

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

**CUADERNO de CÁTEDRA**  
**MECÁNICA RACIONAL**

Sergio Edgardo Katogui  
Jorge Luis López  
Rubén Darío Ferreyra  
Víctor Javier Sommer

Año 2007



EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

**San Luis 1870**

Posadas - Misiones – Tel-Fax: (03752) 428601

Correos electrónicos:

edunam-admini@arnet.com.ar

edunam-direccion@arnet.com.ar

edunam-produccion@arnet.com.ar

edunam-ventas@arnet.com.ar

**Colección:** Cuadernos de Cátedra

**Coordinación de la edición:** Claudio Oscar Zalazar

**Armado de interiores:** Amelia E. Morgenstern

**Corrección:** Gabriela Domínguez - Gisel Kabut

ISBN 978-950-579-074-6

Impreso en Argentina

©Editorial Universitaria

Katogui, Sergio  
Mecánica racional. - 1a ed. - Posadas: EDUNaM - Editorial Universitaria  
de la Univ. Nacional de Misiones, 2007.  
150 p.; 30x21 cm.  
ISBN 978-950-579-074-6  
1. Mecánica. 2. Cinemática. 3. Dinámica. I. Título  
CDD 531.112

Fecha de catalogación: 27/07/2007.

## LOS AUTORES

### **KATOGUI, Sergio Edgardo**

Ingeniero Electromecánico. Facultad de Ingeniería. UNaM.  
Profesor Adjunto Regular.

### **LÓPEZ, Jorge Luis**

Ingeniero. Facultad de Ingeniería. UNNE.  
Jefe de Trabajos Prácticos Regular.

### **FERREYRA, Rubén darío**

Ingeniero. Facultad de Ingeniería. UNaM.  
Ayudante de Primera.

### **SOMMER, Víctor Javier**

Estudiante Facultad de Ingeniería. UNaM.  
Ayudante de Segunda.



## Índice

Unidad 1: Álgebra Tensorial.....	9
Transformación de coordenadas.....	10
Propiedades de los tensores.....	11
Operaciones con tensores.....	13
Tensores simétricos y antisimétricos.....	13
Diagonalización de un tensor.....	13
Diagonalización de una matriz simétrica real.....	14
Forma cuadrática asociada.....	15
Operadores lineales.....	16
Tensor de inercia.....	16
El tensor de inercia y la Transformación de coordenadas.....	17
Tensor de inercia como operador lineal.....	18
Unidad 2: Cinemática de la Partícula.....	19
Vector de Posición, Velocidad y Aceleración.....	19
Coordenadas cartesianas.....	20
Coordenadas cilíndricas.....	21
Coordenadas esféricas.....	23
Coordenadas intrínsecas.....	26
Sistemas Referenciales.....	28
Sistemas de coordenadas generalizadas.....	28
Radio Vector o Vector de Posición.....	28
Base de coordenadas generalizadas.....	29
Coordenadas Cilíndricas.....	29
Coordenadas Esféricas.....	31
Coordenadas intrínsecas.....	32
Transformación de Coordenadas.....	33
Cinemática Relativa.....	
Sistemas de Referencia en Movimiento.....	34
Sistemas Rígidos y Deformables.....	34
Sistemas en Traslación (únicamente).....	35
Sistemas en Rotación.....	36
Sistemas en Traslación y Rotación Simultánea.....	40
Unidad 3: Cinemática del Cuerpo Rígido.....	
Condición de rigidez.....	41
Condición cinemática de velocidades.....	42
Condición cinemática de aceleraciones.....	43
Movimientos del Sólido en el Espacio.....	43
Traslación pura.....	44
Rotación pura.....	45
Velocidad en la rotación.....	45
Vector velocidad angular.....	46
Aceleración en la rotación.....	47
Campo de velocidades.....	47
Grados de libertad.....	48
Movimiento polar del sólido.....	48

Ángulo de Euler.....	49
Ángulos de precesión .....	49
Ángulo de nutación.....	50
Ángulo de rotación propia .....	50
Movimiento rototraslatorio.....	51
Teorema de Euler – Chassles.....	51
Polo de reducción.....	51
Invariante vectorial.....	52
Invariante escalar .....	52
Descomposición impropia .....	54
Descomposición propia .....	54
Eje central del movimiento.....	55
Ecuación del eje central .....	56
Movimiento helicoidal tangente.....	57
<b>Axoides</b> .....	57
Movimiento paralelo.....	57
Movimiento polar .....	58
Movimiento Plano .....	58
Centro instantáneo de rotación .....	59
Trayectorias polares.....	60
Propiedades del Centro instantáneo de rotación .....	60
Ecuación de la base.....	61
Ecuación de la rodante.....	62
Centro instantáneo de velocidad.....	63
Estado de aceleración en el movimiento plano.....	63
Polo de aceleraciones .....	64
Coordenadas del polo de aceleraciones.....	64
 Unidad 4 : D inám ica de la Partícula	
Principio de Inercia (1° Ley de Newton) .....	67
Principio de masa (2° Ley de Newton).....	67
Principio de Acción y Reacción (3° Ley de Newton).....	67
Principio de independencia de acción de fuerzas.....	67
Movimiento unidimensional de la partícula .....	68
Fuerza dependiente del tiempo .....	69
Fuerza dependiente de la velocidad.....	70
Fuerza dependiente de la Posición.....	70
Definición de energía potencial.....	70
Curvas de potencial.....	71
Estados de Equilibrio.....	72
Movimiento Curvilíneo de la Partícula.....	74
Cantidad de movimiento.....	75
Momento cinético .....	76
Teorema del Momento cinético .....	76
Vínculos o Ligaduras.....	77
Reacciones de vínculos.....	78
Vínculos Rugosos.....	79
Movimiento sobre una curva lisa.....	79
Movimiento sobre una superficie lisa.....	80

Dinámica Relativa de la Partícula.....	80
Principio de D'Alembert.....	81
Unidad 5: Dinámica de los Sistemas de Partículas	
Masa del sistema.....	83
Cantidad de movimiento.....	84
Conservación de la cantidad de movimiento.....	85
Momento cinético.....	86
Conservación del momento cinético.....	86
Trabajo y Energía.....	87
Dinámica del Sólido Rígido	
Masa del sólido rígido.....	89
Cantidad de movimiento.....	89
Momento cinético.....	90
Momento y productos de inercia.....	91
Conservación del momento cinético.....	93
Diagonalización del tensor de Inercia.....	94
Momento cinético.....	95
Teorema de los ejes paralelos.....	95
Dinámica relativa del sólido	
Cantidad de movimiento.....	96
Momento cinético.....	97
Reacciones dinámicas de un sólido en rotación.....	98
Equilibrio dinámico.....	100
Movimiento de un sólido con un punto fijo.....	100
Movimiento de un sólido por Inercia.....	101
Unidad 6: Sistemas vibratorios de un grado de libertad	
Fuerza recuperadora elástica.....	105
Modelación dinámica.....	105
Deformación de sistemas elásticos.....	106
Combinación de constantes elásticas.....	109
Estudio de Vibraciones Mecánicas Armónicas.....	110
Vibraciones armónicas libres no amortiguadas.....	111
Oscilador Armónico Torsional Libre.....	112
Oscilaciones con influencia del peso.....	112
Métodos energéticos.....	113
Vibraciones Armónicas amortiguadas.....	114
Vibraciones Subamortiguadas.....	115
Vibraciones Sobreamortiguadas.....	116
Vibración Críticamente Amortiguada.....	116
Factor o grado de amortiguamiento.....	117
Decremento Logarítmico.....	117
Vibraciones Armónicas Forzadas.....	118
Vibraciones Forzadas sin Amortiguamiento.....	119
Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento.....	120
Representación fasorial.....	124
Vibración armónica Libre.....	124
Vibración forzada no amortiguada.....	124
Vibración Forzada con Amortiguamiento.....	125

Desbalance rotatorio .....	126
Movimiento del soporte .....	127
Aislamiento Vibratorio .....	130
Unidad 7: Oscilaciones de dos o más Grados de Libertad	
Modos normales de vibración.....	133
Valores y vectores propios .....	137
Vibración armónica forzada .....	138
Amortiguador de vibraciones .....	139
Unidad 8: Mecánica analítica	
Principio de los desplazamientos virtuales.....	141
Trabajos virtuales.....	141
Ecuación general de la dinámica.....	142
Coordenadas generalizadas.....	142
Fuerzas Generalizadas .....	143
Ecuaciones de Lagrange .....	144
Dinámica impulsiva .....	145
Índice Alfabético.....	147
Bibliografía.....	149



## Unidad 1: Álgebra Tensorial

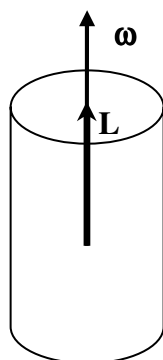
### Introducción

Se estudiará en esta unidad el álgebra de las *funciones vectoriales lineales*, o *tensores*, instrumentos matemáticos que serán utilizados para el estudio de la dinámica de los sólidos.

Para introducir el concepto de tensor se partirá de un ejemplo: se sabe que cuando un sólido gira alrededor de un eje de simetría, el vector momento angular  $\mathbf{L}$  tiene la misma dirección que el vector velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , y la relación entre ambos está dada por:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

donde  $I$  representa el momento de inercia del sólido respecto del eje de rotación.



Por ejemplo, consideremos el caso de un sólido cilíndrico que rota sobre su eje.

En este caso,  $I =$  Momento de inercia del cuerpo respecto del eje de rotación.

En el dibujo se destaca la colinealidad entre el momento angular y la velocidad angular.

La colinealidad entre los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  no se verifica en general, sino que se trata de un caso particular, con las condiciones mencionadas.

A continuación se analiza un caso general.

En la figura de la derecha, se muestra un sólido no regular que rota sobre un eje cualquiera, y se representa un caso general en que no existe colinealidad entre los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ .

Sabemos, sin embargo, la íntima relación entre estas magnitudes y, por otra parte, se puede verificar que a cada vector  $\boldsymbol{\omega}$  le corresponde un vector  $\mathbf{L}$  perfectamente definido.

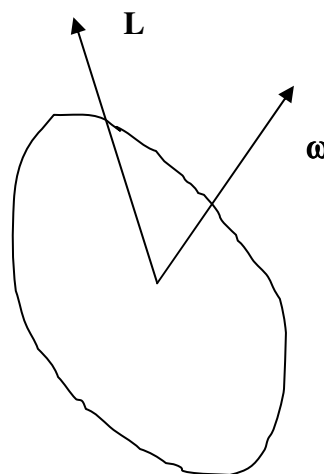
Podemos pensar entonces en una operación lineal tal que realizada sobre  $\boldsymbol{\omega}$  da por resultado  $\mathbf{L}$ . Esto puede representarse mediante la siguiente ecuación operacional:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}$$

$[\mathbf{I}]$  representa el operador, que “transforma” a  $\boldsymbol{\omega}$  en  $\mathbf{L}$ .

Se verá que  $[\mathbf{I}]$  se representa por medio de una matriz de  $3 \times 3$ , y cada componente de esa matriz depende de la forma en que está distribuida la masa del sólido, y del sistema referencial en que se expresa.

De la ecuación operacional  $\mathbf{L} = [\mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}$  podemos “despejar”  $[\mathbf{I}] = \mathbf{L} / \boldsymbol{\omega}$ . Esta operación (el cociente entre dos vectores) no es factible de realizar y la indicamos al solo efecto de introducir el siguiente razonamiento: el cociente entre dos cantidades puede ser de tipo diferente y “más complicado” que el de estas; por ejemplo, el cociente de dos enteros puede ser un número racional. De modo análogo, el cociente entre vectores no es un vector. No es extraño entonces que  $[\mathbf{I}]$  sea una magnitud de un nuevo tipo: un *tensor de segundo orden*. Este tensor se denomina *tensor de inercia*.



Otro ejemplo de tensor es el tensor producto tensorial de dos vectores. Dados los vectores  $\mathbf{a}:[a_1, a_2, a_3]$ , y  $\mathbf{b}:[b_1, b_2, b_3]$ , se define el producto tensorial  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

Aquí se ha *representado* el tensor producto tensorial en forma matricial. No debe confundirse la representación del tensor con el tensor mismo, se verá que, en distintos sistemas referenciales, el tensor adoptará distintas representaciones.

### Representación con subíndices

Si bien se trabajará con la representación matricial, los tensores también se pueden representar utilizando subíndices, así, el tensor producto tensorial se puede representar como  $a_i b_j = [a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_3 b_2, a_3 b_3]$ .

Para indicar en forma compacta sumatorias de términos, se adopta la siguiente convención: “Cuando en una expresión monomía, figuran dos índices repetidos, se entenderá que se trata de una suma en la que los índices repetidos van sumados de 1 a la dimensión en que se está trabajando”.

Por ejemplo:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$a_i b_j c_i = \sum_{i=1}^n a_i b_j c_i = a_1 b_j c_1 + a_2 b_j c_2 + \dots + a_n b_j c_n$$

### Transformación de coordenadas

Las componentes  $a_i b_j$  son las componentes del tensor en el sistema referencial en el cual se representan los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . En un sistema referencial distinto, ligado al primero por la matriz de transformación o de cambio de base  $[M]$ , las componentes de tensor serán distintas, es decir, la representación del tensor será distinta.

Con convención de subíndices la transformación de un vector se escribe:

$$a'_m = h_{mi} a_i$$

donde  $h_{mi}$  son los elementos de la matriz de transformación.

Los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se transforman en el nuevo sistema referencial utilizando la matriz de transformación:

$$\mathbf{a}' = [M]\mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = [M]\mathbf{b}$$

Se entiende que en las operaciones indicadas los vectores se escriben como columnas, para realizar la aplicación de la matriz de transformación a los mismos.

En la nueva base, se realiza el producto tensorial:

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

Los elementos del tensor producto tensorial  $[a \otimes b]$  se transforman como sigue:

$$[a' \otimes b'] = h_{mi} a_i h_{mj} b_j$$

Utilizando el álgebra matricial puede transformarse el tensor de un sistema referencial a otro utilizando la matriz de cambio de base  $[M]$ :

$$a' \otimes b' = [M][a \otimes b][M]^T$$

donde  $[M]^T$  indica la transposición de la matriz de cambio de base, equivalente a la inversión cuando las matrices son ortonormales.

### Generalización del concepto de tensor

Los tensores son entes matemáticos que pueden representar propiedades o características de cuerpos o materiales. Además del tensor de inercia, podemos mencionar el tensor de tensiones, cuyos elementos son tensiones normales y tensiones tangenciales, y que representa el estado tensional de un sólido.

Ante una transformación de coordenadas puede cambiar la representación del tensor, el cual conservará propiedades que no cambian cuando se cambia el sistema referencial. Se puede generalizar el concepto de tensor, diciendo que  $t_{mn}$  elementos constituyen un tensor si las componentes del mismo en dos sistemas referenciales distintos están ligados por:

$$t'_{mn} = h_{mi} h_{nj} t_{ij}$$

Cuya notación en forma matricial es:

$$[t'] = [M][t][M]^T$$

### Orden de los tensores

Los tensores hasta aquí presentados a modo de ejemplo son tensores de segundo orden y su representación se realiza mediante matrices. Los escalares son tensores de orden 0, en tanto que los vectores son tensores de orden 1.

El número de componentes de un tensor se determina elevando la dimensión del espacio de representación del tensor al orden del tensor. Llamando  $n$  a la dimensión del espacio, y  $p$  al orden del tensor, resulta:

$$\text{nº de componentes} = n^p$$

En esta asignatura se utilizarán tensores de orden 2, específicamente, el tensor de inercia, para representar características de un sólido ligadas a la forma en que está distribuida su masa.

### Propiedades de los tensores:

Un tensor posee propiedades independientes del sistema de representación, denominadas invariantes.

Ejemplos de invariantes:

1. Dado el tensor de orden 0 o escalar, el mismo no cambia en distintos sistemas referenciales.
2. Dado el tensor de primer orden o vector,  $a = [a_1, a_2, a_3]$

El módulo de **a** es un invariante ante cambios de coordenadas.

Dados los vectores **a** y **b**

El producto escalar de los mismos es un invariante.

El ángulo entre los mismos es un invariante.

En general, las operaciones entre invariantes de tensores da nuevos invariantes.

3. Para un tensor de segundo orden distinguimos los siguientes invariantes:

Dado el tensor [t], y su representación en dos sistemas referenciales:

$$[t]= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad [t']= \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos distinguir los siguientes invariantes.

1. La suma de los componentes de la diagonal  $t_{11}+t_{22}+t_{33} = t'_{11}+t'_{22}+t'_{33}=k$
2. Dado un tensor de segundo orden, del mismo se puede deducir un tensor de primer orden o vector:  $\mathbf{v} = [(t_{23}-t_{32}), (t_{31}-t_{13}), (t_{12}-t_{21})]$ . Es evidente que en el caso de tensores simétricos, este vector será nulo.
3. A un tensor de segundo orden le corresponde un escalar invariante dado por su determinante,  $k = \text{Det}[T]$

Ejemplos de invariantes de tensores de segundo orden

#### 1. Tensor producto tensorial

Dados los vectores **a** y **b**, su producto tensorial es:  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$

Los invariantes son:

- a. Invariante escalar =  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (producto escalar entre **a** y **b**)
- b. El vector  $\mathbf{v} = [(a_2 b_3 - a_3 b_2), (a_3 b_1 - a_1 b_3), (a_1 b_2 - a_2 b_1)]$  es el producto vectorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .
- c. El tensor derivado:

Dado el campo vectorial  $\mathbf{B}(x,y,z)=[B_1(x_1,x_2,x_3), B_2(x_1,x_2,x_3), B_3(x_1,x_2,x_3)]$ , siendo las  $B_i(x,y,z)$  continuas y derivables, las nueve derivadas parciales constituyen un tensor, denominado *tensor derivado*:

$$\frac{\partial(B_1, B_2, B_3)}{\partial(x_1, B_2, B_3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} & \frac{\partial B_2}{\partial x_2} & \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_1} & \frac{\partial B_3}{\partial x_2} & \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

En este tensor los invariantes son:

- a. Invariante escalar:

La suma de los elementos de la diagonal constituyen la divergencia de **B**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}$$

b. Invariante vectorial:

El vector  $\left[ \left( \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \right), \left( \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right), \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) \right]$  es el rotor de  $\mathbf{B}$ .

### Operaciones con tensores:

1. Adición y sustracción: esta operación está definida para tensores del mismo orden, dados dos tensores  $t_{mn}$  y  $u_{mn}$ , su suma es otro tensor  $s_{mn}$  cuyas componentes son las sumas de las componentes del mismo subíndice:  $s_{mn} = t_{mn} + u_{mn}$ . En forma matricial:  $[s] = [t] + [u]$ .

2. Multiplicación por un escalar: se define la multiplicación de un tensor por un escalar, al nuevo tensor que resulta de multiplicar cada componente del tensor por dicho escalar:  $s_{mn} = k t_{mn}$ , o  $[s] = k [t]$

3. Producto tensorial: el producto de un tensor de orden  $p$  por otro de orden  $q$ , da por resultado un tensor de orden  $p+q$ , cuyas componentes son el producto de las componentes del primero por las componentes del segundo.

### Tensores simétricos y antisimétricos:

Un tensor de segundo orden es simétrico si  $t_{ij} = t_{ji}$ , y es antisimétrico si  $t_{ij} = -t_{ji}$ . Las propiedades de simetría y antisimetría son independientes del sistema referencial. Todo tensor puede expresarse como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico:

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) + \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})$$

$$\text{En forma matricial: } [T] = \frac{1}{2} ([T] + [T]^T) + \frac{1}{2} ([T] - [T]^T).$$

### Diagonalización de un tensor

En esta sección se trabajará con la diagonalización de un tensor, es decir, dado un tensor se buscará la manera de encontrar un sistema referencial en el cual su representación sea diagonalizada. Esta operación implica la determinación de los vectores y valores característicos (autovectores y autovalores) de la matriz que representa al tensor.

Se considera una transformación lineal de la forma  $a'_m = h_{mi} \cdot a_i$ , que en forma matricial se indica  $[v']^T = [H][v]^T$  donde  $[H]$  es la matriz de transformación.

Se buscarán ahora vectores tales que al aplicarles el operador  $[H]$ , se transforman en vectores colineales. Significa esto que el vector transformado es múltiplo escalar del vector dado,  $v' = \lambda v$

$$[H][v]^T = \lambda [v]^T = \lambda [1][v]^T \quad [1] : \text{Matriz identidad}$$

que puede reescribirse:

$$[H][v]^T - \lambda [1][v]^T = ([H] - \lambda [1]) [v]^T = 0$$

Desarrollando los productos, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (h_{11} - \lambda)v_1 + h_{12}v_2 + h_{13}v_3 = 0 \\ h_{21}v_1 + (h_{22} - \lambda)v_2 + h_{23}v_3 = 0 \\ h_{31}v_1 + h_{32}v_2 + (h_{33} - \lambda)v_3 = 0 \end{cases}$$

Siendo este sistema homogéneo tendrá soluciones no triviales si el determinante de los coeficientes es nulo, o sea:

$$\begin{vmatrix} (h_{11} - \lambda) & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & (h_{22} - \lambda) & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & (h_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver el determinante, queda un polinomio de tercer grado:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + C\lambda + D = 0$$

Esta ecuación se denomina *ecuación característica* y sus raíces,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  se denominan *valores característicos, autovalores* o *eigenvalues*.

Reemplazando en el sistema de ecuaciones los autovalores (de a uno por vez), se obtienen los vectores  $\mathbf{v}_1 (v_{11}, v_{12}, v_{13}), \mathbf{v}_2 (v_{21}, v_{22}, v_{23}), \mathbf{v}_3 (v_{31}, v_{32}, v_{33})$  denominados *vectores característicos, vectores propios, autovectores* o *eigenectores*.

Se verifican los siguientes corolarios y teoremas:

- a. Los autovalores de una matriz de componentes real y simétrica son reales.
- b. Un autovector no puede corresponder a dos autovalores distintos.
- c. Si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  son autovectores que corresponden a valores propios distintos, entonces son linealmente independientes.
- d. Si  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  son autovectores que corresponden a los autovalores  $\lambda_i, \lambda_j$  de una matriz simétrica real, entonces son ortogonales.

### Diagonalización de una matriz simétrica real.

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  autovalores de  $[A]$ , matriz real y simétrica que representa a un tensor en un sistema referencial ortogonal y  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , los autovectores correspondientes a los  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Dividiendo cada autovector por su módulo, y ordenándolos en forma adecuada, se forma con ellos una base ortogonal directa. Se forma la matriz  $[M]$ , tal que sus filas sean los autovectores divididos por su módulo:

$$[M] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \quad [M]: \text{Matriz Modal}$$

Esta matriz  $[M]$  es la matriz de transformación que liga el referencial original con un sistema referencial cuya base son los autovectores.

Premultiplicando  $[A]$  por  $[M]$ , y postmultiplicándolo por  $[M]^T$ , resulta una matriz diagonal, siendo los elementos de la diagonal los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

$$[M][A][M]^T = [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz diagonal es la representación del tensor en el referencial cuya base son los autovectores.

## Casos particulares

Los tensores simétricos pueden ponerse en forma diagonalizada mediante una transformación ortogonal apropiada. Los elementos de la diagonal son únicos, aunque pueden no aparecer en el mismo orden en la diagonal de la matriz. Los ejes del sistema referencial en el cual el tensor tiene representación diagonalizada se denominan ejes principales. Si los autovalores son distintos estos ejes son únicos y ortogonales.

Como casos particulares pueden aparecer autovalores iguales. Si aparecen dos autovalores iguales se dice que el autovalor es doblemente degenerado, si los tres autovalores son iguales, el mismo es triplemente degenerado.

En el caso de triple degeneración el tensor tiene la misma representación en todo sistema referencial, y cualquier eje es eje principal. Como ejemplo, el tensor de inercia de una esfera de densidad uniforme es diagonalizado en todo sistema referencial cuyo origen es el centro de la esfera y cualquier eje que pase por su centro es un eje principal de inercia.

En el caso de doble degeneración, el eje principal asociado al autovalor distinto es único, y perpendicular a un plano. Cualquier eje que esté contenido en este plano y corte al eje principal único es eje principal.

## Forma cuadrática asociada

Se llama Forma cuadrática a una expresión de segundo grado en “n” variables. Por ejemplo, para  $n = 3$ ,  $Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{21}x_2x_1 + a_{33}x_3^2$ .

La forma cuadrática en  $x_i$  puede ser expresada en forma matricial:

$$Q[x] = [x][A][x]^T$$
$$[x] = [x_1, x_2, x_3], \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Si la matriz  $[A]$  es la representación de un tensor,  $Q[x] = [x][A][x]^T$  es la *forma cuadrática asociada al tensor*.

La *cuadrática asociada* a un tensor es un invariante ante cambios de sistemas referenciales. En particular, para un sistema referencial cuya base asociada son los autovectores la representación del tensor será diagonal, y la forma cuadrática se reduce a:

$$Q[x] = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

Definiendo la siguiente operación:

$$[x][A][x]^T = 1$$

y considerando que  $[A]$  es un tensor simétrico de segundo orden, se obtiene:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 1$$

Se trata de una ecuación de segundo grado que define una superficie de segundo orden en el espacio tridimensional. Como no tiene términos lineales se trata de un elipsoide o un hiperboloide de una o dos hojas. Esta superficie se denomina superficie característica o cuádrica característica, y permite representar un tensor en forma gráfica.

En el sistema referencial para el cual el tensor es diagonalizado, la forma cuadrática se reduce a:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

En el caso del tensor de inercia, dado que los autovalores son momentos de inercia, siempre positivos, la cuádrica es siempre un elipsoide, que en el caso de doble degeneración es un elipsoide de revolución, y en el caso de triple degeneración es una esfera.

### Operadores lineales

Se considera la siguiente operación:  $\mathbf{c} = [\mathbf{A}] \mathbf{b}$

Donde  $[\mathbf{A}]$  es una matriz,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores. En esta operación la matriz puede ser considerada como una transformación lineal, o bien como un operador lineal, que al vector  $\mathbf{b}$  le hace corresponder el vector  $\mathbf{c}$ .

### Anexo

#### El tensor de Inercia

Se estudiará un ejemplo de tensor: el tensor de Inercia. Este tensor de segundo orden resume las características de un sólido, relativas a la cantidad de masa que posee, y a la forma en que ésta está distribuida. Su importancia para esta asignatura radica en la utilización del mismo en el estudio de la dinámica de rotación de los sólidos.

Los componentes del tensor de inercia de un sólido referido a un sistema referencial “xyz”, son los momentos de inercia del sólido respecto de los ejes, elementos que se encuentran en la diagonal, y los productos de inercia.

$$\text{Tensor de inercia: } [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde:  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  son los momentos de inercia,  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$ ,  $I_{yz} = I_{zy}$  son los productos de inercia.

Estos momentos y productos de inercia, para distribuciones continuas de masa, se calculan de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho[x, y, z] dV$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho[x, y, z] dV$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho[x, y, z] dV$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \iiint_V xy \rho[x, y, z] dV$$



$$I_{xz} = I_{zx} = - \iiint_V xz \rho[x, y, z] dV$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \iiint_V yz \rho[x, y, z] dV$$

En estas definiciones para los momentos y productos de inercia, se tiene.

$$\rho[x, y, z] = \text{densidad de masa} \quad V = \text{volumen ocupado por el sólido}$$

$x, y, z$  son las coordenadas en el sistema “xyz” del elemento de volumen “dV”

$$\rho[x, y, z] dV \text{ es la masa (dm) del elemento de volumen “dV”}$$

Para sistemas formados por  $m_i$  masas puntuales, las definiciones para los momentos de inercia son las siguientes:

$$I_{xx} = \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i$$

$$I_{yy} = \sum (x_i^2 + z_i^2) m_i$$

$$I_{zz} = \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum (x_i y_i) m_i$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \sum (x_i z_i) m_i$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \sum (y_i z_i) m_i$$

Donde  $x_i, y_i, z_i$  son las coordenadas en el sistema “xyz” de la masa puntual  $m_i$ .

En base a las definiciones de los elementos que componen el tensor de inercia, se puede afirmar que el tensor de inercia es simétrico, y sus coeficientes son números reales.

### El tensor de inercia y la transformación de coordenadas

Sea el tensor de inercia  $[I]$ , referido a un sistema referencial “xyz”. Si se considera un sistema referencial  $x'y'z'$ , rotado respecto del primero, el tensor de inercia  $[I]$  referido a este sistema referencial es el mismo, pero su representación cambiará. Significa esto que las componentes del tensor tendrán valores distintos. La relación entre ambas representaciones del tensor se obtienen mediante las ecuaciones de transformación:

$$[I]' = [R][I][R]^T$$

Donde  $[R]$  es la matriz modal o matriz de cambio de base, que relaciona representaciones en xyz con representaciones en  $x'y'z'$ .

Para cada tensor de inercia existe por lo menos un sistema referencial en el cual la representación de la matriz es diagonalizada. Para determinar estas direcciones puede utilizar el procedimiento descrito en la sección correspondiente, las direcciones que coinciden con las de ese sistema referencial se denominan ejes principales de inercia.

Ejemplos: para un sólido cilíndrico de densidad de masa uniforme, el tensor de inercia referido a cualquier sistema referencial de ejes ortogonales tal que su origen esté ubicado

en el centro de gravedad, y tenga un eje coincidente con el eje del cilindro, es diagonalizado.

### **El tensor de inercia como operador lineal**

Para un sólido en rotación, el momento angular del mismo puede obtenerse aplicando como un operador lineal el tensor de inercia al vector velocidad angular.

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}$$

Si  $\boldsymbol{\omega}$  tiene la dirección de un eje principal de inercia, es un autovector del operador, es decir, para este caso  $\mathbf{L}$  será colineal con  $\boldsymbol{\omega}$

Según lo visto en Física 1, la variación del momento angular de un cuerpo, expresada como su derivada respecto del tiempo, es igual al torque o momento externo que actúa sobre el cuerpo.

## Unidad 2: Cinemática de la Partícula

### Conceptos generales:

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos con prescindencia de las causas que lo producen. Describe la posición, la velocidad, la aceleración y la trayectoria que puede tener un cuerpo, sin considerar las fuerzas que lo ocasionan.

En esta unidad se describirá el movimiento de partículas puntuales, sin dimensiones ni estructura interna. Partícula o punto es una abstracción que permite simplificar el estudio del movimiento y desarrollar sus conceptos fundamentales. En determinadas circunstancias y condiciones algunos sistemas mecánicos se pueden abordar razonable y suficientemente, considerándolos como “puntuales”.

Para estudiar el movimiento resulta indispensable adoptar sistemas de referencia convenientes. Así, se tienen los Sistemas de Referencia “Fijos” o “Absolutos” y sistemas de Referencia móviles o “Relativos”.

### Vector de Posición, Velocidad y Aceleración

El *Vector de posición* de la partícula P, respecto del sistema fijo “O” es  $\mathbf{r}(t)$ , función vectorial que depende del tiempo. El Vector de posición tendrá siempre su origen coincidente con el origen del sistema fijo, en tanto que el otro extremo coincidirá o seguirá la posición de la partícula.

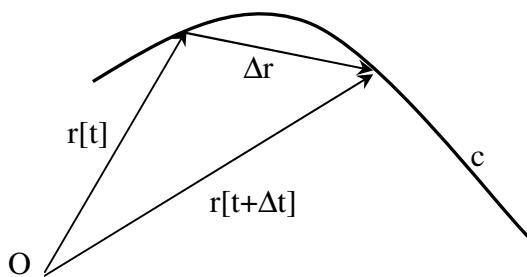
La trayectoria de un móvil es la curva alabeada  $c$  descrita paramétricamente por la función  $\mathbf{r}(t)$ .

Existen muchos tipos de movimientos diferentes, incluso sobre una misma trayectoria.

Estos se distinguen por el ritmo con que cambia el vector de posición al transcurrir el tiempo.

Se ve en la figura la partícula en dos instantes diferentes, “ $t$ ” y poco tiempo después, “ $t + \Delta t$ ”. Durante ese intervalo de tiempo, la posición pasa de ser descrita por el vector  $\mathbf{r}[t]$ , al vector  $\mathbf{r}[t+\Delta t]$

En el dibujo se han omitido los ejes del sistema referencial.



El cambio de posición que ha experimentado la partícula, está dado por el vector desplazamiento  $\Delta \mathbf{r}$ :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}[t+\Delta t] - \mathbf{r}[t]$$

Generalmente, este vector no coincide con la trayectoria, salvo el caso particular del movimiento rectilíneo.

La velocidad, o ritmo con que cambia o se modifica el vector posición, es la derivada del vector posición respecto del tiempo, límite del cociente incremental  $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$  cuando el incremento “ $\Delta t$ ” tiende a cero:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}[t + \Delta t] - \mathbf{r}[t]}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}[t]}{dt}$$

En el límite, cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez cada vez más pequeño, el vector  $\Delta \mathbf{r}$  se aproxima a la trayectoria y el vector velocidad queda tangente a la misma.

Este *vector velocidad* dependiente del tiempo se indicará de la siguiente manera:

$$v(t) = \frac{dr_{(t)}}{dt} = \dot{r}_{(t)} = \lim_{\Delta t} \frac{r_{(t+\Delta t)} - r_{(t)}}{\Delta t}$$

Siendo  $\mathbf{r}(t)$  el vector de posición referido a un sistema fijo, la velocidad  $\mathbf{v}(t)$  definida es la **velocidad absoluta**, y es independiente del origen “O” considerado.

La *aceleración* se define como:

$$a(t) = \frac{dv_{(t)}}{dt} = \frac{d^2 r_{(t)}}{dt^2} = \ddot{r}_{(t)} = \lim_{\Delta t} \frac{v_{(t+\Delta t)} - v_{(t)}}{\Delta t}$$

Podemos entender a la aceleración como la causa de los cambios en la velocidad. Más adelante se verá que el cambio en el módulo del vector velocidad se deben a una componente de la aceleración denominada aceleración tangencial, en tanto que los cambios en la dirección se deben a la aceleración normal.

Interesa analizar  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$  para los sistemas de coordenadas más usuales o prácticos: cartesianas, cilíndricas, esféricas, intrínsecas. Para cada uno de estos sistemas de coordenadas se define una base en la cual se expresan los vectores. Para más detalles acerca de los sistemas referenciales y los versores que conforman sus bases, consultar el Anexo 1, y la bibliografía recomendada.

### En coordenadas cartesianas:

Se toma un sistema de coordenadas xyz, de base ortonormal  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , con origen en el punto fijo “O”. El vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  tomará la forma:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

La velocidad es:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k}$$

La aceleración resulta:

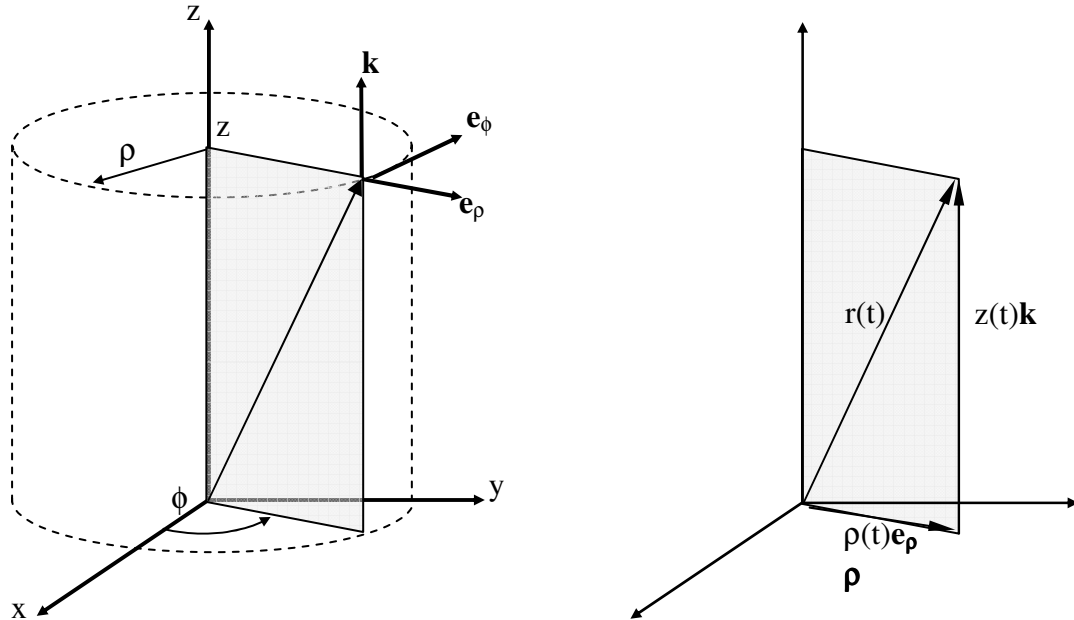
$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} + \ddot{z}(t) \mathbf{k}$$

Nota: se considera el referencial de coordenadas cartesianas como fijo, es decir, que los versores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  no varían en el tiempo y tienen derivada nula.

**En coordenadas cilíndricas:**

Se utilizan las coordenadas  $(\rho, \phi, z)$  y la base móvil ortonormal  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}\}$ .  
El vector de posición es:

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho + z(t) \mathbf{k}$$



La velocidad se obtiene derivando  $\mathbf{r}(t)$  respecto del tiempo. Al realizar esta derivada, se tiene en cuenta que el vector de posición está referido a una base móvil, es decir, que los versores que la forman cambian su dirección en el tiempo.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{k}$$

En la ecuación anterior,  $\dot{\mathbf{e}}_\rho$  representa la derivada del versor  $\mathbf{e}_\rho$  respecto del tiempo.

Siendo:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\phi) \mathbf{j}, \text{ y } \mathbf{e}_\phi = -\sin(\phi) \mathbf{i} + \cos(\phi) \mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\phi} (-\sin(\phi) \mathbf{i} + \cos(\phi) \mathbf{j}) = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

Es decir, que la derivada del versor  $\mathbf{e}_\rho$  respecto del tiempo tiene la dirección de  $\mathbf{e}_\phi$ .

Utilizando esta relación se reformula  $\mathbf{v}(t)$ :

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{k}$$

En la descripción de la velocidad en coordenadas cilíndricas aparecen tres componentes:

$\dot{\rho}$ , componente de la velocidad en la dirección de  $\mathbf{e}_\rho$ , será distinto de cero cuando el movimiento sea tal que  $\rho$  varíe en el tiempo.

$\rho \dot{\phi}$  es la componente de la velocidad en la dirección de  $\mathbf{e}_\phi$ , y

- $z$  la componente de la velocidad en la dirección de  $\mathbf{k}$ .

Se remarca que, en un caso general de movimiento en el espacio, el vector velocidad  $\mathbf{v}(t)$  siempre tiene la dirección de la tangente a la trayectoria.  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}\}$  forman un triedro ortogonal, cuya orientación cambia “acompañando” al móvil.

Un caso particular es el movimiento circular, si el sistema de coordenadas se elige de manera tal que su origen coincide con el centro de la circunferencia descrita por el móvil, y el eje  $z$  tal que resulte perpendicular al plano en que se realice el movimiento, resultarán

$z = 0$  y  $\rho = \text{constante} = \text{radio de la circunferencia}$ ;  $\dot{\rho} = \dot{z} = 0$ ;  $\dot{\phi} = \omega$  (velocidad angular);

$\rho \omega = \text{velocidad tangencial (v}_T\text{)}$ . La expresión de la velocidad será:

$$\mathbf{v}(t) = \rho \omega \mathbf{e}_\phi = v_T \mathbf{e}_\phi$$

$v_T$  es la conocida velocidad tangencial del movimiento circular.

$$\text{La aceleración es: } \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\mathbf{e}}_\phi + z \ddot{\mathbf{k}}$$

Siendo  $\mathbf{e}_\phi = -\text{Sen}(\phi) \mathbf{i} + \text{Cos}(\phi) \mathbf{j}$ , será  $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi} (\text{Cos}(\phi) \mathbf{i} + \text{Sen}(\phi) \mathbf{j}) = -\dot{\phi} \mathbf{e}_\rho$

Agrupando términos:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + z \ddot{\mathbf{k}}$$

Se analizarán a continuación los distintos componentes de la expresión de la aceleración en coordenadas cilíndricas:

### Componentes en $\mathbf{e}_\rho$ :

$\ddot{\rho}$ : Puede interpretarse como una aceleración radial.

$\rho \dot{\phi}^2$ : Es la causante del cambio de dirección de la componente de velocidad en  $\mathbf{e}_\phi$ . En el caso de un movimiento circular, es la aceleración centrípeta.

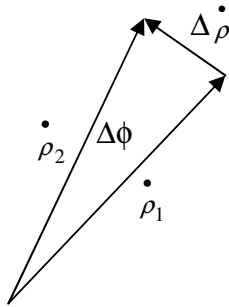
### Componentes en $\mathbf{e}_\phi$ :

$\rho \ddot{\phi}$ : Es originada por la variación de la velocidad angular con que rota el radio  $\rho$ . Si el movimiento es circular, es la aceleración tangencial.

$2\dot{\rho} \dot{\phi}$ : Es la aceleración complementaria ( $a_c$ ), aparece únicamente cuando tanto el radio  $\rho$  como el ángulo  $\phi$  varían en el tiempo. Proviene de dos contribuciones simultáneas

de igual valor  $\dot{\rho} \dot{\phi}$  pero de diferente origen:

1- Debido al cambio de dirección de  $\dot{\rho}$ . Suponiendo que el movimiento posee  $\dot{\rho} \neq 0$ , y de módulo constante. Si  $\dot{\phi} \neq 0$ , la dirección del vector  $\dot{\rho}$  cambia continuamente, como se muestra en la figura:



En la figura, se aprecia que:

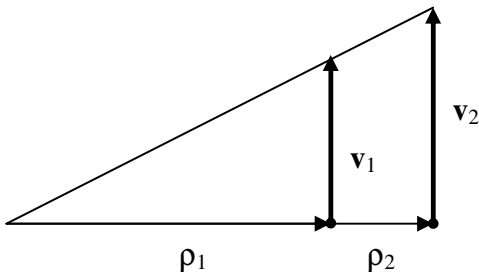
$$\Delta \dot{\rho} = \Delta \phi \dot{\rho}_1 = \Delta \phi \dot{\rho}_2 = \Delta \phi \dot{\rho}$$

Formando el cociente  $\frac{\Delta \dot{\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \dot{\rho}$

y en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$(1/2)a_c = \dot{\rho} \ddot{\phi} \quad a_c = \text{Aceleración complementaria}$$

2- Debido al desplazamiento sobre el radio: Suponiendo  $\dot{\phi} = \text{constante}$ , si  $\dot{\rho} \neq 0$ , el valor de  $\rho$  se modifica, lo que producirá un cambio en la componente de la velocidad en la dirección de  $e_\phi$



$$\Delta v = v_2 - v_1 = \dot{\phi} (\rho_2 - \rho_1)$$

Formando el cociente  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{\phi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t}$

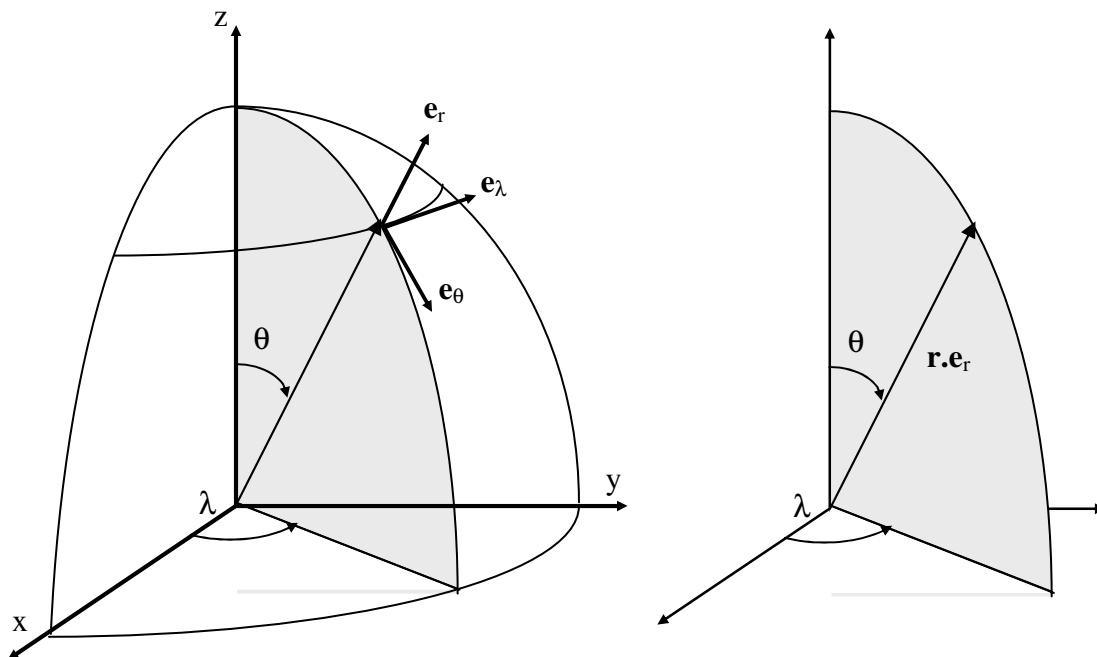
En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$   $b(1/2)a_c = \dot{\phi} \ddot{\rho}$

**En coordenadas esféricas:**

Se utilizan las coordenadas generalizadas esféricas  $\rho, \theta, \lambda$  y la base ortonormal  $\{e_r, e_\theta, e_\lambda\}$

El vector de posición se expresa en la base de coordenadas esféricas como:

$$r = r e_r$$



Para las coordenadas esféricas se cumplen las siguientes relaciones entre los versores de la base:

$$\mathbf{e}_r = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\lambda) \mathbf{i} + \text{Sen}(\theta) \text{Sen}(\lambda) \mathbf{j} + \text{Cos}(\theta) \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\lambda) \mathbf{i} + \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\lambda) \mathbf{j} - \text{Sen}(\theta) \mathbf{k} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \lambda} = -\text{Sen}(\theta)\text{Sen}(\lambda) \mathbf{i} + \text{Sen}(\theta) \text{Cos}(\lambda) \mathbf{j} = \text{Sen}(\theta) \mathbf{e}_\lambda$$

El vector velocidad en coordenadas esféricas resulta:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\lambda} \text{Sen}(\theta) \mathbf{e}_\lambda$$

En coordenadas esféricas, las curvas a  $r$  y  $\lambda$  constantes se denominan meridianos; las curvas a  $r$  y  $\theta$  constantes son los paralelos.

