = swapRows(A,k,p);
end
%--------------Eliminación---------------
for i = k+1:n
if A(i,k) ~= 0
lambda = A(i,k)/A(k,k);
A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - lambda*A(k,k+1:n);
b(i) = b(i) - lambda*b(k);
end
end
end
%-----------fase de sustitución hacia atrás----------
for k = n:-1:1
b(k) = (b(k) - A(k,k+1:n)*b(k+1:n))/A(k,k);
end
x = b;
```

PIVOTEO

```
function v = swapRows(v,i,j)
% Swap rows i and j of vector or matrix v.
% USAGE: v = swapRows(v,i,j)
temp = v(i,:);
v(i,:) = v(j,:);
v(j,:) = temp;
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
resuelve A*x = b por eliminación de Gauss con pivoteo de filas, dada la
matriz de coefcientes A y el vector independiente B , empleando
triangularización superior más sustitución hacia atrás

octave:49> A=[4 -1 2 3;0 -2 7 -4;0 0 6 5;0 0 0 3];
octave:50> B=[20;-7;4;6];
octave:51> x = gaussPiv(A,B)
x =
       3
      -4
      -1
       2
```

```
function X = lufact(A,B)
```

Factorización LU

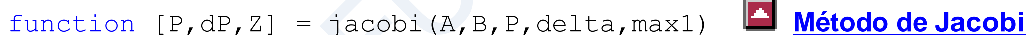
```
%Ingreso   - A es matriz N x N
%          - B matriz N x 1
%salida - X matriz N x 1 conteniendo solución de AX = B.



%Inicializar X, Y,matriz temporario de almacenaje C, y la matriz de
información de permutación  fila R

[N,N]=size(A);
X=zeros(N,1);
Y=zeros(N,1);
C=zeros(1,N);
R=1:N;

for p=1:N-1

   %Busca fila pivot para columna p
   [max1,j]=max(abs(A(p:N,p)));

   %Intercambia fila p y j
      C=A(p,:);
      A(p,:)=A(j+p-1,:);
      A(j+p-1,:)=C;
      d=R(p);
      R(p)=R(j+p-1);
      R(j+p-1)=d;

   if A(p,p)==0
      'A es singular.  Sin solución única'
      break
   end

   %Calcula multiplicadores y ubica en la subdiagonal de A
      for k=p+1:N
         mult=A(k,p)/A(p,p);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
      A(k,p) = mult;
          A(k,p+1:N)=A(k,p+1:N)-mult*A(p,p+1:N);
      end
end

%resuelve para Y
Y(1) = B(R(1));
for k=2:N
   Y(k)= B(R(k))-A(k,1:k-1)*Y(1:k-1);
end

%resuelve para X
X(N)=Y(N)/A(N,N);
for k=N-1:-1:1
   X(k)=(Y(k)-A(k,k+1:N)*X(k+1:N))/A(k,k);
end
```

Resolver un sistema triangular (cuadrada), dada la matriz de coefcientes A y el vector independiente B, con factorización con pivoteo

```
octave:49> A=[4 -1 2 3;0 -2 7 -4;0 0 6 5;0 0 0 3];
octave:50> B=[20;-7;4;6];
octave:55> X = lufact(A,B)
X =
     3.00000
    -1.33333
     5.00000
     0.66667
```



```
function [P,dP,Z] = jacobi(A,B,P,delta,max1)
```

Método de Jacobi

```
%JACOBI   iteración de Jacobi para resolver un sistema lineal.
% forma de llamado
%   [X,dX] = jacobi(A,B,P,delta,max1)
%   [X,dX,Z] = jacobi(A,B,P,delta,max1)
% Ingresos
%   A       matriz de coeficientes
%   B       vector lado derecho
%   P       vector de arranque
%   delta   telerancia de convergencia
%   max1    maximo número de iteraciones
% devuelve
%   X       vector solución
%   dX      vector de estimación error
%   Z       matriz de historia de  iteraciones
%
Z = P';
n = length(B);
Pnew = P;
for k=1:max1,
  for r = 1:n,
    Sum1 = B(r) - A(r,[1:r-1,r+1:n])*P([1:r-1,r+1:n]);
    Pnew(r) = Sum1/A(r,r);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
  end
  dP = abs(Pnew-P);
  err = norm(dP);
  relerr = err/(norm(Pnew)+eps);
  P = Pnew;
  Z = [Z;P'];
  if (err<delta)|(relerr<delta), break, end
end
```

```
Resolución por técnicas iterativas , dada la matriz de coeficientes y el
vector independiente
octave:35> A=[1 -5 -1;4 1 -1;2 -1 -6];
octave:36> B=[-8 13 -2]';
octave:37> P=[0 0 0]';
octave:38> jacobi(A,B,P,0.001, 10)  con 10 iteraciones
ans =
          9.1711e+006
          5.8774e+006
         -8.0714e+005
octave:39> jacobi(A,B,P,0.001, 20)  con 20 iteraciones
ans =
         -3.0646e+013
         -1.4564e+013
          2.2794e+012
```

Método de Gauss-Seidel

```
function [P,dP,Z] = gseid(A,B,P,delta,max1)

# GSEID Iteracion para resolver sistemas lineales Gauss-Seidel
# Llamado de la funcion
# [X,dX] = gseid(A,B,P,delta,max1)
# [X,dX,Z] = gseid(A,B,P,delta,max1)
# Entradas
# A Matriz de coeficientes
# B vector de soluciones
# P vector de inicio
# delta tolerancia
# max1 maximo numero de iteraciones
# Devuelve
# P vector solución
# dP vector de estimación error
# Z matriz de historia de las  iteraciones
# Ejemplo carga [P,dP,Z] = gseid([1 2 3;2 4 3;3 6 4],[-
1;3;0],[0;0;0],0.0001,20)
Z = P';
n = length(B);
Pold = P;
for k=1:max1,
for r = 1:n,
Sum1 = B(r) - A(r,[1:r-1,r+1:n])*P([1:r-1,r+1:n]);
P(r) = Sum1/A(r,r);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
end
dP = abs(Pold-P);
err = norm(dP);
relerr = err/(norm(P)+eps);
Pold = P;
Z = [Z;P'];
if (err<delta)|(relerr<delta), break, end
end
end
```

```
Resolución por técnicas iterativas , dada la matriz de coeficientes y el
vector independiente
octave:40> A=[1 -5 -1;4 1 -1;2 -1 -6];
octave:41> B=[-8 13 -2]';
octave:42> P=[0 0 0]';
octave:43> gseid(A,B,P,0.001,10)
ans =
      3.8556e+012
     -1.5624e+013
      3.8892e+012
```

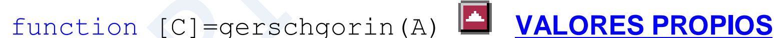
```
function x = conjgrad(A,b,tol)

% CONJGRAD  Metodo del gradiente conjugado.
%   X = CONJGRAD(A,B) busca resolver el sistema lineal A*X=B
%   para X. La matriz de coeficientes ,NxN,A debe ser simétrica y el vector
%   columna B de longitud N.
%
%   X = CONJGRAD(A,B,TOL) especifica la  tolerancia del método, por
%   default es 1e-10.
%
% Ejemplo:
%{
  n = 6000;
  m = 8000;
  A = randn(n,m);
  A = A * A';
  b = randn(n,1);
  tic, x = conjgrad(A,b); toc
  norm(A*x-b)
%}

    if nargin<3
        tol=1e-10;
    end
    r = b + A*b;
    y = -r;
    z = A*y;
    s = y'*z;
    t = (r'*y)/s;
    x = -b + t*y;

    for k = 1:numel(b);
       r = r - t*z;
       if( norm(r) < tol )
            return;
       end
       B = (r'*z)/s;
       y = -r + B*y;
       z = A*y;
       s = y'*z;
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
       t = (r'*y)/s;
       x = x + t*y;
    end
 end
```

Utilizar el método del Gradiente conjugado(directo no es tan bueno como elim. Gauss con pivoteo, sí para iterativos)

```
octave:44> A=[4 3 0;3 4 -1;0 -1 4]; % debe ser simétrica
octave:45> b=[24 30 -24]';
octave:46> conjgrad(A,b,0.001)
ans =
      3.0000
      4.0000
     -5.0000

%El método del gradiente conjugado ayuda a resolve el sistema  Ax=b, con A
simétrica, sin calcula inversa de A. Sólo requiere poca memoria, siendo
adecuado para sistemas de gran escala.