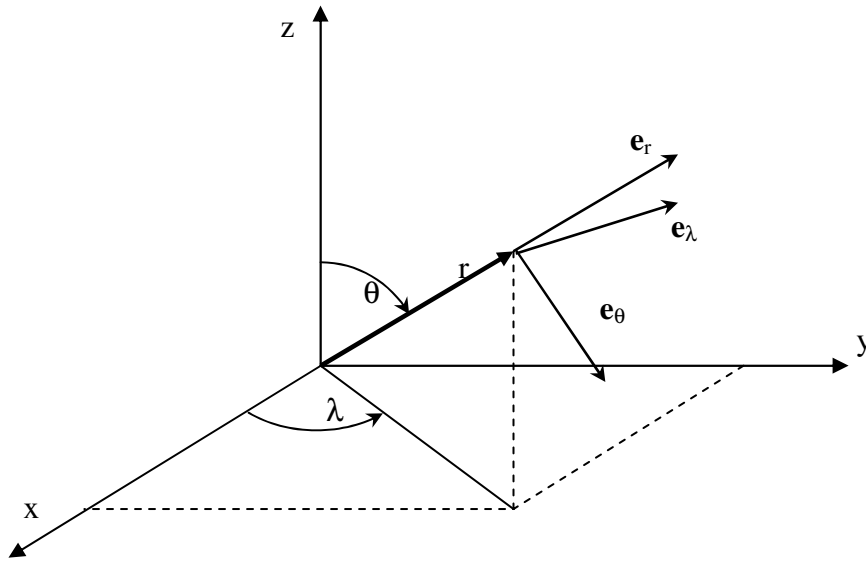
En la expresión de la velocidad, aparecen tres componentes:

- $\dot{r}$ : es la componente en la dirección del radio  $r$ . Será siempre nula en los movimientos con  $r$  constantes.

- $r \dot{\theta}$ : componente en la dirección de  $\mathbf{e}_\theta$ , tangente a un meridiano.

- $r \dot{\lambda}$ : componente en la dirección de  $\mathbf{e}_\lambda$ , tangente a un paralelo.





La aceleración resulta:

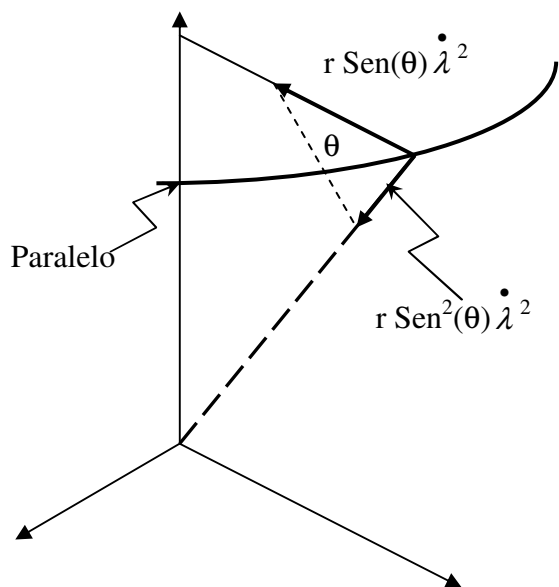
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \text{Sen}^2(\theta)\dot{\lambda}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\theta)\dot{\lambda}^2) \mathbf{e}_\theta + (r \text{Sen}(\theta)\ddot{\lambda} + 2\dot{r} \text{Sen}(\theta)\dot{\lambda} + 2r \text{Cos}(\theta)\dot{\theta}\dot{\lambda}) \mathbf{e}_\lambda$$

Las componentes en  $\mathbf{e}_r$ :

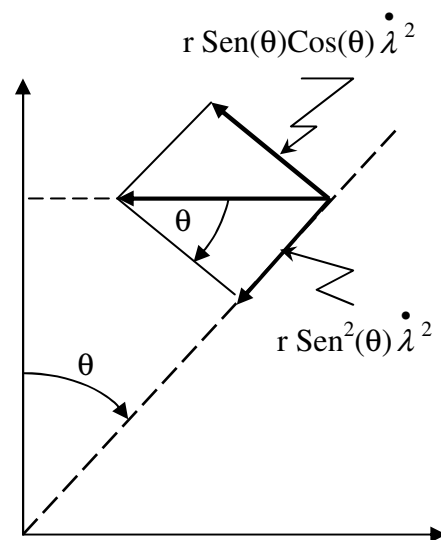
$\ddot{r}$ : Aceleración en la dirección radial, originada en el cambio de módulo de la componente de la velocidad en  $\mathbf{e}_r$ .

$r\dot{\theta}^2$ : Es una aceleración centrípeta debida a la rotación sobre el meridiano.

$r \text{Sen}^2(\theta)\dot{\lambda}^2$ : Proyección sobre  $\mathbf{e}_r$  de la aceleración centrípeta debido a la rotación sobre el paralelo.



Componentes en  $\mathbf{e}_\theta$



$r \ddot{\theta}$  : aceleración tangencial debida a rotación en meridiano.

$2 \dot{r} \dot{\theta}$  : Aceleración complementaria.

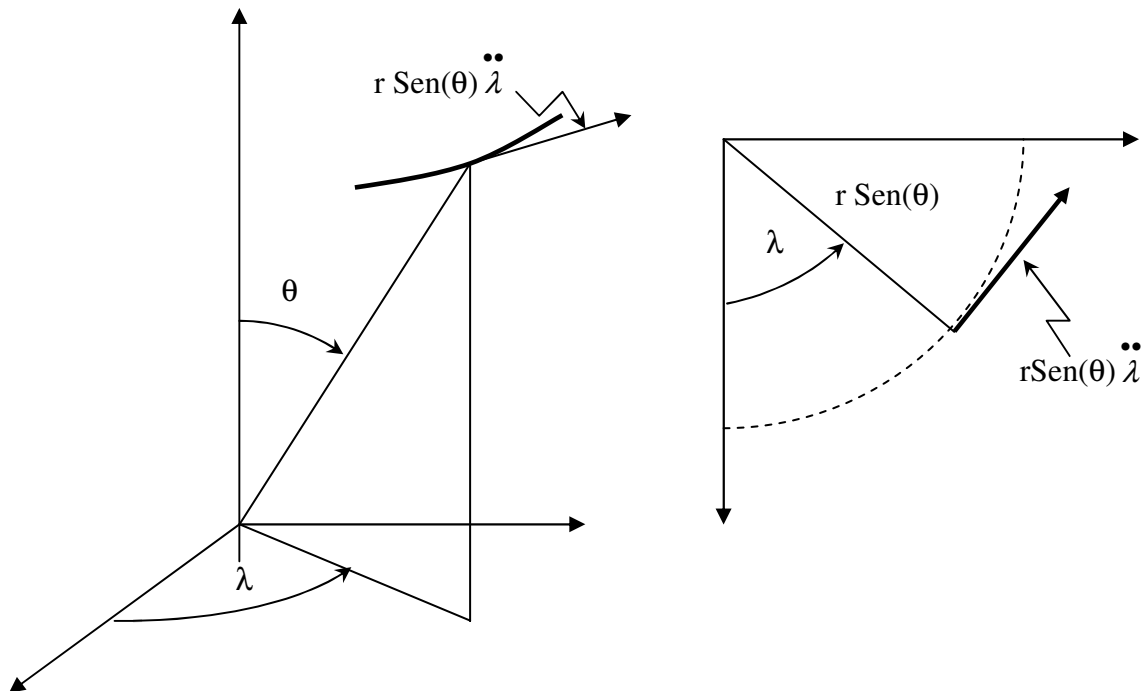
$r \text{Sen}(\theta) \text{Cos}(\theta) \dot{\lambda}^2$  : Proyección sobre la tangente al meridiano de la aceleración centrípeta, debida a la rotación sobre el paralelo.

Componentes en  $e_\lambda$ :

$r \text{Sen}(\theta) \ddot{\lambda}$  : Aceleración tangencial debido a rotación sobre el paralelo.

$2 \dot{r} \text{Sen}(\theta) \dot{\lambda}$  : Aceleración complementaria, proyección sobre el plano paralelo de la velocidad radial ( $\dot{r} \text{Sen}(\theta)$ ).

$2 r \text{Cos}(\theta) \dot{\theta} \dot{\lambda}$  : Aceleración complementaria en paralelo debido a la proyección sobre el plano paralelo de la velocidad tangencial en el meridiano ( $r \text{Cos}(\theta) \dot{\theta}$ ).



### En coordenadas intrínsecas

En las coordenadas intrínsecas o de trayectoria, la descripción del movimiento de la partícula se realiza en términos de componentes que son tangentes o perpendiculares a la trayectoria. Esto resulta particularmente útil cuando se conoce la curva que sigue la partícula, por ejemplo un automóvil que recorre un camino sinuoso.

El movimiento de una partícula sobre una curva en el espacio puede describirse en función de la coordenada generalizada  $q_1=s$ , la longitud de arco medida desde un punto de referencia.

El vector de posición se expresa en función de esta coordenada generalizada:

$$\mathbf{r}(s) = x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}$$

En esta expresión, “s” es depende del tiempo (a medida que transcurre el tiempo, el móvil se desplaza sobre su trayectoria, y la longitud del arco recorrido aumenta).

Para determinar la velocidad se aplica la regla de la cadena:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \dot{s} = \frac{dx(s)}{ds} \dot{s} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \dot{s} \mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds} \dot{s} \mathbf{k} = \dot{s} \left( \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{k} \right)$$

Siendo  $\left( \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{k} \right) = \mathbf{T}$ , el versor tangente ( $\mathbf{T}$  es tangente a la curva)

El vector velocidad resulta:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s} \mathbf{T}$$

Esta última ecuación refleja el hecho de que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, por lo tanto, tiene solamente componente en el versor tangente  $\mathbf{T}$ .  $\dot{s}$  es la rapidez o celeridad.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto del tiempo.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(s)}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{T} \frac{d\dot{s}}{dt}$$

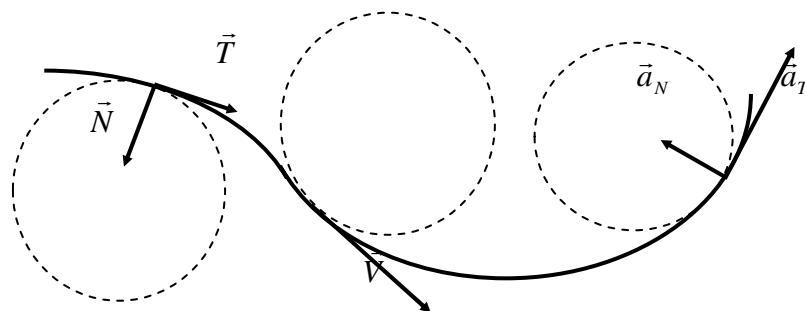
Siendo  $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}$ , donde  $\rho$  es el radio de curvatura (no debe ser confundido con

el radio  $\rho$  de coordenadas cilíndricas), la aceleración en coordenadas intrínsecas se puede expresar como:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(s)}{dt} \mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{N}$$

En coordenadas intrínsecas, aparecen dos componentes de la aceleración: la aceleración tangencial  $\frac{dv(s)}{dt}$ , responsable del cambio en el valor de la velocidad, y la aceleración normal  $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$  responsable del cambio de dirección de la velocidad.

En el dibujo de la derecha se muestra un movimiento curvilíneo que tiene lugar en un plano. Se muestran tres instantes diferentes del movimiento y en cada



uno de ellos el radio de curvatura y su correspondiente círculo osculador. También se muestran el versor normal y tangencial en el primer círculo oscilador. En el segundo círculo oscilador solo se muestra la velocidad y, por último, en el tercer círculo se indican las aceleraciones normal y tangencial.

Si bien la descripción de la velocidad y aceleración en función de la coordenada intrínseca “s” es sencilla, se debe tener en cuenta que los versores **T** y **N** cambian de dirección a medida que la partícula evoluciona en su movimiento, además, el radio de curvatura  $\rho$  se mide desde un centro de rotación cuya posición se modifica continuamente.

## Anexo 1

### Sistemas Referenciales

#### 1. Sistemas de coordenadas generalizadas

El número de coordenadas necesarias para describir un sistema es igual al número de grados de libertad que el mismo posee. Así, para determinar la posición de una partícula en el plano son necesarias dos coordenadas. Si bien por defecto se piensa en distancias medidas sobre ejes perpendiculares (Sistema de ejes cartesianos), este par de coordenadas puede tener cualquier dimensionalidad.

Se denomina sistema de coordenadas generalizadas a cualquier sistema de coordenadas que permita describir un sistema físico.

Un sistema que posee “n” grados de libertad, puede ser expresado por  $q_1, q_2, \dots, q_n$  coordenadas generalizadas. Casos particulares son las coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$q_1$	x	$\rho$	r
$q_2$	y	$\phi$	$\lambda$
$q_3$	z	z	$\theta$

Estas coordenadas generalizadas definen un espacio al que se denomina espacio de representación. En el caso de las coordenadas cartesianas, el espacio de representación es coincidente con el espacio físico o real.

Para los demás sistemas de coordenadas generalizadas, la relación entre los espacios se establece mediante relaciones, por ejemplo, para el espacio de tres dimensiones:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \quad [1] \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

#### Radio vector o Vector de Posición:

La ubicación de un punto en el espacio cartesiano viene dado por el radio vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

donde **r** es una combinación lineal de los versores bases.

Utilizando las relaciones [1], el radio vector en coordenadas generalizadas queda:

$$\mathbf{r} = x(q_1, q_2, q_3)\mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3)\mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3)\mathbf{k} \quad [2]$$

## Base de coordenadas generalizadas

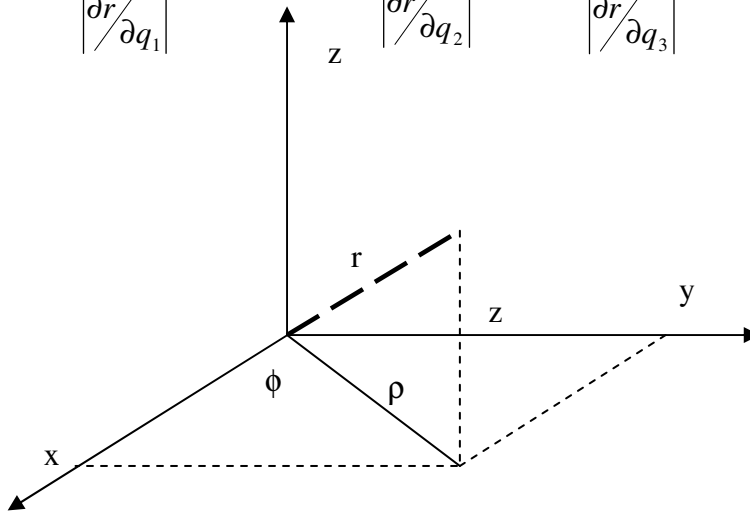
Partiendo del vector posición en coordenadas generalizadas, ecuación [2], derivando este vector posición respecto de las coordenadas generalizadas, se obtiene otro vector con los cuales se puede formar una base:

$$b_1 = \frac{\partial r}{\partial q_1}, \quad b_2 = \frac{\partial r}{\partial q_2}, \quad b_3 = \frac{\partial r}{\partial q_3} \quad [3]$$

Estos vectores no necesariamente son ortogonales, pero siempre cumplen la condición de no coplanaridad, lo que asegura que puedan formar una base para un espacio tridimensional.

Dividiendo por el módulo de cada vector, se obtiene una base de versores:

$$e_1 = \frac{\frac{\partial r}{\partial q_1}}{\left| \frac{\partial r}{\partial q_1} \right|}; \quad e_2 = \frac{\frac{\partial r}{\partial q_2}}{\left| \frac{\partial r}{\partial q_2} \right|}; \quad e_3 = \frac{\frac{\partial r}{\partial q_3}}{\left| \frac{\partial r}{\partial q_3} \right|} \quad [4]$$



## Coordenadas Cilíndricas

En este caso en el espacio de configuración se adoptan como coordenadas dos distancias y un ángulo:

$$q_1 = \rho \quad ; \quad q_2 = \phi \quad ; \quad q_3 = z$$

La interpretación de estas variables se muestra en la figura de la izquierda.

Las tres coordenadas independientes que definen la posición del punto son la proyección de  $r$  sobre el plano horizontal, el ángulo que forma esta proyección con el eje "x", y la altura "z".

Las relaciones entre coordenadas cilíndricas y cartesianas son:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \\ z = z \end{cases} \quad [5]$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{ArcTang}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Utilizando la base de coordenadas cartesianas, y las relaciones entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas, Los versores base del sistema referencial de coordenadas

cilíndricas se definen utilizando las ecuaciones [4]. Para ello, se escribe la ecuación del vector posición utilizando las relaciones [5]

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cos(\phi) \mathbf{i} + \rho \sin(\phi) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \rho}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial \rho \right|} = \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\phi) \mathbf{j} \quad [6]$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \phi}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial \phi \right|} = -\sin(\phi) \mathbf{i} + \cos(\phi) \mathbf{j} \quad [7]$$

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial k}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial k \right|} = \mathbf{k} \quad [8]$$

Se verifica que estos versores son perpendiculares entre si, y en la secuencia indicada definen una base directa.

Las componentes del vector posición en la base de coordenadas cilíndricas se obtienen realizando los productos escalares:

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) \cdot \mathbf{e}_\rho = \rho$$

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$$

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) \cdot \mathbf{e}_k = z$$

El vector posición en la base de coordenadas cilíndricas resulta:

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k} \quad [9]$$

Partiendo de las ecuaciones [6],[7] y [8], puede escribirse la matriz de cambio de base de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas. Para ello, se escriben los versores base de coordenadas cilíndricas como filas:

$$[\mathbf{M}]_{\text{cart} \rightarrow \text{cil}} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [10]$$

Aplicando esta matriz a vectores escritos en la base cartesiana, resulta el vector escrito en la base de coordenadas cilíndricas.

Si se compara esta matriz de cambio de base, se comprueba es igual a la matriz de rotación alrededor del eje z.

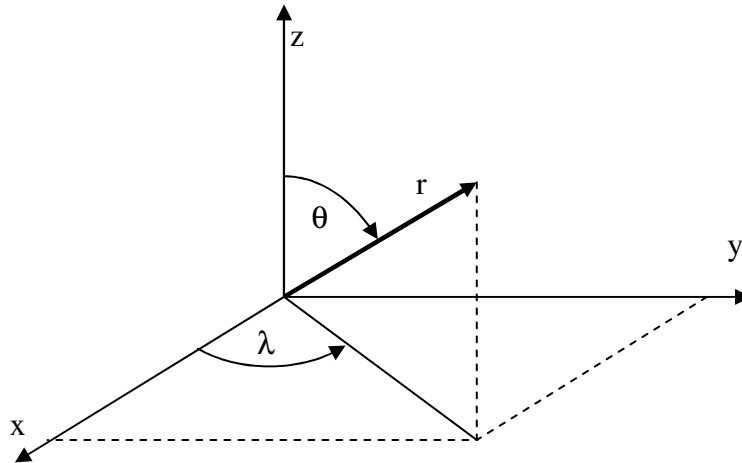
## Coordenadas Esféricas

En las denominadas coordenadas esféricas, las tres coordenadas generalizadas toman la forma:

$$q_1 = r ; q_2 = \lambda ; q_3 = \theta$$

En forma similar a lo hecho con las coordenadas cilíndricas, caracterizamos las coordenadas esféricas en base a sus relaciones con un referencial cartesiano:

Se observa que “r” es la distancia desde el punto hasta el origen de coordenadas (módulo del vector de posición),  $\lambda$  es el ángulo medido desde el eje “x” hasta la proyección del vector de posición sobre el plano “xy” y  $\theta$  es el ángulo entre el eje “z” y el vector de posición.



Las relaciones que ligan las coordenadas esféricas con las cartesianas son:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad [11]$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{ArcTang}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \lambda = \operatorname{ArcTang}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

En base a las relaciones [11], el vector de posición tiene la forma:

$$\mathbf{r}[r, \lambda, \theta] = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda) \mathbf{i} + r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda) \mathbf{j} + r \cos(\theta) \mathbf{k} \quad [12]$$

Utilizando en mecanismo de derivación parcial respecto de las coordenadas generalizadas, se obtiene la terna de versores base de coordenadas esféricas:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial r / \partial r}{|\partial r / \partial r|} = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\lambda) \mathbf{i} + \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\lambda) \mathbf{j} + \cos(\theta) \mathbf{k} \quad [13]$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial r / \partial \theta}{|\partial r / \partial \theta|} = \cos(\theta) \cos(\lambda) \mathbf{i} + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\lambda) \mathbf{j} - \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{k} \quad [14]$$

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \lambda}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial \lambda \right|} = -\sin(\lambda) \mathbf{i} + \cos(\lambda) \mathbf{j} \quad [15]$$

Definidos los versores de la base de coordenadas esféricas, se determinan las componentes del vector de posición en esa base:

$$\mathbf{r}(r, \lambda, \theta) \bullet \mathbf{e}_r = r$$

$$\mathbf{r}(r, \lambda, \theta) \bullet \mathbf{e}_\lambda = 0$$

$$\mathbf{r}(r, \lambda, \theta) \bullet \mathbf{e}_\theta = 0$$

Quedando entonces, el vector de posición en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r}(r, \lambda, \theta) = r \mathbf{e}_r \quad [16]$$

De la misma manera que en coordenadas cilíndricas, partiendo de las ecuaciones [13],[14]y [15], se puede formar la matriz de cambio de base de cartesianas a esféricas.

### Coordenadas intrínsecas

Sea un movimiento sobre una curva en el espacio. La posición de una partícula sobre esa curva se establece mediante una coordenada generalizada, la cual puede ser la longitud medida desde un punto arbitrario de la curva, que se toma como origen.

$$q_1 = s$$

Partiendo de la ecuación del vector de posición  $\mathbf{r}[t]$  en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r}[t] = x[t] \mathbf{i} + y[t] \mathbf{j} + z[t] \mathbf{k}$$

la longitud de arco (s) se determina mediante la integral:

$$s = \int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = s[t]$$

Siendo esta función siempre creciente, en teoría es factible determinar su inversa:

$$t = t[s]$$

Reemplazando en la ecuación del vector de posición en función del tiempo, resulta:

$$\mathbf{r}[s] = x[s] \mathbf{i} + y[s] \mathbf{j} + z[s] \mathbf{k}$$

Se definen los versores **T** (Tangente), **N** (Normal) y **B** (Binormal):

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}[s]}{ds}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}[s]}{ds}}{\left| \frac{d\mathbf{T}[s]}{ds} \right|} \quad \left| \frac{d\mathbf{T}[s]}{ds} \right| = k = \text{curvatura de flexión}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Estos versores forman el triedro intrínseco, y pueden utilizarse como una base para expresar los vectores posición, velocidad y aceleración.

El recíproco de la curvatura de flexión es el “radio de curvatura”  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{k}$$



## Anexo 2

### Transformación de Coordenadas

En el Anexo 1 se detallan aspectos de los sistemas referenciales. Conocidos los componentes de un vector en un sistema de coordenadas, se buscará la manera de conocer las componentes del mismo en otro sistema.

La relación entre sistemas de coordenadas se dan a través de las matrices de transformación. Se verá de qué manera de definen estas matrices de transformación entre sistemas referenciales ortogonales.

Sean dos sistemas ortogonales “xyz”, “x’y’z’” a las cuales se asocian las bases  $ijk$ ,  $i'j'k'$ .

Los versores de la base  $i'j'k'$  pueden escribirse como combinación lineal de los versores dados por  $ijk$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k} \end{aligned} \quad [A2-1]$$

donde  $a_{ij}$  son los cosenos directores de los versores  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  en el sistema  $ijk$ .

Dado el vector  $\mathbf{A}$ , de componentes  $A_x, A_y, A_z$  en el sistema “xyz”, sus componentes en el sistema “x’y’z’” se determinan mediante los productos escalares:

$$\begin{aligned} A_{x'} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{A} \cdot (a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}) \\ A_{y'} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{A} \cdot (a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}) \\ A_{z'} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{A} \cdot (a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}) \end{aligned} \quad [A2-2]$$

Utilizando notación matricial, las relaciones listadas en [A-2] resultan:

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{M}]\mathbf{A} \quad [A2-3]$$

donde  $[\mathbf{M}]$ , matriz de transformación o cambio de base:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [A2-4]$$

En la ecuación [A2-3], los vectores  $\mathbf{A}'$  y  $\mathbf{A}$  se escriben como vectores columnas.

Siendo los sistemas xyz y x’y’z’ ortogonales, la matriz  $[\mathbf{M}]$  es una matriz ortonormal, y su matriz inversa es equivalente a la matriz transpuesta. Premultiplicando ambos miembros de la ecuación [A2-3] por la inversa de  $[\mathbf{M}]$ :

$$[\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{A}' = [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{M}] \mathbf{A} = [\mathbf{1}] \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Reemplazando por la transpuesta, resulta la relación:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{M}]^T \mathbf{A}' \quad [A2-5]$$

## Unidad 2: Cinemática Relativa

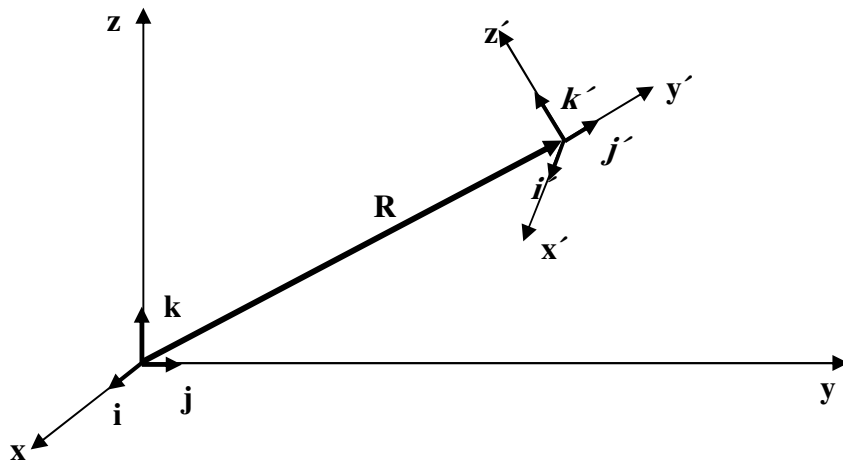
Este Capítulo también es conocido como "Cinemática del Movimiento Compuesto de la Partícula" o, también, "Cinemática en Sistemas de Coordenadas Móviles".

Tiene importancia como herramienta para facilitar el análisis de movimientos complejos, que provienen de la combinación o efecto simultáneo de distintos movimientos sencillos, o bien conocidos.

Se trabaja con sistemas de referencia simultáneos uno fijo o "absoluto" y al menos uno móvil o "relativo".

### Sistemas de Referencia en Movimiento

Dado un sistema de referencias fijo Oxyz de centro O diremos que el sistema O'x'y'z' está en movimiento respecto a aquel cuando ocurra alguno de los siguientes casos:



$$\frac{dR(t)}{dt} \neq 0, \quad \text{ó} \quad \frac{d\tilde{i}}{dt} \neq 0, \quad \text{ó} \quad \frac{d\tilde{j}}{dt} \neq 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{d\tilde{k}}{dt} \neq 0$$

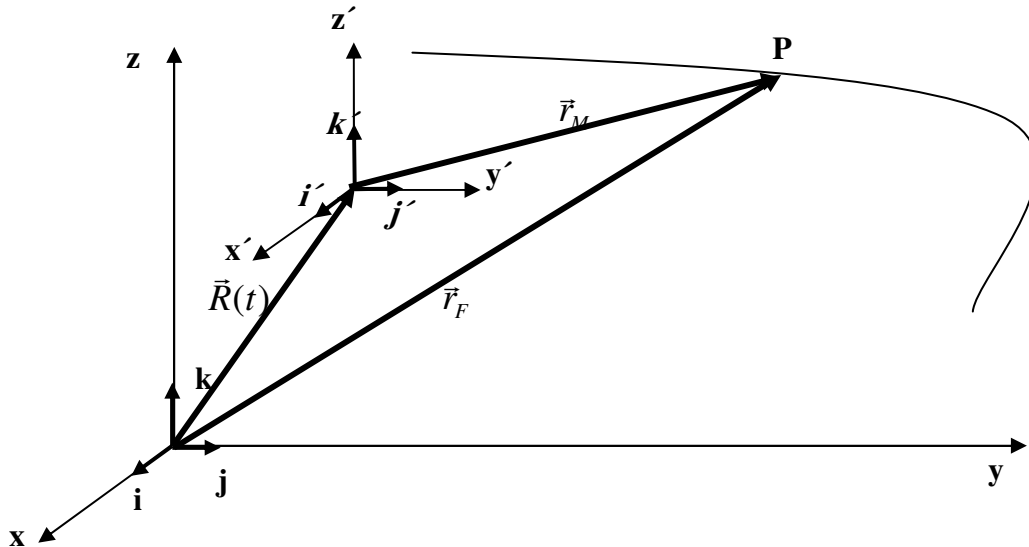
### Sistemas Rígidos y Deformables

Trabajaremos en nuestro estudio con sistemas de referencia ortogonales y rígidos, es decir, que conservan la mutua perpendicularidad de sus ejes, durante todo el movimiento (es decir, para todo t).

La condición de RIGIDEZ es  $\tilde{i} \cdot \tilde{j} = \tilde{j} \cdot \tilde{k} = \tilde{k} \cdot \tilde{i} = 0$  en tal caso

Los sistemas que no cumplen la misma se dicen DEFORMABLES

### 1) Movimiento con Sistemas en Traslación (únicamente)



- El movimiento de P puede describirse tanto desde Oxyz, cómo desde O'x'y'z'.
- Oxyz es un SISTEMA FIJO (F)
- O'x'y'z' es un SISTEMA MÓVIL (M) en TRASLACIÓN.

Un sistema móvil evoluciona en Traslación, respecto de otro, fijo cuando su origen O' se mueve según una ley cualquiera  $\vec{R}(t)$  pero sus ejes se mantienen paralelos a sí mismos. (Los ejes de O'x'y'z' se dibujaron paralelos a los Oxyz únicamente como criterio simplificador. Pueden tener otras direcciones).

$$\boxed{\vec{r}_F = \vec{R} + \vec{r}_M} \quad (1)$$

Aquí  $\vec{r}_F$ : Vector posición referido al Sistema Fijo  
 $\vec{r}_M$ : Vector posición referido al Sistema Móvil  
 $\vec{R}$ : Vector posición del Origen del Sistema Móvil respecto del Sistema Fijo

Derivando (1), obtenemos la **VELOCIDAD**

$$\boxed{\vec{v}_F = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_M} \quad (2)$$

En esta ecuación:

$\frac{dR}{dt}$ : velocidad de arrastre debida al movimiento del centro O'

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_M = \vec{v}_M : \text{velocidad relativa}$$

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_F = \vec{v}_F : \text{velocidad absoluta}$$

Derivando (2), obtenemos la aceleración

$$a_F = \frac{dv_F}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_F}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} \quad (3)$$

donde:

$\vec{a}_F$ : aceleración absoluta

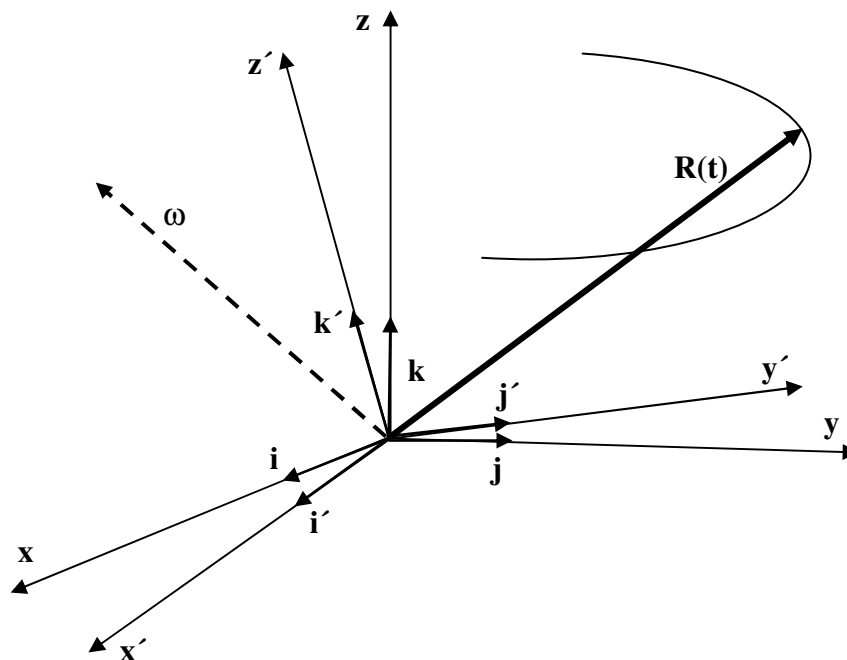
$\vec{a}_F = \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2}$ : aceleración relativa

$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ : aceleración de arrastre, por movimiento del origen del Sistema Móvil  $\sigma$ ,

respecto del Sistema Fijo.

## 2) Movimiento con Sistemas en Rotación (únicamente)

En la figura se muestran dos sistemas, el Oxyz que consideramos como fijo, y el O'x'y'z', animados de un movimiento de rotación con velocidad angular  $\omega$ . Los orígenes O y O' permanecen siempre coincidentes. La posición de la partícula P se describe mediante la del vector de posición R(t), el cual puede referirse a ambos sistemas:



Vector de posición referido al sistema móvil

$$\vec{R}(t)_M = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \quad (4)$$

Vector de posición referido al sistema fijo

$$\vec{R}(t)_F = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Se reescribe la ecuación (4) indicando que las componentes  $x'y'z'$  dependen del tiempo

$$\vec{R}(t) = x'(t) \vec{i}'(t) + y'(t) \vec{j}'(t) + z'(t) \vec{k}'(t) \quad (4')$$

Nótese que  $\vec{R}(t)|_F = \vec{R}(t)|_M$ , constituyen el mismo vector, es decir, es válida la igualdad vectorial, aunque estén expresados en bases diferentes.

Evaluamos la derivada de  $\vec{R}(t)$

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \underbrace{\dot{x}'(t) \vec{i}' + \dot{y}'(t) \vec{j}' + \dot{z}'(t) \vec{k}'}_{(5)} + \underbrace{x' \frac{d\vec{i}'(t)}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'(t)}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'(t)}{dt}}_{(6)}$$

Al evaluar las derivadas se ha tomado en cuenta que los versores de la base móvil cambian en el tiempo y tienen por lo tanto derivada no nula.

El término (5), al mantener  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  fijos, o sin variar, constituye una velocidad

$(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z})$  en el sistema móvil  $O'x'y'z'$ . Lo llamaremos, por lo tanto  $\left. \frac{d\vec{R}(t)}{dt} \right|_M$ .

Un observador solidario a la base móvil vería a la partícula P animada de esta velocidad.

En cuanto a (6) vale lo siguiente: Por condición de rigidez del sistema  $O'x'y'z'$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0 \\ \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0 \\ \vec{k}' \cdot \vec{i}' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\vec{i}' \cdot \vec{j}') = \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' + \vec{i}' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt} (\vec{j}' \cdot \vec{k}') = \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' + \vec{j}' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt} (\vec{k}' \cdot \vec{i}') = \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' + \vec{k}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Llamaremos

$$w_z'(t) = \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' = -\vec{i}' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

$$w_x'(t) = \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' = -\vec{j}' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$w_y'(t) = \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' = -\vec{k}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt}$$

Con  $w_x'(t), w_y'(t), w_z'(t)$  funciones escalares de  $t$ .

Y por otra parte, recordando que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal al vector:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{j}' = 0$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{k}' = 0$$

Ahora expresamos  $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ ,  $\frac{d\vec{j}'}{dt}$  y  $\frac{d\vec{k}'}{dt}$  en la base  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  quedando

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \left( \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \cdot \vec{i}' + \left( \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{j}' + \left( \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \cdot \vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left( \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \cdot \vec{i}' + \left( \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{j}' + \left( \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \cdot \vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \left( \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \cdot \vec{i}' + \left( \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{j}' + \left( \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \cdot \vec{k}'$$

Sabiendo que los siguientes productos escalares son iguales a cero

$$\left( \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \cdot \vec{i}' = 0 \quad \left( \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \cdot \vec{j}' = 0 \quad \left( \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \cdot \vec{k}' = 0$$

Volviendo a la ecuación (6) y definiendo el vector  $\vec{\omega} = (\omega_x; \omega_y; \omega_z)$  se tendrá

$$\begin{aligned} x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} &= \\ x' [\omega_z'(t) \cdot \vec{j}' - \omega_y'(t) \cdot \vec{k}'] + y' [-\omega_z'(t) \cdot \vec{i}' + \omega_x'(t) \cdot \vec{k}'] + z' [\omega_y'(t) \cdot \vec{i}' - \omega_x'(t) \cdot \vec{j}'] &= \\ [\omega_y'(t) \cdot z' - \omega_z'(t) \cdot y'] \vec{i}' + [\omega_z'(t) \cdot x' - \omega_x'(t) \cdot z'] \vec{j}' + [\omega_x'(t) \cdot y' - \omega_y'(t) \cdot x'] \vec{k}' &= \\ \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \omega_x' & \omega_y' & \omega_z' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} &= \vec{\omega} \times \vec{R}_M \end{aligned}$$

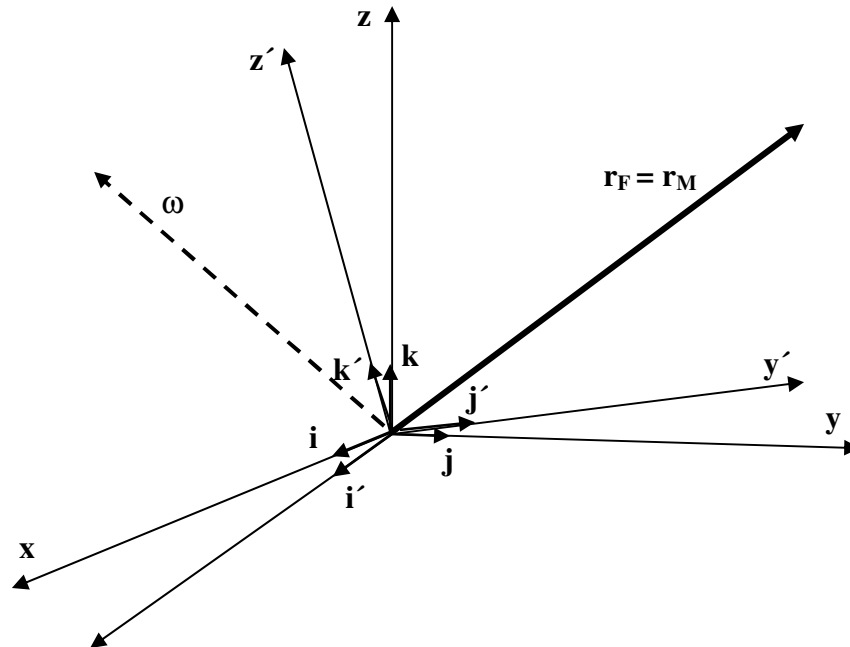
Finalmente queda

$$\left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_F = \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_M + \vec{\omega} \times \vec{R}_M \quad (7)$$

Admitiendo la existencia de un vector  $\vec{\omega} = (\omega_x'; \omega_y'; \omega_z')$  que denominaremos VECTOR ROTACIÓN, es posible definir un operador  $\delta$  aplicable a cualquier vector expresado en sendos sistemas de referencia fijo y móvil.

$$\delta \rightarrow \left( \frac{d(\quad)}{dt} \right)_F = \left( \frac{d(\quad)}{dt} \right)_M + (\boldsymbol{\omega} \times (\quad))_M$$

Analizando la VELOCIDAD y ACELERACIÓN en un sistema que rota respecto de otro fijo se tendrá:



En el sistema móvil \$Ox'y'z'\$ es

$$\vec{r}_M = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}' + z' \cdot \vec{k}'$$

y como vectorialmente

$$\vec{r}_M = \vec{r}_F$$

$$\vec{r}_F = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}' + z' \cdot \vec{k}'$$

Aplicando el operador \$\delta\$ a esta última expresión se tendrá

$$\left( \frac{d(\vec{r})}{dt} \right)_F = \left( \frac{d(\vec{r})}{dt} \right)_M + (\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r}))_M$$

Resultando en definitiva la expresión de la velocidad

$$(\vec{v})_F = (\vec{v})_M + (\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r}))_M$$

donde la velocidad referida al sistema fijo o ABSOLUTO es igual a la velocidad del sistema móvil o RELATIVO más la velocidad de arrastre por efecto de la rotación del sistema móvil dado por \$\boldsymbol{\omega} = (\omega x'; \omega y'; \omega z')\$

La aceleración se obtiene aplicando el operador \$\delta\$ a la velocidad absoluta quedando

$$\left( \frac{d(\vec{v})}{dt} \right)_F = \left( \frac{d((\vec{v})_M + (\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r}))_M)}{dt} \right)_M + (\boldsymbol{\omega} \times ((\vec{v})_M + (\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r}))_M))_M$$

$$\left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_M + \left(\frac{d(\vec{\omega} \times (\vec{r}))_M}{dt}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{r})\right)_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M)$$

Resultando en definitiva

$$\left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_M + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M + 2 \cdot \left(\vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{r})\right)_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M)$$

Donde la aceleración absoluta referida al sistema fijo es igual a la aceleración relativa al sistema móvil más la aceleración de arrastre debida a la variación de  $\vec{\omega}$  (aceleración de rotación) más la aceleración de arrastre complementaria más la aceleración de arrastre centrípeta.

### 3) Movimiento con Sistemas en Traslación y Rotación Simultánea

De la ecuación (1)

$$\boxed{\vec{r}_F = \vec{R} + \vec{r}_M}$$

$$(\vec{v})_F = (\vec{v})_M + (\vec{\omega} \times (\vec{r}))_M + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Los dos últimos términos del segundo término de la ecuación anterior representan a la velocidad de **ARRASTRE** de **TRANSPORTE**. Posee un término debido a la **ROTACIÓN DEL SISTEMA MÓVIL**  $(\vec{\omega} \times \vec{r})_M$  y otro debido al movimiento del **ORIGEN MÓVIL**

O' respecto del sistema fijo  $\frac{d\vec{R}}{dt}$ .

Para obtener la aceleración se debe derivar la anterior respecto del tiempo obteniendo

$$(a)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d^2(\vec{r})}{dt^2}\right)_F = \frac{d^2(\vec{R})}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) + 2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})_M$$

Donde los términos son conocidos.

Se debe hacer notar que el término  $\frac{d^2(\vec{R})}{dt^2}$  se incorpora a la descripción del movimiento como **ARRASTRE** o **TRANSPORTE** originado en el movimiento del origen del sistema móvil respecto del sistema fijo. El resto de los términos son las aceleraciones de arrastre inducidas por la rotación del sistema móvil.

**IMPORTANTE:** En la expresiones (1) ; (10) y (11) las igualdades vectoriales imponen, a los efectos de la resolución de problemas prácticos, conocer necesariamente la transformación lineal [A] que permita relacionar las bases (i,j,k) con (i',j',k') de los sistemas fijo y móvil.



## Unidad 3: Cinemática del Cuerpo Rígido

### Introducción

En el estudio de la cinemática del sólido se toman en cuenta las dimensiones de los cuerpos. Se verá que el movimiento general de un cuerpo siempre se puede describir como la combinación de movimientos sencillos de traslación y rotación. Se analizarán casos particulares del movimiento de sólidos, tales como el movimiento plano, el movimiento polar o con un punto fijo.

### Definición

**Cuerpo rígido:** se define como cuerpo sólido rígido aquel elemento constituido por partículas que mantienen sus distancias relativas constantes.

**Cuerpo deformable:** es aquel en el cual las distancias relativas entre partículas pueden variar.

Estudiaremos la cinemática del sólido rígido, o sea las posibilidades y movimientos que puede presentar en el espacio.

El concepto de sólido rígido es una idealización; en la realidad física, el mismo no existe. Nos encontramos en ella con sólidos reales: deformables.

En general, las deformaciones de los sólidos reales son pequeñas comparadas con sus dimensiones y podremos aplicar los conceptos y definiciones relativas al sólido rígido ideal.

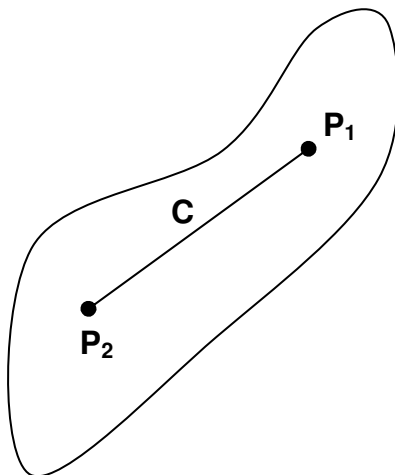
En los casos en que las deformaciones sean importantes respecto de la geometría del sólido, al mismo no podrán aplicarse los conceptos referidos al sólido rígido.

### Condiciones Cinemáticas del Sólido Rígido

Partiendo de la definición dada anteriormente, estableceremos relaciones que ligan las distintas variables cinemática del sólido rígido.

#### Condición analítica de rigidez

La condición de rigidez la podremos expresar por:  $|\vec{c}| = cte$



$|\vec{c}| = cte$  distancia entre dos puntos

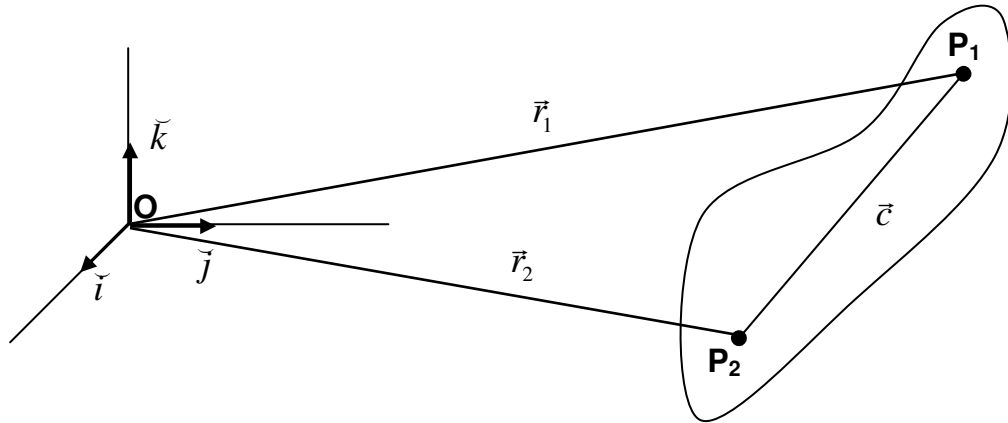
$P_1$  y  $P_2$  dos puntos del rígido

Referenciando al sólido rígido respecto de un punto de referencia "O" quedará:

$$\overline{P_2 - P_1} = cte$$

$\overline{(P_2 - P_1)}$  es el vector diferencia entre los vectores posición de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Su módulo es la distancia entre los mismos.

### Condición cinemática de velocidades



$$\overline{(P_2 - P_1)} = cte$$

$$\overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{(P_2 - P_1)} = cte = \overline{(P_2 - P_1)}^2$$

Si el sólido está en movimiento las posiciones de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son funciones del tiempo entonces:

$$\frac{d}{dt} \overline{(P_2 - P_1)}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \left[ \frac{d\overline{P_2}}{dt} - \frac{d\overline{P_1}}{dt} \right] = 0$$

$$\overline{v_2} = \frac{d\overline{P_2}}{dt}$$

$$\overline{v_1} = \frac{d\overline{P_1}}{dt}$$

$$2 \overline{(P_2 - P_1)} \cdot (\overline{v_2} - \overline{v_1}) = 0$$

donde

$$\overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{v_2} = \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{v_1} \quad (1)$$

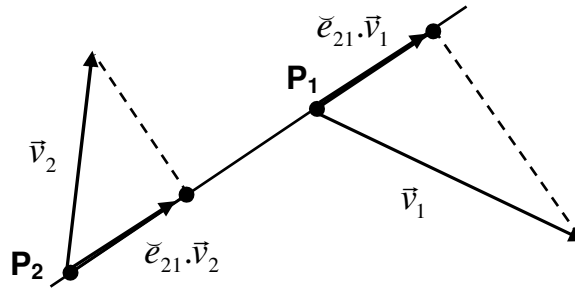
Dividiendo por el módulo de  $\overline{(P_2 - P_1)}$

$$\frac{\overline{(P_2 - P_1)}}{|\overline{P_2 - P_1}|} \cdot \overline{v_2} = \frac{\overline{(P_2 - P_1)}}{|\overline{P_2 - P_1}|} \cdot \overline{v_1}$$

queda

$$\check{e}_{21} \cdot \overline{v_2} = \check{e}_{21} \cdot \overline{v_1}$$

Denominada condición cinemática para las velocidades. En definitiva la proyección de las velocidades de dos puntos sobre la dirección de la línea que une dichos puntos es constante.



### Condición cinemática de aceleraciones

Partiendo de la condición cinemática de velocidades y realizando las derivadas se tiene

$$\left( \frac{d\overline{P_2}}{dt} - \frac{d\overline{P_1}}{dt} \right) \cdot \overline{v_2} + (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \frac{d\overline{v_2}}{dt} = (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \frac{d\overline{v_1}}{dt} + \left( \frac{d\overline{P_2}}{dt} - \frac{d\overline{P_1}}{dt} \right) \cdot \overline{v_1}$$

$$\overline{v_{21}} \cdot \overline{v_2} + (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \overline{a_2} = \overline{v_{21}} \cdot \overline{v_1} + (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \overline{a_1}$$

$$\overline{v_{21}} \cdot (\overline{v_2} - \overline{v_1}) + (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \overline{a_2} = (\overline{P_2 - P_1}) \cdot \overline{a_1}$$

$$\frac{|\overline{v_{21}}|^2}{|\overline{P_2 - P_1}|} + \overline{e_{21}} \cdot \overline{a_2} = \overline{e_{21}} \cdot \overline{a_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{v_{21}} : \text{velocidad relativa} \\ \overline{a_2} : \text{aceleración de } P_2 \\ \overline{a_1} : \text{aceleración de } P_1 \end{array} \right.$$

$$\overline{a_2} \cdot \overline{e_{21}} = \overline{a_1} \cdot \overline{e_{21}} - \frac{|\overline{v_{21}}|^2}{|\overline{P_2 - P_1}|}$$

condición cinemática de aceleraciones

O sea que la proyección de la aceleración en el punto  $P_2$  sobre la dirección  $(\overline{P_2 - P_1})$  es igual a la proyección de  $\overline{a_1}$  sobre la misma dirección menos el cuadrado escalar de la velocidad relativa dividido por la distancia que separa los puntos.

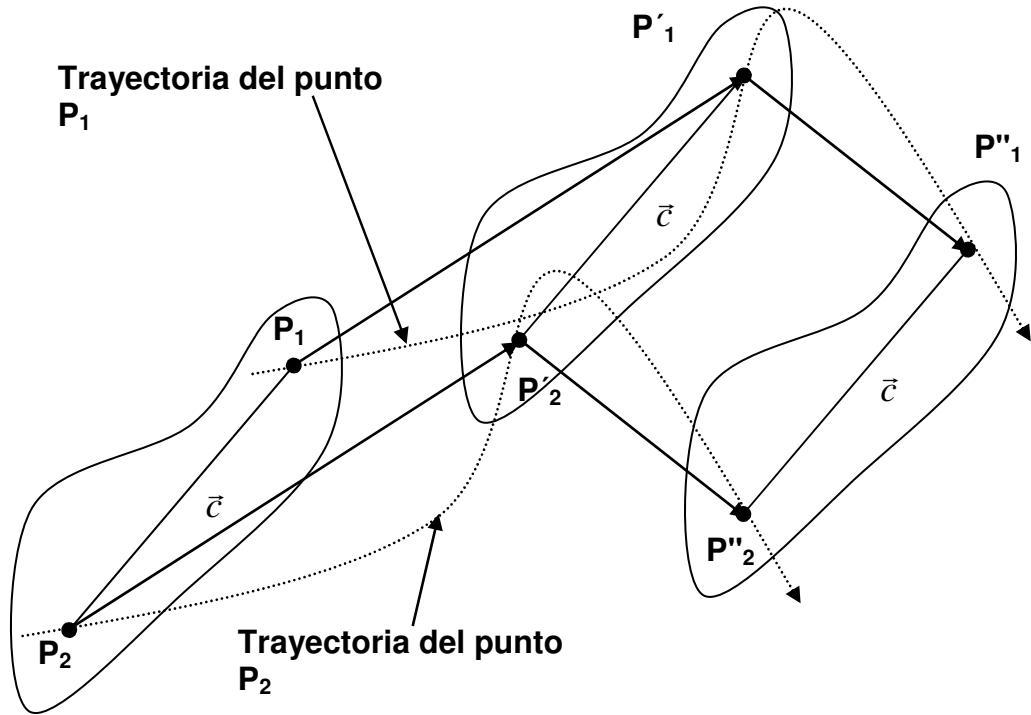
### Movimientos del Sólido en el Espacio

El sólido rígido no vinculado en el espacio puede realizar movimientos o sea tener distintas ubicaciones y orientaciones en el espacio a través del tiempo. Estos movimientos pueden ser puros o compuestos.

## Movimientos puros del sólido en el espacio

### Traslación pura

Este tipo de movimiento se da cuando la recta que une dos puntos cualquiera conserva su módulo y dirección en las distintas posiciones que ocupa el sólido a través del tiempo.



En  $t = t$  se tiene  $P_1, P_2$   
 en  $t = t'$  se tiene  $P'_1, P'_2$   
 Para  $t = t''$  se tiene  $P''_1, P''_2$

#### Características cinemática del movimiento de translación del sólido

- Todos los puntos del rígido tienen idénticas velocidades instantáneas:

$$\vec{v}_1 = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\overline{P'_1 - P_1})}{\Delta t} \quad \vec{v}_2 = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\overline{P'_2 - P_2})}{\Delta t} \quad (1)$$

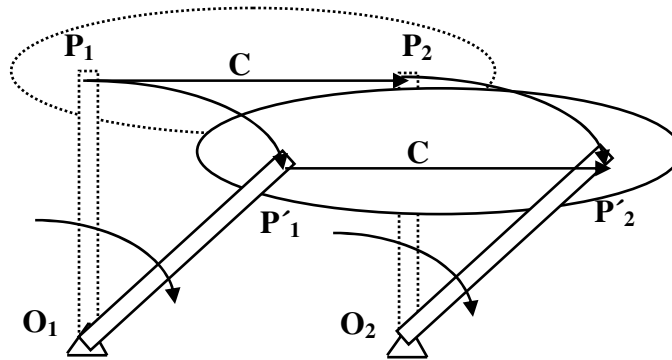
$$P_2 = P_1 + c \quad P'_2 = P'_1 + c \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) resulta:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

- Los vectores desplazamiento  $c$  y velocidad de translación  $v$  son vectores libres.
- Toda línea del sólido se traslada manteniéndose paralela a si misma.

Supongamos tener las bielas  $P_1 - O_1$  y  $P_2 - O_2$  que pivotean en  $O_1$  y  $O_2$ ; la placa que une  $P_1 - P_2$  pasa a ocupar la posición  $P'_1 - P'_2$  después de la translación el vector  $c$  se traslada paralelo a si mismo. La velocidad de todos los puntos es idéntica.



- Las trayectorias de todos los puntos son idénticas y superponibles.

### Rotación pura

**Definición:** cuando un sólido se mueve de tal manera que permanecen fijos dos de sus puntos se dice que está en rotación.

En realidad permanecen fijos todos los puntos que se encuentran sobre la recta definida por esos dos puntos.

Si  $O_1$  y  $O_2$  permanecen fijos y  $O_3$  se encuentra alineado con ellos se tendrá:

$$\overline{O_3 - O_1} = \alpha \cdot \overline{O_2 - O_1}$$

derivando la anterior quedará

$$(\overline{V_3 - V_1}) = \alpha \cdot (\overline{V_2 - V_1})$$

Pero

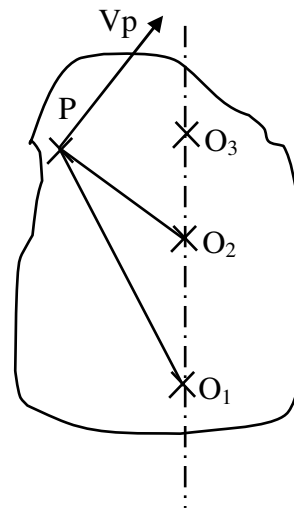
$$\overline{V_2} = \overline{V_1} = 0$$

Entonces se deduce que

$$\overline{V_3} = 0$$

Como  $O_3$  es genérico todos los puntos alineados

en  $\overline{O_1 - O_2}$  permanecerán fijos.



### Velocidad en la rotación

El estado de velocidad del sólido se estudia partiendo de la condición de rigidez. Para un punto cualquiera P fuera del eje:

$$(\overline{P - O_1})^2 = cte$$

$$(\overline{P - O_2})^2 = cte$$

Considerando que la posición del punto es función del tiempo se deriva quedando:

$$2 \cdot (\overline{P - O_1}) \cdot (\overline{V_p - V_1}) = 2 \cdot (\overline{P - O_1}) \cdot \overline{V_p} = 0 \quad \text{pues } \overline{V_1} = 0$$

$$2 \cdot (\overline{P - O_2}) \cdot (\overline{V_p - V_2}) = 2 \cdot (\overline{P - O_2}) \cdot \overline{V_p} = 0$$

de lo anterior surge que  $v_p$  es perpendicular a  $c$  y a  $(\overline{P - O_2})$ , luego es perpendicular al plano  $\overline{P, O_1, O_2}$ .

La posición del sólido queda determinado por tres puntos. Luego el movimiento del sólido queda determinado por el movimiento de un plano del mismo.

La recta  $\overline{O_1O_2}$  permanece fija en ese plano, luego el movimiento del sólido está dado por el movimiento del punto. La velocidad del punto  $P_1$  y en general la de todos los puntos, es perpendicular al eje.

En un tiempo  $\Delta t$ , el plano barre un ángulo  $\Delta\phi$ . Se define la velocidad angular media como

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

y la velocidad angular instantánea como

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

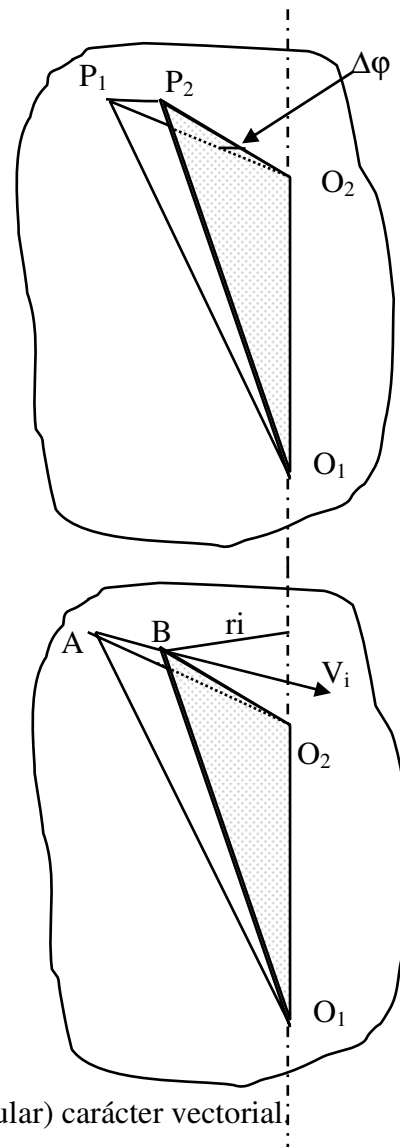
Un punto cualquiera del sólido por ejemplo  $P_i$  que esta a una distancia  $r_i$  del eje en el intervalo  $\Delta t$  describe un arco  $\overline{AB}$  de trayectoria circular de radio  $r_i$ .

$$\overline{AB} = \Delta l = r_i \cdot \Delta\phi$$

La velocidad del punto  $P_i$

$$V_i = \frac{dl}{dt} = r_i \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = r_i \cdot \frac{d\phi}{dt} = r_i \cdot \omega$$

La velocidad de un punto es igual al producto de la velocidad angular por el radio del punto respecto del eje de rotación.



### Vector velocidad angular

Es conveniente otorgarle al vector  $\omega$  (velocidad angular) carácter vectorial;

1). El módulo es:

$$|\omega| = \frac{d\phi}{dt}$$

2) Dirección: la del eje de rotación

3) Sentido: según la regla de la mano derecha

4) Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación (vector deslizantes)

$$V_{pi} = \omega \cdot (\overline{Pi - O_1}) \cdot \sin \alpha$$

Nos queda

$$V_{pi} = \omega \times (\overline{Pi - O_1})$$

O sea que la velocidad de un punto es el momento del vector rotación respecto de ese punto (por eso se le otorga carácter vectorial).

El movimiento se denomina uniforme cuando:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = cte$$

### Aceleración en la rotación

La aceleración angular de un punto cualquiera del sólido se obtiene derivando:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tilde{e}_w \quad \text{donde } \tilde{e}_w \text{ es el versor en la dirección del eje.}$$

Derivando

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \gamma = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \tilde{e}_w + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\tilde{e}_w}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tilde{e}_w$$

La aceleración tangencial del mismo punto del sólido se obtiene derivando:

$$V_{pi} = \omega \times (Pi - O_1)$$

Quedando

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} = a_i &= \frac{d\omega}{dt} \times (Pi - O_1) + \omega \times \frac{d(Pi - O_1)}{dt} \\ &= \gamma \times (Pi - O_1) + \omega \times (\omega \times r_i) \end{aligned}$$

Donde el primer término del sumando es la aceleración tangencial y el segundo término la aceleración centrípeta.

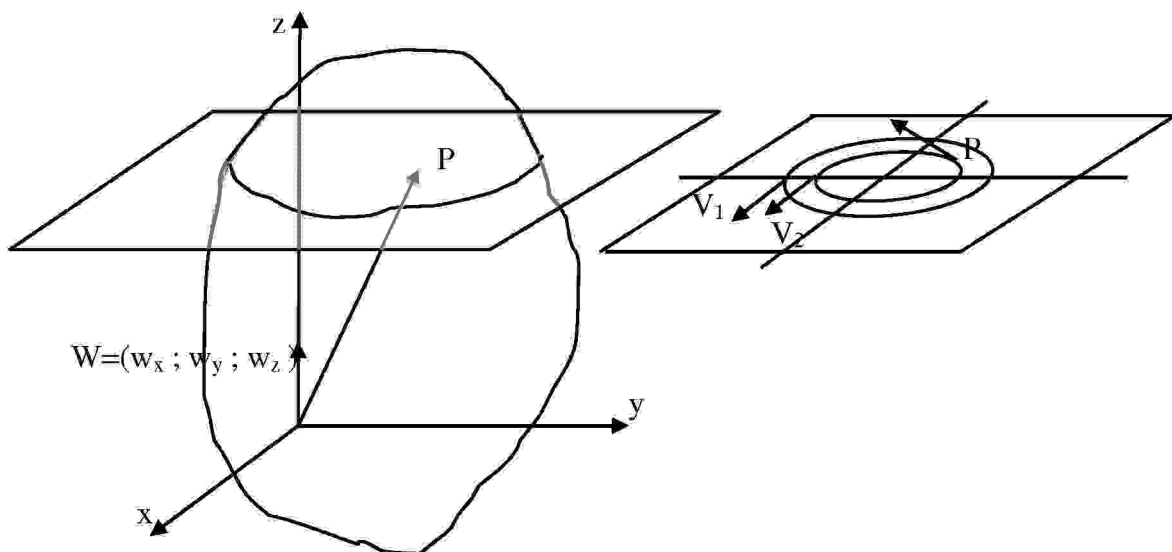
### Campo de velocidades

Si cada punto del sólido le corresponde una velocidad, por lo tanto, podemos decir, que el estado instantáneo del movimiento del rígido queda definido por un campo de velocidades.

En el caso de la rotación pura; el movimiento queda completamente determinado por el vector  $\omega$ . La configuración de las líneas de campo resultan circunferencias.

Si adoptamos un sistema referencial fijo. La velocidad instantánea del punto  $P_{(x,y,z)}$  es:

$$V_p = \begin{vmatrix} \tilde{i} & \tilde{j} & \tilde{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{en este caso } \omega_x = \omega_y = 0$$



$$V_p = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega_z \cdot y \cdot \check{i} + \omega_z \cdot x \cdot \check{j}$$

que se encuentra en el plano x-y

### Grados de libertad del sólido

Estudiaremos el sólido en el espacio. Supongamos tener tres partículas en el espacio.

El número de grados de libertad de las mismas es:

$$3 \text{ p} \times 3 = 9 \text{ grados de libertad (GDL)}$$

Si rigidizamos las posiciones relativas de dichas partículas mediante tres vínculos geométricos. Es decir que las

distancia entre ellas se mantenga constante  $P_2 (x_2; x_2; x_2)$

$$(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2 = cte$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

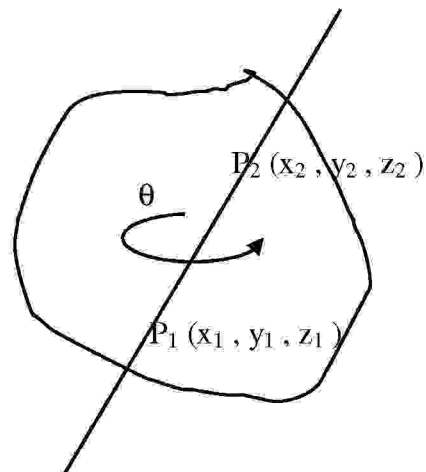
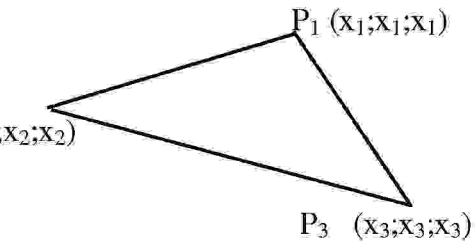
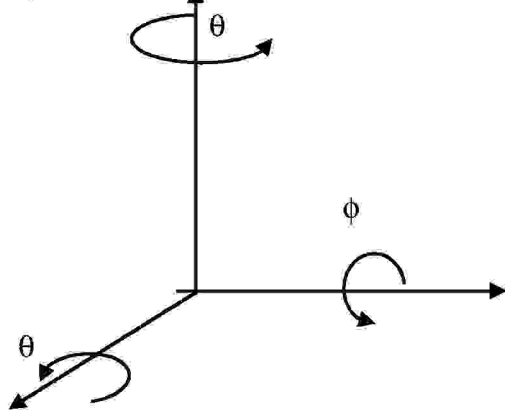
y teniendo presente que cada vínculo geométrico restringe un grado de libertad nos queda entonces:

$$9 \text{ grados de libertad} - 3 = 6 \text{ grados de libertad}$$

Si adicionamos una nueva partícula  $P_i$ , agregamos 3 grados de libertad, pero también adicionamos 3 nuevos vínculos. Podemos así seguir adicionando infinitas partículas hasta constituir un sólido rígido. Este sólido poseerá en el espacio **6 grados de libertad**.

Estos seis grados de libertad pueden ser los tres desplazamientos de un punto del mismo y tres rotaciones no paralelas  $3+3=6$ ; o bien la definición de dos puntos y un ángulo de rotación:

$$(3 \times 2) - 1 + 1 = 6$$



### Movimiento polar del sólido

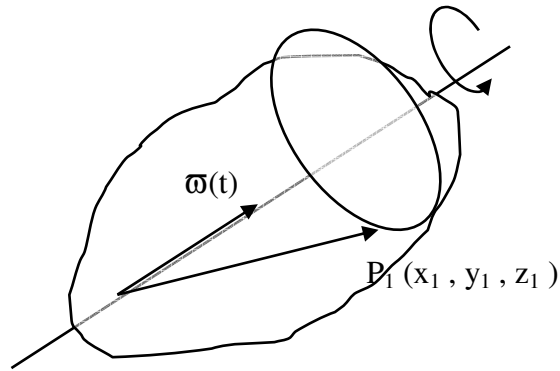
Es un movimiento en el cual un solo punto (polo) permanece fijo. El vector rotación  $\omega$  no permanece fijo a través del tiempo, si no que va cambiando su orientación en el espacio en función del tiempo.

$$\omega = \omega(t)$$

La expresión de la velocidad instantánea de cada punto es:

$$V_p = \omega \times (P - O)$$





Así definido el movimiento polar, el sólido posee 3 (tres) grados de libertad ya que le hemos restringido el movimiento a un punto "O" (tres grados de libertad).

### Orientación del sólido en el espacio en un movimiento polar

Para orientar en el espacio un sólido que posee un punto fijo; adoptaremos dos sistemas referenciales: uno fijo (absoluto); y un sistema solidario con el sólido (en movimiento); ambos ortogonales. Estos sistemas estarán relacionados mediante una transformación de rotación expresada por una matriz  $[A]$ , ortogonal.

Esta rotación puede descomponerse en tres rotaciones independientes de tal manera que el producto de las matrices que representan esas rotaciones de como resultado la matriz:

$$[A] = [A_3][A_2][A_1]$$

### Ángulos de Euler

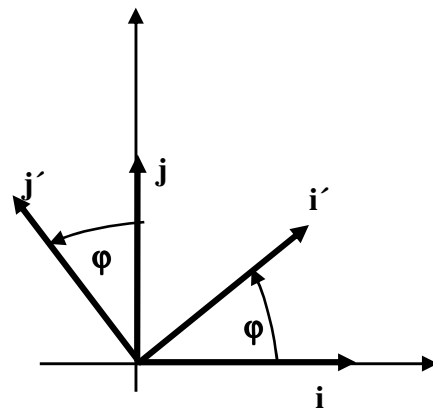
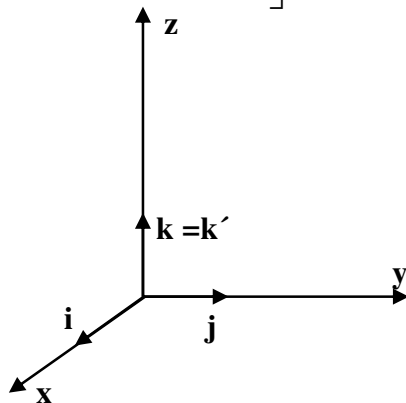
Definiremos tres rotaciones independientes que compuestas darán como resultado una rotación total que nos dará la relación entre un sistema fijo y un sistema solidario con el sólido (que fija la orientación del sólido).

#### 1º rotación: Ángulo de precesión

Supongamos un sistema inicial (i,j,k,) y realizamos una rotación sobre el eje k. El eje k' será el mismo k original, los versores i, j rotarán sobre un ángulo de precesión  $\varphi$ .

La matriz de transformación es:

$$[A\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



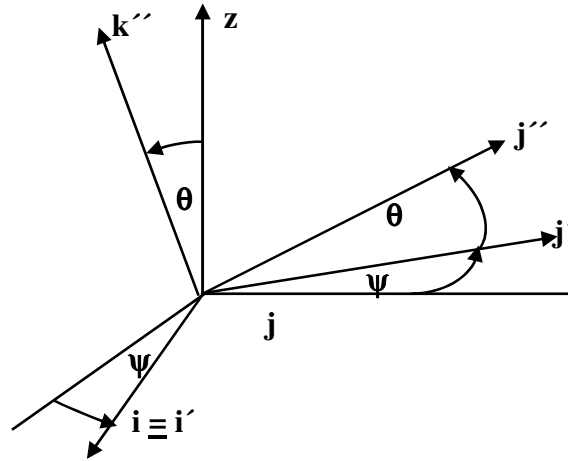
La rotación se provoca en el plano x-y. El eje de rotación es el eje z.

### 2º rotación: Ángulo de nutación

El sistema rota sobre el eje  $i'$  (línea de nodo) un ángulo de nutación  $\theta$ . El sistema pasa de  $i', j', k'$  a  $i'', j'', k''$ . El eje  $i' \equiv i''$  o sea se conserva la dirección  $i'$ .

La matriz de transformación es:

$$[A\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



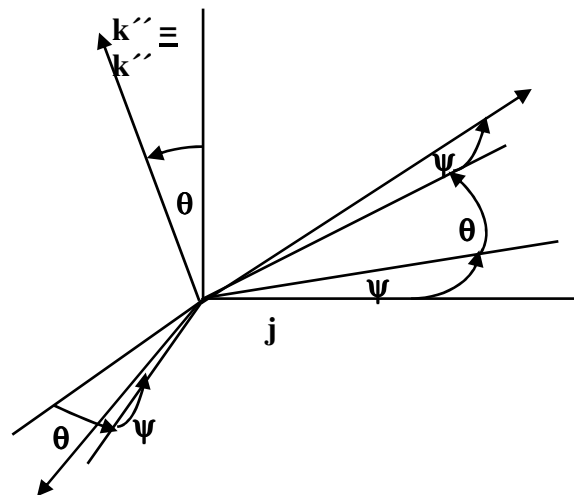
### 3º rotación: Ángulo de rotación propia

El sistema rota sobre el eje  $k''$ , la rotación se denomina rotación propia del ángulo  $\psi$ .

El sistema pasa de  $i'', j'', k''$  a  $i_1, j_1, k_1$ .

La matriz de rotación es:

$$[A\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



La transformación total resulta:

$$[A] = [A\psi][A\theta][A\varphi]$$

Donde  $[A]$  es una matriz ortogonal, o sea que su determinante es 1 y su inversa es igual a su transpuesta.

$$\det[A] = 1$$

$$[A]^{-1} = [A]^T$$

$$a_{ik} \cdot a_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & i=j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Los tres ángulos  $\varphi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  son en general funciones del tiempo.

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

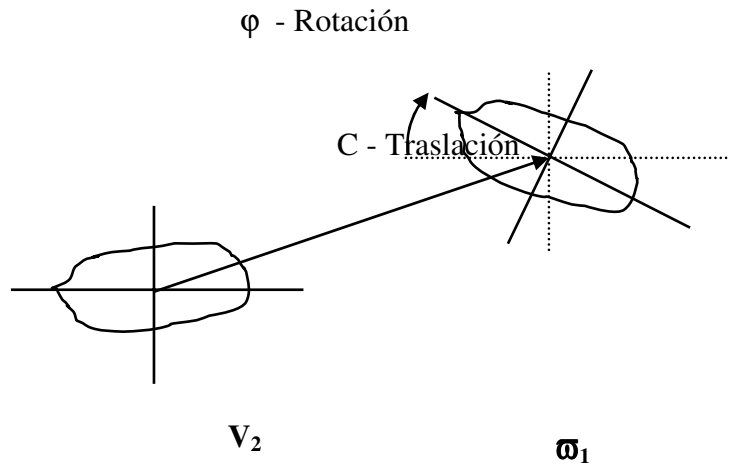
$$\psi = \psi(t)$$

### Movimiento rototraslatorio

#### Teorema de Euler - Chassles:

El movimiento más general de un sólido es el de una traslación seguida de una rotación.

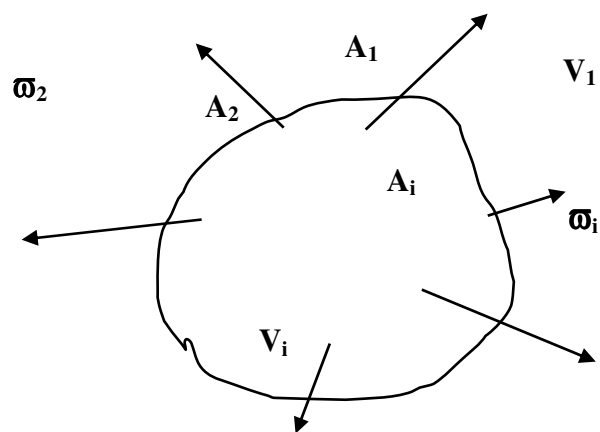
Siempre es posible descomponer el movimiento de un sólido en una traslación de un punto más una rotación respecto de un eje que pasa por dicho punto más una rotación respecto de un eje que pasa por dicho punto.



#### Sistema de traslación y rotaciones

Supongamos tener un rígido, cuyo movimiento resulta de la superposición de varias traslaciones y rotaciones; podemos considerar que el estado de movimiento del mismo queda descrito en cada instante por un sistema de vectores.

$\omega_i$  = vectores velocidad de rotación en un eje que pasa por  $A_i$   
 $V_i$  = vectores velocidad de traslación.

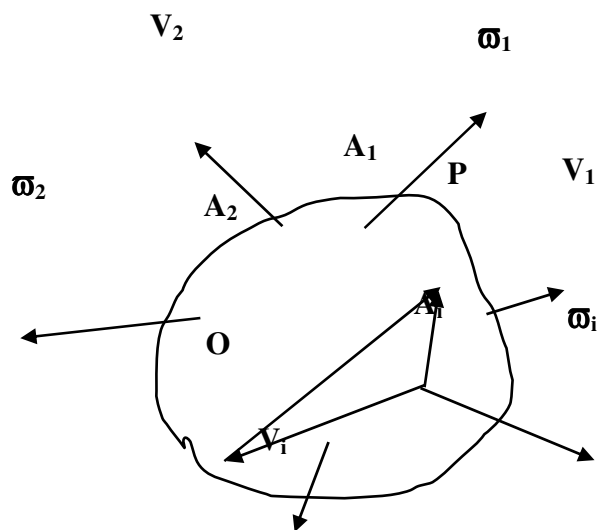


#### Polo de reducción.

Según el teorema de Euler-Chasles es posible describir el movimiento general anterior, mediante la traslación de un punto "O" y una rotación respecto de un eje que pasa por "O".

Al punto "O" que elegiremos arbitrariamente le denominamos polo de reducción del sistema rototraslatorio.

Si consideramos la velocidad de un punto cualquiera P. El mismo estará sujeto a todas las velocidades de traslación y rotación. Entonces:



$$V_P = \sum V_i + \sum \omega \times (\overline{P - A_i})$$

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \omega \times (\overline{P - O})$$

Como

$$(\overline{P - A_i}) = (\overline{O - A_i}) + (\overline{P - O})$$

Reemplazando queda

$$V_P = \sum V_i + \sum \omega_i \times [(\overline{O - A_i}) + (\overline{P - O})]$$

$$V_P = \sum V_i + \sum \omega_i \times (\overline{O - A_i}) + \sum \omega_i \times (\overline{P - O})$$

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \omega \times (\overline{P - O})$$

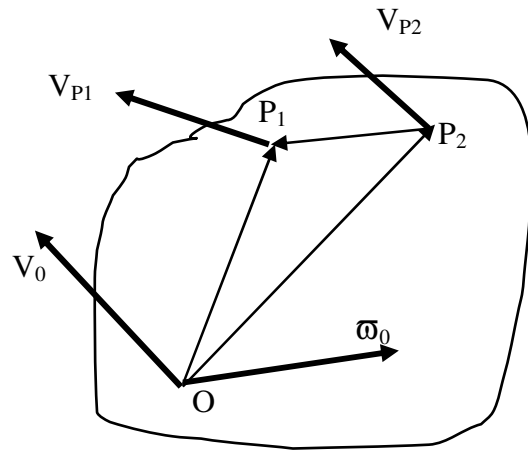
$$\text{donde } \omega = \sum \omega_i$$

Es decir hemos expresado la velocidad de un punto de un sólido en función de la velocidad de un polo "O" y una rotación respecto del mismo.

Para dos puntos cualquiera P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>

$$\overline{V_{P1}} = \overline{V_O} + \omega \times (\overline{P_1 - O})$$

$$\overline{V_{P2}} = \overline{V_O} + \omega \times (\overline{P_2 - O})$$



Proyectando sobre la recta que une ambos puntos

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot [\omega \times (\overline{P_1 - O})]$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot [\omega \times (\overline{P_2 - O}) + (\overline{P_1 - P_2})]$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot \omega \times (\overline{P_2 - O}) + e_{1-2} \cdot \omega \times (\overline{P_1 - P_2})$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot \omega \times (\overline{P_2 - O}) + 0$$

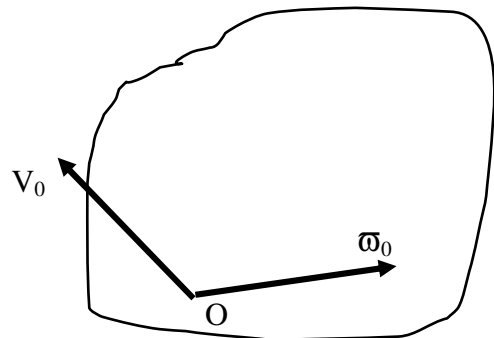
$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_{P2}}$$

Cumple con la condición cinemática para las velocidades.

O sea que nuestro sistema queda reducido a:

$$\omega = \sum \omega_i$$

$$V_0 = \sum V_i + \sum \omega_i \times (\overline{A_i - O})$$



### Invariante vectorial

Si elegimos un polo arbitrario O', allí también se tendrá que  $\omega' = \sum \omega_i$ . Luego  $\omega = \omega'$  es un invariante vectorial para los distintos polos elegidos.

### Invariante escalar

Suponiendo haber reducido el sistema al polo "O" y conociendo ω y V<sub>0</sub>.

En  $O_1$  se conoce  $\vec{\omega}$  y  $V_{O_1}$ . Respecto de "O" se tendrá:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O})$$

Tomando " $O_1$ " como polo de reducción se tendrá:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}_1)$$

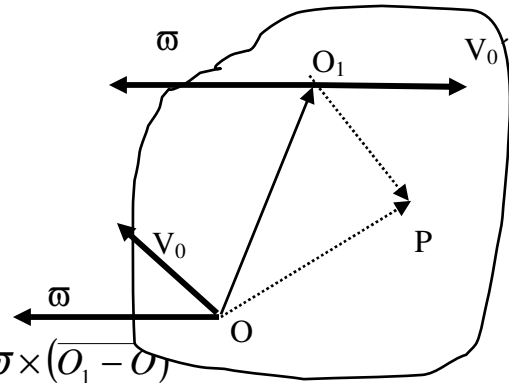
Sabiendo que  $V_P = V_{P'}$  y además

$$(\vec{P} - \vec{O}) = (\vec{P} - \vec{O}_1) + (\vec{O}_1 - \vec{O})$$

igualando:

$$\vec{V}_O + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}_1) = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}_1)$$

$$\vec{V}_O + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}_1) = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{O}_1 - \vec{O})$$



$$\vec{V}_O = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times (\vec{O}_1 - \vec{O})$$

Trasladamos el vector traslación; para ello se debe adicionar el momento del vector rotación por la distancia que separa los dos polos.

Proyectando sobre  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{V}_O \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \vec{V}_{O_1} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} + [\vec{\omega} \times (\vec{O}_1 - \vec{O})] \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

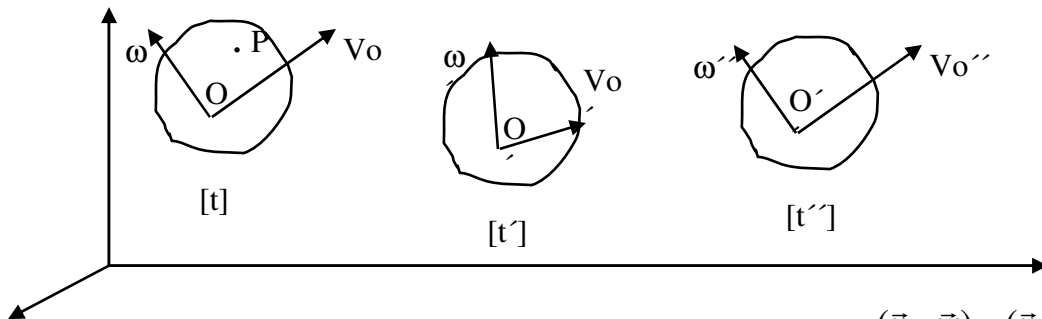
Como el segundo término del segundo miembro es cero queda

$$\vec{V}_O \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \vec{V}_{O_1} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \text{INVARIANTE ESCALAR}$$

La proyección de las velocidades de traslación sobre la dirección del vector rotación es constante para cualquier polo elegido, en el mismo instante de tiempos: a esta proyección se lo denomina invariante escalar.

Los invariantes vectorial y escalar, varían en el tiempo.

Los invariantes I.V. e I.E. definen estados instantáneos del movimiento.



En cada punto, el estado de movimiento queda definido por  $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ ,  $(\vec{v}_O', \vec{\omega}')$ ,  $(\vec{v}_O'', \vec{\omega}'')$  y el espacio recorrido por el punto P en dt.

$$V_P dt = V_O dt + [\vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O})] dt$$

La proyección de  $\vec{v}_o$  sobre  $\vec{w}$  es constante para los distintos polos, para un mismo instante de tiempo.

### Descomposición

Llamamos descomponer el movimiento de un sólido a elegir un polo de reducción y establecer los invariantes; o sea definir el movimiento en términos de  $\vec{w}$  y  $\vec{v}_o$ .

Podemos elegir infinitos polos de reducción.

#### Descomposición impropia

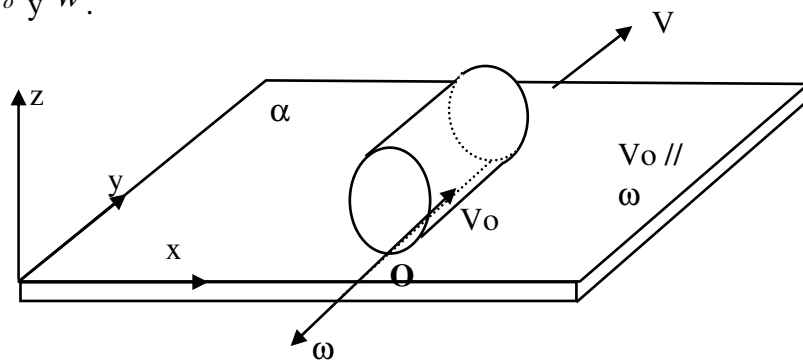
Se da cuando  $\vec{v}_o$  no se mantiene paralelo a  $\vec{w}$  en los distintos instantes de tiempo para el polo "O" elegido.

#### Descomposición propia

Se da cuando para el polo elegido,  $\vec{v}_o$  se mantiene paralelo a  $\vec{w}$  en los distintos instantes de tiempo.

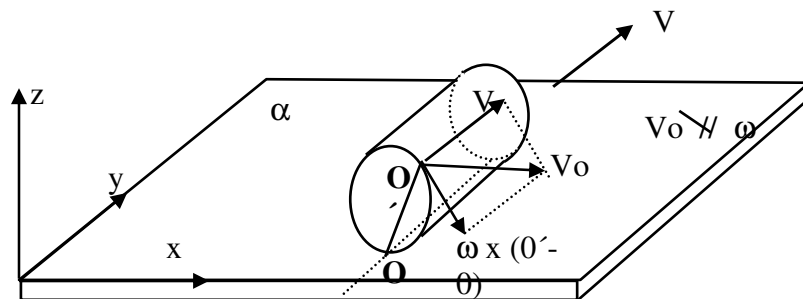
**Ejemplo:** supongamos un cilindro que rueda sobre un plano que posee una traslación perpendicular la rotación del cilindro.

**Descomposición propia:** se logra tomando como polo "O" la generatriz de contacto en el instante (t). En el instante siguiente la generatriz de contacto mantiene la condición de paralelismo entre  $\vec{v}_o$  y  $\vec{w}$ .



#### Descomposición impropia

Si elegimos el polo "O" en otro punto  $\vec{v}_o'$  no será paralelo a  $\vec{w}$  y tenemos descomposición impropia:



### Ejemplos de composición de rotaciones

Analizaremos los siguientes casos particulares.

**Cuerpo rígido sometido a dos rotaciones iguales y de sentido contrario**

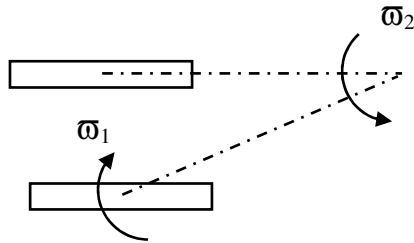
La velocidad de un punto genérico

$$V_p = \omega_1 \times (P - O_2) - \omega_1 \times (P - O_1)$$

$$V_p = \omega_1 \times (O_1 - O_2) = cte \quad \forall P$$

$(O_1 - O_2)$  no depende del punto.

El movimiento del sólido es una traslación



**Dos rotaciones concurrentes**

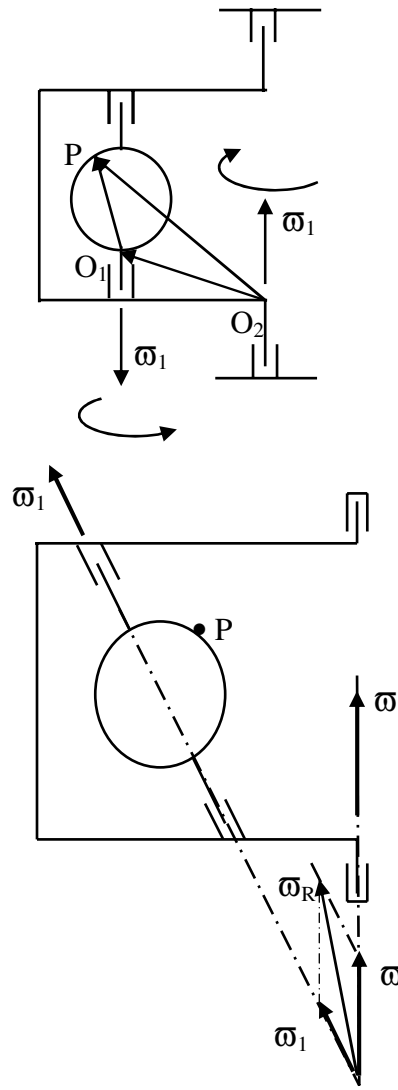
La velocidad del punto P es:

$$\bar{V}_p = \omega_1 \times (P - O) + \omega_2 \times (P - O)$$

$$\bar{V}_p = (\omega_1 + \omega_2) \times (P - O)$$

$$\bar{V}_p = \omega_R \times (P - O)$$

Donde  $\bar{\omega}_1$  y  $\bar{\omega}_2$  no están fijos en el espacio. Se trata de un movimiento polar. Se puede describir el estado instantáneo del movimiento mediante un único vector  $\omega_R$  aplicado en el punto fijo "O".



**Eje central del movimiento**

Para un polo "O" arbitrario elegidos tendremos un  $\bar{V}_o$  y el invariante vectorial  $\bar{\omega}$ .

Buscaremos ahora el lugar geométrico donde se cumple que sea  $\bar{\omega} // \bar{V}_o$  o sea que de una traslación paralela a la rotación.

$$\bar{V}_c = \alpha \cdot \bar{\omega}$$

El módulo de  $\bar{V}_c$  será  $|\bar{V}_c| = \bar{V}_o \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$ , invariante escalar.