%es más rápido que otros como eliminación Gaussiana, si A está bien
condicionada. Por ejemplo,

%n=1000;
%[U,S,V]=svd(randn(n));
%s=diag(S);
%A=U*diag(s+max(s))*U'; % A es simétrica, bien condicionada
%b=randn(1000,1);
%tic,x=conjgrad(A,b);toc
%tic,x1=A\b;toc
%norm(x-x1)
%norm(x-A*b)

%El GC es de dos a tres veces más rápido que A\b, que emplea eliminación
Gaussiana
```



```
function [C]=gerschgorin(A)
```

VALORES PROPIOS

```
% Gershgorin's circulos C of the matrix A.
d = diag(A);
cx = real(d);
cy = imag(d);
B = A - diag(d);
[m, n] = size(A);
r = sum(abs(B'));
C = [cx cy r(:)];
t = 0:pi/100:2*pi;
c = cos(t);
s = sin(t);
[v,d] = eig(A);
d = diag(d);
u1 = real(d);
v1 = imag(d);
hold on
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
grid on
axis equal
xlabel('Re')
ylabel('Im')
h1_line = plot(u1,v1,'or');
set(h1_line,'LineWidth',1.5)
for i=1:n
x = zeros(1,length(t));
y = zeros(1,length(t));
x = cx(i) + r(i)*c;
y = cy(i) + r(i)*s;
h2_line = plot(x,y);
set(h2_line,'LineWidth',1.2)
end
hold off
title('Gershgorin circles and the eigenvalues of a')
```

```
Para A, acotar los autovalores empleando los círculos de Gerschgorin
octave:59>  [C] = gerschgorin([4 1 1;0 2 1;-2 0 9])
C =
       4  0  2
       2  0  1
       9  0  2
```

```
function [lambda,V]= power1(A,X,epsilon,max1)
```

Métodos de Potencias

```
%Ingreso - A matriz nxn
%       - X vector de arranque nx1
%       - epsilon es la tolerancia
%       - max1 número máximo de iteraciones
%salida - lambda  eigenvalue dominante
%        - V  eigenvector dominante



%Inicializar parámetros

lambda=0;
cnt=0;
err=1;
state=1;

while ((cnt<=max1)&(state==1))
   Y=A*X;

   %Normaliza Y
   [m j]=max(abs(Y));
   c1=m;
   dc=abs(lambda-c1);
   Y=(1/c1)*Y;

   %actualiza X y lambda y chequea para convergencia
   dv=norm(X-Y);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   err=max(dc,dv);
   X=Y;
   lambda=c1;
   state=0;
   if (err>epsilon)
      state=1;
   end
   cnt=cnt+1;
end

V=X;
```

```
Dada A=[0 11 -5;-2 17 -7;-4 26 -10]; hallar el autovalor y autovector
dominante
octave:58> A=[0 11 -5;-2 17 -7;-4 26 -10];
octave:59> X=[1 1 1]';
octave:60> power1(A,X,0.001,10)
ans = 4.0016
```

```
function[lambda,V]=invpow(A,X,alpha,epsilon,max1)
```

Método de la potencia inversa

```
%Ingreso - A matriz nxn
%       - X vector de arranque nx1
%       - alpha dado
%       - epsilon tolerancia
%       - max1 número máximo de iteraciones
%salida - lambda es el eigenvalue dominante
%        - V  eigenvector dominante



%Inicializar matriz A-alphaI y parámetros

[n n]=size(A);
A=A-alpha*eye(n);
lambda=0;
cnt=0;
err=1;
state=1;

while ((cnt<=max1)&(state==1))

   %resuelve sistema AY=X
   Y=A\X;

   %Normaliza Y
   [m j]=max(abs(Y));
   c1=m;
   dc=abs(lambda-c1);
   Y=(1/c1)*Y;
```

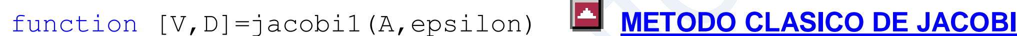
MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   %actualiza X y lambda y chequea la convergencia
   dv=norm(X-Y);
   err=max(dc,dv);
   X=Y;
   lambda=c1;
   state=0;
   if (err>epsilon)
      state=1;
   end
   cnt=cnt+1;
end

lambda=alpha+1/c1;
V=X;
```

Dada A=[0 11 -5;-2 17 -7;-4 26 -10]; hallar el autovalor y autovector dominante

Por el método de inverso de potencias

```
octave:61> A=[0 11 -5;-2 17 -7;-4 26 -10];
octave:62> X=[1 1 1]';
octave:63> alpha=4.1;
octave:64> invpow(A,X,alpha,0.001,10)
ans = 4.2000
```



```
function [V,D]=jacobi1(A,epsilon)
```

METODO CLASICO DE JACOBI

```
%Ingreso - A matriz nxn
%       - epsilon tolerancia
%salida - V matriz nxn de eigenvectors
%        - D matriz diagonal nxn de eigenvalues
%Inicializar V, D, y parámetros
D=A;
[n,n]=size(A);
V=eye(n);
state=1;

%Calcula fila p y columna q del elementodiagonal más grande deelement
% A

[m1 p]=max(abs(D-diag(diag(D))));
[m2 q]=max(m1);
p=p(q);

while (state==1)
   %elim. cero Dpq y Dqp
   t=D(p,q)/(D(q,q)-D(p,p));
   c=1/sqrt(t^2+1);
   s=c*t;
   R=[c s;-s c];
   D([p q],:)=R'*D([p q],:);
   D(:,[p q])=D(:,[p q])*R;
   V(:,[p q])=V(:,[p q])*R;
   [m1 p]=max(abs(D-diag(diag(D))));
   [m2 q]=max(m1);
   p=p(q);
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
   if (abs(D(p,q))<epsilon*sqrt(sum(diag(D).^2)/n))
      state=0;
   end
end
D=diag(diag(D));
```

Para A simétrica, hallar sus autovalores y autovectores

```
octave:65> A=[8 -1 3 -1; -1 6 2 0; 3 2 9 1; -1 0 1 7];
octave:66> jacobi1(A,0.001)
ans =
      0.528779 -0.572958 0.582194  0.230569
      0.591968  0.472072 0.176060 -0.629067
     -0.536039  0.282024 0.792519 -0.070981
      0.287453  0.607725 0.044347  0.738968
La salida es una matriz 4x4 de eigenvectores y diagonal de eigenvalores
```