Podemos determinar el punto "C" de su recta de acción multiplicando vectorialmente por  $\bar{\omega}$  a la expresión  $\bar{V}_c = \bar{V}_o + \bar{\omega} \times (\bar{C} - \bar{O})$  y considerando que  $\bar{V}_c$  se supone paralelo a  $\bar{\omega}$  o sea su producto escalar cero.

$$\overline{V_C} \times \overline{\omega} = \overline{V_O} \times \overline{\omega} + \overline{\omega} \times (\overline{C - O}) \times \overline{\omega} = 0$$

$$\text{desarrollando } \overline{\omega} \times (\overline{C - O}) \times \overline{\omega} = 0$$

$$(\overline{C - O}) \cdot (\overline{\omega} \cdot \overline{\omega}) - \overline{\omega} \cdot [(\overline{C - O}) \cdot \overline{\omega}] = 0$$

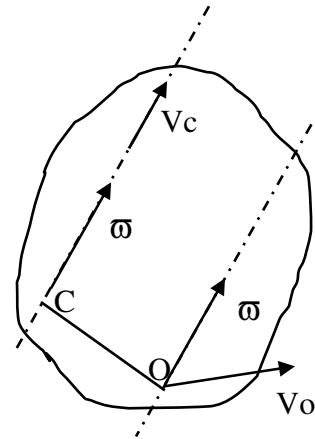
En particular tomando un punto tal que

$$(\overline{C - O}) \perp \overline{\omega} \text{ nos queda:}$$

$$\overline{V_O} \times \overline{\omega} + (\overline{C - O}) \cdot \overline{\omega}^2 = 0$$

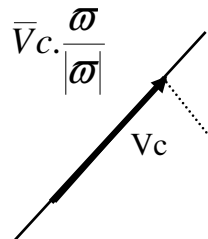
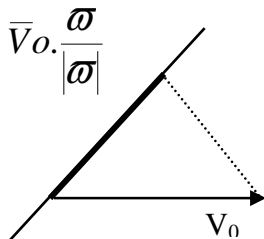
$$(\overline{C - O}) = \frac{\overline{V_O} \times \overline{\omega}}{\omega^2}$$

nos da la posición del punto "C" del eje central respecto del polo arbitrario "O".



La recta definida por el punto "C" y la dirección de  $\frac{\overline{\omega}}{|\omega|}$  se denomina eje central del movimiento y es el lugar de los puntos que tomados como polos de reducción dan lugar a una traslación paralela a la rotación.

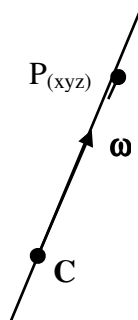
Los puntos del eje central son de velocidad mínima y el movimiento se denomina helicoidal tangente.



### Ecuación del eje central

Sea  $(x_c, y_c, z_c)$  las coordenadas de "C" referido a un polo arbitrario "O" y  $\overline{\omega}$  el invariante vectorial; la ecuación del eje central será:

$$\overline{P - C} = \alpha \cdot \overline{\omega} \quad \text{Ecuación vectorial}$$



$$\begin{cases} x - x_c = \alpha \cdot \omega_x \\ y - y_c = \alpha \cdot \omega_y \\ z - z_c = \alpha \cdot \omega_z \end{cases}$$

Ecuación paramétrica

$$\frac{x - x_c}{\omega_x} = \frac{y - y_c}{\omega_y} = \frac{z - z_c}{\omega_z}$$

Ecuación del eje central

Si conocemos en el polo arbitrario "O" a  $\overline{V_o}$  y  $\overline{\omega}$ . Tendremos que

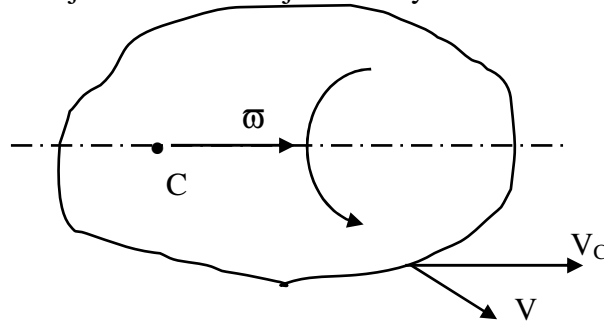
$$\overline{V_c} = \overline{V_{min}} = \overline{V_o} \cdot \frac{\overline{\omega}}{|\omega|} = \text{Iescalar}$$

El eje central puede o no estar dentro del sólido dado.



## Movimiento helicoidal tangente

Observamos que un movimiento rototraslatorio se puede reducir a un movimiento de rotación  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje y una traslación  $\vec{v}_o$  paralela a dicho eje, de magnitud igual al invariante escalar. Dicho eje se denomina eje central y el movimiento helicoidal.



Si  $\vec{\omega}$  se mantiene constante en el tiempo cada punto describe arcos de hélices cilíndricas y su velocidad proviene de la descomposición de una rotación  $\vec{\omega}$  y una traslación con la misma dirección.

## Axoides

El eje central va tomando distintas posiciones en el espacio, y describe una **superficie reglada** que se llama **axoide**.

De acuerdo a cual sea la terna de referencia que se tome se tendrá:

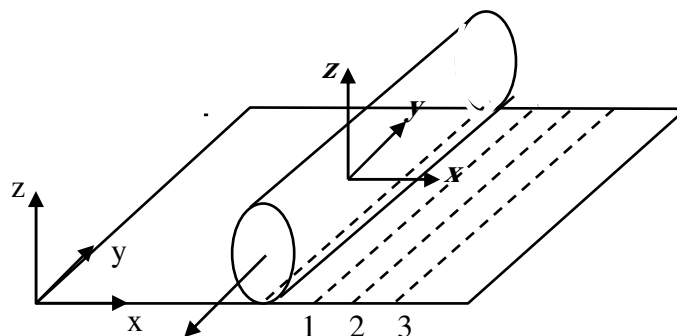
**Axoide fijo:** superficie generada por el eje central visto desde una terna fija.

**Axoide móvil:** superficie generada por el eje central, vista desde un sistema solidario al sólido considerado.

## Ejemplos

### Movimiento paralelo

**Cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano:**



- Visto desde el sistema fijo el eje central se ubica siempre en el plano x-y. El axoide fijo es un plano.
- Visto desde el sistema de movimiento el eje central se ubica en un cilindro.
- El movimiento en este caso, puede ser descrito como el rodar de un cilindro sobre el plano.

## Movimiento polar

### Dos conos con generatriz de contacto

El sólido rota respecto

de  $z$  con rotación  $\omega_2$  y  
respecto de  $z$  con rotación

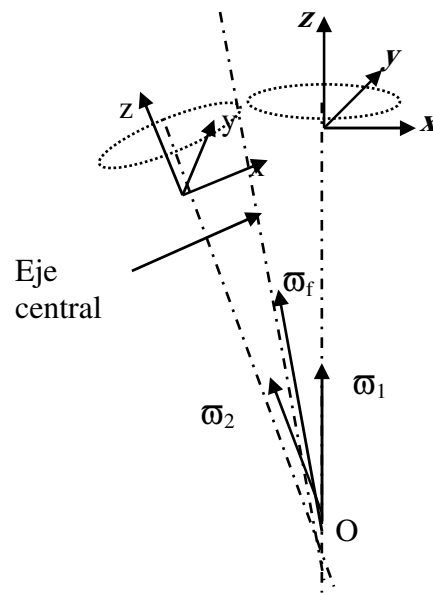
$\omega_1$  manteniendo fijo el  
polo "O".

El eje central coincide en dirección con la  
composición de las velocidades angulares. Los  
axoides que se generan son:

- Visto desde un sistema fijo un cono con eje  $z$ .
- Visto desde un sistema móvil, solidario con el sólido, el axoide es un cono con eje  $z$ .
- Los dos axoides son conos circulares que ruedan sin resbalar. Su generatriz de contacto es el eje central.

Como "O" permanece fijo, en este caso

$$\vec{v}_c = 0$$



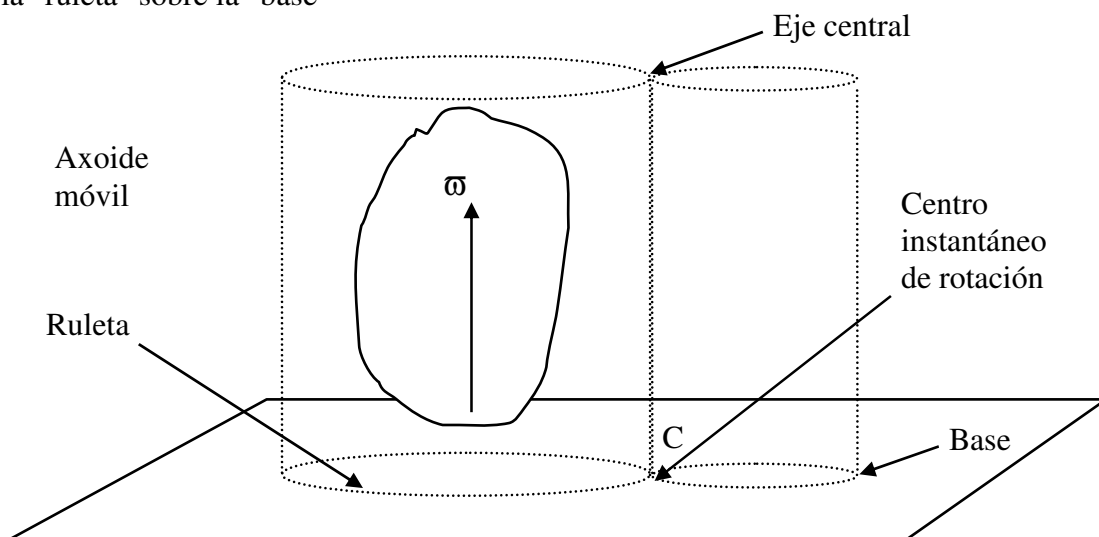
## Movimiento Plano

### Introducción

Cuando un sistema se mueve de tal manera que todos sus puntos tienen velocidades paralelas a un plano fijo, el sistema tiene un movimiento "plano". Es suficiente considerar solo el movimiento de una sección plana, paralela al plano fijo. Es decir, se reduce al estudio de la cinemática de una figura plana.

Desde otro punto de vista se puede considerar el movimiento como el rodar de dos axoides cilíndricos con invariante escalar nulo.

La intersección del axoide fijo con un plano dará una curva denominada base, y la del axoide móvil, rodante. Luego el movimiento plano puede ser considerado como el rodar de la "ruleta" sobre la "base"

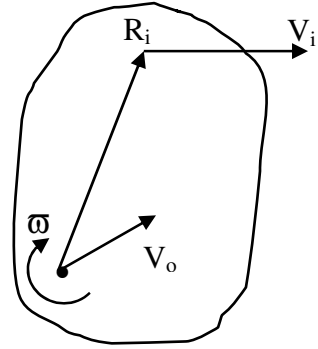


### Centro instantáneo de rotación

El movimiento más general de un sólido es el rototraslatorio que se reduce a una rotación  $\omega$  aplicada en un punto O y una traslación  $v_o$ . Si el movimiento es plano;

$\omega$  debe ser perpendicular al plano  $\pi_o$  y  $\vec{v}_o$  paralelo al mismo. Entonces un punto cualquiera  $R_i$ , tendrá velocidad:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_o + \omega \times (\overline{R_i - O}) \quad (\text{Ec. 1})$$



Siempre existirá un punto "C" donde:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_o + \omega \times (\overline{C - O}) = 0$$

O sea un punto de velocidad nula.

Como "C" tiene velocidad nula.

Tomando como polo de reducción "C":

$$\vec{V}_i = \vec{V}_o + \omega \times (\overline{R_i - C})$$

Igualando (1) y (2)

$$\vec{V}_o + \omega \times (\overline{R_i - O}) = \omega \times (\overline{R_i - C})$$

$$\vec{V}_o + \omega \times [(\overline{R_i - O}) - (\overline{R_i - C})] = 0$$

$$\vec{V}_o + \omega \times (\overline{C - O}) = 0$$

multiplicando por  $\omega$

$$\omega \times \vec{V}_o + \omega \times \omega \times (\overline{R_i - O}) = \omega \times \omega \times (\overline{R_i - C}) = 0$$

$$\omega \times \vec{V}_o = -\omega \times \omega \times (\overline{C - O})$$

$$(\overline{C - O}) = \frac{\omega \times \vec{V}_o}{\omega^2} \quad (3)$$

$(\overline{C - O})$  da la ubicación del centro de rotación "C".

Las coordenadas respecto del polo "O"

$$\omega = \omega \cdot \vec{k}$$

$$(\overline{C - O}) = X_c \cdot \vec{i} + Y_c \cdot \vec{j}$$

$$\vec{V}_o = V_o \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + V_o \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

resolviendo (3)

$$X_c = \frac{V_o}{|\omega|} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$Y_c = \frac{V_o}{|\omega|} \cdot \text{cos } \alpha$$

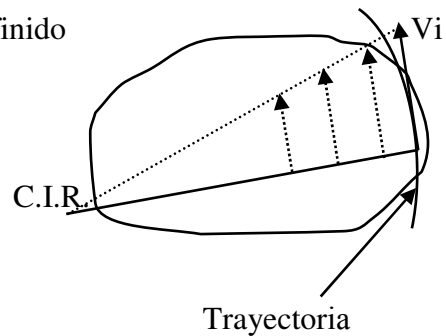
coordenadas del centro instantáneo de rotación

### Propiedades del Centro instantáneo de rotación

El CIR tiene velocidad nula. El mismo está definido para un instante determinado.

En otro instante la ubicación del CIR cambia:

- En cada instante las normales de las trayectorias que describen los puntos de la trayectoria de la figura móvil pasan por el CIR.
- La velocidad de un punto cualquiera es normal a la recta que lo une con el CIR.



### Trayectorias polares

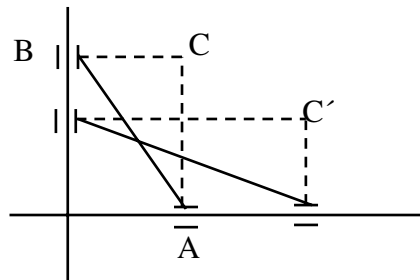
Supongamos dos planos superpuestos, uno de ellos sostiene la figura móvil, el otro fijo. Si marcamos sobre los dos planos, las ubicaciones del CIR (o polo de velocidades), obtendremos dos curvas: una sobre el plano fijo llamado base; y otra sobre el plano móvil llamada ruleta.

O sea que se puede reproducir el movimiento, mediante el rodar sin resbalar de la ruleta sobre la "base".

### Ejemplo

Consideremos la barra AB que se mueve de tal manera que el punto A se desliza sobre el eje x y el punto B sobre el eje y.

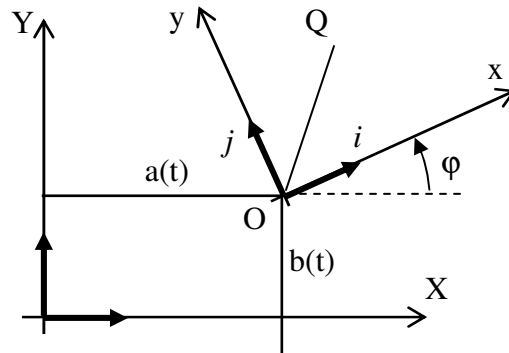
$AB=l$



Trazando por A y por B las normales a las trayectorias, en su intersección obtenemos el CIR. Si trazamos para cada posición obtendremos la curva "base", en este caso una circunferencia de radio  $l = (AB)$ .

Las distintas posiciones del punto CIR respecto de un sistema solidario con la barra, describe la curva "ruleta" en este caso es una circunferencia de diámetro  $l$ .

### Deducción de la ecuación de la base



$a(t)$  y  $b(t)$  son las coordenadas del origen  $O$  del sistema  $xy$  solidario a la figura móvil.

$a$  y  $b$  son funciones del tiempo

$\varphi$ : parámetro

La velocidad de un punto  $Q$  respecto del sistema fijo

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_O + \omega \times (\vec{Q} - \vec{O})$$

Si en particular tomamos el centro instantáneo de rotación "C"  $\vec{V}_C = 0$  por definición de centro instantáneo de rotación.

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_O + \omega \times (\vec{Q} - \vec{O}) = 0$$

$$\vec{V}_O = \frac{dQ}{dt} \cdot \vec{I} + \frac{db}{dt} \cdot \vec{J}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\omega} \cdot \vec{k} & \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} \\ (\vec{C} - \vec{O}) &= (X_c - a) \cdot \vec{I} + (Y_c - b) \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

donde  $X_c$  y  $Y_c$  son las coordenadas del punto "C" referido al sistema fijo.

O sea

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \begin{bmatrix} I & J & K \\ 0 & 0 & \frac{d\varphi}{dt} \\ (X_c - a) & (Y_c - b) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Sus proyecciones son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} \cdot (Y_c - b) &= 0 \\ \frac{db}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot (X_c - a) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y_c &= b + \frac{da}{d\varphi} \\ X_c &= a - \frac{db}{d\varphi} \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\frac{da}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{da}{d\varphi} \quad ; \quad \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{db}{d\varphi}$$

Nos queda

$$Y_c = b + \frac{da}{d\varphi}$$

$$X_c = a - \frac{db}{d\varphi}$$

(4) Ecuaciones paramétricas de la base

#### Deducción de la ecuación de la rodante

La coordenadas vectorial de la rodante respecto del sistema móvil es  $\overline{(C - O)}$

$$\overline{(C - O)} = \overline{(C - O')} - \overline{(O - O')}$$

Llamando  $X_c$   $Y_c$  a las coordenadas de C en el sistema móvil.

Tendremos:

$$X_c \cdot \vec{i} + Y_c \cdot \vec{j} = X_c \cdot \vec{I} + Y_c \cdot \vec{J} - a\vec{I} - b\vec{J}$$

Proyectando sobre los ejes móviles para lo cual multiplicamos escalarmente ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\vec{i} : (\cos \varphi \cdot \vec{I} + \sin \varphi \cdot \vec{J})$$

$$\vec{j} : (-\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \vec{J})$$

nos queda:

$$X_c = (X_c - a) \cdot \cos \varphi + (Y_c - b) \cdot \sin \varphi$$

$$Y_c = -(X_c - a) \cdot \sin \varphi + (Y_c - b) \cdot \cos \varphi$$

reemplazando (4)

$$\begin{aligned}
 X_c &= -\frac{db}{d\varphi} \cdot \cos \varphi + \frac{da}{d\varphi} \cdot \sin \varphi \\
 Y_c &= \frac{db}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + \frac{da}{d\varphi} \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Ecuaciones paramétricas de la ruleta.

### Velocidad de alternación del centro instantáneo de velocidad

Hemos definido el centro instantáneo de velocidad o polo de velocidades, a aquel punto que en cada instante se cumple.

$V_i = \omega \overline{(R_i - C)}$  Es decir, el plano móvil gira en un movimiento de rotación pura respecto de "C".

Este punto singular está definido para cada instante en un punto del plano fijo.

La posición de este punto varía de instante en instante.

Las distintas posiciones de dicho punto referida al sistema fijo constituyen la base.

Podemos decir que el Centro instantáneo recorre la base.

Simultáneamente, referido al sistema solidario con el plano móvil, el CIR recorre la ruleta.

La velocidad con que el polo de velocidades recorre la base, se denomina "velocidad de alternación del polo de velocidades".

$$V_c : (V_{xc}, V_{yc})$$

Las componentes de esta velocidad, teniendo presente las ecuaciones de base

$$\begin{cases}
 X_c = b + \frac{da}{d\varphi} \\
 Y_c = a - \frac{db}{d\varphi}
 \end{cases}$$

Nos queda:

$$\begin{cases}
 V_{x_c} = \dot{X}_c = \frac{db}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{da}{d\varphi} \right) \\
 V_{y_c} = \dot{Y}_c = \frac{da}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{db}{d\varphi} \right)
 \end{cases}$$

### Estado de aceleración en el movimiento plano

La velocidad de un punto cualquiera es:

$$\frac{dRi}{dt} = \omega \overline{(Ri - C)}$$

Donde "C" es el centro instantáneo de rotación

Derivando respecto del tiempo

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \overline{(Ri - C)} + \omega \left( \frac{dRi}{dt} - \frac{dc}{dt} \right)$$

o bien

$$\frac{d^2 Ri}{dt} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{Ri - C}) + \omega x[\omega x(\overline{Ri - C})] - \omega x V_c$$

$$\boxed{\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{Ri - C}) - \omega^2 .(\overline{Ri - C}) - \omega x V_c}$$

Donde:

$V_c$  : velocidad de alternación del polo.

$\frac{d^2 Ri}{dt^2}$  : aceleración total del punto Ri

$\frac{d\omega}{dt}$  : aceleración angular

C: coordenada del polo de velocidades

### Polo de aceleraciones

La expresión de aceleración para un punto cualquiera

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{Ri - C}) - \omega^2 .(\overline{Ri - C}) - \omega x V_c \quad (1)$$

Buscamos un punto de aceleración nula

$$\frac{d^2 C_o}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{C_o - C}) - \omega^2 .(\overline{C_o - C}) - \omega x V_c = 0 \quad (2)$$

restando (2) (1)

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{Ri - C_o}) - \omega^2 .(\overline{Ri - C_o})$$

que es la derivada con respecto al tiempo de:

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{Ri - C_o})$$

respecto de las aceleraciones todo acontece como si la figura móvil tuviese un movimiento de rotación pura en torno a  $C_o$ .

Este punto  $C_o$  se denomina polo de las aceleraciones.

### Coordenadas del polo de aceleraciones

Por definición de polo de aceleraciones

$$\frac{d^2 C_o}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} x(\overline{C_o - C}) - \omega^2 .(\overline{C_o - C}) - \omega x V_c = 0$$



$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \check{k} \quad V_c = V_{x_c} \check{i} + V_{y_c} \check{j}$$

$$\omega = \omega \check{k} \quad (\overline{C_o - C}) = X_o \check{i} + Y_o \check{j}$$

reemplazando

$$\begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ X_o & Y_o & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 (X_o \check{i} + Y_o \check{j}) - \begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_{x_c} & V_{x_c} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Obtenemos:

$$\check{i} \left( -Y_o \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 X_o + V_{y_c} \cdot \omega \right) = 0$$

$$\check{j} \left( X_o \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 Y_o + V_{x_c} \cdot \omega \right) = 0$$

cuya solución da los valores de  $X_o$  y  $Y_o$ . En particular si la aceleración  $\frac{d\omega}{dt} = 0$

$$X_o = \frac{V_{y_c}}{\omega}$$

$$Y_o = -\frac{V_{x_c}}{\omega}$$



## ***Unidad 4: Dinámica de la Partícula***

### **Principio de Inercia (1º Ley de Newton)**

“Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que sea obligado a cambiar de estado por fuerzas que actúan sobre él”

Es equivalente a expresar que “es posible adoptar por lo menos un sistema de referencia, para el cual toda partícula aislada continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme”.

Recuerde se denomina partícula a todo cuerpo cuyas dimensiones y orientación resultan despreciables en la descripción de su movimiento.

A los sistemas de referencia en reposo o que se desplazan con movimiento rectilíneo y uniforme (es decir, no acelerado) se los denomina Sistemas de referencia inerciales.

Una partícula aislada es aquella que no interactúa con otras o sea, no está afectada por las acciones (“fuerzas”) que estas otras pudieran ejercer sobre ella.

### **Principio de masa (2º Ley de Newton)**

“La derivada de la cantidad de movimiento respecto del tiempo es proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo y tiene su dirección y sentido”.

Siendo  $\vec{p} = m \vec{v}$  la “cantidad de movimiento” o “momento lineal”

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

### **Principio de Acción y Reacción (3ª Ley de Newton)**

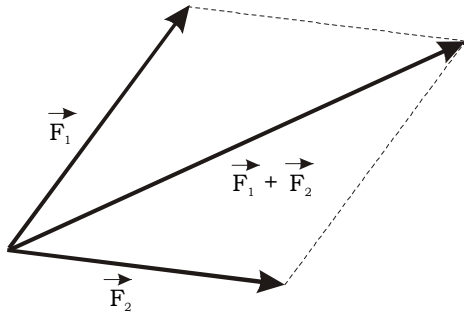
“A toda acción ejercida sobre una partícula se opone una reacción igual y de sentido contrario que ejerce la propia partícula”.

Se refiere a la interacción entre dos partículas y en otras palabras señala que toda vez que una partícula ejerce una fuerza sobre otra, ésta ejerce sobre la primera una fuerza de igual intensidad y dirección pero de sentido contrario.

### **Principio de independencia de acción de fuerzas**

“Todo cuerpo, bajo la acción conjunta de dos fuerzas, describe la diagonal del paralelogramo en el mismo tiempo que emplearía en describir los lados del mismo, bajo la acción de cada una de las fuerzas”.

Si dos o más fuerzas actúan sobre una partícula, la aceleración resultante es igual a la suma de las aceleraciones que adquiriría si cada una de aquellas actuara aisladamente.



Este principio expresa el de superposición de efectos.

### Movimiento unidimensional de la partícula

En este apartado se estudia el movimiento de una partícula de masa  $m$  a lo largo de una recta. Al quedar de tal modo definida la dirección, es habitual prescindir del tratamiento vectorial de los distintos elementos que intervienen. El tratamiento vectorial es de todos modos, general, y es estrictamente indispensable, en el estudio del movimiento curvilíneo, es decir, en dos o en tres dimensiones.

Según el Principio de Masa:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m v) = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) = m \frac{d^2x}{dt^2} = F = m a$$

Expresiones válidas para un partícula cuya masa se acepta como constante.

Este principio, expresado como  $\frac{dp}{dt} = F = m a$  constituye la Expresión diferencial del

Momento Lineal, cuya integración conduce a:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

Que es la expresión integral del Teorema del momento lineal.

$\int_{t_1}^{t_2} F dt$  se denomina impulso de  $F$ , o impulso suministrado por la fuerza  $F$ .

La expresión  $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$  es la “Ecuación fundamental de la Dinámica”, y es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es  $x = x(t)$ , y en la que  $F$  puede ser función de  $t$  (fuerza variable en el tiempo),  $x$  (Fuerza que depende de la posición) o de  $v$  (Fuerza que depende de la velocidad).

A partir de  $F = m \frac{dv}{dt}$ , se puede expresar  $Fv = mv \frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow Fv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

Que es la “Expresión diferencial del Teorema de la Energía”. En esta última expresión

$T = \frac{1}{2} mv^2$  se define como Energía Cinética de la partícula.

La forma integral del Teorema de la Energía es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F v dt$$

En la expresión recuadrada, los términos que intervienen representan:

$\int_{t_1}^{t_2} F v dt$  : Trabajo realizado por la fuerza F entre  $t_1$  y  $t_2$ .

$F v$  : Potencia suministrada por la fuerza F.

Así,  $T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$

La Ecuación General de la Dinámica,  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$  permite abordar los dos grandes grupos de problemas del estudio del movimiento, a saber:

A) Conocidas las fuerzas o acciones de otras partículas o cuerpos sobre una partícula dada, obtener la descripción completa del movimiento, identificando para todo instante, la posición, la velocidad y la aceleración resultantes (Proceso de integración).

B) Conocida la “ley del movimiento”, o sea,  $x(t)$ , determinar (además de la velocidad y la aceleración) la fuerza resultante o acción que la determina (Proceso de derivación).

Como se ha dicho, la fuerza F puede ser función de una o más variables, por ejemplo:  $F(x, \dot{x}, t)$  o de una combinación de ellas, pudiendo inclusive existir relaciones funcionales que las ligen entre sí.

Ejemplos:

- ✓ La fuerza de rozamiento es función de la velocidad.
- ✓ La fuerza ejercida sobre un cuerpo cargado por un campo electrostático dependiente del tiempo.
- ✓ La fuerza ejercida por el campo gravitatorio sobre una masa y la fuerza de recuperación elástica son funciones de la posición.
- ✓ La fuerza de resistencia del aire, en general, es función de la posición y de la velocidad.

Finalmente, la solución de la ecuación  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$  requiere los conocimientos de

condiciones iniciales o de referencia, es decir, conocer los valores que asumen  $x$  y  $\dot{x}$  para un determinado y conocido instante  $t_0$ .

Es decir: 
$$\begin{cases} \text{para } t = t_0 \\ x = x(t_0) = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

**Caso de Fuerza dependiente del tiempo, únicamente**

La ecuación  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$  se expresa como  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$ , y siendo  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ,

Será  $m \frac{dv}{dt} = F(t)$ , EDO de primer grado (requiere el conocimiento de una condición inicial, en este caso,  $v(0)$ ). Esta EDO se puede resolver por separación de variables seguida de un proceso de integración, o utilizando transformada de Laplace.

Por separación de variables:

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) \Rightarrow m \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F(t) dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \left( \frac{1}{m} \right) \int_{t_0}^t F(t) dt$$

Conocido  $v(t)$ , y siendo  $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)dt \Rightarrow (x - x_0) = \int_{t_0}^t v(t)dt$ , y reemplazando

$$v(t) \text{ será } \boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \left( \frac{1}{m} \right) \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt}$$

### Caso de Fuerza dependiente de la velocidad, únicamente

En este caso, es  $F = F(v)$ , y se supone conocida esta relación funcional.

La ecuación general se expresa como:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \text{ y separando variables: } \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \left( \frac{1}{m} \right) \int_{t_0}^t dt = \left( \frac{1}{m} \right) (t - t_0)$$

Siendo  $F(v)$  conocida,  $\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \varphi(v)$ . En principio, siempre es posible obtener  $\varphi(v)$  t de

ésta, despejar  $v$ . Entonces, resultará  $v(t) = \psi(v_0, \frac{t - t_0}{m})$ , y conocidos  $v_0, t_0, m$  es  $v = \psi(t)$ .

Conocida la relación funcional entre la velocidad y el tiempo, se puede obtener la ley del movimiento. Para esto, se parte de  $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^t \psi(t) dt$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \psi(t) dt}$$

### Caso de Fuerza dependiente de la Posición, únicamente

Para este caso, la ecuación general queda expresada como:  $m \frac{dv}{dt} = F(x)$

Multiplicando ambos miembros por  $dx$ :  $m \frac{dv}{dt} dx = F(x) dx \Rightarrow mv dv = F(x) dx$ .

Integrando entre las posiciones  $x_0$  y  $x$ , y para  $v_0$  y  $v$ :

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{v_0}^v mv dv \quad [I]$$

donde  $x_0, v_0$  son la coordenada y velocidad en un punto de referencia  $P_0$   
 $x$  y  $v$  son la coordenada y velocidad en un punto genérico  $P$ .

$\int_{x_0}^x F(x) dx$  es el trabajo de la fuerza  $F(x)$  al pasar de  $x_0$  a  $x$ ,

**Definición de Energía Potencial:** Es el trabajo necesario para llevar una partícula desde un punto genérico hasta el punto que se considera como de referencia.

Esto se expresa:  $V(x) = \int_x^0 F(x) dx = - \int_0^x F(x) dx$

Utilizando el potencial, la expresión [I] resulta:

$$\int_{x_0}^x F(x)dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0) - V(x) \quad [ II ]$$

Si la fuerza que actúa sobre la partícula realiza trabajo positivo, ello representará en una disminución de la función  $V(x)$  (Energía Potencial).

Siendo  $(1/2)mv^2 = T(x)$ , la Energía Cinética, la expresión [ II ] se puede escribir:

$$\boxed{T(x) + V(x) = T(x_0) + V(x_0) = \text{Constante} = E} \quad [ III ]$$

donde  $E$  es la Energía mecánica total del sistema.

[ III ] expresa la ley (teorema) de la conservación de la energía mecánica total, y significa que si la fuerza depende solo de la posición, la totalidad del trabajo se produce a expensas de la energía potencial y da lugar al incremento de la energía cinética.

Un sistema de fuerzas que satisface [ III ] se dice es conservativo, y es condición que la fuerza dependa solo de la posición.

Cuando aparecen fuerzas que no dependen solo de la posición, aparecen otras formas de energía, y se dice que intervienen fuerzas “disipativas”, y el sistema será no conservativo.

$$\text{De } T(x) + V(x) = E \quad \Rightarrow \quad (1/2)mv^2 + V(x) = E \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\text{y siendo } v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_0}^t dt = (t - t_0)$$

La ley de movimiento podría obtenerse resolviendo la integral y despejando  $x(t)$ .

Teniendo presente que  $V(x) = - \int_{x_0}^x F dx$  resulta:

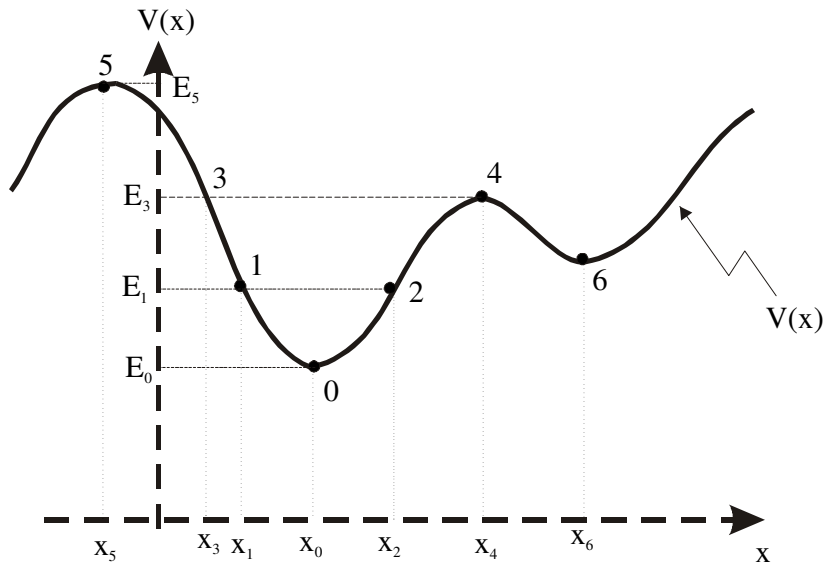
$$- \frac{dV(x)}{dx} = F(x)$$

Es decir que la energía potencial es una función escalar cuya derivada, cambiada de signo, da la fuerza. De aquí surge que todo punto cuya coordenada cumpla que  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ , al hacer  $F(x) = 0$ , constituye un punto de equilibrio.

No debe perderse de vista el carácter escalar del potencial, y el carácter vectorial de la fuerza. La última expresión,  $\frac{dV(x)}{dx}$  es la componente en  $x$  (coordenada a la que hemos restringido el movimiento en este estudio) del *Gradiente* de  $V(x)$ . (Se sabe que el gradiente asigna a un campo escalar un vector cuya dirección es la dirección de máxima variación, y cuyo módulo es el valor de la máxima derivada).

### Curvas de Potencial

Para un movimiento unidimensional, es posible graficar  $V(x)$  en función de  $x$ .



La ecuación  $\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_0}^t dt = (t - t_0)$  expresa que, para una energía dada  $E$ , la partícula sólo puede evolucionar en un intervalo en que  $V(x) \leq E$ . El análisis de la curva, de tal modo, conduce a las siguientes conclusiones:

- ✓ Si la energía inicial es  $E = E_0$ , la partícula sólo podrá permanecer en  $x_0$ . Allí estará en un punto de equilibrio: la tangente geométrica a la curva es horizontal, y ello indica que  $\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ .
- ✓ Los puntos 4, 5 y 6 corresponden a las coordenadas  $x_4, x_5$  y  $x_6$  para las que igualmente se verifica equilibrio de fuerzas.
- ✓ Si las condiciones iniciales condujeran a un nivel de energía  $E = E_1$ , el movimiento de la partícula quedaría confinado entre  $x_1$  y  $x_2$ .
- ✓ Como  $E = V(x) + T(x)$  se tendría, si se adopta como nivel de referencia  $V(x_0) = 0$ , que:
  - en  $x_0$ ,  $E_1 = T(x_0)$  : La energía es enteramente cinética y además,  $T(x)$  alcanza su valor máximo.
  - en los puntos 1 y 2,  $E_1 = V(x_1) = V(x_2)$ : La energía es enteramente potencial, y esta es máxima para el intervalo  $[x_1, x_2]$ .
  - La velocidad disminuye al acercarse a  $x_1$  o a  $x_2$ , puntos de retorno. El movimiento cesa y se invierte su sentido al alcanzarlos. El tramo  $[x_1, x_2]$  suele denominarse “valle de potencial”.
- ✓ Para que la partícula pueda alcanzar la posición  $x_4$ , la energía inicial debería alcanzar a  $E = E_2$ . En  $x_4$ , la partícula podrá o bien regresar hacia el valle de  $x_0$ , o escapar hacia el valle de  $x_6$ .

### Estados de Equilibrio

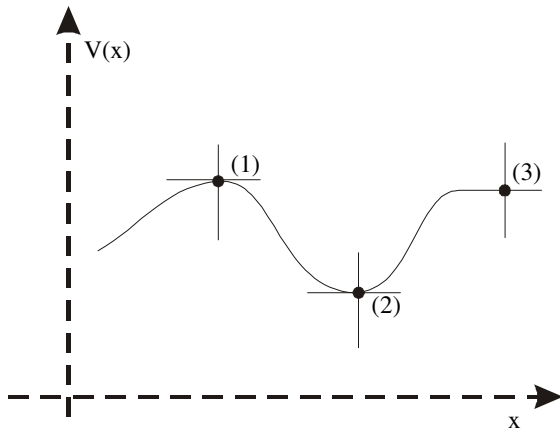
De particular interés resulta el análisis de las situaciones de equilibrio, el carácter del mismo, y las condiciones de su existencia, para fuerzas actuantes dependientes de la



posición. Se ha dicho que los estados de equilibrio se presentan donde las fuerzas aplicadas sobre la partícula son nulas, o sea  $F(x) = 0$ .

Siendo  $-\frac{dV(x)}{dx} = F(x)$ , las condiciones necesarias y suficientes para que la

partícula se encuentre en un punto de equilibrio, es que dado  $V(x)$ ;  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ .



Los puntos (1), (2) y (3) cumplen con la condición  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ , y se denominan puntos de equilibrio.

Desarrollando  $\frac{dV(x)}{dx}$  en series de potencias:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \left( \frac{dV(x)}{dx} \right)_0 + \left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 x + \frac{1}{2} \left( \frac{d^3V(x)}{dx^3} \right)_0 x^2 + \dots$$

Despreciando los términos de orden superior y considerando el origen de coordenadas en el punto donde  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$  queda:

$$-\frac{dV(x)}{dx} = - \left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 x = F$$

En el punto  $x_0$  en que se verifica  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ ,  $\left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0$  puede adoptar un valor  $>0, <0$  o igual a 0. Ello conduce a los siguientes casos:

1. Equilibrio Estable:

Si  $\left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 > 0$ , la ecuación general del movimiento es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = - \left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m} \left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 x = 0$$

llamando  $\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0$ , se puede reescribir la ecuación como:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{cuya solución es del tipo } x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

El movimiento así descrito es armónico y ocurre en torno del punto de equilibrio; A y  $\theta$  dependen de las condiciones iniciales.

La condición  $\left( \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)_0 > 0$ , en un punto donde  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$ , implica que el punto en

cuestión es un mínimo relativo. Puede expresarse entonces que si la función potencial posee un mínimo en el punto de equilibrio, entonces este es estable. Implica que si una partícula es alejada del punto de equilibrio, tiende a retornar.

## 2. Equilibrio Inestable

Si  $\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 < 0$ , la ecuación general del movimiento es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x = 0$$

llamando  $\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0$ , se puede reescribir la ecuación como:

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$$

La solución a esta ecuación diferencial se puede expresar como:

$$x(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  dependen de las condiciones iniciales. En esta expresión, los coeficientes de las exponenciales son positivos, lo que se interpreta de la siguiente manera: apartada la partícula de su posición de equilibrio, la partícula tiende a alejarse indefinidamente.

Las condiciones de equilibrio para un punto de equilibrio inestable son:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = 0 \\ \frac{d^2V}{dx^2} < 0 \end{cases} \quad \text{condición de máximo en la curva de potencial.}$$

## 3. Equilibrio indiferente.

$$\text{Si } \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 = 0 \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = F = \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (\text{La fuerza actuante es nula})$$

Esta última ecuación diferencial tiene por solución  $x(t) = C_1 t + C_2$ , donde las constantes dependen de las condiciones iniciales. Esta ecuación corresponde a un movimiento a velocidad constante, lo que resulta lógico pues la fuerza que se ejerce sobre la partícula es nula.

Las condiciones de equilibrio indiferente son entonces:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = 0 \\ \frac{d^2V}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad \text{En la curva de potencial, indican potencial constante.}$$

## Movimiento Curvilíneo de la Partícula

Consiste en el estudio del movimiento en dos o tres dimensiones. Es imprescindible el tratamiento vectorial de los distintos elementos intervinientes.

Según el Principio de masa:

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad [1]$$

Por el principio de independencia, o de Superposición de efectos:

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ , donde  $\vec{F}_i$  son las fuerzas actuantes sobre la partícula y  $\vec{F}$ , la Resultante,

o fuerza equivalente a la acción combinada del conjunto  $\vec{F}_i$ .

Para un tratamiento en coordenadas cartesianas, la ecuación [ 1 ] es equivalente al tratamiento simultáneo de:

$$m \ddot{x} = F_x \quad m \ddot{y} = F_y \quad m \ddot{z} = F_z \quad [ 2 ]$$

puesto que  $m \vec{a} = m(\ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$

En coordenadas intrínsecas:

$$m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N} = F_T \mathbf{T} + F_N \mathbf{N} \quad F_B = 0$$

La fuerza  $\vec{F}$  es en general,  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

La integración del sistema de 3 ecuaciones diferenciales de 2º orden como [ 2 ], genera 6 constantes arbitrarias, y plantea el conocimiento de condiciones iniciales  $\vec{r}_0$  y  $\vec{v}_0$ . La resolución es laboriosa, aunque se siguen los mismos lineamientos desarrollados para el caso unidimensional. Particularmente si ocurre la independencia dimensional dada por:

$$F_x = F_x(\dot{x}, x, t)$$

$$F_y = F_y(\dot{y}, y, t)$$

$$F_z = F_z(\dot{z}, z, t)$$

Las tres ecuaciones resultan independientes entre sí y el tratamiento en x, y o z es similar al ya estudiado.

A continuación, se presenta un resumen de las expresiones vectoriales, válidas para dos y tres dimensiones, de los teoremas enunciados:

### Cantidad de Movimiento o Momento Lineal:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Principio de Masa:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \vec{F}$$

Impulso de  $\vec{F}$  (Teorema del Momento Lineal, forma integral):

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Teorema de la Energía (forma integral)

$$T_2 - T_1 = (1/2)m \left( \left| \vec{v}_2 \right| \right)^2 - (1/2)m \left( \left| \vec{v}_1 \right| \right)^2 = \int_a^b \vec{F} \bullet \vec{dr}$$

Teorema de la Energía (Forma diferencial)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

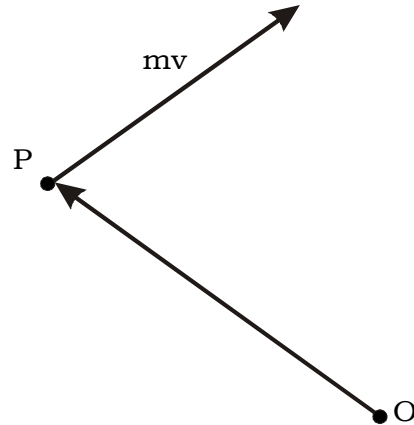
## Momento Angular o Momento Cinético

Es el momento del vector Momento lineal de la partícula, respecto de un punto O.

Sea  $\vec{p} = m \vec{v}$  el momento angular de la partícula P de masa m y  $\vec{v}$  la velocidad respecto del punto "O" se define

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como el momento angular es entonces el vector perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ . En el caso de un movimiento en el espacio, este vector cambiará de módulo y dirección a medida que la partícula se desplace.



Un caso particular se da cuando la partícula se mueve en un plano y el punto "O" está contenido en el mismo, en este caso, el vector momento angular será siempre perpendicular al plano.

Derivando el momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

como  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = 0$  por ser paralelos

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = m \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m (\vec{r} \times \vec{F})} \text{ Forma diferencial del Teorema del momento cinético:}$$

La variación en el tiempo del momento angular respecto de un punto "O" es igual al momento de la fuerza actuante sobre la partícula respecto de "O".

La forma integral de este teorema es:  $\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r} \times \vec{F}) dt}$

## ***Unidad 4: Vínculos o Ligaduras.***

Hasta aquí se ha analizado el movimiento libre de la partícula. A la acción de las fuerzas exteriores, ella responderá sin condicionamientos.

Cuando aparecen restricciones al movimiento, aquella libertad queda condicionada. Estas condiciones se materializan a través de vínculos o ligaduras.

Se llama vínculo a cualquier sistema material capaz de impedir o condicionar el libre movimiento de una partícula o cuerpo.

Los vínculos pueden ser simples, dobles, etc, según eliminen uno, dos, etc., grados de libertad.

La eliminación de grados de libertad constituye restricciones que se imponen al movimiento. En consecuencia, tres ligaduras simples, convenientemente dispuestas, eliminan los tres grados de libertad de una partícula, produciendo su inmovilización.

Las restricciones al movimiento suelen presentarse cuando la partícula se halla condicionada a desplazarse sobre una curva o sobre una superficie. Constituyen casos de movimientos muy usuales, y de las más habituales aplicaciones prácticas. Representan el caso del MOVIMIENTO RESTRINGIDO.

Sobre una curva, el movimiento de la partícula se halla restringido en dos grados de libertad, pudiendo la partícula moverse únicamente según la ley  $R(s)$ , siendo  $q = s$  la coordenada que determina en cualquier instante la posición.

Sobre una superficie la posición de la partícula queda determinada por  $R = R(q_1, q_2)$ , o sea, función de dos coordenadas. El movimiento tiene dos grados de libertad, en consecuencia, restringir el movimiento a una superficie representa imponer una condición de vínculo.

Desde el punto de vista matemático, los vínculos se representan por relaciones de vínculos.

**Ejemplo 1:** Una partícula está obligada a deslizarse sobre un alambre cuyo eje describe una curva plana  $y = f(x)$ ,  $\forall x / a \leq x \leq b$ . Para P, el alambre constituye un vínculo mecánico, el que matemáticamente se expresa por la relación de vínculo:

$$y - f(x) = 0, a \leq x \leq b.$$

**Ejemplo 2:** Una partícula puede moverse *en el interior* de una esfera de radio  $r$ . Al poder ocupar cualquier posición dentro del volumen limitado por la superficie, incluido su contorno, la relación de vínculo resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x \leq r, y \leq r, z \leq r$$

**Ejemplo 3:** Una partícula está sujeta al extremo de una *varilla indeformable* de longitud  $L$ , y fija en su extremo opuesto  $P_0$ . La relación de vínculo para el sistema de referencia adoptado es:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = L^2$$

La partícula evolucionará siempre sobre una superficie esférica de radio  $L$ .

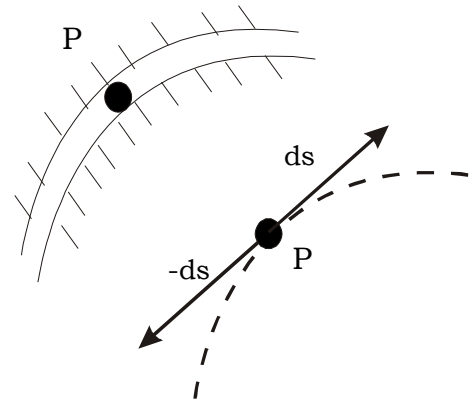
Observaciones:

1. La relación de vínculos expresa las posibilidades que tiene el movimiento, pero no caracteriza físicamente al vínculo. Así, una partícula sujeta a una cuerda inextensible de longitud  $l$ , constituye un vínculo físicamente diferente de los indicados en los ejemplos 2 y 3.
2. La relación de vínculo es, sin embargo, igual a la del ejemplo 2.
3. La expresión de la relación de vínculo depende del sistema de referencia que se adopte.

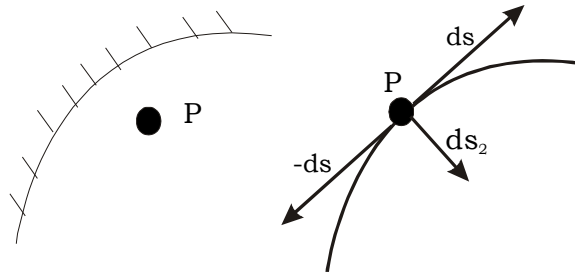
Las consideraciones precedentes permiten la siguiente agrupación: los vínculos mecánicos pueden ser completos o bilaterales, o incompletos o unilaterales.

El vínculo es completo cuando la partícula está obligada a permanecer en todo momento en contacto con él.

Matemáticamente, la relación de vínculo constituye una *ecuación o igualdad*. En este tipo de vínculo para cada desplazamiento  $ds$  es siempre posible que ocurra el opuesto  $-ds$ .



El vínculo es incompleto cuando solo impone una condición de frontera entre dos semiespacios y la partícula queda condicionada únicamente a no traspasarla, pudiendo evolucionar en cualquier punto del semiespacio habilitado. El contacto con la frontera es posible, pero no forzoso. Matemáticamente, la relación de vínculo constituye una *inecuación o desigualdad*. En estos casos, para algunos desplazamientos posibles  $ds_2$ , no son posibles sus opuestos  $-ds_2$ .



Los vínculos podrán ser **rugosos** o **lisos**, según introduzcan o no fuerzas disipativas de fricción o rozamiento.

También es posible considerar vínculos de naturaleza y acción dinámica variables o constantes en el tiempo.

### Reacciones de vínculos

La restricción al movimiento que introduce un vínculo, constituye una acción dinámica actuante sobre la partícula. Es decir, se materializa mediante fuerzas conocidas como Reacciones de vínculo. Así, los vínculos son responsables de la aparición de fuerzas reactivas, en tanto que a las restantes acciones actuantes sobre la partícula, se denominan fuerzas activas.

Son características de las reacciones de vínculo:

- ❖ dependen de las fuerzas activas actuantes.
- ❖ Si las fuerzas se anulan, las reacciones de vínculo se anulan.
- ❖ Las reacciones de vínculo no pueden, de por sí, producir movimiento.

Diagrama de cuerpo libre: esquema en que se representan todas las fuerzas actuantes: activas por interacción de la partícula con otros sistemas, y reactivas introducidas por los vínculos.

## Vínculos Rugosos. Rozamiento.

Se ha dicho que los vínculos rugosos son los que introducen fuerzas disipativas de rozamiento. Estas acciones se oponen al deslizamiento relativo entre partículas y vínculos, y se ejercen según la dirección tangencial.

Para describir las características del rozamiento de primera especie, es conveniente considerar un cuerpo (que se puede asimilar a una partícula) apoyado sobre una superficie rugosa que actúa como vínculo, y se puede señalar que:

- ◆ La magnitud de la fuerza de rozamiento es independiente de la extensión de la superficie de contacto.
- ◆ Depende de la naturaleza de las superficies en contacto.
- ◆ Es proporcional a la acción de las fuerzas activas normales a la superficie o vínculo.
- ◆ Equilibra cualquier componente tangencial de la fuerza exterior, es decir, impide desplazamientos, mientras no se supere el valor límite  $fN$ , en que  $f$  es el coeficiente de rozamiento estático (siempre menor que la unidad).

### El movimiento en presencia de vínculos

En presencia de vínculos, la ecuación general del movimiento se expresa por:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{\text{vin}} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{F}_a$  es la fuerza activa,  $\mathbf{F}_{\text{vin}}$  es la resultante de todas las reacciones de vínculos. Cada una de estas reacciones admite una descomposición  $(\mathbf{F}_{\text{vin}})_i = (\mathbf{F}_{\text{vin}}^T)_i + (\mathbf{F}_{\text{vin}}^N)_i$ , donde  $(\mathbf{F}_{\text{vin}}^T)_i$  es la reacción de vínculo tangencial y  $(\mathbf{F}_{\text{vin}}^N)_i$  la reacción de vínculo normal.

Cuando el vínculo es liso,  $(\mathbf{F}_{\text{vin}}^T)_i = 0$ , es decir, la reacción es normal a la superficie o curva en que se materializa el vínculo.

En vínculos rugosos  $(\mathbf{F}_{\text{vin}}^T)_i$  es debida a las fuerzas de fricción o rozamiento.

### Movimiento de una partícula sobre una curva lisa.

Para una curva lisa y fija se puede considerar el movimiento en coordenadas intrínsecas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ . La reacción de vínculo actúa en el plano normal a la trayectoria (tiene componentes según  $\mathbf{T}$  (versor Tangente) y  $\mathbf{N}$  (versor normal)). Entonces, si la fuerza activa es  $\mathbf{R} = R_t\mathbf{T} + R_n\mathbf{N} + R_b\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}$ =versor binormal)

Aplicando  $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{\text{vin}} = m\mathbf{a}$ ,

Tendremos las siguientes ecuaciones en componentes:

$$\begin{cases} F_t = m \ddot{s} \\ R_n + F_{\text{vin}}^N = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ R_b + F_{\text{vin}}^b = 0 \end{cases}$$

## Movimiento sobre una superficie lisa

Una superficie en el espacio está expresada por :  $f(x,y,z,t) = 0$  [1].

La superficie será fija cuando:  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . Si es lisa, debe ser  $(\mathbf{F}_{\text{vin}}) = (\mathbf{F}_{\text{vin}}^N) = \lambda \nabla f$ ,

donde  $\lambda$  es un escalar y  $\nabla f$  es el gradiente de  $f$ .

La ecuación fundamental es  $\mathbf{R} + (\mathbf{F}_{\text{vin}}^N) = \mathbf{R} + \lambda \nabla f = m\mathbf{a}$ , ( $\mathbf{R}$  es la fuerza activa) que se puede expresar en componentes:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad [2]$$

Mediante las ecuaciones [1] y [2] se puede resolver el movimiento si se conocen las condiciones iniciales  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ .

Existirá equilibrio toda vez que la resultante de las fuerzas activas sea nula, o bien normal a la superficie (caso de vínculo bilateral). En caso de vínculo incompleto, además es necesario que  $\mathbf{R}$  tenga un sentido único: el que posibilite presión de la partícula sobre la superficie.

## Dinámica Relativa de la Partícula

En Cinemática hablamos de Sistemas de Referencia Fijos y Móviles. En Dinámica, a su vez, distinguimos *Sistemas Inerciales* y *No Inerciales*. Entre los sistemas móviles basta una rotación de los mismos para que estén en acelerados y, en consecuencia, constituyen sistemas no inerciales.

En Cinemática Relativa, hemos establecido la relación entre la aceleración de la partícula referida a un sistema fijo cuando interviene además, al menos un sistema móvil (en el caso más general, animado de movimiento de rototraslación).

$$a|_F = a|_M + \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\omega} \times \mathbf{r}|_M + 2\omega \times \mathbf{v}|_M + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}|_M)$$

Por la ecuación fundamental de la dinámica:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  considerando a un sistema fijo como Inercial y al sistema en rototraslación como no inercial:

$$\mathbf{F} = m a|_F = m a|_M + m \ddot{\mathbf{R}} + m \dot{\omega} \times \mathbf{r}|_M + 2m \omega \times \mathbf{v}|_M + m \omega \times (\omega \times \mathbf{r}|_M)$$

En esta expresión, se define a:

$$\mathbf{F}|_M = m a|_M \quad (\text{masa x aceleración relativa})$$

$$\begin{aligned} \text{Fuerza inercial de arrastre: } & -(m \ddot{\mathbf{R}} + m \dot{\omega} \times \mathbf{r}|_M + 2m \omega \times \mathbf{v}|_M + m \omega \times (\omega \times \mathbf{r}|_M)) = \mathbf{F}|_A \\ & = (\text{masa x aceleración de arrastre}). \end{aligned}$$



Esta fuerza inercial de arrastre constituye una "fuerza correctiva que permite ajustar la ecuación fundamental cuando está referida a un sistema no inercial, o sea:

$$F|_M = ma|_M = F|_F - F|_A$$

La fuerza inercial de arrastre se compone de una de arrastre por traslación y otra de arrastre por rotación:

$$F|_A = F|_{A(\text{Traslación})} + F|_{A(\text{Rotación})}$$

$$F|_{A(\text{Traslación})} = -m\ddot{R}$$

$$F|_{A(\text{Rotación})} = - ( m\dot{\omega} \times r|_M + 2m\omega \times v|_M + m\omega \times (\omega \times r|_M) )$$

Entre los términos de la fuerza de arrastre por rotación, se distinguen:

$$2m\omega \times v|_M = \text{Fuerza de inercia de Coriolis.}$$

$$m\dot{\omega} \times r|_M = \text{Fuerza de inercia debida a la aceleración de la rotación.}$$

$$m\omega \times (\omega \times r|_M) = \text{Fuerza de inercia Centrífuga.}$$

### Principio de D'Alembert

Se trata de un Principio que permite plantear los problemas de dinámica en forma similar a problemas de estática, es decir mediante ecuaciones de equilibrio.

En el apartado anterior, se ha introducido el concepto de fuerza inercial, la cual surge de la multiplicación de la masa de la partícula por una aceleración.

En base a esta idea la ecuación de Newton

$$F = m a \text{ escrita como } F - m a = 0$$

Considerando ahora la cantidad  $-m a$  como una fuerza inercial  $F^{IN}$ , la ecuación anterior puede pensarse como una ecuación de equilibrio

$$F + F^{IN} = 0$$

Esta última ecuación permite tratar un problema de dinámica como uno de estática planteando la ecuación de movimiento como la indicada mas arriba.

Esto constituye la base del principio de D'Alembert para un sistema. Cabe resaltar que las ecuaciones basadas en este principio y las correspondientes a la segunda ley de Newton son enteramente equivalentes.



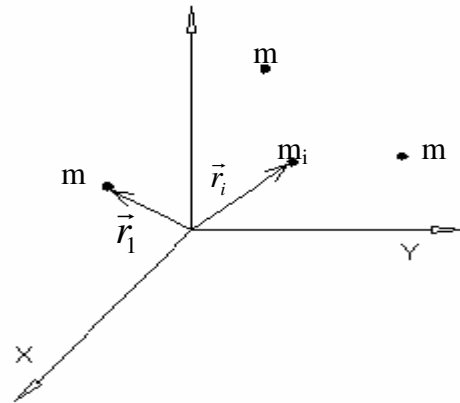
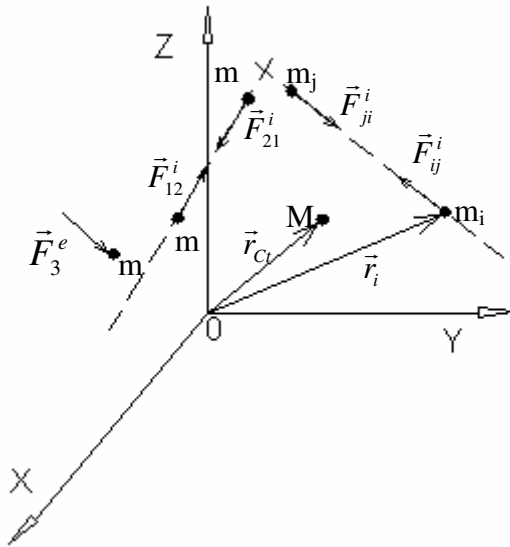
## Unidad 5: Dinámica de los Sistemas de Partículas . Parte I

### Introducción

Llamaremos sistema de partículas a aquel conjunto de puntos materiales ligados entre si a través de fuerzas internas.

Cada partícula posee una masa  $m_i$  y respecto de un sistema referencial se las ubica por sus vectores posición.

### Fuerzas Actuantes:



Sobre las partículas se encuentran actuando fuerzas. Estas pueden ser exteriores o internas:

1-1) *Fuerzas Exteriores* ( $F^e$ ): Proviene de la acción de sistemas o partículas no pertenecientes al sistema considerado.

1-2) *Fuerzas Internas* ( $F^i$ ): Son debidas a la acción mutua entre las partículas. Las fuerzas internas se presentan “de a pares”. Por el principio de acción y reacción  $F_{ij} = -F_{ji}$ ; o sea que la interacción entre partículas tiene para cada una igual intensidad y recta

de acción pero sentido contrario.

### Masa del sistema:

La masa total del sistema es:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad m_i: \text{ masa de cada partícula, o sea que queda definida como la suma total de las masas de las partículas.}$$

### Centro de masa:

Se define como momento de primer orden al producto de la masa por la distancia a un punto.

$$d_e = r_i * m_i$$

para todo el sistema:

$$D_e = \sum d_e = \sum r_i * m_i \quad i=1 \dots n$$

Podemos encontrar un punto tal que:

$$D_e = \sum r_i * m_i = M * r_g$$

$$r_{ei} = \frac{\sum r_i * m_i}{M_{ri}} = \frac{\sum r_i * m_i}{\sum m_i}$$

Se denomina centro de masa, y es un punto en el que se puede suponer concentrada toda la masa, respecto del momento de primer orden o momento estático.

Las coordenadas cartesianas del centro de masa son:

$$X_g = \frac{\sum x_i * m_i}{\sum m_i}$$

$$Y_g = \frac{\sum y_i * m_i}{\sum m_i}$$

$$Z_g = \frac{\sum z_i * m_i}{\sum m_i}$$

La ubicación del centro de masa es independiente del sistema referencial elegido.

### Cantidad de Movimiento:

Si cada partícula  $m_i$  se mueve con velocidad  $\vec{v}_i$ ; la cantidad de movimiento de cada partícula es:

$$\vec{p} = m_i * \vec{v}_i$$

Para todo el sistema es:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i * \vec{v}_i \quad i=1, \dots, n$$

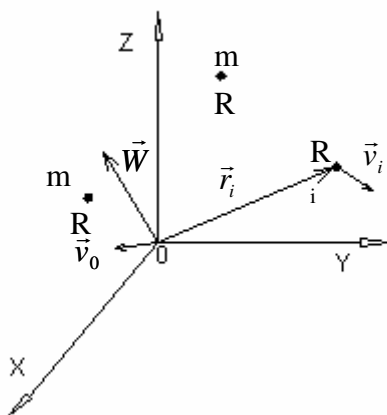
Sabemos que:

$$\vec{r}_G * M = \sum r_i * m_i$$

La posición de la partícula es función del tiempo; luego, derivando:

$$\dot{\vec{r}} * M = \vec{v}_G * M = \sum \dot{\vec{r}}_i * m_i = \sum \vec{v}_i * m_i = \vec{P}$$

Nos queda que:



$$\vec{P} = M * \vec{v}_G$$

Si el sistema de partículas se encuentra en un movimiento roto-traslatorio reducido al polo "O" la velocidad de la partícula  $m_i$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum m_i * \vec{v}_i \\ \vec{P} &= \sum m_i * \vec{v}_o + \sum m_i * w \times (R_i - O) \\ \vec{P} &= \vec{v}_o * \sum m_i + \sum m_i * w \times (R_i - O) \\ \vec{P} &= \vec{v}_o * M + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \end{aligned}$$

La cantidad de movimiento:

$$\sum m_i * w \times (R_i - O) = \vec{W} \times \sum m_i * (R_i - O) = \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Si el movimiento es una traslación pura:

$$\vec{W} = 0 \Rightarrow \vec{P} = M * \vec{v}_o$$

Si el polo de reducción se toma en el centro de masa, "O" coincide con "G" y:

$$\vec{r}_G = 0 \Rightarrow \vec{P} = M * \vec{v}_G$$

Y si es una rotación pura de "O" que no coincide con "G":

$$\vec{P} = M * \vec{W} \times \vec{r}_G$$

### Conservación de la cantidad de movimiento:

Aplicando el principio de inercia a cada partícula:

$$\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} = \dot{\vec{p}}_i = m_i * \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_{ij}^i$$

Sumando para todo el sistema:

$$\sum \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = \sum m_i * \dot{\vec{v}}_i = \sum \vec{F}_i^e + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}^i$$

Pero:

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}^i = 0 \quad \text{Por el principio de acción y reacción}$$

$$\sum \vec{F}_i^e = \vec{F}^e \quad \text{Fuerza exterior total}$$

Nos queda:

$$\vec{F}^e = \dot{\vec{P}}$$

"La suma de todas las fuerzas exteriores es igual a la derivada de la cantidad de movimiento del sistema respecto del tiempo".

$$\text{Si } \dot{\vec{P}} = \vec{F}^e = 0$$

$$\vec{P} = cte$$

Esta ecuación  $F_{ext} = M dv_G/dt$ , indica que dado un sistema de partículas, el centro de masas de dicho sistema se mueve como una partícula de masa igual a la masa total del sistema, sometida a una fuerza igual a la fuerza exterior total que actúa sobre el sistema.

Si la suma de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema no varía. Desde el punto de vista del centro de masas, esta continuará en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo: Dos masas que colisionan entre sí, en ausencia de fuerzas externas. Sea el choque elástico o plástico, la cantidad de movimiento se conserva porque no actúan fuerzas exteriores al sistema. En cuanto al centro de masas, esta posee movimiento rectilíneo uniforme antes de la colisión, y conserva su estado después. Si el choque es plástico, las dos masas unidas continúan en la trayectoria del centro de masa.

### Momento Cinético:

El momento cinético de una partícula respecto de un punto "O" es:

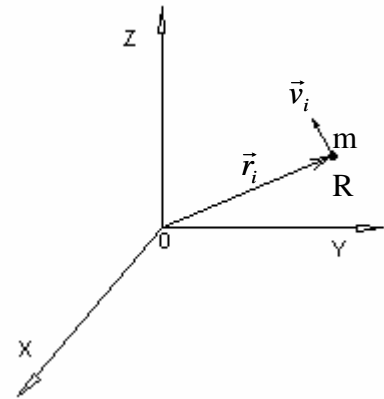
$$\vec{L}_i = (\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_i$$

Para un sistema de partículas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum [(\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_i]$$

Si el sistema se halla sometido a un movimiento roto-traslatorio con polo de reducción en "O"

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O})$$



El momento cinético total respecto de "O"

$$\vec{L} = \sum [(\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * (\vec{v}_o + \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O}))]$$

$$\vec{L} = \sum (\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_o + \sum m_i * (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O})$$

$$\vec{L} = \sum (\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_o + \sum m_i * (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O})$$

En esta ecuación tenemos:

$$\sum (\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_o = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o$$

Nos queda:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \sum m_i * (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O})$$

Llamaremos Momento Cinético de Rotación Pura ( $L_0$ ) a:

$$\vec{L}_0 = \sum m_i * (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{W} \times (\vec{R}_i - \vec{O})$$

Entonces:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{L}_0$$

### Conservación del momento cinético

Vimos que para cada partícula:  $\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} = \dot{\vec{p}}_i = m_i * \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_{ij}^i$

Tomando momento respecto de "O"

$$(\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{a}_i = (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{F}_i^e + (\vec{R}_i - \vec{O}) \times \vec{F}_{ij}^i$$

La expresión del momento cinético:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{L}_0 = \sum (\vec{R}_i - \vec{O}) \times m_i * \vec{v}_i$$

Derivando:

$$\frac{\partial L_0}{\partial t} + M * \dot{r}_G \times \vec{v}_o + M * r_G \times \dot{\vec{v}}_o = \sum \left( \frac{\partial R_i}{\partial t} + \frac{\partial O}{\partial t} \right) \times m_i * \vec{v}_i + \sum (R_i - O) \times m_i * \vec{a}_i$$

Llamando

$$\vec{M}^e = \sum (R_i - O) \times \vec{F}_i^e$$

$$\vec{M}^e = \sum (R_i - O) \times \vec{F}_{ij}^i = 0 \quad \text{Por principio de acción y}$$

reacción

Nos queda:

$$\vec{M}^e = M * \dot{r}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + \vec{v}_o \times \vec{p} + \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t}$$

Si el polo de reducción se elige en “O” = “Centro de masas”, el vector posición del centro de masas y sus derivadas serán nulas, y como la cantidad del movimiento puede expresarse en función de la velocidad del centro de masas, el tercer término de la ecuación se anula. Resulta entonces:

$$\vec{M}^e = \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t} \Rightarrow \vec{M}^e = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = Cte.$$

El momento angular de un sistema de partículas se mantiene constante si el momento exterior que actúa sobre el mismo es nulo.

Por otra parte, si el momento exterior no es nulo, como la derivada del momento angular respecto del tiempo es igual al momento exterior, se interpreta que la variación del momento angular coincide en dirección con el momento exterior.

Ejemplo: Considere el movimiento de un trompo que rota a gran velocidad sobre su eje. Si bien es una aproximación, se puede asumir que el momento angular coincide en dirección con el vector rotación del trompo. El momento exterior que actúa sobre el trompo es el debido al peso del mismo. El momento angular variará de manera tal que dL coincida en dirección con el torque. Se origina, por lo tanto, el movimiento de precesión, rotación alrededor de un eje vertical. La dirección del vector rotación de precesión depende de la dirección del vector rotación propia del trompo.

### Trabajo y Energía:

Si  $\vec{F}_i^e$  son las fuerzas actuantes sobre las partículas  $m_i$ ; en un desplazamiento elemental:

$$\partial T_i = \vec{F}_i * \partial \vec{r}_i \quad \text{Como } \partial \vec{r}_i = \vec{v}_i * \partial t$$

$$\partial T_i = \vec{F}_i * \vec{v}_i * \partial t$$

$$\partial T = \sum \vec{F}_i * \vec{v}_i * \partial t$$

Para un sistema roto-traslatorio

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

$$\partial T = \sum \vec{F}_i * \vec{v}_o * \partial t + \sum \vec{F}_i * (W \times (R_i - O)) * \partial t$$

$$\partial T = (\vec{F}^e * \vec{v}_o + M^e * \vec{W}) * \partial t$$

Dividiendo todo por “dt” obtenemos la potencia

$$P_w = \frac{\partial T}{\partial t} = (\vec{F}^e * \vec{v}_o + M^e * \vec{W})$$

Definimos a la energía cinética de un sistema como la suma de las energías cinéticas de las partículas que componen el sistema.

$$T_i = \frac{1}{2} * m_i * \vec{v}_i^2$$

Para todo el sistema

$$T = \sum \frac{1}{2} * m_i * \vec{v}_i^2$$

En un movimiento roto-traslatorio

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

$$T = \frac{1}{2} * \sum m_i * [\vec{v}_o + W \times (R_i - O)]^2$$

$$T = \frac{1}{2} * \left[ \sum m_i * \vec{v}_o^2 + \sum m_i * 2 * \vec{v}_o * (W \times (R_i - O)) + \sum m_i * (W \times (R_i - O))^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2 + \vec{v}_o * \sum m_i * (W \times (R_i - O)) + \frac{1}{2} * \sum m_i * (W \times (R_i - O))^2$$

1
2
3

1)  $T_1 = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2$     Energía cinética de traslación

3)  $T_3 = \frac{1}{2} * \sum m_i * (\vec{W} \times (R_i - O))^2 = \frac{1}{2} * \vec{W}^2 * \sum m_i * (\vec{e}_w^v \times (R_i - O))^2$

$(\vec{e}_w^v \times (R_i - O))^2$  : Cuadrado de la distancia

$I_w = \sum m_i * (\vec{e}_w^v \times (R_i - O))^2$  : Momento de inercia respecto del eje  $e_w$

Nos Queda  $T_3 = \frac{1}{2} * \vec{W}^2 * I_w$

2)  $T_2 = \vec{v}_o * \sum m_i * (W \times (R_i - O)) = \vec{v}_o * W \times \sum m_i * (R_i - O)$

$T_2 = M * (\vec{v}_o * W \times \vec{r}_G)$  : Energía cinética mixta

Esta cantidad se anula cuando el centro de referencia se encuentra en reposo, dado que para ese caso  $\vec{v}_o = 0$  o cuando coincide con el centro de masas, por ser  $\vec{r}_G$

En estos casos la expresión de la energía toma la forma simplificada

$$T = \frac{1}{2} M * \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} * W^2 * I_w$$



## Dinámica del Sólido Rígido

### Introducción:

Consideramos al sólido rígido como aquel cuerpo constituido por un sistema de partículas que cumplen con la condición de rigidez detenida, es decir, mantienen sus distancias relativas constantes.

### Masa del sólido rígido:

Para un sistema de partículas, la masa total es:

$$M = \sum_i m_i$$

Para el sólido rígido:

$$M = \int_v \rho * dv \quad \rho: \text{Densidad}$$

Se entiende que el proceso de integración se extiende a todo el volumen ocupado por el sólido, es decir, se involucra una integral triple en un marco referencial adecuado.

si  $\rho = \text{Cte.}$ : 
$$M = \rho * \int_v dv = \rho * V$$

### Centro de masa:

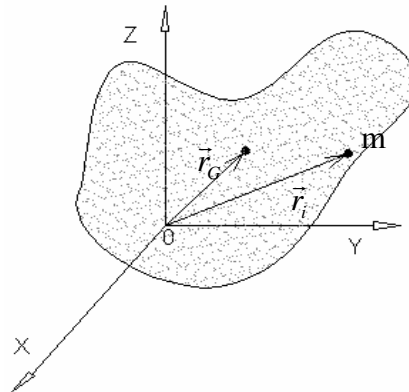
El momento de primer orden es:

$$D_e = \int_v m_i * r_i$$

Y el centro de masa:

$$M * \vec{r}_G = D_e = \int_v m_i * r_i$$

$$\vec{r}_G = \frac{\int_v \rho * r_i * dv}{\int_v \rho * dv}$$



### Cantidad de Movimiento:

Si el sólido se encuentra en movimiento rototraslatorio reducido al polo "O" la velocidad de cada punto será:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

La cantidad de movimiento total:

$$\vec{P} = \int_v \rho * dv * \vec{v}_i = \int_v \rho * dv * \vec{v}_o + \int_v \rho * dv * (W \times (R_i - O))$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * \int_v \rho * dv + W \times \int_v \rho * dv * (R_i - O)$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * M + W \times M * \vec{r}_G \quad (1) \quad \text{donde: } \int_v \rho * dv * (R_i - O) = D_e$$

$$D_e = M * \vec{r}_G$$

**Conservación de la cantidad de movimiento:**

Derivando (1):

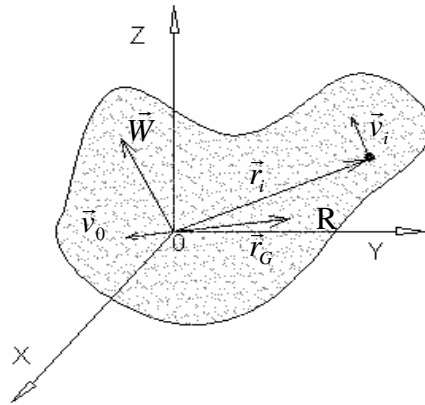
$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{a}_o * M + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G$$

Sabemos que la variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo es:

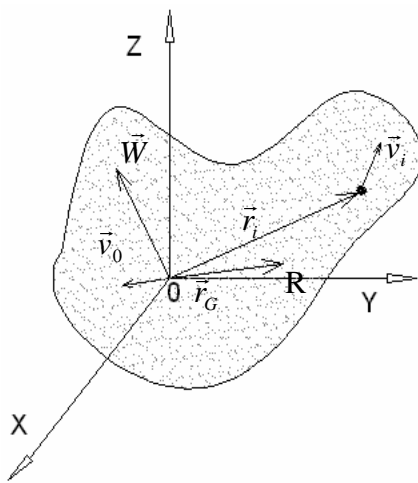
$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{F}_i^e = \vec{F}^e$$

Entonces nos queda:

$$\vec{F}^e = \vec{a}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \vec{v}_G$$



**Momento cinético:**



Para un sistema de partículas teníamos, en un movimiento rototraslatorio con polo de reducción en "O":

$$\vec{L} = \sum_i (R_i - 0) \times m_i * \vec{v}_i$$

Para un sólido:

$$\vec{L} = \int_v \rho * (\vec{r} \times \vec{v} * dv)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$$

Pero:  $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{W} \times \vec{r}$

Reemplazando, el movimiento cinético nos queda:

$$\vec{L} = \underbrace{\int_v \rho * \vec{r} \times \vec{v}_o * dv}_{\vec{L}_1} + \underbrace{\int_v \rho * \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) * dv}_{\vec{L}_2}$$

La primera integral ( $\vec{L}_1$ ) es:

$$\vec{L}_1 = \int_v \rho * \vec{r} \times \vec{v}_o * dv = -\vec{v}_o \times \int_v \rho * \vec{r} * dv = -\vec{v}_o \times M * \vec{r}_G$$

$\vec{L}_1 = -\vec{v}_o \times M * \vec{r}_G$  Se anula si  $\vec{v}_o = 0$  o cuando la reducción se hace al centro de masa.

La segunda integral ( $\vec{L}_2$ ) es:

$$\vec{L}_2 = \int_v \rho * \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) * dv = \int_v \rho * [(\vec{r} * \vec{r}) \times \vec{W} - (\vec{r} * \vec{W}) * \vec{r}] * dv$$

Expresando en coordenadas cartesianas:

$$\vec{L}_2 = \int_v \rho * [(x^2 + y^2 + z^2) \times (W_x \vec{i} + W_y \vec{j} + W_z \vec{k}) - (x \cdot W_x + y \cdot W_y + z \cdot W_z) * (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})] * dv$$

Efectuando los productos, operando y poniendo:  $\vec{L}_2 : (L_{2x}, L_{2y}, L_{2z})$

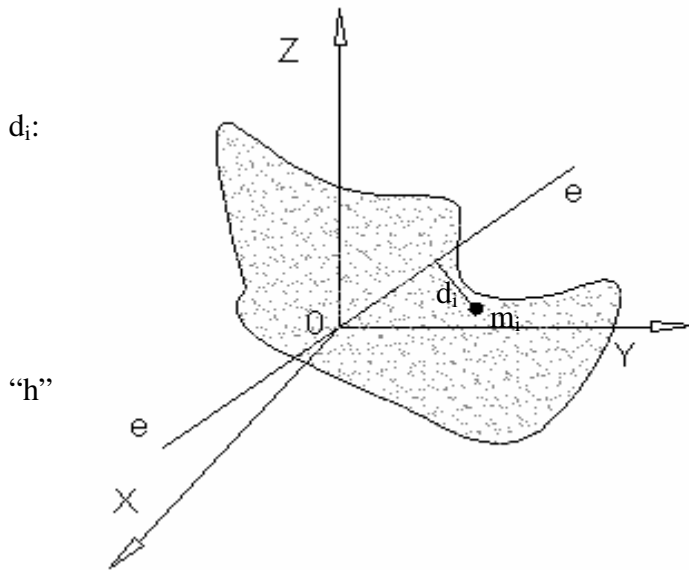
Teniendo presente que se trata de una igualdad vectorial.

La componente:

$$\vec{L}_x = W_x \cdot \int_v \rho \cdot (y^2 + z^2) \cdot dv - W_y \cdot \int_v \rho \cdot (yx) \cdot dv - W_z \cdot \int_v \rho \cdot (zx) \cdot dv$$

**Momento y productos de inercia:**

Definiremos el momento de inercia respecto de un eje "e" como:



Para un sistema de partículas:

$$I_e = \sum_i m_i \cdot d_i^2 \quad \text{Donde}$$

Distancia de la partícula al eje considerado

- Para un sólido:

$$I_e = \int_v \rho \cdot d^2 \cdot dv$$

Definiremos como producto de inercia respecto de los ejes "e" y

$$I_{eh} = -\sum_i m_i \cdot d_i^e \cdot d_i^h$$

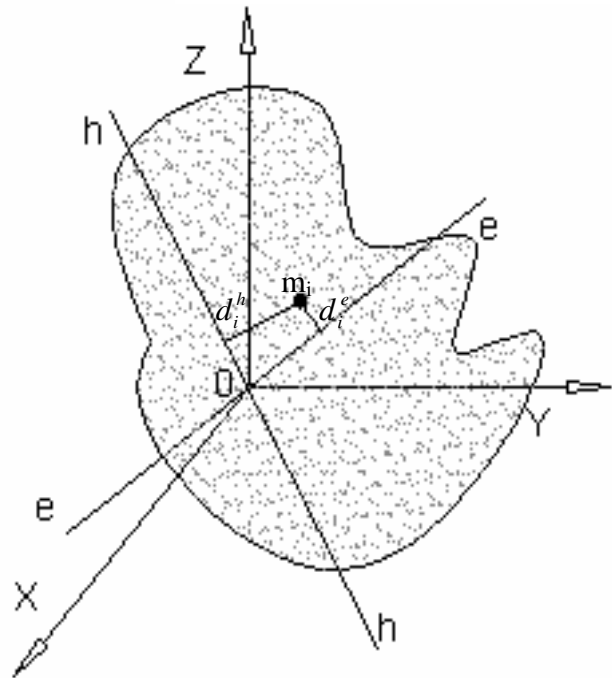
Para un sólido:

$$I_{eh} = -\int_v \rho \cdot d^e \cdot d^h \cdot dv$$

Los productos de inercia son:

$$\begin{cases} I_{xy} = -\int_v \rho \cdot x \cdot y \cdot dv \\ I_{xz} = -\int_v \rho \cdot x \cdot z \cdot dv \\ I_{yz} = -\int_v \rho \cdot y \cdot z \cdot dv \end{cases}$$

En las fórmulas de cálculo de los productos de inercia se trabaja con coordenadas, es decir, pueden tener signo positivo o negativo. Esto hace que el resultado de la integral de volumen puede resultar nulo. De hecho, esto ocurre cuando los ejes son ejes principales de inercia.



La expresión del momento cinético  $\vec{L}_2$  nos queda:

$$\begin{cases} \vec{L}_x = I_{xx} \cdot W_x + I_{xy} \cdot W_y + I_{xz} \cdot W_z \\ \vec{L}_y = I_{yx} \cdot W_x + I_{yy} \cdot W_y + I_{yz} \cdot W_z \\ \vec{L}_z = I_{zx} \cdot W_x + I_{zy} \cdot W_y + I_{zz} \cdot W_z \end{cases}$$

Estas expresiones escalares podemos poner en forma matricial:

$$[\vec{L}_2]^T = [I] \cdot [W]^T \quad \text{Siendo: } \begin{cases} [\vec{L}_2] = (\vec{L}_{2x} + \vec{L}_{2y} + \vec{L}_{2z}) \\ [W] = (W_x, W_y, W_z) \end{cases}$$

Y la matriz  $[I]$  es la representación en el sistema referencial adoptado del tensor de inercia.

$$[I] = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Finalmente la expresión del momento cinético es:  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$\vec{L} = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$$

### Carácter Tensorial de $[I]$

Supongamos la matriz  $[A]$  que transforma del sistema referencial  $x, y, z$  ortogonal al  $x', y', z'$

también ortogonal.

$[A]$  es ortogonal. Luego  $[A]^{-1} = [A]^T$

Tenemos que:  $[\vec{L}_2]^T = [I] \cdot [W]^T \quad (1)$

Transformando:  $[\vec{L}'] = [A] \cdot [L]^T \Rightarrow [L]^T = [A]^T \cdot [\vec{L}']^T$

$[\vec{W}'] = [A] \cdot [\vec{W}]^T \Rightarrow [\vec{W}]^T = [A]^T \cdot [\vec{W}']^T$

Reemplazando en (1):

$$[A]^T \cdot [\vec{L}']^T = [I] \cdot [A]^T \cdot [\vec{W}']^T$$

Multiplicando por  $[A]$

$$\underline{[A] \cdot [A]^T} \cdot [\vec{L}']^T = \underline{[A] \cdot [I] \cdot [A]^T} \cdot [\vec{W}']^T$$

$[U]$ 
 $[T]$

Nos queda

$$[\vec{L}']^T = [I'] \cdot [\vec{W}']^T \quad \text{Expresión en } x', y', z'$$

Donde

$$[I'] = [A] \cdot [I] \cdot [A]^T$$

Vemos que  $[I]$  se transforma según la ley de transformaciones de tensores de segundo orden, se concluye que  $[I]$  es la representación de un tensor.

### Operador Lineal

La expresión de  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$

Tiene carácter tensorial, es decir que  $[\vec{L}]$  es un invariante de los distintos sistemas referenciales.

$[\vec{L}_1]$ : Proviene del producto vectorial  $\vec{r}_G \times \vec{v}_o$  y como tal tiene carácter invariante.

$[\vec{L}_2]$ : Proviene de la aplicación del operador lineal  $[I]$  (tensor de segundo orden) sobre el tensor de primer orden  $[W]^T$ ; luego, es un invariante.

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ : Es un invariante por ser la suma de dos invariantes.

### Conservación Del Momento Cinético

El momento cinético es  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$ .

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = M \cdot \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M \cdot \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot [\dot{W}]^T$$

Pero sabemos que  $\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \vec{M}^e$

$$\vec{M}^e = M \cdot \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M \cdot \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot [\dot{W}]^T$$

### Energía Cinética

La energía cinética para un sistema de partículas

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2 + \vec{v}_o * \sum m_i * (\vec{W} \times (\vec{R}_i - O)) + \frac{1}{2} * \sum m_i * (\vec{W} \times (\vec{R}_i - O))^2$$

Para el caso de un sólido nos queda:

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2 + M * (\vec{v}_o * \vec{W} \times \vec{r}_G) + \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

Si el polo de reducción coincide con el centro de masa:

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} * I_w * W^2 = T_t + T_R$$

$T_t$ : Energía de traslación

$T_R$ : Energía de rotación  $\frac{1}{2} * I_w * W^2 = T_R$

Expresando en función de  $[\vec{P}]$  y  $[\vec{L}]$

$$\vec{P} = M * \vec{v}_o$$

$$T_R = \frac{1}{2} * \int \rho * dv * (\vec{W} \times \vec{r})^2 = \int \rho * dv * (\vec{W} \times \vec{r}) * (\vec{W} \times \vec{r})$$

Desarrollando en coordenadas cartesianas y operando obtenemos:

$$T_R = \frac{1}{2} [W] * [I] * [W]^T \quad \text{Donde } [I] : \text{Tensor de inercia}$$

$[W] * [I] * [W]^T$  Cuadrática de energía asociada al tensor de inercia

Finalmente:

$$T = \frac{1}{2} * \vec{P} \times \vec{v}_o + \vec{P} * \vec{W} \times \vec{r}_G + \frac{1}{2} * [\vec{W}] [I]^T$$

### Cuadráticas asociadas al tensor de Inercia

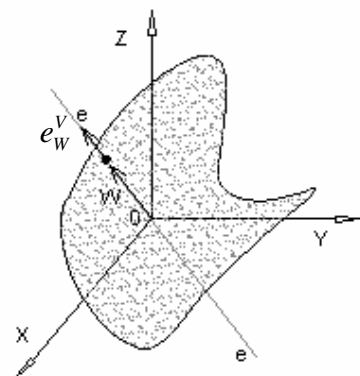
11-1) *Energía cinética de rotación*

Vimos que  $T_R = \frac{1}{2} [W] * [I] * [W]^T$  es invariante.

11-2) *Momento de inercia respecto de un eje:*

$$T_R = \frac{1}{2} [W] * [I] * [W]^T = \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

$I_w$ : Momento de inercia



respecto del eje de dirección  $e_w^v$

$$\frac{1}{2} [W] * [I] * [W]^T = \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

$$\frac{[W]}{W} * [I] * \frac{[W]^T}{W} = I_w$$

$$[e_w] * [I] * [e_w]^T = I_w$$

O sea que el momento de inercia respecto de un eje es la cuadrática asociada al tensor con respecto al versor de dirección de ese eje.

$$e_w^v = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_w = I_{xx} * \alpha^2 + I_{yy} * \beta^2 + I_{zz} * \gamma^2 + 2 * \alpha * \beta * I_{xy} + 2 * \alpha * \gamma * I_{xz} + 2 * \beta * \gamma * I_{yz}$$

### Radio de Giro

Se define el radio de giro de un sólido, respecto de un eje cuya dirección es  $e_w^v$  como:

$$r_k = \sqrt{\frac{I_w}{M}}$$

Al momento de inercia lo podemos expresar:

$$I_w = M * r_k^2$$

Si se divide en forma cuadrática  $[e_w] * [I] * [e_w]^T = I_w$  por  $I_w$

$$[X] * [I] * [X]^T = 1 \text{ Donde } [X] = \frac{[e_w^v]}{\sqrt{I_w}} = \frac{[e_w^v]}{\sqrt{M} * r_k}$$

En forma desarrollada:

$$I_w = I_{xx} * X^2 + I_{yy} * Y^2 + I_{zz} * Z^2 + 2 * X * Y * I_{xy} + 2 * X * Z * I_{xz} + 2 * Y * Z * I_{yz}$$

Es la ecuación de un elipsoide denominado elipsoide de inercia donde (x, y, z) son las componentes del vector:

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{I_w}} * e_n^v = \frac{1}{\sqrt{M} * r_k} * e_n^v$$

Es decir que todo semieje del elipsoide de inercia es proporcional a la inversa del radio de giro.

### Diagonalización del tensor de Inercia

El tensor  $[I]$  se transforma mediante una rotación ortogonal

$$[I'] = [A] * [I] * [A]^T$$

Existe una transformación  $[M]$  tal que:

$$[I'] = [M] * [I] * [M]^T = [I_d]$$

Donde:

$$[I_d] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

$I_1, I_2, I_3$  son los autovalores del tensor de inercia, denominados momentos de inercia principales.

Por tratarse el tensor de inercia de un tensor real y simétrico los autovalores son reales.

Los vectores propios asociados  $V_1, V_2, V_3$  establecen direcciones denominadas ejes principales de inercia.

$$[I] * [U]^T = I * [v]^T$$

### Expresiones en la base principal

Para los ejes principales de inercia, las variables que intervienen tienen expresiones más simples.

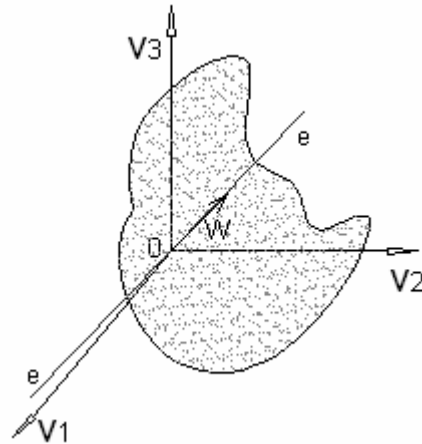
### Momento cinético

$$[L]^T = [I_0] * [W]^T \Rightarrow \begin{vmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{vmatrix}$$

Nos queda:

$$L_x = I_1 * W_x; \quad L_y = I_2 * W_y; \\ L_z = I_3 * W_z$$

O sea que en la base principal el momento cinético tiene la dirección del eje de rotación.



Las cuadráticas asociadas al tensor también adquieren una forma simple.

### Momento según un eje.

$$I_e = [e_e] * [I_d] * [e_e]^T = I_1 * \alpha^2 + I_2 * \beta^2 + I_3 * \gamma^2$$

Energía cinética de rotación.

$$2 * T_r = [W] * [I_0] * [W]^T = I_1 * W_x^2 + I_2 * W_y^2 + I_3 * W_z^2$$

Elipsoide de inercia.

$$1 = [x] * [I_0] * [x]^T = I_1 * X^2 + I_2 * Y^2 + I_3 * Z^2$$

### Teorema de los ejes paralelos

Sea un sólido e  $[I_G]$  su tensor de inercia referido a una terna x, y, z cuyo origen coincide con el centro de masa G del sólido.

Si se desea referir el tensor a los ejes  $x', y', z'$ , paralelos a la terna x, y, z, se aplica el teorema de los ejes paralelos. De acuerdo a este teorema se debe adicionar a  $[I_G]$  un tensor de inercia correspondiente a la masa total del sólido concentrada en el centro de masas, referido a  $x', y', z'$ . Es decir que:  $[I_{x', y', z'}] = [I_G] + [I_{\text{TRASLACION}}]$  donde: el tensor de inercia referido a la terna  $x', y', z'$  es igual a la suma de el tensor de inercia baricéntrico mas el tensor de inercia de la masa concentrada en el centro de masa referido a  $x', y', z'$ .

Utilizando el producto tensorial esta operación de traslación se puede realizar mediante la expresión

$$[I_{x', y', z'}] = [I_G] + M (r_G^2 [I_D] - r_G \otimes r_G)$$

Donde:

M es la masa total del sólido

$r_G$  el vector posición del centro de masa respecto al sistema  $x', y', z'$ .

$I_D$  la matriz identidad.