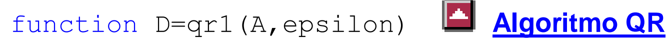
```
function T=house(A)
```

Técnica de Householder

```
%Ingreso - A matriz simétrica nxn
%salida - T matriz tridiagonal

[n,n]=size(A);

for k=1:n-2
   s=norm(A(k+1:n,k));
   if (A(k+1,k)<0)
      s=-s;
   end
   r=sqrt(2*s*(A(k+1,k)+s));
   W(1:k)=zeros(1,k);
   W(k+1)=(A(k+1,k)+s)/r;
   W(k+2:n)=A(k+2:n,k)'/r;
   V(1:k)=zeros(1,k);
   V(k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)*W(k+1:n)';
   c=W(k+1:n)*V(k+1:n)';
   Q(1:k)=zeros(1,k);
   Q(k+1:n)=V(k+1:n)-c*W(k+1:n);
   A(k+2:n,k)=zeros(n-k-1,1);
   A(k,k+2:n)=zeros(1,n-k-1);
   A(k+1,k)=-s;
   A(k,k+1)=-s;
   A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n) ...
      -2*W(k+1:n)'*Q(k+1:n)-2*Q(k+1:n)'*W(k+1:n);
end
T=A;
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
Reducir una matriz simétrica a la forma tridiagonal(por transformación de
Householder)
octave:67> A=[8 -1 3 -1; -1 6 2 0; 3 2 9 1; -1 0 1 7];
octave:68> house (A)
ans =
          8.00000  3.31662  0.00000  0.00000
          3.31662  6.90909 -2.46630  0.00000
          0.00000 -2.46630  8.24308 -0.79311
          0.00000  0.00000 -0.79311  6.84783
```



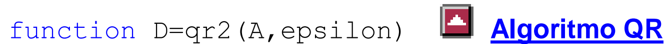
```
function D=qr1(A,epsilon)
```

[Algoritmo QR]

```
%Ingreso - A matriz tridiagonal simétrica nxn
%       - epsilon tolerancia
%salida - D  vector de eigenvalues



%Inicializar parámetros

[n,n]=size(A);
m=n;

while (m>1)
   S=A(m-1:m,m-1:m);
   if abs(S(2,1))<epsilon
      A(m,m-1)=0;
      A(m-1,m)=0;

   else
      shift=eig(S);
      [j,k]=min([abs(A(m,m)-shift(1)) abs(A(m,m)-shift(2))]);
   end
   [Q,U]=qr(A-shift(k)*eye(n));
   A=U*Q+shift(k)*eye(n);
   m=m-1;
end
D=diag(A);
```

```
Aproximar los autovalores con el método QR
octave:69> A=[8 -1 3 -1; -1 6 2 0; 3 2 9 1; -1 0 1 7];
octave:70> qr1(A,0.001)
ans =
       3.2976
       8.4547
      11.6541
       6.5936
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA



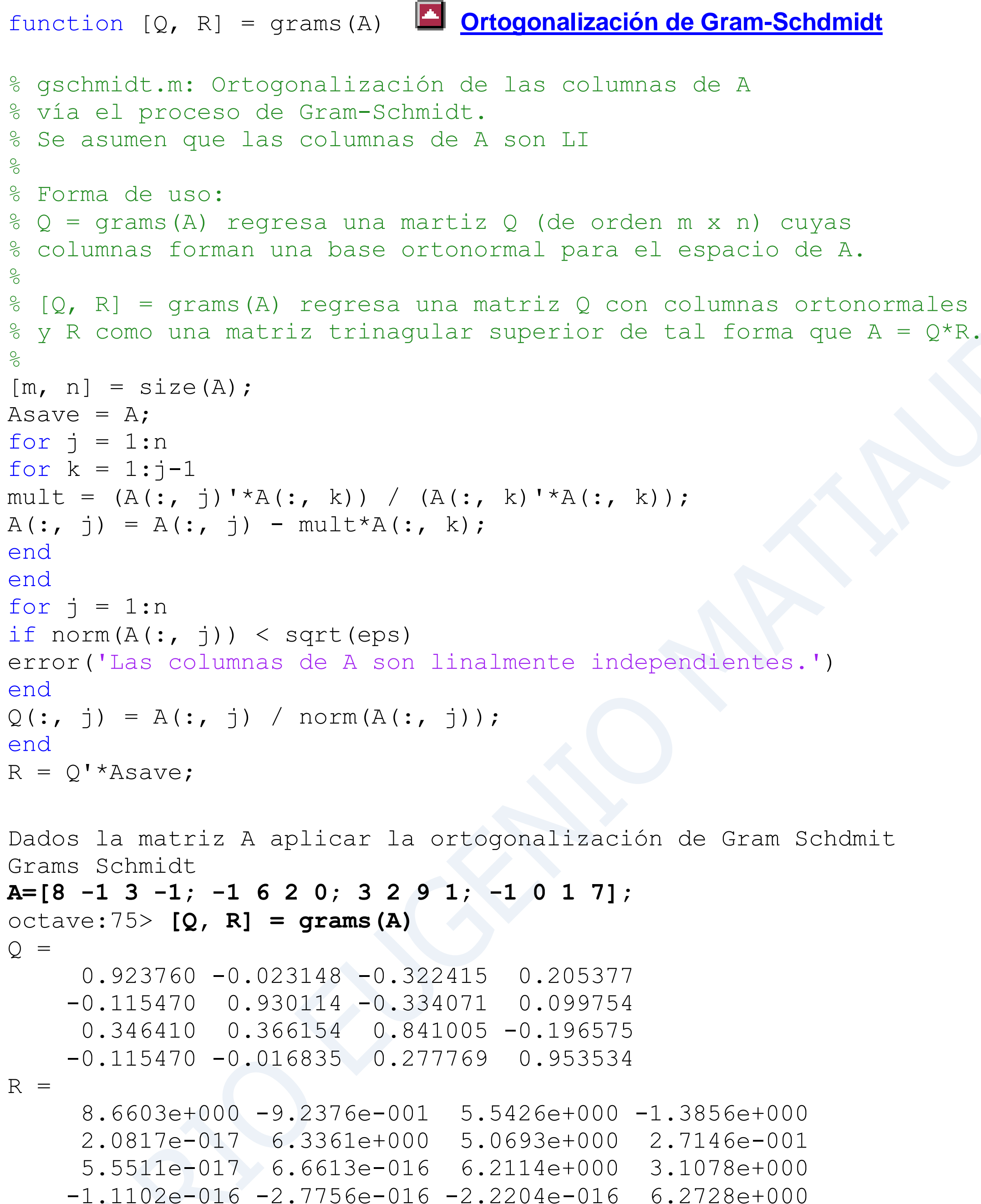
```
function D=qr2(A,epsilon)
```

Algoritmo QR

```
%Ingreso- A matriz simétrica tridiagonal nxn
%       - epsilon tolerancia
%salida - D  nx1 vector de eigenvalues



%Inicializar parametros

[n,n]=size(A);
m=n;
D=zeros(n,1);
B=A;

while (m>1)
   while (abs(B(m,m-1))>=epsilon)

      %Calcula shift
      S=eig(B(m-1:m,m-1:m));
      [j,k]=min([abs(B(m,m)*[1 1]'-S)]);

      %factorización QR de B
      [Q,U]=qr(B-S(k)*eye(m));

      %Calcula siguiente B
      B=U*Q+S(k)*eye(m);
   end

   %ubica el m-simo eigenvalue en A(m,m)
   A(1:m,1:m)=B;

   %Repite proceso en m-1 x m-1 submatriz de A
   m=m-1;
   B=A(1:m,1:m);
end
D=diag(A);
```

```
Aproximar los autovalores con el método QR
octave:71> A=[8 -1 3 -1; -1 6 2 0; 3 2 9 1; -1 0 1 7];
octave:72> qr2(A,0.001)
ans =
      11.7043
       3.2957
       8.4077
       6.5923
Con A tridiagonal simétrica cuadrada
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA



```
function [Q, R] = grams(A)
```

Ortogonalización de Gram-Schdmidt

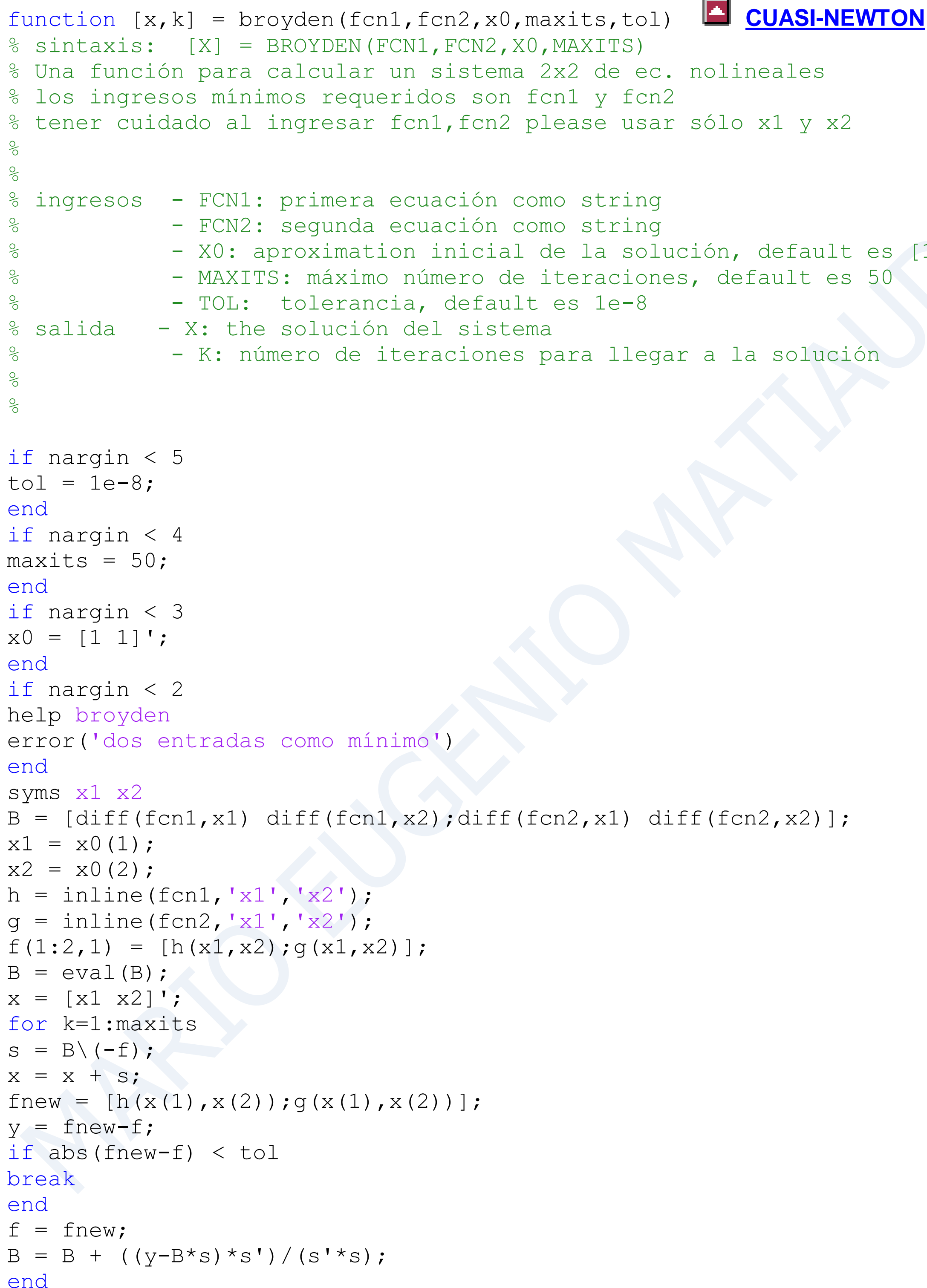
```
% gschmidt.m: Ortogonalización de las columnas de A
% vía el proceso de Gram-Schmidt.
% Se asumen que las columnas de A son LI
%
% Forma de uso:
% Q = grams(A) regresa una martiz Q (de orden m x n) cuyas
% columnas forman una base ortonormal para el espacio de A.
%
% [Q, R] = grams(A) regresa una matriz Q con columnas ortonormales
% y R como una matriz trinagular superior de tal forma que A = Q*R.
%
[m, n] = size(A);
Asave = A;
for j = 1:n
for k = 1:j-1
mult = (A(:, j)'*A(:, k)) / (A(:, k)'*A(:, k));
A(:, j) = A(:, j) - mult*A(:, k);
end
end
for j = 1:n
if norm(A(:, j)) < sqrt(eps)
error('Las columnas de A son linalmente independientes.')
end
Q(:, j) = A(:, j) / norm(A(:, j));
end
R = Q'*Asave;
```

```
Dados la matriz A aplicar la ortogonalización de Gram Schdmit
Grams Schmidt
A=[8 -1 3 -1; -1 6 2 0; 3 2 9 1; -1 0 1 7];
octave:75> [Q, R] = grams(A)
Q =
     0.923760 -0.023148 -0.322415  0.205377
    -0.115470  0.930114 -0.334071  0.099754
     0.346410  0.366154  0.841005 -0.196575
    -0.115470 -0.016835  0.277769  0.953534
R =
     8.6603e+000 -9.2376e-001  5.5426e+000 -1.3856e+000
     2.0817e-017  6.3361e+000  5.0693e+000  2.7146e-001
     5.5511e-017  6.6613e-016  6.2114e+000  3.1078e+000
    -1.1102e-016 -2.7756e-016 -2.2204e-016  6.2728e+000
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

OBSERVACION: La versión de octave a emplear para el algoritmo de broyden deberá contar con el paquete "simbols", dado que sin el mismo no puede operarse con variables simbólicas.

CUASI-NEWTON




```
function [x,k] = broyden(fcn1,fcn2,x0,maxits,tol)
% sintaxis:  [X] = BROYDEN(FCN1,FCN2,X0,MAXITS)
% Una función para calcular un sistema 2x2 de ec. nolineales
% los ingresos mínimos requeridos son fcn1 y fcn2
% tener cuidado al ingresar fcn1,fcn2 please usar sólo x1 y x2
%
%
% ingresos  - FCN1: primera ecuación como string
%           - FCN2: segunda ecuación como string
%           - X0: aproximation inicial de la solución, default es [1 1]
%           - MAXITS: máximo número de iteraciones, default es 50
%           - TOL:  tolerancia, default es 1e-8
% salida   - X: the solución del sistema
%           - K: número de iteraciones para llegar a la solución
%
%

if nargin < 5
tol = 1e-8;
end
if nargin < 4
maxits = 50;
end
if nargin < 3
x0 = [1 1]';
end
if nargin < 2
help broyden
error('dos entradas como mínimo')
end
syms x1 x2
B = [diff(fcn1,x1) diff(fcn1,x2);diff(fcn2,x1) diff(fcn2,x2)];
x1 = x0(1);
x2 = x0(2);
h = inline(fcn1,'x1','x2');
g = inline(fcn2,'x1','x2');
f(1:2,1) = [h(x1,x2);g(x1,x2)];
B = eval(B);
x = [x1 x2]';
for k=1:maxits
s = B\(-f);
x = x + s;
fnew = [h(x(1),x(2));g(x(1),x(2))];
y = fnew-f;
if abs(fnew-f) < tol
break
end
f = fnew;
B = B + ((y-B*s)*s')/(s'*s);
end
```

MÉTODO DE NEWTON