## Dinámica relativa del sólido

### Introducción

Las causas del movimiento del sólido en el espacio son las fuerzas exteriores y sus momentos. Estas cantidades se relacionan con las derivadas respecto del tiempo del momento lineal o cantidad de movimiento y el momento angular o momento cinético del sólido. La cantidad de movimiento puede expresarse en función de la masa total del sistema y la velocidad del centro de masa, en tanto que el momento angular depende del tensor de inercia del sólido. Si el tensor de inercia está referido a ejes fijos, sus componentes no permanecen constantes al cambiar el sólido de posición, por lo que el trato de las ecuaciones que ligan la variación del momento angular con el momento de las fuerzas exteriores puede ser complicado. Esta dificultad puede eludirse introduciendo sistemas referenciales relativos, fijos al cuerpo en estudio. Luego, la derivada de magnitudes expresadas en este referencial móvil pueden obtenerse aplicando el operador de derivación para sistemas móviles en rototraslación.

En lo que sigue, trataremos el movimiento del sólido, con sus distintas variables dinámicas, referidos a sistemas de ejes en movimiento respecto de una terna fija.

### Sólido referido a un sistema rototraslatorio

Supongamos un sólido referido a un sistema que se encuentra en un estado de rototraslación respecto de una terna fija. El sólido se encuentra fijo respecto del sistema móvil.

### Cantidad de Movimiento

Habíamos visto que la expresión de la cantidad de movimiento referida al sistema  $x, y, z$ , era:

$$\vec{P}/m = \vec{v}_o * M + \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Derivando respecto del sistema fijo, recordando que la derivación relativa de un vector se hacía mediante:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_F = \left. \frac{d}{dt} \right|_m + (\vec{W} \times )$$

Para el vector cantidad de movimiento:

$$\left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_m + (\vec{W} \times \vec{P}/m) =$$

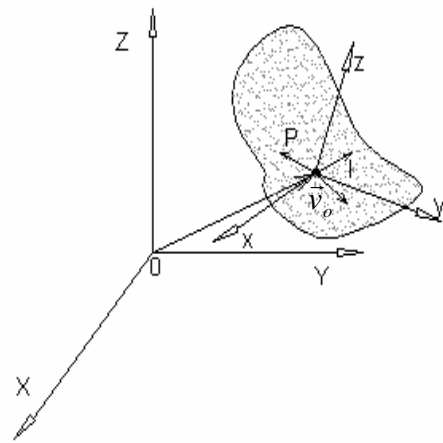
$$\dot{\vec{v}}_o * M + \vec{W} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$\dot{\vec{r}}_G = 0$ , pues el sólido se encuentra fijo respecto de  $x, y, z$ . Sabemos que las fuerzas aplicadas respecto de un sistema fijo son:

$$\sum \vec{F}^e = \vec{F}^e \Big|_F = \left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_F$$

Nos queda:

$$\vec{F}^e \Big|_F = \vec{a}_o * M + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$





Se verá que esta ecuación se simplifica en forma notable cuando el sólido rota alrededor de un eje fijo, y se toma el punto “O” sobre el mismo. En ese caso, será:

$$\vec{F}^e \Big|_F \equiv \vec{W} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

por ser  $\vec{a}_o = 0$  y  $\vec{v}_o = 0$

### Momento Cinético

La expresión de momento cinético en el sistema en movimiento es:

$$\vec{L} \Big|_m = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [\vec{W}]^r$$

Se considera que el tensor de inercia ha sido referido al sistema móvil solidario al sólido, y por lo tanto sus componentes permanecen constantes al cambiar el sólido de posición.

Derivando respecto del sistema fijo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_F = \frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_m + (\vec{W} \times \vec{L} / m) =$$

$$M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot [\dot{\vec{W}}]^r + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot [\vec{W}]^r$$

Teniendo presente la relación entre la derivada del momento angular y el momento de las fuerzas externas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_F = M^e \Big|_F$$

Nos queda:

$$M^e \Big|_F = M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot [\dot{\vec{W}}]^r + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot [\vec{W}]^r$$

### Rotación de un Sólido con eje fijo

En este caso el sólido mantiene su eje de rotación fijo en el espacio.

Entonces:

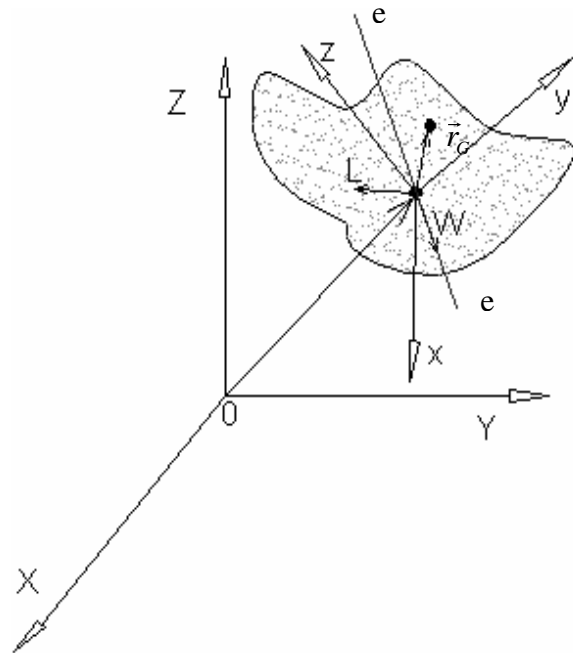
$$\vec{v}_o = 0$$

$$\vec{a}_o = 0$$

Tendremos en este caso:

$$\vec{F}^e \Big|_F = \vec{W} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e \Big|_F = [I] \cdot [\dot{\vec{W}}]^r + \vec{W} \times [I] \cdot [\vec{W}]^r$$



## Reacciones dinámicas de un sólido en rotación

Supongamos tener un sólido rotando sobre un eje fijo en el espacio. Este eje lo consideramos vinculado al sistema fijo a través de cojinetes. Como ejemplo, puede considerarse el rotor de una turbina hidráulica o el impulsor de una bomba de agua. Se trata de sólidos montados sobre un eje, el cual es sustentado por cojinetes que permiten la rotación.

El sólido en su rotación puede generar fuerzas inerciales que presionan sobre los vínculos. Estas presiones dinámicas (debidas al movimiento) no existen si el sólido se encuentra estático, en cuyo caso solo habrá reacciones debidas al peso u otras fuerzas estáticas.

Las presiones dinámicas aparecen cuando el sólido se encuentra en rotación, y así como las cargas estáticas originan reacciones en los soportes, estas cargas dinámicas harán aparecer reacciones, que se denominan reacciones dinámicas. La magnitud de estas reacciones estarán directamente ligadas a la cantidad de masa del sólido, a la forma en que la masa está distribuida y a las condiciones cinemáticas del movimiento.

Las condiciones dinámicas de este sólido establecen:

$$\vec{F}^e \Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e \Big|_F = [I] \cdot \dot{\vec{W}} + \vec{W} \times [I] \cdot \vec{W}$$

En ambas ecuaciones aparece un término que depende de la aceleración angular, su existencia se comprende con facilidad puesto que para acelerar una masa, es necesaria una fuerza o un momento. Estos términos se anulan en el caso de que el sólido rote a velocidad constante. El otro término involucrado, depende solamente de la velocidad de rotación, de la cantidad de masa y la forma en que está distribuida, resumidas en el vector posición del centro de masas y el tensor de inercia.

Las acciones exteriores están formadas por acciones activas y acciones reactivas, es decir:

$$\vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e$$

$$\vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e$$

El equilibrio del sólido es:

$$\vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$\vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = [I] \cdot \dot{\vec{W}} + \vec{W} \times [I] \cdot \vec{W}$$

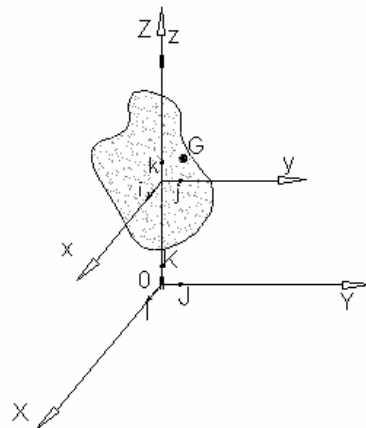
Que nos provee las ecuaciones para obtener el valor de las reacciones del sólido.

Por ejemplo si:

$$\vec{W}^e = (0 \quad 0 \quad W_z) = cte$$

$$|\vec{W}^e| = cte$$

$$\begin{aligned} \vec{M}^e &= \vec{W} \times [I] \cdot \vec{W} = \vec{W} \times \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ W_z \end{vmatrix} \\ &= \vec{W} \times \begin{pmatrix} I_{xz} \cdot W_z & I_{yz} \cdot W_z & I_{zz} \cdot W_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

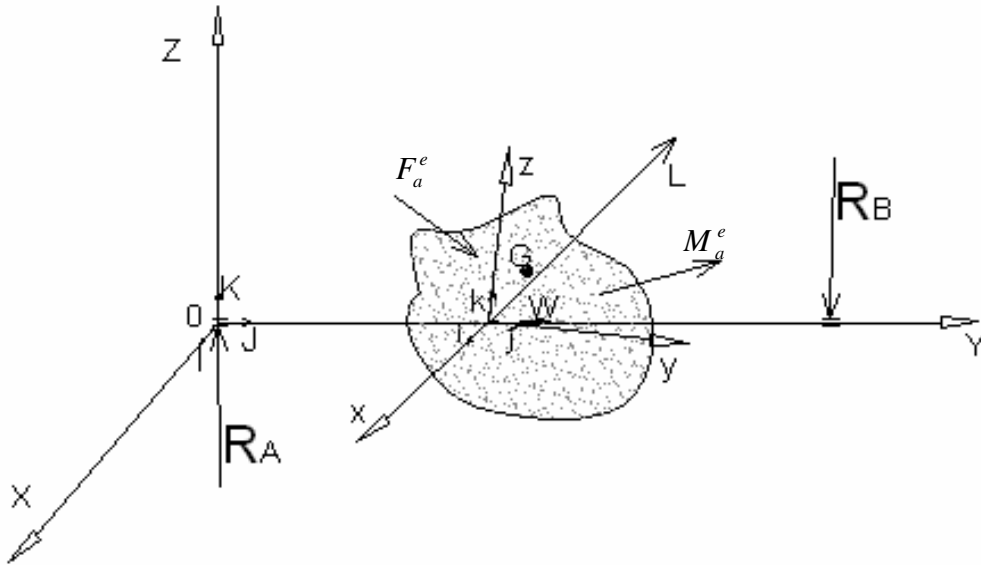


$$\vec{M}^e = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ I_{xz} \cdot W_z & I_{yz} \cdot W_z & I_{zz} \cdot W_z \end{vmatrix} = -I_{yz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} + I_{xz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Planteamos:

$$\vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = -I_{yz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} + I_{xz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Debemos tener en cuenta que los vectores de la izquierda de la igualdad están en el sistema fijo, mientras que los de la derecha están en el sistema en movimiento, lo cual



involucra una transformación de coordenadas.

Para nuestro ejemplo, de acuerdo a los sistemas adoptados  $\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k} \equiv \vec{I} \ \vec{J} \ \vec{K}$

Luego la transformación es una identidad. Esta ecuación vectorial implica:

$$\vec{M}_{ax}^e + \vec{M}_{Rx}^e = -I_{yz} \cdot W_z^2 \quad (1)$$

$$\vec{M}_{ay}^e + \vec{M}_{Ry}^e = I_{xz} \cdot W_z^2$$

Las otras ecuaciones nos proveen:  $\vec{F}^e = \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$

Si las coordenadas del centro de masa son:  $\vec{r}_G = x_G \ y_G \ z_G$

$$\vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix} = -y_G \cdot W_z \cdot \vec{i} + x_G \cdot W_z \cdot \vec{j}$$

$$\vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ -y_G \cdot W & x_G \cdot W_z & 0 \end{vmatrix} = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Nos queda:  $\vec{F}^e = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$

Que nos da las ecuaciones:

$$\vec{F}_{ax}^e + \vec{F}_{Rx}^e = x_G \cdot W_z^2 \quad (2)$$

$$\vec{F}_{ay}^e + \vec{F}_{Ry}^e = y_G \cdot W_z^2$$

Que resuelven junto con (1) el estado de equilibrio.

Vemos en las ecuaciones (1) y (2) que para que sea  $\vec{F}^e = 0$  y  $\vec{M}^e = 0$ , deben ser

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$x_G = y_G = z_G = 0$$

Para que se cumplan estas condiciones, el eje de rotación debe coincidir con un eje principal de inercia y debe contener al centro de masas del sólido.

Los momentos centrífugos no nulos y el desplazamiento del centro de masa dan origen a reacciones dinámicas. Se puede concluir que estas magnitudes “miden” el grado de desbalanceo que posee el sólido.

### Equilibrio dinámico

Dado un sólido en desequilibrio dinámico, se busca equilibrarlo de tal manera que sea posible eliminar las reacciones dinámicas que, en general, dan origen a la aparición de vibración en el sistema. Por ejemplo, las ruedas de un automóvil deben “balancearse” luego de un cierto uso, puesto que el desgaste asimétrico da origen a reacciones dinámicas. El balanceo se realiza agregando masas en el caso de las ruedas, también se puede remover o quitar masa. El objetivo de este agregado o remoción de masas, es llevar al eje de rotación a ser nuevamente un eje principal de inercia conteniendo el centro de masas.

A continuación se plantea el problema del balanceo o equilibrio dinámico de un sólido en rotación.

Dado el sólido con:

$$I_{xz} \neq 0$$

$$I_{yz} \neq 0$$

$$X_G, Y_G, Z_G \neq 0$$

Se buscará anular los productos de inercia que tienen un subíndice coincidente con el eje de rotación, y los componentes de vector posición del centro de masas de subíndice distintos del eje de rotación.

Se ubican las masas  $m_1$  y  $m_2$  de tal manera que:

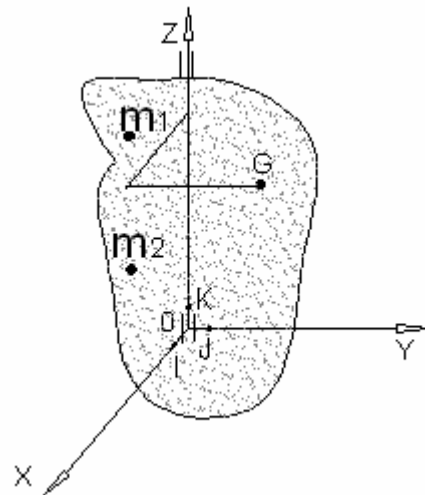
$$I'_{yz} = I_{yz} + m_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2 = 0$$

$$I'_{xz} = I_{xz} + m_1 \cdot X_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot X_2 \cdot Z_2 = 0$$

$$Y'_G = M \cdot Y_G + m_1 \cdot Y_1 + m_2 \cdot Y_2 = 0$$

$$X'_G = M \cdot X_G + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = 0$$

Tenemos ocho incógnitas ( $m_1, m_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ ), y solo son cuatro las ecuaciones. Esto se soluciona fijando cuatro y despejando las otras. En general se fija posiciones a veces limitadas por la geometría y del sólido a “balancear”. Por ejemplo, en las ruedas del automóvil, los contrapesos pueden ubicarse únicamente en la periferia de la llanta.



### Movimiento de un sólido con un punto fijo

#### Ecuación de Euler

Vamos a considerar ahora el movimiento de un sólido que mantiene un punto fijo; es decir un movimiento polar.

Supondremos un sistema fijo y un sólido vinculado a dicho sistema a través de un punto, y otro móvil y solidario con el sólido y en las direcciones principales de inercia.

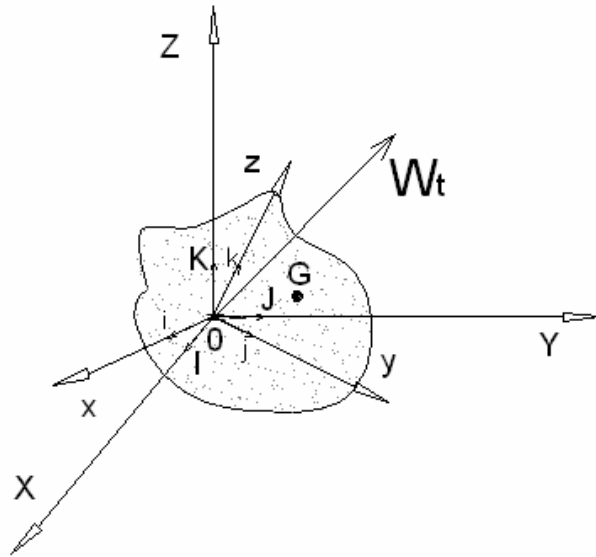
El sólido se encuentra vinculado en su centro de gravedad:

$\vec{W} = \vec{W}_{(t)}$  o sea que la velocidad angular varía en módulo y dirección.

La ecuación que regula el movimiento es:

$$\vec{M}^e = [I] \cdot \dot{[\vec{W}]}^r + \vec{W} \times [I] \cdot [\vec{W}]^r$$

donde:  $[I] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$



Haciendo las operaciones obtendremos:

$$\vec{W} \times [I] \cdot [\vec{W}]^r = (I_3 \cdot W_z \cdot W_y - I_2 \cdot W_y \cdot W_z) \cdot \vec{i} + (I_1 \cdot W_x \cdot W_z - I_3 \cdot W_z \cdot W_x) \cdot \vec{j} + (I_2 \cdot W_y \cdot W_x - I_2 \cdot W_x \cdot W_y) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{M}^e = (\vec{M}_x^e, \vec{M}_y^e, \vec{M}_z^e)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_x^e &= I_1 \cdot \dot{W}_x + (I_3 - I_2) \cdot W_y \cdot W_z \\ \vec{M}_y^e &= I_2 \cdot \dot{W}_y + (I_1 - I_3) \cdot W_x \cdot W_z \\ \vec{M}_z^e &= I_3 \cdot \dot{W}_z + (I_2 - I_1) \cdot W_y \cdot W_x \end{aligned}$$

### Ecuaciones de Euler

Se encuentra expresado en los versores en movimiento, si queremos expresarlos en el sistema fijo debemos aplicar la transformación correspondiente.

### Movimiento de un Sólido por Inercia

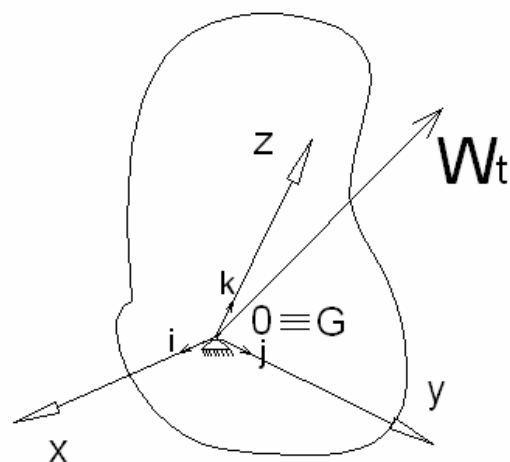
Analizaremos el movimiento del sólido que no está sometido a fuerzas y momentos. El sólido está vinculado a su centro de masa y lo mantiene fijo a través de un apoyo. La resultante del peso se equilibra con la reacción de apoyo.

$$\vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e = 0$$

Establecemos un sistema referencial solidario con el sólido que coincide con los ejes principales de inercia.

$$[I] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

Como no hay pares exteriores aplicados:



$$\vec{M}^e = 0 \quad \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_F = 0 \quad \vec{L} = cte$$

Vamos a suponer un sólido giroscópico, es decir un sólido donde:

$$I_1 = I_2 = I$$

Las Ecuaciones de Euler quedan:

$$0 = I \cdot \dot{W}_x + (I_3 - I) \cdot W_y \cdot W_z$$

$$0 = I \cdot \dot{W}_y - (I_3 - I) \cdot W_x \cdot W_z$$

$$0 = I_3 \cdot \dot{W}_z$$

De la tercera se deduce que:

$$I_3 \cdot \dot{W}_z = 0 \quad \dot{W}_z = 0 \quad W_z = cte$$

O sea que la rotación sobre el eje “z” se realiza en ausencia de momento exterior y bajo condición  $\vec{L} = cte$  con  $W_z = cte$

Las otras dos ecuaciones dan:

$$0 = \dot{W}_x + \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_y \cdot W_z$$

$$0 = \dot{W}_y - \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_x \cdot W_z$$

Se puede poner: 
$$\begin{cases} \dot{W}_x + k \cdot W_y = 0 \\ \dot{W}_y - k \cdot W_x = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Donde: } k = \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_z$$

Derivando la primera:  $\ddot{W}_x + k \cdot \dot{W}_y = 0$

Introduciendo en la segunda:  $\ddot{W}_x + k^2 \cdot W_x = 0$

Cuya solución es:  $W_x = A \cdot \cos(k \cdot t)$

Luego derivando y llevando a (1):  $W_y = A \cdot \text{sen}(P \cdot t)$

El vector velocidad angular:

$$\vec{W} = W_x \cdot \vec{i} + W_y \cdot \vec{j} + W_z \cdot \vec{k}$$

Llamando:  $A^2 = (W_x^2 + W_y^2)$

Por tanto el módulo de  $\vec{W}$  es:

$$\vec{W}^2 = \vec{W}_z^2 + A^2$$

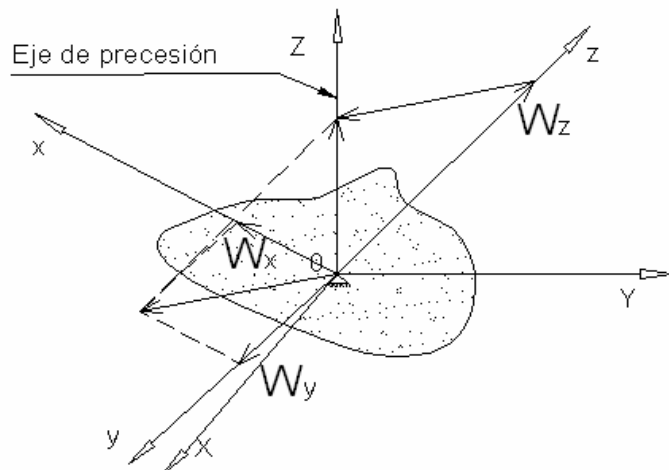
El vector velocidad angular  $\vec{W}$  efectúa un movimiento de precesión alrededor del eje “z” con pulsación:

$$k = \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_z$$

Para el caso particular en que

la condición principal es tal que  $\vec{L}$  tiene la dirección del eje de rotación.  $I_3 \cdot W_z = \vec{L}$

$W_x = W_y = 0 \quad A = 0$ ; no hay precesión, el sólido mantiene la dirección del eje “z” constante.



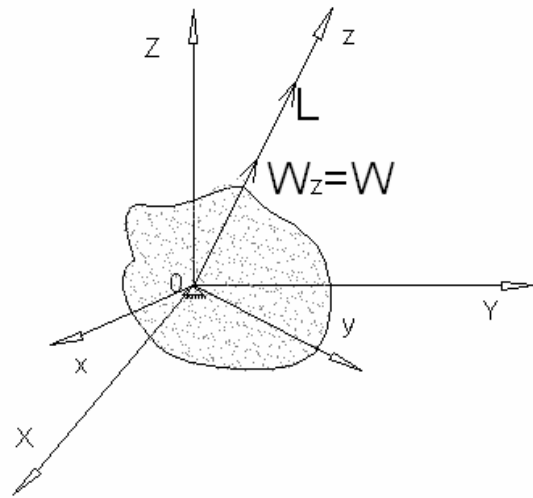
$$\vec{M}_0^e = [I_o] \cdot [\vec{\alpha}]^r + \vec{W} \times [I_o] \cdot [\vec{W}]^r$$

$$\sum \vec{F}^e = M \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\vec{a}_{cm} = W^2 \cdot \vec{r}_{cm} + \alpha \cdot \vec{r}_{cm}$$

El tensor de inercia respecto a un sistema de ejes cuyo origen se encuentra en un punto que no coincide con el centro de masas, se puede calcular con la expresión tensorial

$$[I_o] = [I_G] + M \cdot [r_{oG}]^2 \cdot [I_D] + r_{oG} \otimes r_{oG}$$







## ***Unidad 6: Sistemas vibratorios de un grado de libertad***

### **Conceptos generales**

El estudio de los sistemas vibratorios trata sobre el comportamiento oscilatorio de los cuerpos, es decir, las oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio.

Se estudiará el comportamiento dinámico de masas sometidas a fuerzas elásticas. El análisis se efectúa sobre masas puntuales, es decir, sistemas materiales de dimensiones despreciables. Posteriormente se tratarán sistemas con dimensiones considerables (cuerpos sólidos) en los cuáles esas deben ser tenidas en cuenta a efectos del estudio de su comportamiento dinámico.

Los sistemas vibratorios pueden clasificarse de acuerdo a distintos puntos de vista.

Pueden ser sistemas lineales o no lineales. Un sistema es lineal cuando la composición de las respuestas a las fuerzas actuantes consideradas por separados es igual a la respuesta a la composición de dichas fuerzas. Los sistemas reales son generalmente no lineales pero en el caso de pequeñas oscilaciones pueden ser aproximados mediante sistemas lineales.

Los sistemas pueden ser de uno o varios grados de libertad, de acuerdo al número de coordenadas independientes necesarias para su descripción.

En cuanto a las vibraciones, estas pueden ser libres o forzadas. Las vibraciones libres se producen cuando se aparta al sistema de su posición de equilibrio y luego este oscila bajo la acción de fuerzas propias del sistema. En el caso de vibraciones forzadas, el sistema vibra sometido a la acción de fuerzas forzadoras externas.

### **Fuerza recuperadora elástica:**

Es aquella dependiente de la posición (por lo tanto, admiten un potencial) y que se materializa mediante elementos elásticos tales como barras, resortes, flejes, etc.

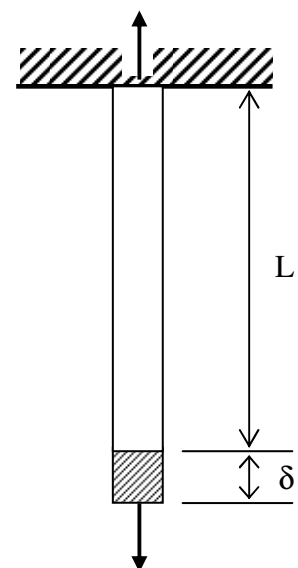
Entendemos por elástico a cualquier sistema susceptible de deformarse bajo determinada sollicitación y que recupera totalmente su forma o configuración original al suprimirse la misma.

La fuerza recuperadora elástica es la respuesta del sistema a la interacción que lo deforma.

Los cuerpos deformados almacenan energía potencial, denominada energía potencial elástica. Esta energía es la necesaria para producir la deformación, y es devuelta al recuperarse la forma original.

### **Modelación dinámica:**

Las interacciones dinámicas entre fuerzas y masas se estudian mediante modelos teóricos o abstracciones que, suficientemente analizadas y próximas a la realidad, representan satisfactoriamente a los sistemas reales. Constituyen esquemas simplificados que permiten progresivamente abordar el análisis de sistemas crecientes en grado de complejidad. En este capítulo serán utilizados modelos físicos, representaciones esquemáticas del sistema real, y modelos matemáticos, es decir, representaciones analíticas mediante una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales establecidas en base a leyes físicas, como la segunda ley de Newton. Estos modelos matemáticos describen el comportamiento dinámico del modelo físico en cuestión.



## Deformación de sistemas elásticos típicos y fuerzas recuperadoras elásticas

6.2.1. Se analiza en primer lugar el comportamiento de una barra elástica sometida a tracción, de longitud  $l$  y sección transversal  $A$ .

Se asume el material cumple la Ley de Hooke, que relaciona la deformación resultante (respuesta) con la fuerza actuante (solicitud o interacción).

$\delta$  = Deformación

$F$  = Solicitación

$L$  = Longitud original (sin deformación) de la barra

$A$  = Área sección transversal

$E$  = Módulo de elasticidad (módulo de Young)

La relación entre la deformación ( $\delta$ ) y la solicitación ( $F$ ) está dada por:

$$\delta = \frac{FL}{AE} \quad [6-1]$$

Haciendo  $\frac{L}{AE} = \frac{1}{K}$

y eligiendo la coordenada  $x = \delta$ , se puede escribir:

$$F = Kx \quad [6-2]$$

relación que expresa que la fuerza es proporcional a la deformación o elongación. El coeficiente  $K$  depende de las características geométricas ( $L$ ,  $A$ ) y elásticas ( $E$ ) del material que constituye la barra.

Desde el punto de vista energético, el trabajo ( $W$ ) necesario para deformar la barra es almacenado como Energía potencial elástica o de deformación:

$$W = \int_0^x -Kx dx = -\frac{1}{2}Kx^2 = \int_x^0 Kx dx = V(0) - V(x)$$

Si  $V(0) = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \quad [6-3]$

### Viga elástica simplemente apoyada, sometida a una carga concentrada en el centro

Sean:

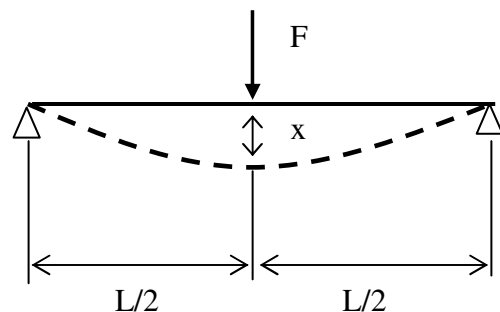
$E$  = Módulo de elasticidad del material de la viga.

$J$  = Momento de inercia de la sección transversal de la viga.

$L$  = Luz de la viga.

$F$  = Carga o solicitación.

$x$  = deformación (deflexión) de la viga en el punto central



La flecha o deformación “ $x$ ” en el centro de acuerdo con la teoría de la resistencia de materiales vale:

$$x = \frac{FL^3}{48EJ}$$

y haciendo  $\frac{48EJ}{L^3} = K \quad [6-4]$

$$F(x) = Kx = \frac{48EJ}{L^3} x \quad [6-5]$$

$$V(x) = (1/2)Kx^2 = \frac{24EJ}{L^3} x^2 \quad [6-6]$$

**Barra elástica sometida a torsión (se aplica un momento torsor M en su extremo).**

Sean:

G= Módulo de elasticidad transversal del material que constituye la barra.

J<sub>P</sub> = Momento de Inercia Polar de la sección transversal de la barra.

L = Longitud de la barra.

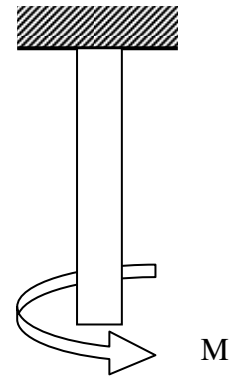
Al aplicar el momento torsor M la sección transversal extrema experimenta una rotación relativa (deformación angular)  $\phi$  que responde a:

$$\phi = \frac{ML}{GJ_P} = \frac{M}{K_\phi}$$

$$\text{con } K_\phi = \frac{GJ_P}{L} \quad [6-7]$$

$$\text{Así: } M = K_\phi \phi = \frac{GJ_P}{L} \phi \quad [6-8]$$

$$V(\phi) = (1/2) K_\phi \phi^2 = (1/2) \frac{GJ_P}{L} \phi^2 \quad [6-9]$$

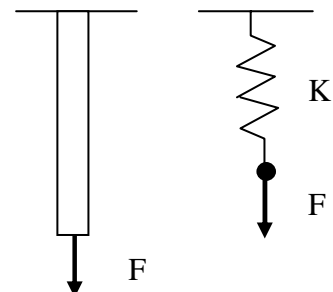


**Modelación**

A efectos de lograr una mejor interpretación conceptual del comportamiento de sistemas dinámicos, los casos (sistemas) típicos examinados son susceptibles de ser reducidos a modelos como los que se indican:

**Barra sometida a tracción:**

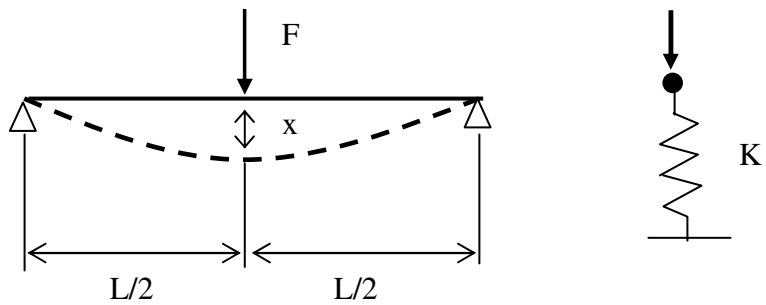
Se sustituye la barra elástica por un resorte axial cuya constante elástica es K.



### Barra sometida a flexión (viga con carga concentrada en el centro)

Si la carga está aplicada en el centro de la viga, esta puede ser reemplazada por un resorte cuya constante vale, según [6-4]:

$$K = \frac{48EJ}{L^3}$$

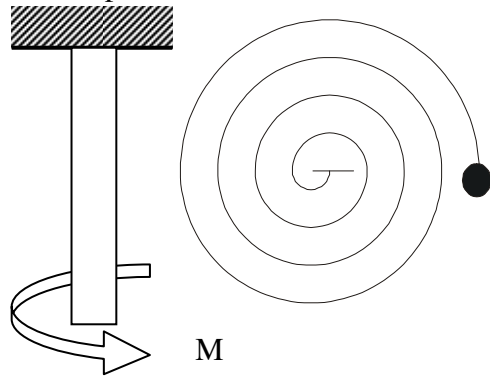


### Barra sometida a torsión.

Una barra cilíndrica sometida a torsión puede asimilarse a un resorte torsional, cuya constante es, de acuerdo con [6-7]:

$$K_\phi = \frac{GJ_P}{L}$$

Esta constante relaciona el momento torsor aplicado con el ángulo de deformación, sus unidades son distintas de las constantes anteriores.



### Movimiento de una partícula en las inmediaciones de un punto de equilibrio

Según se ha visto en el capítulo de dinámica de la partícula, en presencia de fuerzas de dependen de la posición únicamente, se define la función de energía potencial  $V(x)$ .

Esta función  $V(x)$  puede desarrollarse en series de Taylor:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}(x_0) \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \quad [6-10]$$

$$V(x) = V(x_0) + V^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} V^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

Derivando respecto de "x":

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{dV(x_0)}{dx} + \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} (x-x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^3V(x_0)}{dx^3} (x-x_0)^2 + \dots$$

Sabemos que si  $F = F(x)$ , admite una función potencial tal que se verifica:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

y en un punto  $x = x_0$  donde se verifica equilibrio, se cumple  $F(x_0) = - \frac{dV(x_0)}{dx} = 0$

Si se adopta como origen del sistema referencial el punto donde se verifica equilibrio, queda:

$$m \ddot{x} = F(x) = - \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} x - \frac{1}{2} \frac{d^3V(x_0)}{dx^3} x^2 - \dots$$

$$m \ddot{x} = F(x) = -Kx - ax^2 - bx^3 - \dots \quad [6-11]$$

donde:  $K = \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}$ ,  $a = \frac{1}{2} \frac{d^3V(x_0)}{dx^3}$ , .....

Si no se desprecian los términos de orden superior, la solución de la ecuación diferencial [6-11] proporciona la ecuación de movimiento del Oscilador Anarmónico o no lineal.

Si, en cambio, se toma solamente el término lineal, despreciando los de orden superior, queda la ecuación diferencial:

$$m \ddot{x} = -Kx \quad [6-12]$$

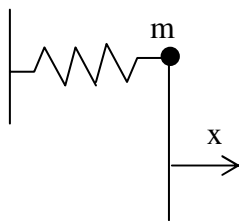
Esta ecuación diferencial de segundo orden es la ecuación del movimiento del Oscilador armónico o lineal. Debe quedar claro que el oscilador armónico es una aproximación del caso real, inarmónico. Esta aproximación es buena cuando las deformaciones son pequeñas.

La ecuación [6-12] expresa la dinámica de un sistema material constituido por una partícula de masa  $m$  sobre la que actúa una fuerza recuperadora elástica (proveniente de un "resorte" idealizado de constante elástica "K").

Visto de otro modo, si se desprecian los términos de orden superior en el desarrollo en serie de  $V(x)$ , y adoptando  $x_0 = 0$ , resulta:

$$V(x) = (1/2)Kx^2 \quad [6-13]$$

siendo  $K = \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}$



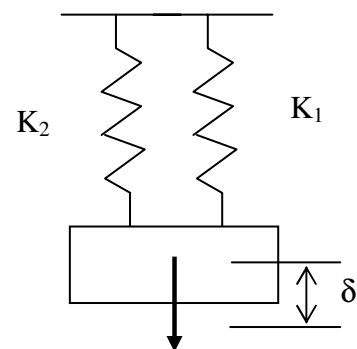
$K =$  Constante de proporcionalidad entre la fuerza "F" y la deformación "x". El modelo físico para este oscilador armónico o lineal es el mostrado en la la figura. Si bien la masa se puede dibujar como un bloque o cuadro, se interpretará se comporta como una partícula.

### Combinación de constantes elásticas

Un sistema mecánico puede estar constituido por una serie de elementos elásticos (resortes) actuando sobre la o las masas que lo constituyen.

Este conjunto de resortes que oponen resistencia a su deformación, pueden ser reducidos o sustituidos por uno solo de tal manera que el efecto dinámico producido resulta equivalente.

Se distinguen dos modos de conexión de los resortes componentes:

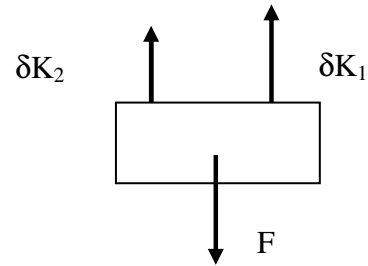


6.5.1. Los resortes experimentan la misma deformación, al aplicar la (o las) fuerza activa sobre los mismos.

La masa dispone de un solo grado de libertad, y el único movimiento posible es la traslación en dirección vertical.

“ $\delta$ ” es la deformación producida por la fuerza “ $F$ ”.

La fuerza total “ $F$ ” es absorbida por los resortes de constantes elásticas “ $K_1$ ” y “ $K_2$ ”. La deformación que sufren ambos resortes es la misma, e igual a “ $\delta$ ”.



El diagrama de cuerpo libre para la masa “ $m$ ” se muestra en el dibujo de la izquierda.

La ecuación de equilibrio correspondiente es:

$$F = \delta K_1 + \delta K_2$$

$$F = \delta(K_1 + K_2) = \delta K_T$$

Llamando  $K_T = K_1 + K_2$ , Constante total o equivalente.

Generalizando, para “ $n$ ” resortes que sufren igual deformación:

$$K_T = \sum K_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad [6-14]$$

### Los resortes presentan deformaciones diferentes bajo la acción de una misma sollicitación

Según la disposición indicada, y por condición de equilibrio se debe cumplir:

$F_1 = F_2 = F$  (Las fuerzas recuperadoras de cada resorte son iguales a la sollicitación)

La deformación total del sistema será la suma de las deformaciones de cada resorte:

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2$$

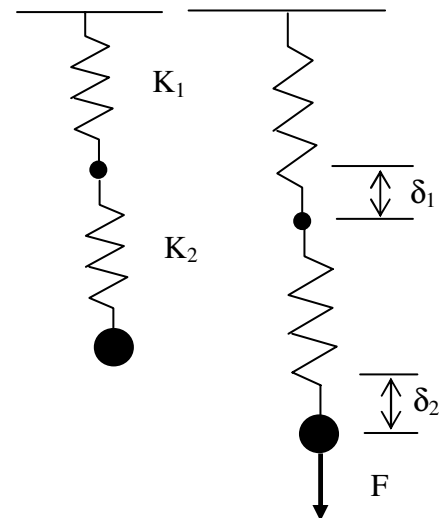
$$\text{Haciendo } \delta_T = F_T/K_T = F_1/K_1 + F_2/K_2 \\ = F(1/K_1 + 1/K_2)$$

Simplificando:

$$1/K_T = (1/K_1 + 1/K_2)$$

En general, para “ $n$ ” resortes:

$$1/K_T = \sum 1/K_i \quad [6-15]$$



Se puede realizar una analogía con las resistencias en un circuito eléctrico. Las fuerzas serían los equivalentes a las tensiones, y las deformaciones equivalentes a corrientes eléctricas. Los resortes que tienen la misma deformación (el primer caso expuesto) pueden asimilarse a resistencias conectadas en serie (la misma corriente), en tanto que los resortes sometidos a la misma fuerza equivalen a resistencias conectadas en paralelo (la misma tensión aplicada).

### Estudio de Vibraciones Mecánicas Armónicas

En lo que sigue, se considerará el Oscilador armónico o lineal. Se estudiarán vibraciones de pequeña amplitud, que producen desplazamientos muy pequeños en torno

de una posición de equilibrio estable. Se analizarán en primer lugar, las vibraciones armónicas libres, es decir las oscilaciones que se producen en ausencia de fuerzas externas. Luego, serán estudiadas las vibraciones forzadas.

**Vibraciones armónicas libres no amortiguadas.**

Las vibraciones libres no amortiguadas son las que se producen en ausencia de fuerzas disipativas, por lo que una vez iniciadas, las oscilaciones se mantienen en forma indefinida.

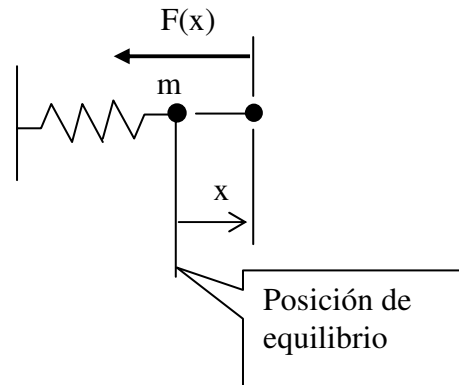
La ecuación del movimiento es:

$$m \ddot{x} = F(x) = -Kx \quad [6-16]$$

F(x) representa la fuerza recuperadora elástica. de [6-16]:

$$m \ddot{x} + Kx = 0$$

llamando a  $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$  ( $\omega_o$  es la frecuencia propia o natural del sistema, o frecuencia circular de oscilación armónica. También se suele denominar pulsación).



Así  $\ddot{x} + \omega_o^2 \cdot x = 0$  [6-17]

La [6-17] es una ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden.

Resolver esta ecuación implica hallar la ley del movimiento x(t), es decir la relación entre la deformación “x” y el tiempo “t”.

Para hallar la solución se sigue el método clásico para resolver ecuaciones diferenciales. Se propone como solución a  $x = e^{pt}$ ; donde p es una constante.

Sus derivadas resultan:  $\dot{x} = p \cdot e^{pt}$ ;  $\ddot{x} = p^2 \cdot e^{pt}$   
 Sustituyendo en (1) queda:  $p^2 + \omega_o^2 = 0$   $p = \sqrt{-\omega_o^2}$   
 $p^2 = \pm i \omega_o$

Entonces es válido  $x(t) = C_1 \cdot e^{i \omega_o t} + C_2 \cdot e^{-i \omega_o t}$ , que mediante un cambio de constante de integración:

$$C_1 = \frac{A}{2} \cdot e^{i\theta} \qquad C_2 = \frac{A}{2} \cdot e^{-i\theta}$$

$$X = \frac{A}{2} \cdot e^{i(\omega_o t + \theta)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-i(\omega_o t + \theta)} \quad [6-18]$$

Utilizando las relaciones de De Moivre, queda:

$$X(t) = A \cos (\omega_o t + \theta) \quad [6-19]$$

A,  $\theta$ , son constantes a determinar una base a condiciones iniciales.

Así, si para  $t = t_o = 0$  las condiciones iniciales son

$$x = x_o; \quad v = \dot{x} = v_o$$

$$\text{Será } \begin{cases} x_o = A \cdot \cos \theta \\ v_o = -A \omega \sin \theta \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega_o^2} = A^2 \\ \omega_o \cdot \text{tg} \theta = \frac{v_o}{x_o} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \left( x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega_o^2} \right)^{1/2} \\ \text{tg} \theta = -\frac{v_o}{x_o \omega_o} \end{cases}$$

De tal modo, la ley de movimiento [6-19] corresponde a un movimiento armónico de amplitud A y desfasaje  $\theta$ .

El ángulo de fase  $\theta$  depende de las condiciones iniciales. En particular si  $v_o = 0$  entonces  $\theta = 0$ ; si  $x_o = 0$  y  $v_o \neq 0$ , resulta  $\theta = 90^\circ$ .

$$\text{El movimiento es periódico de periodo: } \tau = \frac{2\pi}{\omega_o} \quad [6-20]$$

$$\text{La frecuencia del mismo es } f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_o}{2\pi}. \text{ Así: } \omega_o = 2\pi \cdot f \quad [6-21]$$

Nótese que la frecuencia natural es independiente de las condiciones iniciales, es decir, que ante distintas configuraciones para las condiciones iniciales cambiarán la amplitud y el ángulo de fase de la oscilación, pero este tendrá siempre la misma frecuencia igual a la frecuencia natural.

### Oscilador Amónico Torsional Libre

En este caso  $\theta$ , es la coordenada del movimiento. La ecuación del movimiento es:

$$M = -k \theta \quad \text{Aplicando la Ley de Newton}$$

$$M = I \ddot{\theta} \text{ y } I \ddot{\theta} = -k \theta \quad \text{donde } I \text{ es el momento de inercia.}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I} \cdot \theta = 0 \quad [6-22]$$

$$\theta(t) = \theta_o \cdot \cos(\omega_o t + \beta) \quad \text{Ley del movimiento}$$

M: par aplicado

$\ddot{\theta} = \alpha$ : aceleración angular

I: momento de inercia de la masa, respecto del polo O

### Oscilaciones con influencia del peso

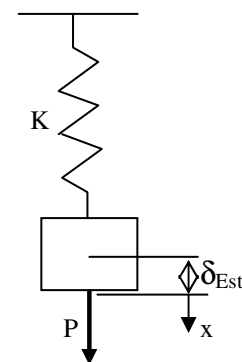
Un par de consecuencias importantes surgen de considerar el modelo Masa-Resorte con influencia del peso, por ejemplo si el movimiento se realiza en dirección vertical.