```
function [x,fx,xx]=newtons(f,x0,TolX,MaxIter,varargin)

%newtons.m resuelve conjunto de ec. nolineales f1(x)=0, f2(x)=0,..
%ingreso: f = vector1^st-orden ftn equivalente a un conjunto de ecuaciones
% x0 = suposición inicial de solución
% TolX = límite superior de |x(k) - x(k - 1)|
% MaxIter = máximo número de iteraciones
% salida: x = punto donde el algoritmo llegó
% fx = f(x(última))
% xx = historia de x
h = 1e-4; TolFun = eps; EPS = 1e-6;
fx = feval(f,x0,varargin{:});
Nf = length(fx); Nx = length(x0);
if Nf ~= Nx; error('dimensiones incompatible de f y x0!'); end
if nargin < 4, MaxIter = 100; end
if nargin < 3, TolX = EPS; end
xx(1,:) = x0(:).'; %Inicializar la solución como vector fila inicial
%fx0 = norm(fx); %(1)
for k = 1: MaxIter dx = -jacob(f,xx(k,:),h,varargin{:})\fx(:);%-[dfdx]^-1*fx
%para l = 1: 3 %damping para eviatr  divergencia %(2)
%dx = dx/2; %(3)
xx(k + 1,:) = xx(k,:) + dx.';
fx = feval(f,xx(k + 1,:),varargin{:}); fxn = norm(fx);
% if fxn < fx0, break; end %(4)
%end %(5)
if fxn < TolFun | norm(dx) < TolX, break; end
%fx0 = fxn; %(6)
end
x = xx(k + 1,:);
if k == MaxIter;
fprintf('la mejor en %d iteraciones\n',MaxIter);
end

function g = jacob(f,x,h,varargin) %Jacobiano de f(x)
if nargin < 3; h = 1e-4; end
h2 = 2*h; N = length(x); x = x(:).'; I = eye(N);
for n = 1:N
g(:,n) = (feval(f,x + I(n,:)*h,varargin{:}) ...
-feval(f,x - I(n,:)*h,varargin{:}))'/h2;
end
```

TECNICA DE DISPARO PARA EL PROBLEMA LINEAL

```
%Método del disparo Lineal

% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
%
% este programa implementa el meétodo de disparo lineal
%
% para resolver el PVF
%
%       x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)
%
% sobre [a,b]  con  x(a) = alpha  y  x(b) = beta
%
```

MARIO EUGENIO MATAUDA

```
% Usa el cambio de variable  y = x'  y las
%
% funciones   p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)
%
%             p(t)x'(t) + q(t)x(t)
%
% para formar  fn1.m y  fm2.m
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
%
% Aplica el método de Runge-Kutta para un orden má alto para resolver:
%
%     u'' = p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t)
%     con  u(a) = alpha  y  u'(a) = 0
%
%     v'' = p(t)v'(t) + q(t)v(t)
%     con  v(a) = 0  y  v'(a) = 1
%
% Define y almacena la función fn1(t,Z)y fn2(t,Z)
% en los archivos m  fn1.m y  fn2.m
% function W = fn1(t,Z)
% x = Z(1);  y = Z(2);
% W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2) + 1)];
% function W = fn2(t,Z)
% x = Z(1);  y = Z(2);
% W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2))];
%.....................................................................
% inicia una sección que entra la/s funcion(es) necesarias para el ejemplo
% en archivos m(s) ejecutando el comando diary command en este script.
% el método de programación preferido no  usa estas etapas.
% uno debe entrar la función8es) en los M con un editor.
delete output;
delete fn1.m;
diary fn1.m; disp('funcion W = fn1(t,Z)');...
            disp('x = Z(1);  y = Z(2);');...
           disp('W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2) + 1)];');...
diary off;
delete fn2.m;
diary fn2.m; disp('funcion W = fn2(t,Z)');...
            disp('x = Z(1);  y = Z(2);');...
          disp('W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2))];');...
diary off;
fn1(0,[0,0]);
fn2(0,[0,0]);
% . fn1.m fn2.m rks4.m se usan

% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
%
%  Usa el método disparo lineal para resolver
%  el PVF  x''  =  2t/(1+t^2) x'  -  2/(1+t^2)  + 1
% con  x(0) = 1.25  y  x(4) = -0.95.
%
% Entrar los extremos de [a,b].
% Entrar valor inicial   x(a)  en  alpha.
% Entrar valor terminal  x(b)  en  beta.
% Entrar número de subintervalos en  m.

a  = 0;
b  = 4;
alpha =  1.25;
beta  = -0.95;
```

```
m  = 20;
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
%
%     resolver   u'' = p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t)
%        con  u(a) = alpha
%        y  u'(a) = 0

Za = [alpha 0];
[T,Z] = rks4('fn1',a,b,Za,m);
U = Z(:,1)';

%     resolver   v'' = p(t)v'(t) + q(t)v(t)
%        con  v(a) = 0
%       y   v'(a) = 1
Za = [0 1];
[T,Z] = rks4('fn2',a,b,Za,m);
V = Z(:,1)';

%     Forma la combinación lineal para  x(t).
X = U + (beta - U(m+1))*V/V(m+1);
points = [T;X];

clc; figure(1); clf;

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~h
% inicio sección gráfica
%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
a =  0;
b =  4;
c = -1.25;
d =  1.75;
plot([a b],[0 0],'b',[0 0],[c d],'b');
axis([a b c d]);
axis(axis);
hold on;
plot(T,X,'-g');
if m<=30,
  plot(T,X,'or');
end;
xlabel('t');
ylabel('x');
Mx1 = 'La solución del disparo lineal a x`` = f(t,x,x`).';
title(Mx1);
grid;
hold off;
figure(gcf);

clc;
%............................................
% inicio sección impresión resultados.
%............................................
Mx2 = '     t(k)               x(k)';
clc,...
disp(''),disp(Mx1),disp(''),disp(Mx2),disp(points')
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
function [T,Z]=rks4(F,a,b,Za, M)

%entrada    - F es el sistema ingresado como string 'F'
%          - a y b son los extremos del intervalo
%          - Za=[x(a) y(a)] condiciones iniciales
%          - M número de pasos
%salida  - T  vector de pasos
%        - Z=[x1(t) . . . xn(t)]con xk(t) la aproximación a la
%           kth variable dependiente


h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Z=zeros(M+1,length(Za));
T=a:h:b;
Z(1,:)=Za;

for j=1:M
   k1=h*feval(F,T(j),Z(j,:));
   k2=h*feval(F,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
   k3=h*feval(F,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
   k4=h*feval(F,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
   Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

Ejemplo de la ejecución del método del disparo lineal para resolver el PVF x'' = 2t/(1+t^2) x' - 2/(1+t^2) + 1 con x(0) = 1.25 y x(4) = -0.95.

```
octave:4> disparo_lineal
function W = fn1(t,Z)
x = Z(1); y = Z(2);
W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2) + 1)];
function W = fn2(t,Z)
x = Z(1); y = Z(2);
W = [y, (2*t*y/(1 + t^2) - 2*x/(1 + t^2))];
La solución del disparo lineal a x`` = f(t,x,x`).
  t(k)      x(k)
0.00000  1.25000
0.20000  1.31731
0.40000  1.32643
0.60000  1.28165
0.80000  1.18928
1.00000  1.05673
1.20000  0.89191
1.40000  0.70276
1.60000  0.49699
1.80000  0.28198
2.00000  0.06473
2.20000 -0.14818
2.40000 -0.35052
2.60000 -0.53644
2.80000 -0.70043
3.00000 -0.83726
3.20000 -0.94201
3.40000 -1.01000
3.60000 -1.03678
3.80000 -1.01812
4.00000 -0.95000
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

% Método del Disparo no lineal **TECNICA DE DISPARO PARA EL PROBLEMA NO LINEAL**