En equilibrio estático, el resorte estará deformado por la acción del peso. Luego resulta:

$$P = k \cdot \delta_{\text{est}} \quad [6-23] \text{ (la fuerza del peso es igual a la recuperadora elástica).}$$

Se introduce un sistema referencial cuyo origen coincide con la posición de equilibrio, entonces el planteo de la 2ª Ley de Newton resulta:

$$m \ddot{x} = -k(\delta_{\text{est}} + x) + P$$





$$m \ddot{x} = -k \delta_{est} - K x + P \quad \text{y por [6-23]:}$$

$$m \ddot{x} = -k x$$

Como conclusión

1) De [6-23]  $k = \frac{P}{\delta_{est}} = \frac{mg}{\delta_{est}}$  relación que proporciona un modo expeditivo para determinar K (Habitualmente P es conocido y  $\delta_{est}$ , se puede medir).

2) Teniendo en cuenta que la fuerza P predeforma al resorte en  $\delta_{est}$ , ella no influye en las características del movimiento.

### Métodos energéticos

Para sistemas conservativos (fuerzas dependientes de la posición) vale:

$$E = T + V = \text{constante} \quad \begin{array}{l} T = \text{energía cinética} \\ V = \text{energía potencial} \end{array}$$

Todo sistema de fuerzas recuperadoras elásticas del tipo

$$F = -k x \quad \text{admite} \quad V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{potencial elástico})$$

$$\text{Tal que:} \quad -\frac{dV(x)}{dx} = F(x) = -kx$$

En un sistema mecánico con vibraciones libres, es decir, sin disipaciones debidas a amortiguamientos, la energía es en parte cinética y en parte potencial.

La ecuación de movimiento surge de:

$$E = T + V = \text{constante} \quad \text{o} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Para un sencillo sistema masa-resorte

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

$$\text{Que conduce a} \quad m \ddot{x} + k x = 0$$

Si el sistema es más complejo, corresponde evaluar apropiadamente T y V.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{conduce a la ecuación de movimiento.}$$

## Vibraciones Armónicas amortiguadas

### Modelo dinámico

Al esquema se incorpora un elemento, el amortiguador, en el cual se origina una fuerza dependiente de la velocidad, actuando de tal modo de oponerse a todo instante al sentido de esta última. Esta fuerza se llama fuerza amortiguadora. En el caso más general es función de una potencia de la velocidad

$$F_b = -k v^n \quad [6-25]$$

Para el estudio de oscilaciones armónicas, se adoptará  $n=1$ , que representa razonablemente situaciones reales. La constante del amortiguador se identificará como "b", siendo sus unidades [Newton]/[m/s].

En el modelo dinámico, el amortiguador se simboliza como un cilindro-pistón.

Para obtener la ecuación de movimiento, se plantea el diagrama de cuerpo libre, sobre la masa actúan dos fuerzas: la debida al resorte y la debida al amortiguador. Aplicando la ley de

Newton, queda:

$$m \ddot{x} = -k x - b \dot{x}$$

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0 \quad [6-27]$$

que se puede escribir  $\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

y llamando  $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$  y  $\gamma = \frac{b}{2m}$

la ecuación anterior queda:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad [6-28]$$

Ecuación diferencial homogénea de las vibraciones libres amortiguadas.

Proponiendo como solución  $x(t) = e^{pt}$  con derivadas

$$\dot{x} = p e^{pt}, \quad \ddot{x} = p^2 e^{pt}$$

Sustituyendo en [6-27]:

$$e^{pt} (m p^2 + b p + k) = 0$$

Y para que ello se cumpla para todo t, debe ser :

$$m p^2 + b p + k = 0 \quad [6-29]$$

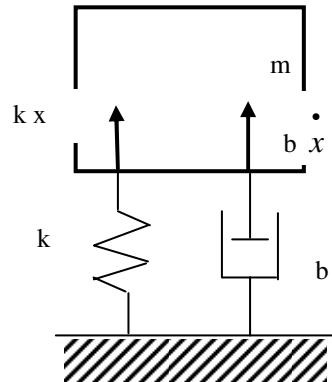
Esta ecuación es llamada ECUACIÓN CARACTERÍSTICA.

Las raíces de esta ecuación son:

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad [6-30]$$

O bien

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad [6-31]$$



El análisis de [6-30] y [6-31] conduce a tres situaciones físicas diferenciadas, según el radicando ( $\gamma^2 - \omega_o^2$ ) negativo, positivo o nulo. Si el radicando es negativo, el caso se dice es subamortiguado, y el movimiento puede describirse como oscilaciones amortiguadas, es decir, que se producen oscilaciones cuya amplitud decae en el tiempo. Este hecho se debe a la naturaleza disipativa de las fuerzas amortiguadoras. Cuando el radicando  $\gamma^2 - \omega_o^2$  es positivo, se dice que el caso es sobreamortiguado, las fuerzas amortiguadoras son de mayor importancia y no llegan a producirse oscilaciones. Cuando  $\gamma^2 - \omega_o^2$  es nulo, es caso se denomina crítico, y marca el límite entre los casos anteriores.

### Vibraciones Subamortiguadas

En este caso

$$(\gamma^2 - \omega_o^2) < 0, \text{ o también } (\gamma^2 < \omega_o^2) \quad [6-32]$$

Puede interpretarse como que el término en que interviene el amortiguamiento es de “menor significación” en relación con  $\omega_o$ ; la influencia del amortiguamiento tiende a desaparecer cuando  $\gamma \ll \omega_o$  y el movimiento se aproxima a las vibraciones libres no amortiguadas.

$$\text{Se define } \omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad [6-33]$$

cantidad que se denomina pseudopulsación.

Entonces:

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} = i\omega_1 \quad \text{donde } i \text{ es la unidad imaginaria.}$$

Las raíces pueden escribirse entonces como  $p_1 = -\gamma + i\omega_1$ ;  $p_2 = -\gamma - i\omega_1$

y la solución puede escribirse como la combinación lineal de las soluciones particulares:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} = C_1 \cdot e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 \cdot e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$$

Haciendo:

$$C_1 = \frac{A}{2} e^{i\theta} = \frac{A}{2} \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$C_2 = \frac{A}{2} e^{-i\theta} = \frac{A}{2} \cdot (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

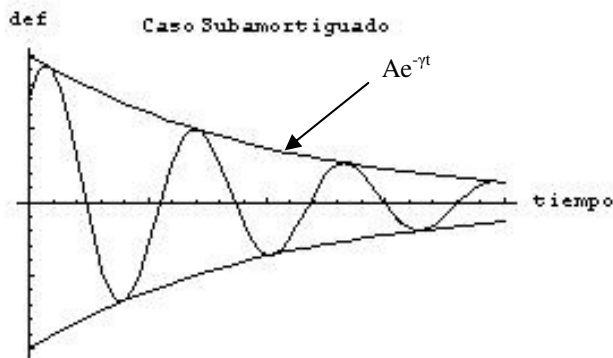
La ley del movimiento  $x(t)$  queda:

$$\boxed{x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta)} \quad [6-34]$$

Donde  $\omega_1$  es la pseudopulsación o frecuencia circular de oscilaciones amortiguadas.

Las vibraciones subamortiguadas son efectivamente oscilatorias y de amplitud decreciente en el tiempo. Su período de oscilación es:

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi_o}{\omega_1} \quad [6-35]$$



Como se ve en la figura, las oscilaciones son tales que su amplitud va decayendo. El caso expuesto corresponde a condiciones iniciales  $x(0) > 0$  y  $\dot{x} > 0$ . La fuerza del amortiguador disipa la energía disponible, y el movimiento cesa una vez que se disipa toda la energía que inicialmente se le comunica al sistema.

### Vibraciones Sobreamortiguadas (movimiento no oscilatorio)

En este caso:

$$(\gamma^2 - \omega_o^2) > 0 \quad [6-36]$$

Cuando se cumple esta condición, el término de amortiguamiento es importante en relación a  $\omega_o$ , cuanto mayor sea  $\gamma$  frente a  $\omega_o$  la influencia del amortiguamiento será más fuerte.

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

$$p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

La solución es:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-p_1 t} + C_2 \cdot e^{-p_2 t} \quad [6-37]$$

que representa un movimiento exponencialmente decreciente del tiempo, y aperiódico, es decir que no se producen oscilaciones.

### Vibración Críticamente Amortiguada

Ocurre cuando se cumple:

$$(\gamma^2 - \omega_o^2) = 0 \quad \text{o sea, } \gamma^2 = \omega_o^2 \quad [6-38]$$

Y la ecuación [6-30] conduce a una raíz doble

$$p_1 = p_2 = -\gamma$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-p_1 t} + C_2 \cdot e^{-p_2 t} = (C_1 + C_2) \cdot e^{-\gamma t} = C \cdot e^{-\gamma t}$$

O también, según se puede demostrar:

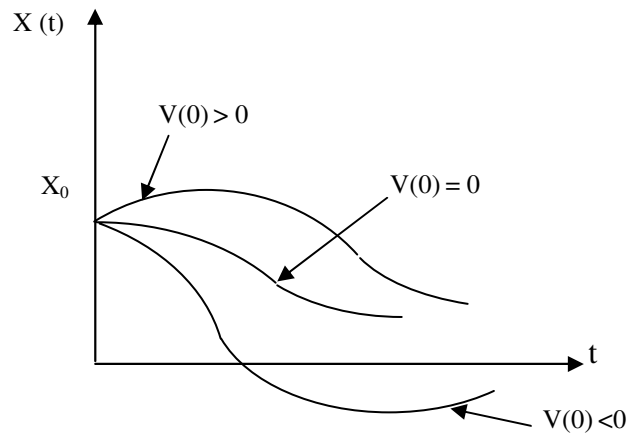
$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$$

Con las constantes  $A_1$  y  $A_2$  dependientes de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} t_0 = 0 \\ x = x_0 \\ \bullet \\ x = v_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_1 = x_0 \\ A_2 = v_0 + \gamma x_0 \end{array}$$

La forma de la ley de movimiento depende de los valores de  $x_0$ ,  $v_0$ .

Para un determinado  $x_0$  se representan gráficamente distintas evoluciones de la deformación, variando el valor de la velocidad inicial.



Tener velocidad inicial  $V(0)$  significa que se impulsa a la masa en la misma dirección que la deformación  $X(0)$ , por lo que el valor de la deformación primero

aumentará para luego decaer bajo la acción de la fuerza elástica del resorte. Velocidad inicial negativa corresponde al caso en que la impulsa a la masa en dirección contraria a la deformación, la cantidad de energía disponible (la suma de la almacenada en el resorte y la cinética que se le comunica a la masa) puede ser suficiente para que la masa supere la posición de equilibrio estático.

### Factor o grado de amortiguamiento

De la condición de amortiguamiento crítico:

$$\gamma^2 = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

Llamando  $b_c$ : coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$b_c = 2m\omega_o = 2\sqrt{mk} \quad [6-39]$$

El **Grado de Amortiguamiento** suele entonces expresarse como la razón:

$$\zeta = \frac{b}{b_c} \quad \left( \zeta = \frac{b}{2m\omega_o} = \frac{\gamma}{\omega_o} \Rightarrow \gamma = \zeta \cdot \omega_o \right) \quad [6-40]$$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} b < b_c \ (\zeta < 1) & \text{vibración subamortiguada} \\ b = b_c \ (\zeta = 1) & \text{vibración crítica} \\ b > b_c \ (\zeta > 1) & \text{vibración sobreamortiguada} \end{cases}$$

Para **Vibraciones subamortiguadas** la ecuación [6-34] resulta:

$$x(t) = A \cdot e^{-\zeta\omega_o t} \cdot \cos(\omega_o(1 - \zeta^2)^{1/2} t + \theta) \quad [6-41]$$

$$\text{Donde} \quad \omega_1 = (\omega_o^2 - \gamma^2)^{1/2} = (\omega_o^2 - \zeta^2 \omega_o^2)^{1/2} = \omega_o^2 (1 - \zeta^2)^{1/2} \quad [6-42]$$

### Decremento Logarítmico

Cuando el factor de amortiguación  $\zeta$  es menor que uno, se producen oscilaciones amortiguadas, es decir, oscilaciones cuya amplitud decae en el tiempo. La razón entre dos amplitudes máximas consecutivas es:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A.e^{-\gamma(t+\tau)} \cdot \cos[\omega_1(t+\tau) + \theta]}{A.e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta)} = \frac{e^{-\gamma\tau} \cdot e^{-\gamma \frac{2\pi}{\omega_1}}}{e^{-\gamma\tau}} = e^{-\gamma \frac{2\pi}{\omega_1}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \gamma} \quad [6-42]$$

Entonces:  $x_{n+1} = x_n \cdot e^{-\frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \gamma} = x_n \cdot e^{-\gamma\tau_1}$  [6-43]

y por lo tanto  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \gamma}$

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \gamma = \delta \quad (\text{constante}) = \text{decremento logarítmico} \quad [6-44]$$

El logaritmo de la razón entre una amplitud máxima y la inmediata siguiente es una constante denominada **decremento logarítmico**  $\delta$ .

$$\delta = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \gamma = \frac{2\pi \cdot \tau}{\omega_o (1 - \zeta^2)^{1/2}} = \frac{2\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad [6-45]$$

Cuando  $\zeta \rightarrow 0$   $\delta \cong 2\pi \zeta$  [6-46]

Si se puede medir dos amplitudes máximas consecutivas, en una vibración amortiguada (se logra conocer  $\delta$ ) es posible obtener  $\zeta$ , (despejando  $\zeta$  en función de  $\delta$ ). Esto indica una forma experimental de medir el coeficiente de amortiguamiento.

En cuanto a la Energía Potencial Elástica acumulada en sucesivas amplitudes máximas.

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{1/2 \cdot k \cdot x_{n+1}^2}{1/2 \cdot k \cdot x_n^2} = \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^2 = e^{-2 \left( \frac{2\pi}{\omega_1} \right) \gamma} \quad [6-46]$$

La energía decrece al doble de rapidez que lo que decrece la amplitud (comparar con [6-43]).

$$E_{n+1} = E_n \cdot e^{-2\gamma\tau_1} \quad [6-47]$$

### Vibraciones Armónicas Forzadas

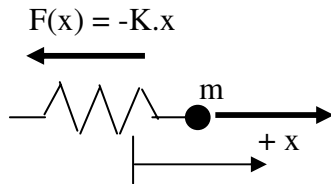
Ocurren vibraciones forzadas cuando la masa se encuentra sometida a la acción de una fuerza forzadora o excitación. El análisis de diferencia según el cómo es la fuerza forzadora.

Las soluciones más sencillas son las que se obtienen para fuerzas forzadoras armónicas, es decir, cuando responden a la ley  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ . Para este tipo de excitación, la deformación resultante será también armónica y de la misma frecuencia, pero en general estará desfasada.

Las fuerzas forzadoras periódicas pero no sinusoidales pueden descomponerse en armónicas siguiendo el desarrollo en series trigonométricas de Fourier, luego la respuesta será la composición de las respuestas a las excitaciones armónicas consideradas por separado. Este procedimiento es aceptable si el comportamiento del sistema es lineal.

### Vibraciones Forzadas Sin Amortiguamiento

Modelo Dinámico:



Sobre la partícula de masa  $m$  actúa la fuerza perturbadora exterior armónica:

$$F_{(t)} = F_o \cdot \text{sen } \omega t$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia circular de la fuerza perturbadora (es frecuentemente producida por desbalances en maquinarias rotatorias).

En ausencia de amortiguación, la ecuación del movimiento resulta:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_o \cdot \text{sen } \omega t \quad [6-48]$$

Llamando  $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$  y  $P_o = \frac{F_o}{m}$  (dimensiones de aceleración)

Reemplazando en la ecuación queda

$$\ddot{x} + \omega_o^2 \cdot x = P_o \cdot \text{sen } \omega t \quad [6-49]$$

Ecuación diferencial no homogénea de segundo orden de las vibraciones forzadas, sin amortiguamiento.

La solución general, según la teoría de las ecuaciones diferenciales es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde:

$x(t)$  = ecuación del movimiento, da la posición en función del tiempo.

$x_h(t)$ : solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$x_p(t)$ : solución particular.

Según lo visto anteriormente:  $x_h(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$

Para la solución particular,  $x_p(t)$ , se prueba con:

$$x_p(t) = a \text{sen } \omega t$$

derivando respecto del tiempo:

$$\dot{x}_p = a \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = -a \omega^2 \text{sen } \omega t$$

Reemplazando en la ecuación [6-49], y para que se cumpla para todo  $t$ , debe ser:

$$a = \frac{P_o}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad [6-50]$$

Llamaremos  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_o}$  (razón de frecuencias)

$$a = \frac{P_o}{\omega_o^2} \cdot \frac{1}{(1-\lambda^2)} \quad [6-51]$$

$$\frac{P_o}{\omega_o^2} = \frac{F_o}{m \frac{k}{m}} = \delta_{est} \quad [6-52]$$

$\delta_{est}$ : deformación que acusa el resorte si  $F_o$  se aplica en forma estática, o también la deformación que produce por acción del máximo valor que puede asumir  $F(t)$ .

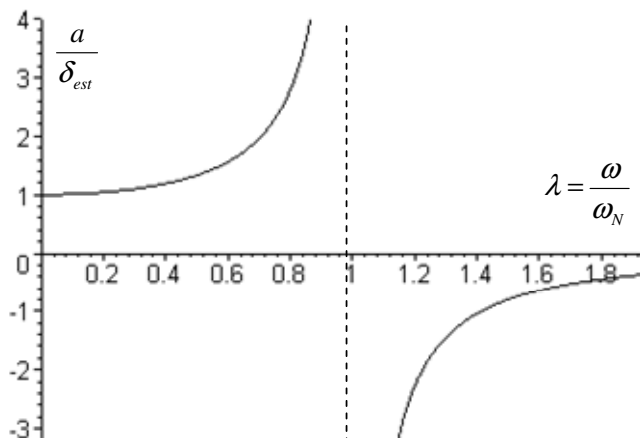
Entonces la ley de movimiento resulta:

$$x(t) = x_h + x_p = A \cdot \cos(\omega_o t + \theta) + a \cdot \sin \omega t \quad [6-53]$$

Siempre que se cumpla el valor de  $a$ , según [6-51]

Puede escribirse:

$$\frac{a}{\delta_{est}} = \frac{1}{1-\lambda^2} \quad [6-54]$$



Siendo  $\delta_{est}$  una constante interesa analizar la relación funcional entre  $a$  y  $\lambda$ .

(para  $\lambda > 1$ ,  $a < 0$ , pero se acostumbra rebatir la gráfica sobre el semiplano en que  $a > 0$ ),

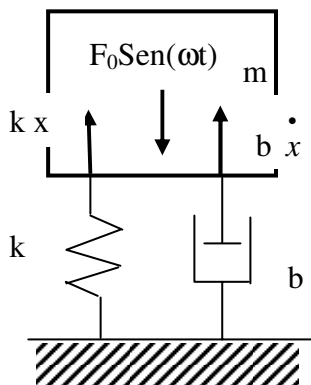
En la gráfica se observa que cuando la relación entre la frecuencia forzadora y la frecuencia natural es

igual a 1, la amplitud de la oscilación tiende a infinito, situación conocida como Resonancia: estado para el que  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_b} = 1$  o sea  $\omega = \omega_b$ , conduce a amplitud que tiende

a  $a \rightarrow \infty$

### Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento

Modelo dinámico: En el esquema, se muestra un sistema de un grado de libertad,



cuyos elementos son la masa ( $m$ ), el resorte ( $k$ ) y el amortiguador ( $b$ ). También se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa: La fuerza forzadora  $F_o \text{sen} \omega t$ ,

la fuerza del resorte ( $kx$ ) y la fuerza del amortiguador ( $b \dot{x}$ ). Considerando un desplazamiento "x" desde la posición de equilibrio estático, positivo dirigido hacia arriba, se plantea la ecuación de movimiento:

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x} + F_o \text{sen} \omega t \quad [6-55]$$



$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad P_o = \frac{F_o}{m} \quad \zeta = \frac{b}{b_c} < 1$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = P_o \text{sen}\omega t \quad [6-56]$$

Solución general

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

Para la solución particular  $x_p$ , se prueba:

$$x_p = a \cdot \text{sen}(\omega t - \beta) \quad [6-57]$$

$$\dot{x}_p = a \omega \cos(\omega t - \beta)$$

$$\ddot{x}_p = -a \omega^2 \text{sen}(\omega t - \beta)$$

Haciendo:  $\omega t - \beta = \emptyset$  o bien  $\omega t = \emptyset + \beta$

Probando en [6-56]

$$a(-\omega^2 + \omega_o^2) \text{sen} \emptyset + 2\gamma \omega a \cos \emptyset = P_o (\cos \beta \text{sen} \emptyset + \text{sen} \beta \cos \emptyset)$$

Lo cual, para que se cumpla, requiere que:

$$a(\omega_o^2 - \omega^2) = P_o \cos \beta \quad [6-58]$$

$$2\gamma \omega a = P_o \text{sen} \beta \quad [6-59]$$

Que permiten obtener los valores de la amplitud  $a$  y el ángulo de fase  $\beta$  de [6-57]

$$a = \frac{P_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad [6-59]$$

$$\text{tg} \beta = \frac{2\gamma \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad [6-60]$$

Algunas conclusiones:

1. Para distintas relaciones  $\omega/\omega_o$  se obtienen amplitudes de oscilaciones forzadas diferentes.

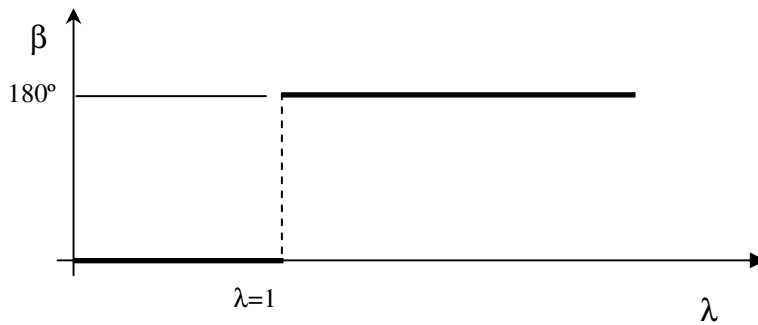
2. Si  $\omega = 0$ , o si  $\omega \ll \omega_o$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\frac{a}{\delta_{est}} \rightarrow 1 \text{ y la amplitud de las oscilaciones forzadas tiende a } \delta_{est}.$$

3. Si  $\omega \gg \omega_o$  la fuerza excitatriz  $F(t) = F_o \cdot \text{sen} \omega t$  cambia de signo muy rápidamente, no dando tiempo a la masa a reaccionar.  $\frac{a}{\delta_{est}} \rightarrow 0$  y  $a \rightarrow 0$

4. Si  $\omega \cong \omega_o$   $a \rightarrow \infty$ , situación de resonancia.

El ángulo de desfasaje  $\beta$  puede graficarse en función de  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_o}$ . La siguiente gráfica corresponde a un factor de amortiguación muy pequeño.



$\forall \lambda < 1 \quad (\omega < \omega_0) \rightarrow \beta = 0$  fuerza y desplazamiento tienen igual sentido.  
 $\forall \lambda > 1 \quad (\omega > \omega_0) \rightarrow \beta = \pi$  fuerza y desplazamiento tienen sentido opuestos.

**Aclaración:** las vibraciones forzadas sin amortiguamiento comprenden un caso ideal, útil a efectos de presentar el problema de excitaciones exteriores. Para amortiguación muy débiles ( $\zeta \ll 1$ ).

De tal modo, la solución completa es de:

$$x_{(t)} = \underbrace{A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)}_{(1)} + \underbrace{a \operatorname{sen}((\omega t - \beta))}_{(2)} \quad [6-61]$$

El primer sumando (1) se amortigua relativamente pronto. Llamemos  $t_s$ : tiempo de establecimiento, de tal modo que, si por ejemplo consideramos que las vibraciones transitorias se desprecian cuando su valor es el 1 % de la amplitud de oscilaciones forzadas.

$$Ae^{-\gamma t} = 0,01 \cdot a \quad t_s = \frac{1}{\gamma} \cdot \ln \frac{100A}{a}$$

Las vibraciones transitorias (1) dependen de las condiciones iniciales. Las vibraciones forzadas (2) de las constantes físicas ( $k$ ,  $b$ ,  $m$ ) y de la fuerza perturbadora ( $P_0$ ,  $\omega$ ).

Resulta de alto interés analítico las relaciones funcionales [6-59] y [6-60]

A tal fin se definen:

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_0} \quad h = \frac{b}{\omega_0}$$

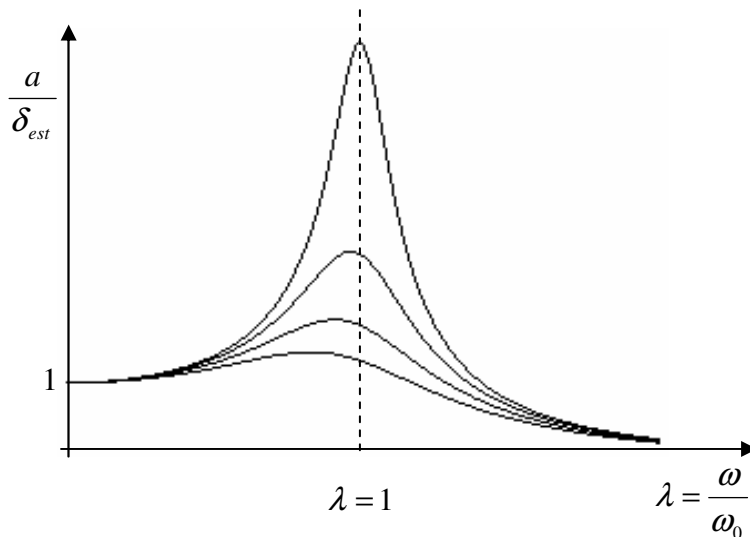
$$\frac{P_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = \delta_{est} \quad (\text{def. estática})$$

La [6-59] queda:

$$\frac{a}{\delta_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}} \quad [6-62]$$

y de la [6-60]

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2} \quad [6-63]$$



En la figura se muestran gráficas de la relación adimensional  $\frac{a}{\delta_{est}}$  para distintos valores de  $h$ .

Se observa que la máxima amplitud de la oscilación se produce a un valor ligeramente distinto de  $\lambda=1$ .

Si en [6-62] llamamos  $\varepsilon = \lambda^2$ , la amplitud resulta máxima cuando el denominador es un mínimo.

Así

$$f(\varepsilon) = (1 - \lambda^2)^2 + 4 h^2 \lambda^2 = (1 - \varepsilon)^2 + 4 h^2 \varepsilon$$

$$\text{tiene un mínimo } f'(\varepsilon) = 0 = -2\varepsilon + 4h^2 \rightarrow \varepsilon = \lambda^2 = 1 - 2h^2$$

Llamando resonancia al valor  $\lambda$  que conduce a  $a_{max}$ :

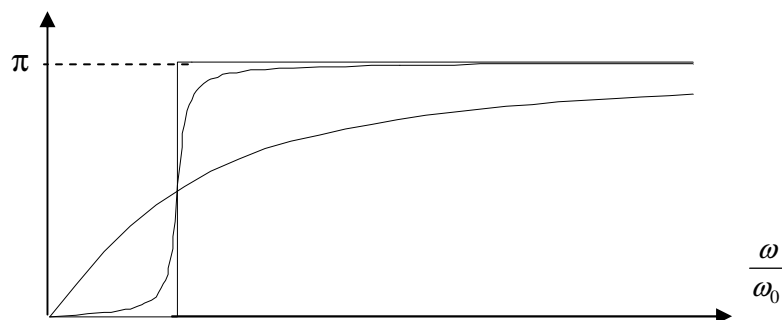
$$\lambda_{res} = (1 - 2h^2)^{1/2}$$

Por consiguiente, en presencia de amortiguamiento, las vibraciones forzadas ( $\omega$ ) conducen a resonancia, para valores  $\lambda$  un poco inferiores a 1 (es decir, para  $\omega < \omega_0$ ).

Algunas situaciones particulares:

- Si  $\lambda \ll 1$ , (o sea,  $\omega \ll \omega_0$ ), resulta  $\frac{a}{\delta_{est}} \rightarrow 1$  y  $a \cong \delta_{est}$ , en tanto  $\beta \cong 0$ .
- Si  $\lambda$  es muy grande ( $\omega \gg \omega_0$ ) el valor de  $a$  se toma muy pequeño y  $\beta \rightarrow 180^\circ$ .
- Si  $\lambda \cong 1$  se produce resonancia.

Para la relación [6-63], se grafica el ángulo de desfase  $\beta$  para distintos valores de factor de amortiguación:



## Conclusiones

1. La amplitud de las oscilaciones forzadas no dependen de las condiciones iniciales del movimiento.
2. En presencia de resistencia (medio viscosos) las vibraciones forzadas no se amortiguan.
3. La frecuencia  $\omega$  de las oscilaciones forzadas no depende de las constantes físicas del sistema (como  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , por ejemplo) y está determinada y coincide con la de la fuerza perturbadora.
4. Aún para  $F_0$  pequeñas, se pueden producir amplitudes forzadas muy elevadas.
5. Para  $\omega \gg \omega_0$  se puede minimizar las amplitudes, incluso para valores elevados de  $F_0$ .

## Representación fasorial

La representación fasorial de las ecuaciones de movimiento aportan elementos analíticos adicionales. Se recuerda que un fasor es un vector rotante que se utiliza para representar magnitudes que son funciones sinusoidales del tiempo. Se utilizan para representar tensiones y corrientes alternas, y aquí serán utilizadas para representar las fuerzas forzadoras, fuerzas elásticas, de amortiguación y de inercia. Estas últimas son armónicas de la misma frecuencia que la fuerza forzadora, pues dependen de la deformación y de sus derivadas ( la velocidad y la aceleración).

El módulo de cada fasor se hace igual a la amplitud de la magnitud que representa. Así, si la deformación sigue la ley  $x(t) = X \text{seno}(\omega t)$ , el fasor tendrá módulo igual a  $X$ , y se entiende es un vector que rota con velocidad angular  $\omega$ . Se recuerda que el valor instantáneo de la deformación se obtiene como la proyección sobre el eje vertical del fasor.

## Vibración Armónica Libre

$$m \ddot{x} + k \dot{x} = 0$$

$$\dot{x} = -A \omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \theta)$$

$$\ddot{x} = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \Rightarrow \quad -\omega_0^2 \bar{x}$$

Sea  $\bar{x}$  el vector desplazamiento.

La fase del vector velocidad  $\dot{\bar{x}}$  está adelantada en  $90^\circ$  resp. de  $\bar{x}$

La fase del vector aceleración  $\ddot{\bar{x}}$  está adelantada  $180^\circ$  resp. de  $\bar{x}$

## Vibración Forzada no Amortiguada

$$m \ddot{x} + k x = F_0 \text{sen} \omega t$$

**Caso (I);**  $\omega < \omega_0$ ,  $\beta = 0$

$\bar{F}_0$  y  $\bar{x}$  no tienen desfase

**Caso (II),**  $\omega > \omega_0$ ,  $\beta = 180^\circ$

$\overline{F_o}$  y  $\overline{x}$  están desfasados en  $180^\circ$

### Vibración Forzada con Amortiguamiento

$$m \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + kx = F_o \sin \omega t$$

Interesa visualizar tres casos:

- Cuando:
- 1)  $\omega \ll \omega_o$
  - 2)  $\omega \cong \omega_o$
  - 3)  $\omega \gg \omega_o$

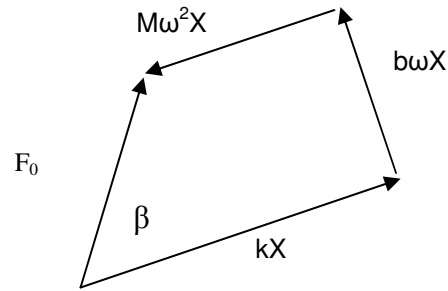
#### 1) $\omega \ll \omega_o$

$F_o$ : fuerza excitatriz

$kX$ : fuerza de recuperación elástica

$b m X$ : fuerza de amortiguamiento

$m \omega^2 X$ : fuerza de inercia

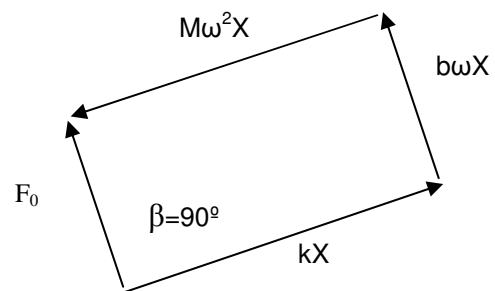


1. Las fuerzas de inercia, así como las de amortiguamiento son pequeñas.
2. El ángulo  $\beta$  es muy pequeño
3.  $\overline{F_o}$  tiende a equilibrar a la fuerza elástica.
4. La excitación exterior tiende a aparecer como aplicada estáticamente.

#### 2) $\omega = \omega_o$

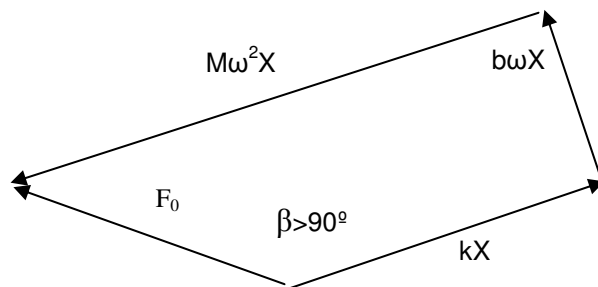
En este caso, el ángulo de fase entre la deformación y la fuerza forzadora es de  $90^\circ$ .

La fuerza de inercia está equilibrada por la fuerza del resorte, y la fuerza excitatriz se emplea para vencer a la fuerza de amortiguación.



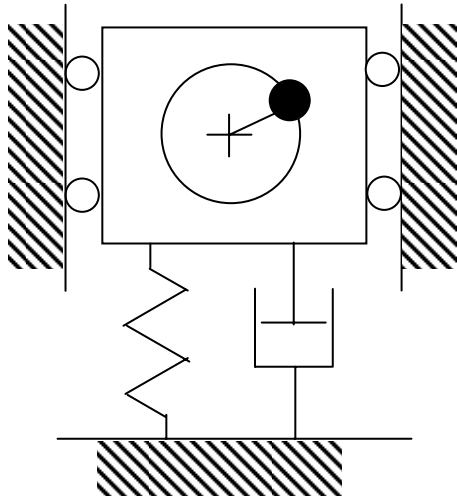
#### 3) $\omega \gg \omega_o$

En este caso, al ángulo de fase entre la deformación y la fuerza forzadora supera los  $90^\circ$ , y si la frecuencia tiende a un valor muy alto, el ángulo tiende a  $180^\circ$ , quedando la deformación en oposición de fase con la fuerza forzadora. Si se mantiene constante la amplitud de la fuerza forzadora, al aumentar la frecuencia se verá que las amplitudes de la deformación y la fuerza en el amortiguador se harán pequeñas, y para altas frecuencias, la deformación será prácticamente nula.



## Desbalance Rotatorio

El desbalance de masas en máquinas rotatorias es el origen de fuerzas excitadoras. Se considera a continuación un sistema masa-resorte, restringido a moverse en el sentido vertical y sometido a una fuerza forzadora originada por el desbalance de una máquina rotatoria.



Sean:

$M$  = masa total del sistema

$m$  = masa excéntrica

$e$  = excentricidad

$\omega$  = velocidad angular de rotación

$x$  = desplazamiento de la masa no rotante ( $M - m$ )

$x + e \text{ Sen } \omega t$  = desplazamiento vertical de  $m$ .

La ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$(M - m) \ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + e \text{ Sen } \omega t) = -kx - b \dot{x} \quad [6-64]$$

Desarrollando la derivada, y simplificando la

ecuación del movimiento queda:

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + kx = me\omega^2 \text{ Sen}(\omega t)$$

Haciendo:  $F_0 = me\omega^2$

queda la ecuación:

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \text{ Sen}(\omega t) \quad [6-65]$$

Que resulta idéntica a la ecuación diferencial correspondiente al caso de oscilación forzada por una fuerza sinusoidal. En el proceso de resolución de esta ecuación diferencial, la amplitud de la fuerza  $F_0$  puede tomarse como constante.

La respuesta permanente se puede escribir entonces como:

$$x(t) = X \text{ Sen}(\omega t - \phi) \quad [6-66]$$

Siendo la amplitud  $X$ :

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad [6-67]$$

$$\text{y el ángulo de fase } \phi = \text{ArcTang} \frac{b\omega}{k - M\omega^2} \quad [6-68]$$

Utilizando las siguientes definiciones:

$$\omega_n = \sqrt{k/\text{masa}} = \text{frecuencia natural de oscilación no amortiguada.}$$

$$b_c = 2\sqrt{k \times \text{masa}} = 2 \text{ masa } \omega_n = \text{amortiguamiento crítico}$$

$$\zeta = b/b_c = \text{Factor de amortiguamiento}$$

puede escribirse la ecuación de la amplitud en forma no dimensional:

$$\frac{MX}{me} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad [6-69]$$

el desfase quedará:

$$\tan(\phi) = \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad [6-70]$$

En la siguiente gráfica, se muestra la amplitud “X” y el ángulo de fase “φ” versus la frecuencia “ω”, utilizándose el factor de amortiguación como parámetro.

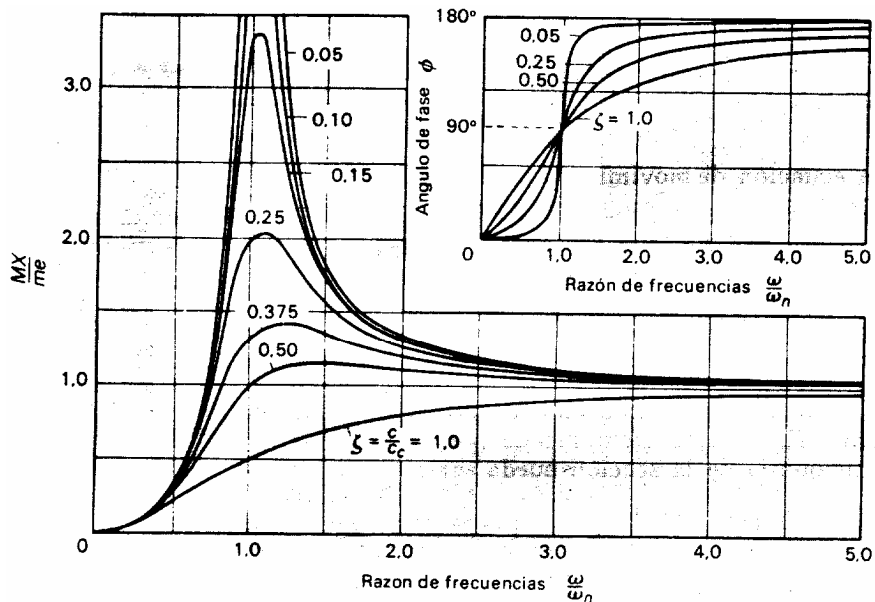
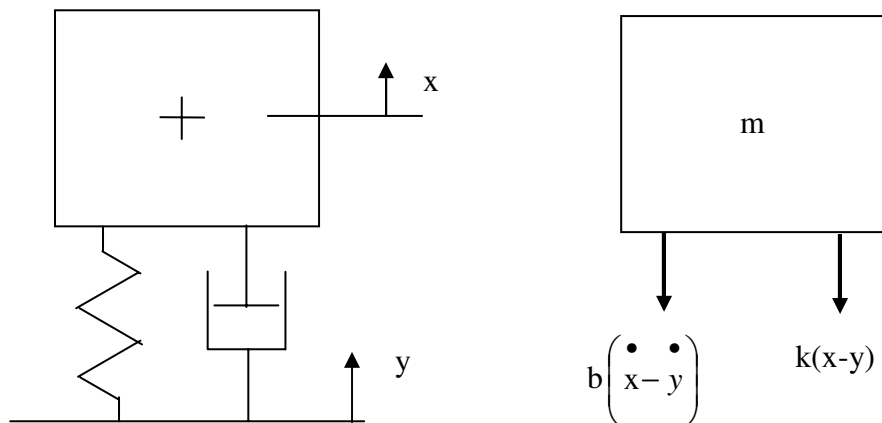


Fig. 3.2-2. Gráfico de las Ecs. (3.2-4) y (3.2-5) para vibración forzada con desbalance rotatorio.

### Movimiento del soporte

En muchos casos la excitación del sistema no es debida a una fuerza que actúa sobre la masa, sino por el movimiento del soporte. En esta sección, se considerará como excitación el movimiento del



soporte y se verá de qué manera plantear la ecuación diferencial que rige el movimiento.

Sea “x” la coordenada que indica la posición de la masa, medida desde la posición del equilibrio estático. La coordenada “y” indica el movimiento del soporte,  $\dot{y}$  es la velocidad,  $\ddot{y}$  y la aceleración. En el gráfico de la derecha se indican las fuerzas no balanceadas (el peso no se considera puesto que es compensada por la fuerza del resorte  $k\delta_{est}$ ). La deformación del resorte es (x-y), y la velocidad relativa entre las piezas del amortiguador es  $\dot{(x-y)}$ .

Se plantea la ecuación diferencial que rigen el movimiento de la masa:

$$m \ddot{x} = -k(x-y) - b \dot{(x-y)} \quad [6-71]$$

En esta ecuación diferencial, intervienen las variables “x” e “y”, y sus derivadas. Haciendo la sustitución:

$$z = x - y$$

la ecuación del movimiento se transforma en:

$$m \ddot{z} + b \dot{z} + kz = -m \ddot{y} \quad [6-72]$$

Para el caso en que el movimiento del soporte sea sinusoidal,  $y = Y \sin(\omega t)$ , siendo “Y” la amplitud del movimiento del soporte y “ $\omega$ ” su frecuencia angular.

Derivando “y” dos veces, y reemplazando la ecuación diferencial queda:

$$m \ddot{z} + b \dot{z} + kz = m\omega^2 Y \sin(\omega t) \quad [6-73]$$

La forma de esta ecuación diferencial es similar a la correspondiente al desbalance rotatorio, con “ $m\omega^2 Y$ ” reemplazando a “ $m\epsilon\omega^2$ ”. La solución de la ecuación diferencial puede entonces escribirse como:

$$z = Z \sin(\omega t - \phi)$$

$$\text{Con } Z = \frac{mY\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad [6-74]$$

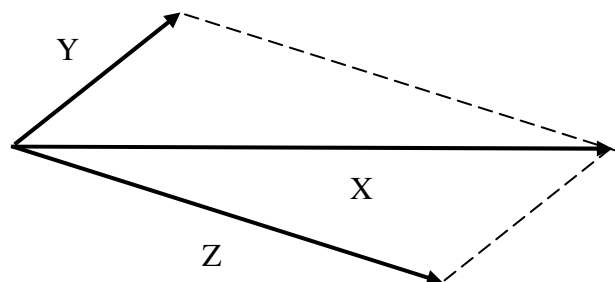
Haciendo  $x = z + y$  se obtendrá el movimiento absoluto “x” de la masa. Por lo tanto:

$$x(t) = z(t) + y(t) = Y \sin(\omega t) + Z \sin(\omega t - \phi)$$

Siendo  $x(t)$  la suma de dos funciones sinusoidales de frecuencia angular “ $\omega$ ”, será también una función sinusoidal de la misma frecuencia:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \psi)$$

donde “X” es la amplitud del movimiento de la masa, y “ $\psi$ ” el desfase entre el movimiento de la masa y el movimiento del soporte.



Para obtener el valor de “X” y “ $\psi$ ”, se recurre a la representación fasorial:



Estos fasores pueden ser representados mediante el uso de números complejos:

$$y = Y e^{j\omega t}$$

$$z = Z e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$x = X e^{j(\omega t - \psi)}$$

$$x = Y e^{j\omega t} + Z e^{j(\omega t - \phi)}$$

Utilizando la expresión deducida [6-74] para “Z”, se llega a que:

$$X = \sqrt{\frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} Y \quad [6-75]$$

$$\tan(\psi) = \frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (\omega c)^2} \quad [6-76]$$

En la gráfica siguiente, se muestra el grafo de relación de amplitudes X/Y, y el ángulo de desfase “ $\psi$ ” versus la relación  $\omega/\omega_n$ , siendo el factor de amortiguación el parámetro.

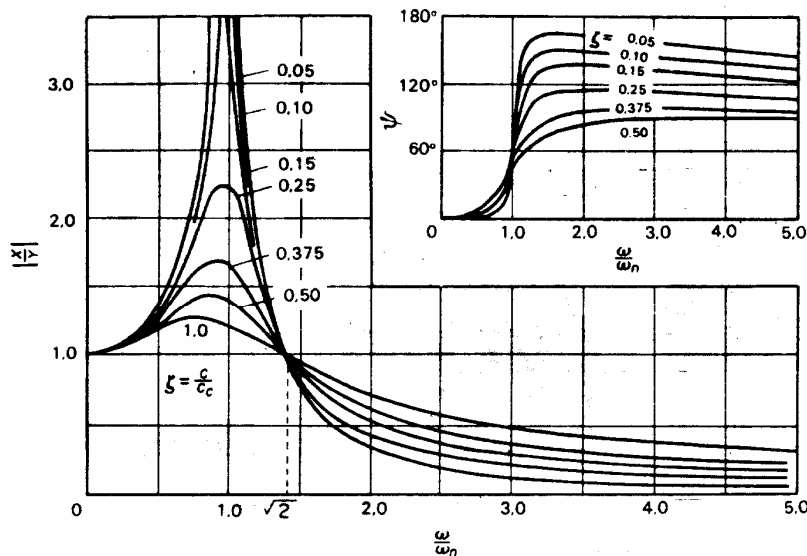


Fig. 3.5-2. Gráfica de las ecuaciones [6-75] y [6-76]

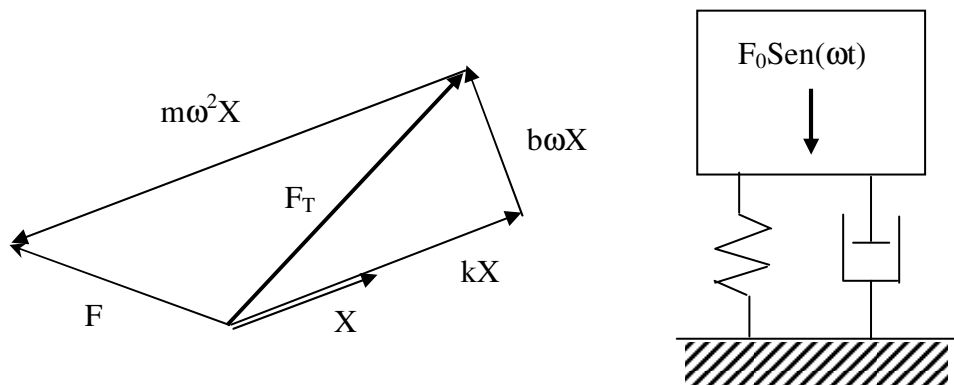
En el grafo se observa que:

- La relación X/Y vale 1 (lo que implica que  $X = Y$ , es decir que la amplitud del movimiento de la masa es igual a la amplitud del movimiento del soporte), cualquiera sea el factor de amortiguación para  $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$ .
- Para valores de  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ , X/Y es menor que la unidad, lo que significa que la oscilación de la masa será atenuada por la combinación del resorte y el amortiguador. Debe notarse que la atenuación será más efectiva cuanto menor sea el factor de amortiguación para frecuencia  $\omega > \omega_n$ .