```
%
% Aproxima la solución del problema nolineal del valor de frontera
%
%          Y'' = F(X,Y,Y'), A<=X<=B, Y(A) = ALPHA, Y(B) = BETA:
%
%
% ENTRADA: Intervalo A,B; condiciones de contorno ALPHA, BETA; número de
%          subintervalos N; tolerancia TOL; máximo número de iteraciones M.
% SALIDA:  Approximaciones W(1,I) a Y(X(I)); W(2,I) TO Y'(X(I))
%          por cada I=0,1,...,N o un mensaje de que el número de iteraciones
%          ha sido excedido.
% EJEMPLO
% Resolver por diferencias finitas la
% EDO con valor de frontera
% y ''= (32+2*x^3-y*y')/8, 1<=x<=3,
% y(1) = 17 , y(3) = 43 / 3 .
% Usando h = 0.5; 0.2; 0.05; 0.025.
% Solución: (La solución exacta es y(x) = x2 +16 / x ).
 TRUE = 1;
 FALSE = 0;
 fprintf(1,'este es el método de disparo no lineal.\n');
 fprintf(1,'Ingrese la funcion F(X,Y,Z) en términos de x, y, z.\n');
 fprintf(1,'seguida de la deriv. parcial de F respecto a y en \n');
 fprintf(1,'la siguiente línea seguida de la de F respecto a \n');
 fprintf(1,'z o y-prima en la línea siguiente. \n');
 fprintf(1,'ejemplp:   (32+2*x^3-y*z)/8 \n'); %z=y' {f(x,y,y'}
 fprintf(1,'                -z/8 \n'); %fy:=-z/8 {df/dy}
 fprintf(1,'                -y/8 \n'); %fy1:=-y/8  {df/dy'}
 s = input('');
 F = inline(vectorize(s),'x','y','z');
 s = input('');
 FY = inline(vectorize(s),'x','y','z');
 s = input('');
 FYP = inline(vectorize(s),'x','y','z');
 OK=0;
 while OK == 0
 fprintf(1,'Ingrese extremos derecho e izquierdo en líneas separadas.\n');
 A = input(' ');
 B = input(' ');
 if A >= B
 fprintf(1,'extremo izquierdo debe ser menor que el derecho.\n');
 else OK = 1;
 end;
 end;
 fprintf(1,'Ingrese Y(%.10e).\n', A);
 ALPHA = input(' ');
 fprintf(1,'Ingrese Y(%.10e).\n', B);
 BETA = input(' ');
 TK = (BETA-ALPHA)/(B-A);
 fprintf(1,'TK = %.8e\n', TK);
 fprintf(1,'Ingresa nuevo TK? Entre Y o N.\n');
 AA = input(' ','s');
 if AA == 'Y' | AA == 'y'
 fprintf(1,'ingrese nuevo TK\n');
 TK = input(' ');
 end;
 OK = 0;
 while OK == 0
 fprintf(1,'Ingrese un entero > 1 par el número de subintervalos.\n');
```

```
N = input(' ');
if N <= 1
fprintf(1,'Número debe ser mayor que 1.\n');
else
OK = 1;
end;
end;
OK = 0;
while OK == 0
fprintf(1,'Ingrese Tolerancia.\n');
TOL = input(' ');
if TOL <= 0
fprintf(1,'Tolerancia debe ser positiva.\n');
else
OK = 1;
end;
end;
OK = 0;
while OK == 0
fprintf(1,'Ingrese número máximo de iteraciones.\n');
NN = input(' ');
if NN <= 0
fprintf(1,'debe ser entero positivo .\n');
else
OK = 1;
end;
end;
if OK == 1
FLAG = 1;
if FLAG == 2
fprintf(1,'Ingrese nombrearchivo en la forma - drive:\\name.ext\n');
fprintf(1,'ejemplo  A:\\OUTPUT.DTA\n');
NAME = input(' ','s');
OUP = fopen(NAME,'wt');
else
OUP = 1;
end;
fprintf(OUP, 'METODO DISPARO NO LINEAL\n\n');
fprintf(OUP, '  I    X(I)         W1(I)        W2(I)\n');
% STEP 1
W1 = zeros(1,N+1);
W2 = zeros(1,N+1);
H = (B-A)/N;
K = 1;
% TK CALCULADA
OK = 0;
% etapa 2
while K <= NN & OK == 0
% etapa 3
W1(1) = ALPHA;
W2(1) = TK;
U1 = 0 ;
U2 = 1;
% etapa 4
% Método Runge-Kutta para sistemas se usa en etapas 5 y 6
for I = 1 : N
%  etapa 5
X = A+(I-1)*H;
T = X+0.5*H;
% etapa 6
K11 = H*W2(I);
K12 = H*F(X,W1(I),W2(I));
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
 K21 = H*(W2(I)+0.5*K12);
 K22 = H*F(T,W1(I)+0.5*K11,W2(I)+0.5*K12);
 K31 = H*(W2(I)+0.5*K22);
 K32 = H*F(T,W1(I)+0.5*K21,W2(I)+0.5*K22);
 K41 = H*(W2(I)+K32);
 K42 = H*F(X+H,W1(I)+K31,W2(I)+K32);
 W1(I+1) = W1(I)+(K11+2*(K21+K31)+K41)/6;
 W2(I+1) = W2(I)+(K12+2*(K22+K32)+K42)/6;
 K11 = H*U2;
 K12 = H*(FY(X,W1(I),W2(I))*U1+FYP(X,W1(I),W2(I))*U2);
 K21 = H*(U2+0.5*K12);
 K22 = H*(FY(T,W1(I),W2(I))*(U1+0.5*K11)+FYP(T,W1(I),W2(I))*(U2+0.5*K21));
 K31 = H*(U2+0.5*K22);
 K32 = H*(FY(T,W1(I),W2(I))*(U1+0.5*K21)+FYP(T,W1(I),W2(I))*(U2+0.5*K22));
 K41 = H*(U2+K32);
 K42 = H*(FY(X+H,W1(I),W2(I))*(U1+K31)+FYP(X+H,W1(I),W2(I))*(U2+K32));
 U1 = U1+(K11+2*(K21+K31)+K41)/6;
 U2 = U2+(K12+2*(K22+K32)+K42)/6;
 end;
% etapa 7
% prueba de exactitud
 if abs(W1(N+1)-BETA) < TOL
% etapa 8
 I = 0;
 fprintf(OUP, '%3d %13.8f %13.8f %13.8f\n', I, A, ALPHA, TK);
 for I = 1 : N
 J = I+1;
 X = A+I*H;
 fprintf(OUP, '%3d %13.8f %13.8f %13.8f\n', I, X, W1(J), W2(J));
 end;
 fprintf(OUP, 'Convergencia en %d iteraciones\n', K);
 fprintf(OUP, ' t = %14.7e\n', TK);
% etapa 9
 OK = TRUE;
 else
% etapa 10
% SE aplica método de Newton para mejorar TK
 TK = TK-(W1(N+1)-BETA)/U1;
 K = K+1;
 end;
 end;
% etapa 11
% método falló
 if OK == 0
 fprintf(OUP, 'Método falló luego de %d iteraciones\n', NN);
 end;
 end;
 if OUP ~= 1
 fclose(OUP);
 fprintf(1,'archivo de salida %s creado con éxito \n',NAME);
 end;
```

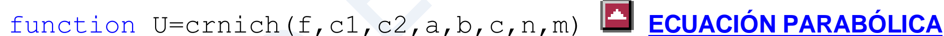
```
function U=dirich(f1,f2,f3,f4,a,b,h,tol,max1)
```
ECUACIONES ELÍPTICAS

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
%Entrada - f1,f2,f3,f4 son las funciones de contorno ingresadas como string
%         - a y b extremos derechos como [0,a] y [0,b]
%         - h tamaño de paso
%         - tol es la tolerancia
%SALIDA  - U la matríz solución del problema

% EJEMPLO DE CARGA
% f1=@(x)0*x+10
% f2=@(x)0*x+100
% f3=@(x)0*x+50
% f4=@(x)0*x
% U=dirich(f1,f2,f3,f4,4,4,0.5,0.001,20)

%Inicializa parámetros y U

n=fix(a/h)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval(f1,0)+feval(f2,0)) ...
   +b*(feval(f3,0)+feval(f4,0)))/(2*a+2*b);
U=ave*ones(n,m);

%Condiciones de borde

U(1,1:m)=feval(f3,0:h:(m-1)*h)';
U(n,1:m)=feval(f4,0:h:(m-1)*h)';
U(1:n,1)=feval(f1,0:h:(n-1)*h);
U(1:n,m)=feval(f2,0:h:(n-1)*h);
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;

%parametros SOR

w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-1))+cos(pi/(m-1)))^2));

%Refinando aproximaciones
err=1;
cnt=0;
while((err>tol)&(cnt<=max1))
   err=0;
   for j=2:m-1
      for i=2:n-1
         relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-1)+U(i+1,j)+U(i-1,j)-4*U(i,j))/4;
         U(i,j)=U(i,j)+relx;
         if (err<=abs(relx))
           err=abs(relx);
         end
      end
   end
cnt=cnt+1;
end

U=flipud(U');


Elíptica
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
Se plantea la ecuación de Laplace, div(div)=0 en R={(x,y):0≤x≤4,0≤y≤4}con
las CF dadas por:
u(x,0)=10 y u(x,4)=100 para 0<x<4  y
u(0,y)=50  y u(4,y)=0    para 0<y<4
se toma h=0.5 para x e y, o sea 64 cuadrados en la malla
octave:13> f1=@(x)0*x+10;
octave:14> f2=@(x)0*x+100;
octave:15> f3=@(x)0*x+50;
octave:16> f4=@(x)0*x;
octave:17> U=dirich(f1,f2,f3,f4,4,4,0.5,0.001,20)
U =
Columns 1 through 6:
75.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
50.00000  72.56216  79.88936  81.64786  80.52445  76.68815
50.00000  60.35926  65.34734  66.17761  63.76179  57.91969
50.00000  53.52760  54.96319  53.95345  50.42541  43.98667
50.00000  48.78785  47.02429  44.24762  39.99980  33.76675
50.00000  44.59979  40.09850  36.01288  31.55942  26.04620
50.00000  39.51325  32.75749  28.14616  24.17901  19.88825
50.00000  30.69626  23.27224  19.63521  17.12241  14.67547
30.00000  10.00000  10.00000  10.00000  10.00000  10.00000
Columns 7 through 9:
100.00000 100.00000 50.00000
 68.30843  49.30347  0.00000
 47.24210  28.90547  0.00000
 33.83481  19.07627  0.00000
 25.03420  13.56482  0.00000
 18.97039  10.14874  0.00000
 14.65245   8.05973  0.00000
 11.69142   7.43778  0.00000
 10.00000  10.00000  5.00000
```



```
function U=crnich(f,c1,c2,a,b,c,n,m)    ECUACIÓN PARABÓLICA

%Entrada - f=u(x,0) 'f' como un string
%         - c1=u(0,t) y c2=u(a,t)
%         - a y b extremos derechos como [0,a] y [0,b]
%         - c es la constante en la ecuación de calor

%         - n y m numeros de puntos de malla [0,a] y [0,b]
%SALIDA   - U la matríz solución del problema

% Ejemplo de carga
% f=@(x)sin(pi*x)+sin(3*pi*x)
% crnich(f,0,0,1,0.5,1,11,11)

%Inicializa parámetros y U

h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r;
s2=2/r-2;
```

MARIO EUGENIO MATTAUDA

```
U=zeros(n,m);

%Condiciones de borde

U(1,1:m)=c1;
U(n,1:m)=c2;

%Generación de la primera fila

U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)';

%Se forma la diagonal y los elementos no diagonales de A
%el vector constante B y resuelve el sistema tridiagonal AX=B

Vd(1,1:n)=s1*ones(1,n);
Vd(1)=1;
Vd(n)=1;
Va=-ones(1,n-1);
Va(n-1)=0;
Vc=-ones(1,n-1);
Vc(1)=0;
Vb(1)=c1;
Vb(n)=c2;
for j=2:m
   for i=2:n-1
      Vb(i)=U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1)+s2*U(i,j-1);
   end
   X=trisys(Va,Vd,Vc,Vb);
   U(1:n,j)=X';
end

U=U'
```

```
function X=trisys(A,D,C,B)
%Entradas - A es la subdiagonal de la matríz de coeficientes
%         - D es la diagonal principal de la matríz de coeficientes
%         - C es la diagonal superior de la matríz de coeficientes
%         - B es el vector constante del sistema lineal
%SALIDA   - X es el vector solución

N=length(B);

for k=2:N
   mult=A(k-1)/D(k-1);
   D(k)=D(k)-mult*C(k-1);
   B(k)=B(k)-mult*B(k-1);
end

X(N)=B(N)/D(N);
for k= N-1:-1:1
   X(k)=(B(k)-C(k)*X(k+1))/D(k);
end
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

Ecuación de calor

```
(∂u (x,t)/∂t)=c²(∂²u (x,t)/∂x²)   en  0<x<1 y 0<t<0.1
u(0,t)=0,u(1,t)=0 son las CF para 0≤t≤0.1
u(x,0)=sin(πx)+sin(3πx) a t=0 y 0≤x≤1
h=0.1,k=0.01,r=1, generando  n=11 y m=11
octave:25> f=@(x)1.5-1.5*x;
octave:26> g=@(x)0*x;a=1;b=0.5;c=2;n=10;m=10
m = 10
octave:27> f=@(x)sin(pi*x)+sin(3*pi*x);c1=0;c2=0;c=1;n=11;m=11;
octave:28> forwdif(f,c1,c2,a,b,c,n,m)
ans =
Columns 1 through 6:
0.0000e+000  1.1180e+000  1.5388e+000  1.1180e+000  3.6327e-001  0.0000e+000
0.0000e+000 -2.3681e+000 -2.6692e+000 -5.5174e-001  2.3207e+000  3.6327e+000
0.0000e+000  7.9667e+000  9.4239e+000  3.2231e+000 -5.4817e+000 -9.4871e+000
0.0000e+000 -2.4581e+001 -2.8866e+001 -9.2970e+000  1.8015e+001  3.0567e+001
0.0000e+000  7.6894e+001  9.0409e+001  2.9418e+001 -5.5787e+001 -9.4952e+001
0.0000e+000 -2.4000e+002 -2.8213e+002 -9.1647e+001  1.7441e+002  2.9670e+002
0.0000e+000  7.4934e+002  8.8091e+002  2.8624e+002 -5.4441e+002 -9.2622e+002
0.0000e+000 -2.3395e+003 -2.7503e+003 -8.9362e+002  1.6998e+003  2.8918e+003
0.0000e+000  7.3044e+003  8.5868e+003  2.7900e+003 -5.3070e+003 -9.0287e+003
0.0000e+000 -2.2805e+004 -2.6809e+004 -8.7109e+003  1.6569e+004  2.8189e+004
0.0000e+000  7.1202e+004  8.3703e+004  2.7197e+004 -5.1731e+004 -8.8010e+004
Columns 7 through 11:
 3.6327e-001  1.1180e+000  1.5388e+000  1.1180e+000 0.0000e+000
 2.3207e+000 -5.5174e-001 -2.6692e+000 -2.3681e+000 0.0000e+000
-5.4817e+000  3.2231e+000  9.4239e+000  7.9667e+000 0.0000e+000
 1.8015e+001 -9.2970e+000 -2.8866e+001 -2.4581e+001 0.0000e+000
-5.5787e+001  2.9418e+001  9.0409e+001  7.6894e+001 0.0000e+000
 1.7441e+002 -9.1647e+001 -2.8213e+002 -2.4000e+002 0.0000e+000
-5.4441e+002  2.8624e+002  8.8091e+002  7.4934e+002 0.0000e+000
 1.6998e+003 -8.9362e+002 -2.7503e+003 -2.3395e+003 0.0000e+000
-5.3070e+003  2.7900e+003  8.5868e+003  7.3044e+003 0.0000e+000
 1.6569e+004 -8.7109e+003 -2.6809e+004 -2.2805e+004 0.0000e+000
-5.1731e+004  2.7197e+004  8.3703e+004  7.1202e+004 0.0000e+000