## Aislamiento Vibratorio

Entendemos por aislamiento vibratorio la atenuación de los efectos de las vibraciones originadas en máquinas y motores. Puede tratarse de aislar fuerzas perturbadoras producidas por desbalances rotatorios o movimientos del soporte. Se verá que ambos problemas pueden tratarse de manera similar. La solución de este problema consistirá en el montaje de la máquina sobre resortes, o combinación de resortes y amortiguadores.

A continuación se analizará el aislamiento de la fuerza perturbadora originada por el desbalance rotatorio. En la figura se muestra el diagrama de fasores, indicándose la fuerza transmitida a través del resorte y el amortiguador como  $F_T$ .



$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (b\omega X)^2} = kX \sqrt{1 + \left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}$$

$X$  = Amplitud del movimiento originado por una fuerza forzadora  $F_0 \text{ Sen}(\omega t)$

Reemplazando  $X$ , se puede escribir la relación  $(F_T/F_0)$  como:

$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \frac{m\omega^2}{k}\right]^2 + \left[\frac{b\omega}{k}\right]^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad [6-77]$$

Esta relación es idéntica a la relación  $X/Y$  hallada para el caso del movimiento del soporte, por lo que se concluye que el aislamiento de una máquina de las perturbaciones del soporte es idéntico al problema de aislar fuerzas perturbadoras. Las razones  $(F_T/F_0)$  y  $(X/Y)$  se conocen como Transmisibilidad de fuerza o desplazamiento.

Del análisis del gráfico que corresponde a la relación  $X/Y$  se deduce que:

- Para lograr una transmisibilidad menor que 1 (de esta manera se atenuaría la fuerza transmitida) los resortes sustentadores deben ser tales que la frecuencia natural debe ser baja comparada con la frecuencia de la perturbación.
- En la región  $(\omega/\omega_n) > \sqrt{2}$ , a menor factor de amortiguación menor es la transmisibilidad. Como contrapartida, en la región  $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$  esta relación se invierte.

## Respuesta a fuerzas periódicas

En el caso de fuerzas forzadoras periódicas no sinusoidales, aplicando el análisis de Fourier pueden descomponerse en una serie de componentes armónicos (suma de senos y cosenos) de distintas frecuencias.

Una fuerza periódica se caracteriza por su período, el cual se identifica con el símbolo  $T$ , y se cumple que  $F(t)=F(t+T)$ , es decir que el valor de la fuerza para un instante  $t$  se repite  $T$  segundos después.

Si  $F(t)$  es una función de período  $T$ , puede ser representada por medio de una serie de Fourier:

$$F(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \omega_n t + \sum_1^{\infty} b_n \text{sen} \omega_n t \quad [6-78]$$

Los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se determinan mediante las fórmulas de Euler.

Las frecuencias de las armónicas son múltiplos de la frecuencia de la armónica fundamental, la cual es igual a la frecuencia de la fuerza forzadora, es decir,  $\omega_n = n\omega_1$ .

La serie de senos y cosenos pueden ser combinados en una serie de solo senos, y la fuerza forzadora se escribe entonces:

$$F(t) = \sum_1^{\infty} F_n \text{sen}(n\omega_1 t - \phi_n) \quad [6-79]$$

Deben tomarse los términos necesarios para una correcta aproximación. Considerando que los elementos del sistema se comportan en forma lineal, es factible hallar la respuesta a cada armónico por separado, luego componer estas respuestas para determinar la respuesta del sistema a la fuerza excitadora periódica.



## **Unidad 7: Oscilaciones Mecánicas de Dos o Más Grados de Libertad**

### **Introducción**

En el capítulo anterior se ha visto que el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas independientes necesarias para describir su movimiento. Para introducir conceptos relacionados con estos sistemas de varios grados de libertad, se iniciará con el estudio de sistemas de dos grados de libertad.

Como primera característica de estos sistemas, los sistemas de dos grados de libertad poseen dos frecuencias naturales. En casos particulares (que corresponden a ciertas formas de iniciar el movimiento, es decir una combinación particular de condiciones iniciales) la vibración libre del sistema ocurre a una de estas frecuencias naturales, existiendo una relación definida entre las amplitudes de las dos coordenadas y la configuración correspondiente es un modo normal de vibración. El sistema de dos grados de libertad tendrá entonces dos modos normales de vibración, cada uno de los cuales corresponde a una de las frecuencias naturales. Cuando el movimiento se origine bajo condiciones generales, las vibraciones libres de las masas ocurrirán como la superposición de los modos normales de vibración (esto quiere decir que el movimiento de cada masa será la suma o superposición de dos movimientos armónicos, cada uno de los cuales tendrá una frecuencia igual a la frecuencia natural).

Si el sistema está sometido por una fuerza forzadora, la vibración ocurrirá a la frecuencia de la fuerza forzadora y las amplitudes tenderán a un máximo cuando esa frecuencia coincida con las frecuencias naturales.

### **Modos normales de Vibración**

En esta sección se determinarán las configuraciones de los modos normales de vibración. En primer lugar, se modelizará un sistema de dos grados de libertad. Tomando como base el sistema mostrado en la figura x.x, donde se han despreciado las amortiguaciones, las ecuaciones diferenciales correspondientes son:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= k(x_1 - x_2) - kx_1 & [7-1] \\ m \ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - kx_2 \end{aligned}$$

Un modo normal de vibración es aquel en el cual cada masa experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia y fase u oposición de fase, es decir, pasan simultáneamente por la posición de equilibrio.

Para tal movimiento, y utilizando números complejos, las ecuaciones de las deformaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{j\omega t} & [7-2] \\ x_2 &= A_2 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones, A1, A2 son las amplitudes de las armónicas, y  $\omega$  la frecuencia a la que suceden.

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales, queda el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} (2k - \omega^2 m A_1 - k A_2) &= 0 & [7-3] \\ -k A_1 + (2k - 2\omega^2 m) A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen soluciones  $A_1, A_2$  distintas de la trivial, si el determinante siguiente es nulo:

$$\begin{vmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \quad [7-4]$$

Haciendo  $\omega^2 = \lambda$ , al resolver el determinante se llega a la ecuación característica, polinomio de segundo grado:

$$\lambda^2 - \left(3 \frac{k}{m}\right) \lambda + \frac{3}{2} \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad [7-5]$$

Las raíces de esta ecuación son los cuadrados de las frecuencias naturales del sistema. De la resolución de la ecuación característica:

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0,634 \frac{k}{m}} \quad [7-6]$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2,366 \frac{k}{m}} \quad [7-8]$$

Sustituyendo estas frecuencias naturales en las ecuaciones, se calculan las relaciones entre las amplitudes,  $(A_1/A_2)^{(i)}$ , donde “i” indica la frecuencia para la cual se calcula dicha relación. Para  $\omega_1$ :

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = \frac{k}{(2k - \omega_1^2 m)} = 0.731 \quad [7-9]$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = \frac{k}{(2k - \omega_2^2 m)} = -2.73 \quad [7-10]$$

Nota: Los valores numéricos calculados corresponden al ejemplo que se está desarrollando.

Estas razones de amplitud son las formas modales que corresponden a cada modo normal. La razón de amplitud para  $\omega_1$ , 0.731 es positivo, significando esto que para la frecuencia  $\omega_1$  las dos masas oscilan en fase, en tanto que para  $\omega_2$  el valor  $-2.73$  indica que las dos masas oscilan en contrafase.

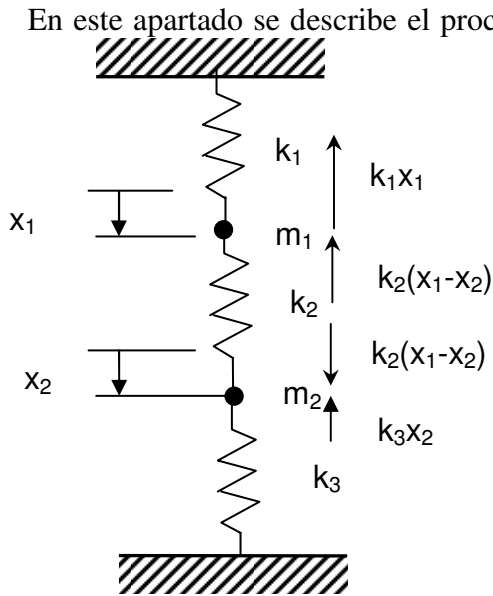
Estos modos normales de vibración se producen para condiciones iniciales particulares. Si el movimiento se inicia con condiciones iniciales diferentes de las de los modos normales, las oscilaciones contienen a los modos normales simultáneamente (superposición de armónicas de distintas frecuencias). Para determinar las ecuaciones correspondientes, será necesaria la resolución de un sistema de ecuaciones formadas por las dos ecuaciones de movimiento y las relaciones de amplitudes. Así, si el movimiento se genera apartando las masas de su posición de equilibrio mediante las deformaciones  $x_1(0)$  y  $x_2(0)$ , y las velocidades iniciales  $\dot{x}_1(0)$  y  $\dot{x}_2(0)$ , se reemplazan estos valores en las ecuaciones de las deformaciones y sus derivadas:

$$x_1(t) = A_1^{(1)} \text{sen}(\omega_1 t + \theta_1) + A_1^{(2)} \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \quad [7-11]$$

$$x_2(t) = A_2^{(1)} \text{sen}(\omega_1 t + \theta_1) + A_2^{(2)} \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

A estas cuatro ecuaciones se agregan las relaciones de amplitudes. De esta manera, se genera un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, cuya resolución permite calcular las amplitudes  $(A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)})$  y los ángulos de fase  $(\theta_1, \phi_2)$ .

## Modelización de un sistema de varios grados de libertad



Las masas  $m_1$  y  $m_2$  están sujetas por los resortes de constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ . Respecto de las posiciones de equilibrio estático, la masa  $m_1$  está separada la cantidad  $x_1$ , y la masa  $m_2$  la cantidad  $x_2$ . Si se hace  $x_1 > x_2$ , el resorte  $k_1$  estará elongado, en tanto que los resortes  $k_2$  y  $k_3$  estarán comprimidos.

Considerando que los pesos de las masas están compensados por la deformación estática, no son incluidas en los diagramas de

cuerpo libre. Para la masa  $m_1$ , la ecuación de Newton queda:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

En tanto que para la masa  $m_2$  será:

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2$$

Estas ecuaciones diferenciales no son independientes entre sí, puesto que las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  aparecen en ambas. Agrupadas forman un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución dará como resultado las deformaciones  $x_1$  y  $x_2$  como función del tiempo. El sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases}$$

Haciendo  $k_1 + k_2 = k_{11}$ ,  $-k_2 = k_{12}$ ,  $k_2 + k_3 = k_{22}$ , el sistema de ecuaciones puede reescribirse como sigue:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{12}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

Forma que permitirá escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales.

En el caso de que se tomen en cuenta las amortiguaciones, se cambia el modelo físico introduciendo los elementos amortiguadores. En el dibujo se han agregado los amortiguadores  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ .

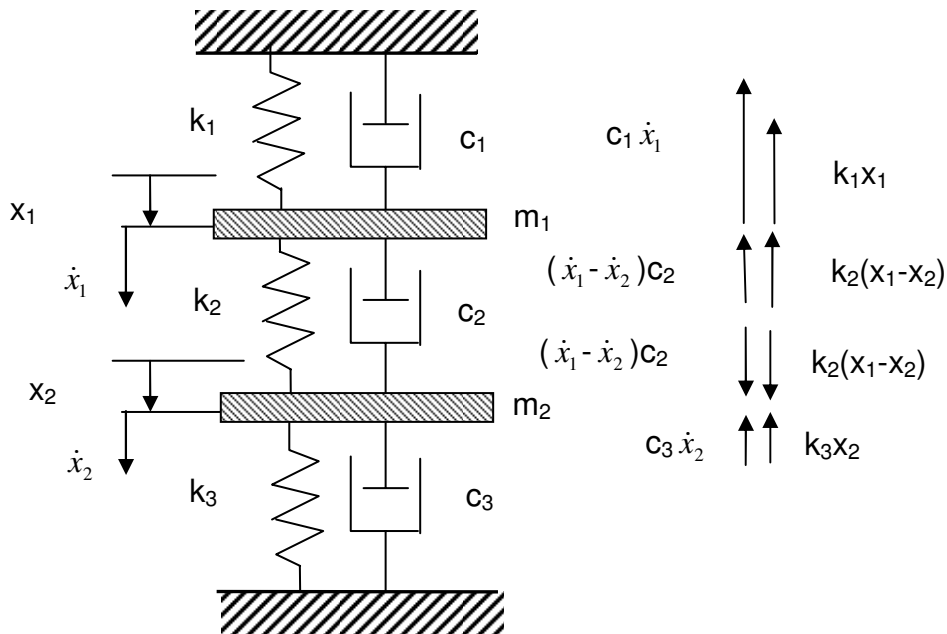
Las velocidades de las masas son  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$ , se considera que la velocidad de la masa  $m_1$  es mayor que la velocidad de la masa  $m_2$  ( $\dot{x}_1 > \dot{x}_2$ ).

Las fuerzas originadas en los amortiguadores están representadas en los diagramas de cuerpo libre.

En base a la segunda ley de Newton, se escriben las ecuaciones de movimiento de las dos masas, formando un sistema de ecuaciones diferenciales. Para la masa  $m_1$ :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Que se reescribe:



$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0$$

Para la masa  $m_2$ :

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 = 0$$

Se concluye con el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Nótese que en este caso, al igual que en el anterior, si se eliminan el resorte  $k_2$  y el amortiguador  $c_2$  desaparece el acoplamiento y resultan dos ecuaciones diferenciales independientes.

### Acoplamiento de coordenadas.

Las ecuaciones diferenciales que describen sistemas de varios grados de libertad se llaman acopladas porque las distintas coordenadas aparecen en cada ecuación.

Para un caso general de dos GL, las ecuaciones tienen la forma:

$$m_{11} \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \quad [7-12]$$

$$m_{21} \ddot{x}_1 + m_{22} \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0$$

Las ecuaciones diferenciales pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [7-13]$$

Donde  $[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$  es la matriz de masas,  $[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$  es la matriz de

rigidez. Si la matriz de masas es no diagonal, existe acoplamiento dinámico o de masa, en tanto que si la matriz de rigidez es diagonal, existe acoplamiento estático o de rigidez. La matriz de masas está multiplicando al vector de aceleraciones, en tanto que la matriz de rigidez al vector de deformaciones.



Los acoplamientos dependen del sistema de coordenadas elegido. Un sistema de coordenadas en el cual no aparece acoplamiento alguno se denomina de coordenadas principales o coordenadas normales.

Si el sistema presenta amortiguaciones, aparecerá la matriz de amortiguamiento

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales de un sistema de dos grados de libertad con amortiguación se escribirán de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [7-14]$$

### Valores y vectores propios

En esta sección se generalizarán los conceptos de modos normales y frecuencias naturales para sistemas de más de dos grados de libertad. Para calcular estas cantidades, se utilizarán los autovalores y autovectores.

Para la vibración libre de un sistema de varios grados de libertad sin amortiguamiento se aplica la ecuación matricial  $[xx]$ , que se puede escribir en forma abreviada:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + [k] \{x\} = \{0\} \quad [7-15]$$

Premultiplicando por la matriz inversa de la matriz de masas, queda:

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[M] &= [I] & [I] &= \text{Matriz identidad} \\ [M]^{-1}[k] &= [A] & [A] &= \text{Matriz de sistema o matriz dinámica} \end{aligned}$$

Utilizando estas definiciones, se puede reescribir la ecuación matricial:

$$[I] \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + [A] \{x\} = \{0\} \quad [7-16]$$

Asumiendo que los desplazamientos son movimientos armónicos, la amplitud de cada aceleración será igual a la amplitud de la deformación multiplicada por el cuadrado de la frecuencia:

$$\ddot{X} = \lambda X$$

donde  $\lambda = \omega^2$

La ecuación matricial queda:

$$[A - \lambda[I]] \{x\} = \{0\} \quad [7-17]$$

Igualando a cero el determinante de la matriz se obtiene la ecuación característica del sistema:

$$|A - \lambda[I]| = 0 \quad [7-18]$$

Las raíces de la ecuación característica son los autovalores o valores propios, y las frecuencias naturales del sistema se calculan mediante la relación:

$$\lambda = \omega^2 \quad [7-19]$$

Sustituyendo los autovalores en la ecuación matricial [7-17], se calculan los autovectores. Estos autovectores se caracterizan porque en los mismos se encuentran las formas modales, las que se determinan mediante las relaciones entre los componentes del autovector. Por ejemplo, para un sistema con dos grados de libertad, para la primera frecuencia natural se tendrá el autovector  $v_1: [v_{11}, v_{12}]$ . La forma modal de la primera frecuencia natural  $(A_1/A_2)^{(1)}$  será igual a la relación  $(v_{11}/v_{12})$ .

A cada frecuencia natural le corresponde un vector propio, el cual da la configuración de modo normal que corresponde a dicha frecuencia.

### Vibración armónica forzada

En los sistemas de varios grados de libertad, al ser excitado el sistema con una fuerza sinusoidal las masas oscilan con la misma frecuencia que la fuerza excitadora. Si se varía la frecuencia de la fuerza forzadora, se verificará que el sistema entra en resonancia cuando la frecuencia coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, es decir que un sistema de varios grados de libertad tiene tantas frecuencias de resonancia como grados de libertad.

Se analizará un sistema de dos grados de libertad, tal como se muestra en la figura. La fuerza forzadora  $F_1 \text{sen} \omega t$  actúa sobre la masa  $m_1$ . El sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a este sistema es:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \quad [7-20]$$

Considerando que la solución es:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t)$$

Es decir, las oscilaciones de cada masa tendrán la misma frecuencia que la fuerza forzadora.

Sustituyendo el vector de deformaciones y su derivada segunda en la ecuación queda:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 X_1 \\ -\omega^2 X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \quad [7-21]$$

Cancelando  $\text{sen}(\omega t)$  y reordenando:

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - m_1 \omega^2) & k_{12} \\ k_{21} & (k_{22} - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [7-22]$$

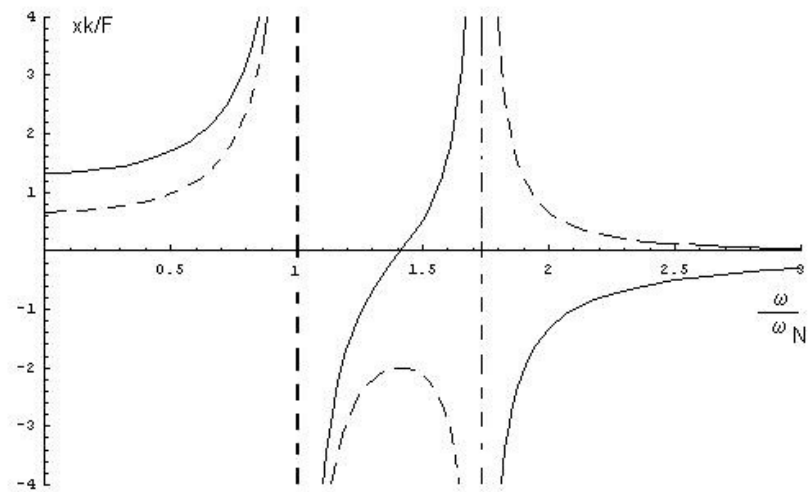
Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen las amplitudes de las deformaciones, las cuales pueden escribirse en función de las frecuencias naturales  $\omega_1, \omega_2$  del sistema:

$$X_1 = \frac{(k_{22} - m_2 \omega^2) F_0}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad [7-23]$$

$$X_2 = \frac{-k_{12} F_0}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad [7-24]$$

En estas ecuaciones de las amplitudes, puede observarse que al variar la frecuencia de la fuerza excitadora, el denominador se anulará dos veces, cada vez que la frecuencia coincide con las frecuencias naturales del sistema. Estas son las condiciones de resonancia en el sistema ideal sin amortiguaciones, las amplitudes de las deformaciones tenderían a un valor muy grande.

En la gráfica se han representado las amplitudes  $X_1$  (línea continua) y  $X_2$  (línea a trazos) en forma adimensional: se observan las dos frecuencias de resonancia.



### Amortiguador de vibraciones

En el caso analizado anteriormente, la fuerza forzadora actúa sobre una de las masas, y en la ecuación de la amplitud de esta masa, en el numerador aparece el factor  $(k_{22} - m_2\omega^2)$  (Ec [7-23]). Este factor se anula para una combinación adecuada de  $k_{22}$ ,  $m_2$  y  $\omega$ . Al ocurrir esto, la amplitud de la masa  $m_1$  será nula, es decir que la masa sobre la cual actúa la fuerza forzadora no oscilará. Esto se debe a que para esta combinación de valores, la deformación de la masa será tal que la fuerza que el resorte de constante  $k_2$  ejerce sobre la masa  $m_1$  es de igual magnitud y opuesta a la fuerza forzadora.

Este hecho puede ser utilizado para eliminar las vibraciones de una masa mediante el agregado de una segunda masa vinculada a la primera por medio de un resorte, seleccionando el valor de la masa  $m_2$  y el resorte  $k_2$  de manera tal que  $(k_{22} - m_2\omega^2)$  se anule.



## Unidad 8: Mecánica analítica

### Principio de los desplazamientos virtuales

#### Introducción

En este capítulo se trabajará con los trabajos virtuales, principio que permitirá establecer las condiciones de equilibrio de cualquier sistema mecánico.

La particularidad de este principio es que en la aplicación de este método la acción de las ligaduras no se calcula introduciendo reacciones desconocidas, sino considerando los desplazamientos que pueden ser comunicados a los puntos del sistema, si este se saca de la posición ocupada. Estos desplazamientos son los denominados *desplazamientos virtuales*.

Los desplazamientos virtuales de los puntos de un sistema deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. Deben ser infinitamente pequeños, puesto que si fueran finitos el sistema pasará a otra posición donde las condiciones de equilibrio pueden ser diferentes.
2. Deben ser tales que respeten las ligaduras impuestas al sistema.

Se adoptará como definición para los desplazamientos virtuales la siguiente:

Desplazamiento virtual de un sistema es un conjunto de desplazamientos infinitamente pequeños que son compatibles, en un momento dado, con todas las ligaduras impuestas a este sistema.

El desplazamiento virtual de un punto de un sistema será representado por un vector  $\Delta s$ , dirigido en la dirección del desplazamiento.

Las ligaduras impuestas a un sistema determina un número finito de desplazamientos virtuales independientes, número que coincide con el número de grados de libertad del sistema.

Los demás desplazamientos virtuales pueden obtenerse como la suma de los desplazamientos virtuales independientes.

#### Trabajos virtuales

Se denomina trabajo virtual al trabajo elemental que puede realizar una fuerza aplicada a un punto material durante un desplazamiento que coincida con el desplazamiento virtual de dicho punto. Sobre todo sistema sujeto a ligaduras actúan fuerzas activas y reactivas. El trabajo virtual de la fuerza activa  $F^A$  será  $\Delta W^A = F^A \cdot \Delta s$  y el trabajo  $\Delta W^R = \Delta F^R \cdot \Delta s$ .

Si se considera que las ligaduras son ideales, la suma de los trabajos elementales debido a las fuerzas reactivas será nula, es decir que:

$$\Sigma \Delta W^R = 0$$

Si se elige un punto arbitrario  $B_k$  del sistema, si se llama  $F_k^A$  a la suma de todas las fuerzas activas que actúan sobre el punto, y  $N_k$  a la suma de todas las fuerzas reactivas tanto internas como externas será:

$$F_k^A + N_k = 0$$

$$F_k^A = -N_k$$

Por lo tanto, para cualquier desplazamiento virtual del punto  $B_k$  la suma de los trabajos virtuales debido a fuerzas activas y reactivas debe ser nula. Si por otra parte se consideran ideales las ligaduras impuestas, el trabajo virtual de las fuerzas reactivas será nula, por lo que se puede establecer la siguiente ecuación:

$$\Delta W_k^A = 0$$

Considerando todos los puntos del sistema:

$$\Sigma \Delta W_k^A = 0$$

Condición que deben satisfacer los sistemas mecánicos con ligaduras ideales que se encuentran en equilibrio. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que un sistema mecánico con ligaduras ideales se encuentre en equilibrio es que la suma de los trabajos virtuales sea nula. Analíticamente se expresa esto de la siguiente manera:

$$\sum \Delta W_k^A = \sum F_k^A \bullet \Delta s_k = \sum (F_{kx}^A \Delta x + F_{ky}^A \Delta y + F_{kz}^A \Delta z) = 0$$

Donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  son las componentes de  $\Delta s$ .

El principio de los trabajos virtuales se puede utilizar para resolver sistemas estáticos. En general, en estos problemas, dada una configuración de cargas que actúan sobre el sistema, se desea conocer el valor de las reacciones de los vínculos o ligaduras. El procedimiento a seguir se puede dividir en los siguientes pasos:

- a. Representar las fuerzas activas que actúan sobre el sistema.
- b. Asignar al sistema un desplazamiento virtual independiente.
- c. Calcular los trabajos elementales de todas las fuerzas activas para el desplazamiento dado.
- d. Repetir el procedimiento para todos los grados de libertad del sistema.

### **Ecuación general de la dinámica**

Tal como se ha visto, el principio de los trabajos virtuales proporciona un método general para resolver los problemas de la Estática. El Principio de D'Alembert permite aplicar los métodos de la Estática para resolver problemas dinámicos. Por lo tanto, aplicando ambos métodos simultáneamente, es posible formular un método general para resolver problemas de Dinámica.

Dado un sistema de puntos materiales al cual se han impuesto ligaduras ideales. A las fuerzas activas y reacciones de ligaduras, se agregan las *fuerzas inerciales*  $F_k^{in} = -m_k a_k$ , luego, de acuerdo con el Principio de D'Alembert, el sistema estará en equilibrio. Aplicando a estas fuerzas el principio de los trabajos virtuales:

$$\sum \Delta W_k^A + \sum \Delta W_k^R + \sum \Delta W_k^{in} = 0$$

Pero siendo ideales las condiciones de ligadura,  $\sum \Delta W_k^{in} = 0$ , por lo tanto será:

$$\sum \Delta W_k^A + \sum \Delta W_k^R = 0$$

Esta ecuación es la ecuación general de la dinámica y significa que en el movimiento de un sistema sujeto a ligaduras ideales, en cada instante la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas activas aplicadas y de todas las fuerzas de inercia, para cualquier desplazamiento virtual, es nulo.

### **Condiciones de Equilibrio y ecuaciones del movimiento del sistema en coordenadas generalizadas**

#### **Coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas**

Dado un sistema con ligaduras, el número de coordenadas independientes que determinan la posición de un sistema es igual al número de grados de libertad del mismo. Si bien en el desarrollo de los capítulos de cinemática y dinámica se han trabajado con distintos tipos de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas) donde las coordenadas son en general distancias medidas sobre rectas o ángulos, se pueden elegir parámetros de cualquier dimensión y significado geométrico, como ser longitudes de arcos, áreas, volúmenes, etc.

Los parámetros de cualquier dimensionalidad, independientes entre sí, en número igual al número de grados de libertad del sistema y que determinan la posición del mismo, se denominan las *coordenadas generalizadas* del sistema. Estas coordenadas generalizadas

serán identificadas con la letra q, y los desplazamientos virtuales de cada coordenada, con  $\Delta q$ .

Como ejemplo, una partícula que puede moverse libremente en el espacio tiene tres grados de libertad. Las coordenadas cartesianas x,y,z permiten localizar esta partícula, al igual que las coordenadas esféricas r,θ,λ, las cilíndricas r,z,λ o las coordenadas generalizadas q1,q2,q3.

Las coordenadas cartesianas pueden expresarse como funciones de las coordenadas generalizadas, por ejemplo para una partícula con tres grados de libertad:

$$x=x(q_1,q_2,q_3)$$

$$y=y(q_1,q_2,q_3)$$

$$z=z(q_1,q_2,q_3)$$

Para un sistema descrito por las coordenadas generalizadas q1,...,qn se denomina velocidad generalizada asociada a la coordenada qk a su derivada respecto del tiempo,

$\dot{q}_k$ . La dimensionalidad de estas velocidades generalizadas depende de las dimensiones de la coordenada generalizada, por ejemplo, en coordenadas esféricas, para la coordenada θ, su velocidad generalizada será medida en radianes/seg.

### Fuerzas Generalizadas

Si sobre un sistema de n partículas cuya posición está determinada por coordenadas generalizadas y sobre ellas actúan fuerzas F1, F2,...,Fn. Si se aplica a la coordenada q1 el desplazamiento virtual  $\Delta q_1$  mientras que las demás coordenadas permanecen invariables.

Luego, cada vector posición rk tendrá una variación  $\Delta r_k$ , que puede escribirse en función de las coordenadas generalizadas de la siguiente manera:

Siendo  $r_k=r_k(q_1,q_2,\dots,q_s)$

Considerando que únicamente varía la coordenada q1, aplicando el diferencial:

$$(\Delta r_k)_1 = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \Delta q_1$$

El subíndice 1 de  $\Delta r_k$  indica que se trata de la variación en el vector posición rk debido al desplazamiento virtual  $\Delta q_1$ .

El trabajo virtual debido a este desplazamiento virtual se calcula como:

$$\Delta W_1 = \sum F_k \cdot \Delta r_k = \sum F_k \cdot \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) \Delta q_1$$

Donde el punto representa el producto escalar. Si se extrae  $\Delta q_1$  como factor común queda:

$$\Delta W_1 = \left( \sum F_k \cdot \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) \right) \Delta q_1$$

El término  $\sum F_k \cdot \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right)$  se denomina fuerza generalizada correspondiente a la coordenada q1.

El razonamiento hasta aquí planteado puede extenderse para todas las coordenadas, de esa manera se definen las fuerzas generalizadas correspondientes a cada coordenada.

$$Q_i = \sum F_k \cdot \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right)$$

### Condiciones de equilibrio en Coordenadas generalizadas

La condición de equilibrio expresada en coordenadas generalizadas es la siguiente:

$$\sum Q_i \Delta q_i = 0$$

Como los desplazamientos  $\Delta q_i$  son independientes entre sí, esta ecuación se cumple únicamente si las fuerzas generalizadas  $Q_i$  son todas nulas.

Por tal motivo, se puede establecer como condición de equilibrio para un sistema mecánico que todas las fuerzas generalizadas que corresponden a las coordenadas elegidas sean iguales a cero.

### Ecuaciones de Lagrange

Para resolver un sistema en coordenadas generalizadas, un camino posible es plantear las ecuaciones de Newton en coordenadas cartesianas para luego realizar una transformación de coordenadas. Otra forma es establecer directamente las ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas. Este método se debe a Lagrange, y las ecuaciones diferenciales del movimiento en coordenadas generalizadas se denominan *Ecuaciones de Lagrange*.

Para establecer las ecuaciones del movimiento, se parte de la ecuación:

$$\Sigma \Delta W_k + \Sigma \Delta W_k^{in} = 0$$

Asumiendo que no todas las ligaduras son ideales, el primer término puede incluir también fuerzas de rozamiento.

En coordenadas generalizadas:

$$\Sigma \Delta W_k = \sum Q_i \Delta q_i$$

De la misma manera que se generaron las fuerzas generalizadas para las fuerzas activas, se introducen las fuerzas de inercia generalizada  $Q_i^{in} = \sum F_k^{in} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$ .

Con estas definiciones, queda:

$$+\Sigma \Delta W_k^{in} = \sum Q_i^{in} \Delta q_i$$

Reemplazando la ecuación general de la dinámica:

$$\Sigma \Delta W_k + \Sigma \Delta W_k^{in} = \sum Q_i \Delta q_i + \sum Q_i^{in} \Delta q_i = 0$$

Ecuación que puede reordenarse de la siguiente manera:

$$\sum (Q_i + Q_i^{in}) \Delta q_i = 0$$

Siendo las  $\Delta q_i$  independientes, para que se cumpla esta ecuación debe ser  $(Q_i + Q_i^{in}) = 0$ .

Desarrollando esta ecuación para cada coordenada generalizada se llegará a un sistema de ecuaciones que pueden aplicarse directamente para resolver problemas de dinámica. El planteo de Lagrange se basa en expresar las fuerzas de inercia generalizadas en función de la energía cinética del sistema.

En la ecuación  $Q_i^{in} = \sum F_k^{in} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$ , las  $F_k^{in}$  pueden escribirse en base a las aceleraciones

$a_k$ :

$$F_k^{in} = -m_k a_k = -m_k \frac{dv_k}{dt}$$

reemplazando en la ecuación de las fuerzas inerciales generalizadas, queda:

$$Q_i^{in} = \sum -m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$$



Resta ahora dejar toda la ecuación en función de la velocidad  $v_k$ . En primer lugar se puede escribir:

$$\frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) - v_k \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right)$$

Además  $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$  y  $\left( \frac{\partial r_k}{\partial t} \right) = v_k$

Entonces, haciendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dq_1} \left( \frac{\partial r_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial q_1}$$

La derivada parcial  $\left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right)$  es el límite del cociente incremental  $\Delta r_k / \Delta q_1$ , por lo tanto, aplicando la regla de L'Hospital queda:

$$\left( \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \right) = \left( \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_1} \right) = \left( \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_1} \right)$$

Utilizando estas relaciones:

$$\frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dq_1} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}$$

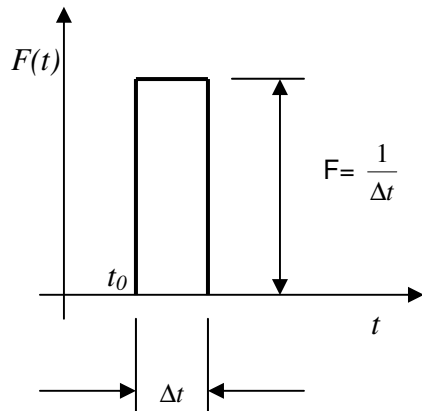
donde  $T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2$  es la energía cinética del sistema.

Finalmente planteando esta ecuación para cada coordenada generalizada:

Estas son las ecuaciones diferenciales del movimiento en coordenadas generalizadas o ecuaciones de Lagrange.

### Dinámica impulsiva

Se denomina movimiento impulsivo el originado por fuerzas de gran magnitud que actúan sobre tiempos muy cortos, siendo la integral de la fuerza en función del tiempo finita, como ocurre en los choques, explosiones o el disparo de proyectiles.



Sea una fuerza que actúa durante el lapso de tiempo  $\Delta t$ , con magnitud  $1/\Delta t$

El impulso de la fuerza está dado por:

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(t) dt$$

Si se considera que el impulso es unitario cuando:

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(t) dt = 1$$

Cuando el impulso es unitario y la duración es muy pequeña, es decir, se está en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, la fuerza se denomina función delta de Dirac, con la siguiente definición:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & \text{si } t_0 < t < t_0 + \Delta t \\ 0 & \forall t < t_0 \text{ o } t > t_0 \end{cases}$$

De acuerdo con la definición, una fuerza que sigue la función delta de Dirac se debe entender como de magnitud infinita, durante un lapso de tiempo infinitesimal. En la realidad, la duración de una fuerza es impulsiva no es infinitesimal, pero se puede tomar esto como una aproximación aceptable. Esta aproximación introduce una simplificación notable en la resolución de problemas, ya que se puede considerar que la partícula permanece inmóvil durante la aplicación del impulso.

Cuando actúan fuerzas de tipo impulsivo o percusiones, el análisis del movimiento se puede hacer siguiendo los siguientes puntos:

1. Actuando simultáneamente fuerzas “ordinarias” e impulsivas, el efecto de las primeras se desprecia.
2. Las partículas se consideran inmóviles durante el lapso de actuación de las fuerzas impulsivas.

De acuerdo al teorema del momento angular, el impulso de las fuerzas es igual al cambio de la cantidad de movimiento. En base a los principios enunciados se desprecian las fuerzas no impulsivas, quedando la expresión del momento angular:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dp$$

$$I = p_1 - p_0$$

Es decir, que el impulso de las percusiones es igual al incremento en la cantidad de movimiento.

En cuanto al momento cinético, y considerando que durante la acción de las percusiones las partículas se consideran inmóviles, se llega a que la suma de los momentos de las fuerzas impulsivas es igual al incremento del momento cinético del sistema.

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} M(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dL + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v_0 \times p dt$$

Llamando N a la suma de los momentos de las fuerzas impulsivas, queda:

$$N = L_1 - L_0$$

## Índice Alfabético

<b>A</b>	
Aceleración en la rotación.....	47
Aislamiento vibratorio .....	130
Álgebra Tensorial.....	9
Amortiguador de vibraciones.....	139
Ángulo de nutación .....	50
Ángulo de precesión.....	49
Ángulo de rotación propia.....	50
Ángulos de Euler.....	49
Axoides .....	57
<b>B</b>	
Base de coordenadas generalizadas.....	29
<b>C</b>	
Campo de velocidades .....	47
Cantidad de movimiento .....	75, 89, 90, 96
Centro instantáneo de rotación.....	59, 60
Centro instantáneo de velocidad .....	63
Cinemática de la Partícula.....	19
Cinemática del Cuerpo Rígido.....	41
Cinemática Relativa .....	34
Combinación de constantes elásticas .....	109
Condición cinemática de aceleraciones.....	43
Condición cinemática de velocidades.....	42
Condición de rigidez .....	41
Conservación de la cantidad de movimiento .....	85
Conservación del momento cinético.....	86, 93
Coordenadas cartesianas .....	20
Coordenadas cilíndricas .....	21, 29
Coordenadas del polo de aceleraciones.....	63
Coordenadas esféricas.....	23, 31
Coordenadas generalizadas .....	142
Coordenadas intrínsecas.....	26, 32
Curvas de potencial.....	71
<b>D</b>	
Decremento logarítmico.....	117
Definición de energía potencial.....	70
Deformación de sistemas elásticos.....	106
Desbalance rotatorio .....	126
Descomposición impropia.....	54
Descomposición propia.....	54
Diagonalización de un tensor .....	13
Diagonalización de una matriz simétrica real.....	14
Diagonalización del tensor de inercia .....	94
Dinámica de la Partícula.....	67
Dinámica de los Sistemas de Partículas .....	83
Dinámica del Sólido Rígido.....	89
Dinámica impulsiva .....	145
Dinámica Relativa de la Partícula .....	80
Dinámica relativa del sólido.....	96
<b>E</b>	
Ecuación de la base .....	61
Ecuación de la rodante .....	62
Ecuación del eje central .....	56
Ecuación general de la dinámica .....	142
Ecuaciones de Lagrange.....	144
Eje central del movimiento .....	55
Equilibrio dinámico.....	100
Estado de aceleración en el movimiento plano.....	63
Estados de Equilibrio .....	72
Estudio de Vibraciones Mecánicas Armónicas .....	110
<b>F</b>	
Factor o grado de amortiguamiento.....	117
Forma cuadrática asociada .....	15
Fuerza dependiente de la Posición .....	70
Fuerza dependiente de la velocidad.....	70
Fuerza dependiente del tiempo.....	69
Fuerza recuperadora elástica.....	105
Fuerzas Generalizadas.....	143
<b>G</b>	
Grados de libertad .....	48
<b>I</b>	
Invariante escalar .....	52
Invariante vectorial.....	52
<b>M</b>	
Masa del sistema .....	83
Masa del sólido rígido.....	89
Mecánica analítica.....	141
Métodos energéticos.....	113
Modelación dinámica .....	105
Modos normales de vibración.....	133
Momento cinético .....	76, 86, 90, 95, 97
Momento y productos de inercia .....	91
Movimiento Curvilíneo de la Partícula .....	74
Movimiento de un sólido con un punto fijo.....	100
Movimiento de un Sólido por Inercia.....	101
Movimiento del soporte .....	127
Movimiento helicoidal tangente.....	57
Movimiento paralelo .....	57
Movimiento Plano.....	58
Movimiento polar.....	58

Movimiento polar del sólido .....	48
Movimiento rototraslatorio .....	51
Movimiento sobre una curva lisa .....	79
Movimiento sobre una superficie lisa .....	80
Movimiento unidimensional de la partícula .....	68
Movimientos del Sólido en el Espacio .....	43

### O

Operaciones con tensores:.....	13
Operadores lineales .....	16
Oscilaciones con influencia del peso.....	112
Oscilaciones de Dos o Más Grados de Libertad.....	133
Oscilador Amónico Torsional Libre.....	112

### P

Polo de aceleraciones .....	64
Polo de reducción .....	51
Principio de Acción y Reacción .....	67
Principio de D'Alembert .....	81
Principio de independencia de acción de fuerzas .....	67
Principio de Inercia (1º Ley de Newton) .....	67
Principio de los desplazamientos virtuales.....	141
Principio de masa .....	67
Propiedades de los tensores.....	11

### R

Radio vector o Vector de Posición .....	28
Reacciones de vínculos .....	78
Reacciones dinámicas de un sólido en rotación .....	98
Representación fasorial .....	124
Rotación pura .....	45

### S

Sistemas de coordenadas generalizadas.....	28
Sistemas de Referencia en Movimiento.....	34
Sistemas en Rotación .....	36
Sistemas en Traslación (únicamente).....	35
Sistemas en Traslación y Rotación Simultánea.....	40
Sistemas Referenciales.....	28
Sistemas Rígidos y Deformables.....	34
Sistemas vibratorios de un grado de libertad. ....	105

### T

Tensor de inercia .....	16, 17
Tensores simétricos y antisimétricos.....	13
Teorema de Euler - Chassles .....	51
Teorema de los ejes paralelos.....	95
Teorema del momento cinético .....	76
Trabajo y Energía.....	87
Trabajos virtuales .....	141
Transformación de coordenadas.....	10, 17
Transformación de Coordenadas .....	33
Traslación pura.....	44
Trayectorias polares .....	60

### V

Valores y vectores propios .....	137
Vector de Posición, Velocidad y Aceleración .....	19
Vector velocidad angular .....	46
Velocidad en la rotación.....	45
Vibración armónica forzada .....	138
Vibración armónica Libre .....	124
Vibración Críticamente Amortiguada .....	116
Vibración Forzada con Amortiguamiento .....	125
Vibración forzada no amortiguada .....	124
Vibraciones Armónicas amortiguadas.....	114
Vibraciones Armonicas Forzadas.....	118
Vibraciones armónicas libres no amortiguadas .....	111
Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento .....	120
Vibraciones Forzadas Sin Amortiguamiento .....	119
Vibraciones Sobreamortiguadas.....	116
Vibraciones Subamortiguadas.....	115
Vínculos o Ligaduras. ....	77
Vínculos Rugosos .....	79

## **BIBLIOGRAFÍA BÁSICA**

- Boresi, A. y Schmidt, R. (2001). *Ingeniería Mecánica, Dinámica*. Thomson Learning.
- Pytel, A. y Kiusalaas, J. (1999). *Ingeniería Mecánica, Dinámica*. Thomson Learning.
- Golstein, H. (1979). *Mecánica Clásica*. Editorial Aguilar.
- Leon, J. (1979). *Mecánica*. Editorial Limusa.
- Symon, K. (1977). *Mecánica*. Editorial Aguilar.
- Targ, S.M. (1986). *Curso breve de Mecánica teórica*. Editorial Mir.
- Longhini, P.(1951). *Lecciones de Mecánica*. Tomo 2. Editorial El Ateneo.
- Hertig, R. (1978). *Mecánica Teórica*. Editorial El Ateneo.
- Beer, F. (1993). *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica*. Editorial McGraw-Hill.
- Spiegel, M.(1991). *Análisis Vectorial*. Editorial McGraw-Hill.
- McLean, N. (1980). *Mecánica para Ingenieros*. Editorial McGraw-Hill.
- Timoshenko, S. , Young, D. (1971). *Dinámica superior*. Editorial Urmo.
- Mershershki, I. (1974). *Problemas de mecánica teórica*. Editorial Mir.
- Thomson, W. (1992). *Teoría de las vibraciones*. Prentice Hall.

## **BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA**

- Macaulay, D., Ardley, N. (1999). *Como funcionan las cosas*. Ed. Atlántida.
- Roederer, J. (2002). *Mecánica Elemental*, Eudeba.
- Alonso M. Finn, E. s/f . *Física*. Volumen I. Fondo Educativo Americano.
- Lea, S. Burke, J. (1999). *Física, la naturaleza de las cosas*. (1999). Tomson Editores.
- Serway, R. y Jewett, J. (2005). *Física para ciencias e ingenierías*. Volumen I. Tomson Editores.
- Sears, F. Freedman, R., Young, H. (2005). *Física Universitaria con física moderna*. Pearson Educación.
- Tipler, P. (1994). *Física*. (Tomo1). Ed Reverte.

Halliday, D. Resnick, R. Kaen, K. (2003). *Física*. Volumen I. Compañía Editorial Continental.

Bueche, F. (1998). *Física general*. Mc Graw Hill.

Tipens, P. (1999). *Física básica*. Mc Graw Hill.

Hewitt, P. (2004). *Física conceptual*. Pearson Educación.