Otro ejemplo:
octave:20> f=@(x)sin(pi*x)+sin(3*pi*x);
octave:21> U=crnich(f,0,0,1,0.5,1,11,11)
U =
Columns 1 through 7:
0.00000  1.11803 1.53884 1.11803 0.36327 0.00000 0.36327
0.00000 -0.09292 0.02699 0.38379 0.78084 0.95342 0.78084
0.00000  0.21099 0.33069 0.33501 0.27955 0.24804 0.27955
0.00000  0.03534 0.09171 0.16788 0.23696 0.26507 0.23696
0.00000  0.05357 0.09342 0.11414 0.12045 0.12113 0.12045
0.00000  0.02137 0.04359 0.06500 0.08118 0.08727 0.08118
0.00000  0.01683 0.03099 0.04092 0.04645 0.04818 0.04645
0.00000  0.00887 0.01723 0.02432 0.02916 0.03089 0.02916
0.00000  0.00585 0.01100 0.01493 0.01736 0.01817 0.01736
0.00000  0.00339 0.00649 0.00900 0.01065 0.01122 0.01065
0.00000  0.00211 0.00400 0.00548 0.00642 0.00674 0.00642
Columns 8 through 11:
1.11803 1.53884  1.11803 0.00000
0.38379 0.02699 -0.09292 0.00000
0.33501 0.33069  0.21099 0.00000
0.16788 0.09171  0.03534 0.00000
0.11414 0.09342  0.05357 0.00000
0.06500 0.04359  0.02137 0.00000
```

```
0.04092 0.03099  0.01683 0.00000
0.02432 0.01723  0.00887 0.00000
0.01493 0.01100  0.00585 0.00000
0.00900 0.00649  0.00339 0.00000
0.00548 0.00400  0.00211 0.00000
U =
Columns 1 through 7:
0.00000  1.11803 1.53884 1.11803 0.36327 0.00000 0.36327
0.00000 -0.09292 0.02699 0.38379 0.78084 0.95342 0.78084
0.00000  0.21099 0.33069 0.33501 0.27955 0.24804 0.27955
0.00000  0.03534 0.09171 0.16788 0.23696 0.26507 0.23696
0.00000  0.05357 0.09342 0.11414 0.12045 0.12113 0.12045
0.00000  0.02137 0.04359 0.06500 0.08118 0.08727 0.08118
0.00000  0.01683 0.03099 0.04092 0.04645 0.04818 0.04645
0.00000  0.00887 0.01723 0.02432 0.02916 0.03089 0.02916
0.00000  0.00585 0.01100 0.01493 0.01736 0.01817 0.01736
0.00000  0.00339 0.00649 0.00900 0.01065 0.01122 0.01065
0.00000  0.00211 0.00400 0.00548 0.00642 0.00674 0.00642
Columns 8 through 11:
1.11803 1.53884  1.11803 0.00000
0.38379 0.02699 -0.09292 0.00000
0.33501 0.33069  0.21099 0.00000
0.16788 0.09171  0.03534 0.00000
0.11414 0.09342  0.05357 0.00000
0.06500 0.04359  0.02137 0.00000
0.04092 0.03099  0.01683 0.00000
0.02432 0.01723  0.00887 0.00000
0.01493 0.01100  0.00585 0.00000
0.00900 0.00649  0.00339 0.00000
0.00548 0.00400  0.00211 0.00000
```

```
function F=finedif(f,g,a,b,c,n,m)   ECUACIÓN HIPERBÓLICA

%Entrada - f*u(x,0) como un string
%          g*ut(x,0) como un string
%        - a y b extremos derechos como [0,a] y [0,b]
%        - c es la constant de la ecuación de onda
%        - n y m numeros de puntos de malla [0,a] y [0,b]
%SALIDA  - U la matríz solución del problema

%Inicializa parámetros y U
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c+k/h;
r2=r^2;
r22=r^2/2;
s1=1-r^2;
s2=2-2*r^2;
U=zeros(n,m);

%Calcular la primera y segunda fila
for i=2:(n-1)
  U(i,1) = feval(f,h*(i-1));
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA

```
  U(i,2) = s1*feval(f,h*(i-1)) + k*feval(g,h*(i-1)) ...
           + r22*(feval(f,h*(i)) + feval(f,h*(i-2)));
end

%Calcular las filas restantes de U
for j=3:m
  for i=2:(n-1),
    U(i,j) = s2*U(i,j-1) + r2*(U(i-1,j-1) + U(i+1,j-1)) - U(i,j-2);
  end
end
U=U';
```

Ecuación de onda

```
(∂²u (x,t)/∂t²)=c²(∂²u (x,t)/∂x²)   en  0<x<1 y 0<t<0.5
u(0,t)=0,u(1,t)=0 son las CF
u(x,0)= u(x,0)=1.5- 1.5x en 0≤ x≤1
uₜ(x,0)=0 en 0<x<1
octave:22> f=@(x)1.5-1.5*x;
octave:23> g=@(x)0*x;a=1;b=0.5;c=2;n=10;m=10;
octave:24> finedif(f,g,a,b,c,n,m)
ans =
Columns 1 through 7:
0.00000  1.33333  1.16667  1.00000  0.83333  0.66667  0.50000
0.00000  1.33333  1.16667  1.00000  0.83333  0.66667  0.50000
0.00000 -0.16667  1.16667  1.00000  0.83333  0.66667  0.50000
0.00000 -0.16667 -0.33333  1.00000  0.83333  0.66667  0.50000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000  0.83333  0.66667  0.50000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000 -0.66667  0.66667  0.50000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000 -0.66667 -0.83333  0.50000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000 -0.66667 -0.83333 -1.00000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000 -0.66667 -0.83333 -1.00000
0.00000 -0.16667 -0.33333 -0.50000 -0.66667 -0.83333 -1.00000
Columns 8 through 10:
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
 0.33333  0.16667 0.00000
-1.16667  0.16667 0.00000
-1.16667 -1.33333 0.00000
```

MARIO EUGENIO MATIAUDA