UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Forestales

EL APUNTE
ANÁLISIS MATEMÁTICO

Andrés Lorenzi

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES
2006

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870

Posadas - Misiones – Tel-Fax: (03752) 428601

Correos electrónicos:

edunam-admini@arnet.com.ar

edunam-direccion@arnet.com.ar

edunam-produccion@arnet.com.ar

edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra

Coordinación de la edición: Nicolás Capaccio

Armado de interiores: Sebastián Franco

Corrección: Hedda Giraudo y Sebastián Franco

Lorenzi, Andrés
El apunte: análisis matemático / Andrés Lorenzi ; coordinado por Rodolfo Nicolás Capaccio - 1a ed. - Posadas : EdUNaM - Editorial Universitaria de la Univ. Nacional de Misiones, 2006.
242 p.; 30x21 cm.

ISBN 950-579-050-3

1. Análisis Matemático. I. Capaccio, Rodolfo Nicolás, coord. II. Título
CDD 515

Fecha de catalogación: 27/03/2006

ISBN-10: 950-579-050-3
ISBN-13: 978-950-579-050-0

Impreso en Argentina

A mis hijas Clara Andrea,
Mariella Fernanda y Luciana María

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo final se debe muy especialmente a *mis alumnos* de la asignatura Análisis Matemático que me alentaron permanentemente en mi tarea educativa y me enseñaron a partir de sus críticas y sus comentarios, a ser mejor profesor. El texto da cuenta de esas experiencias.

Finalmente mi reconocimiento a las autoridades de la Facultad de Ciencias Forestales que me permitieron dedicar todo el tiempo necesario que demandó la elaboración de este texto.

Andrés Lorenzi

Eldorado, Abril de 2006

EL AUTOR

Andrés Lorenzi
Ingeniero Químico (UBA)
Profesor Regular de Matemática (FCF, UNaM)
Magíster en Docencia Universitaria (UNaM)
Autor del libro: *Mi Aula*. Posadas. Editorial Universitaria de Misiones, 2004.

val@facfor.unam.edu.ar

TABLA DE CONTENIDOS

PREFACIO

Cuando ingresé a la Universidad de Buenos Aires a los diecisiete años, nunca había leído libros científicos. Pero conocía a W. Shakeaspeare y M. de Cervantes, a F. Dostoievsky, a los autores franceses que escribían en el siglo XIX, y también a O. Wilde. Por aquel entonces no alcanzaba a reflexionar acerca de porqué no entendía 'una jota' de ese texto "helado y hermético" de Análisis Matemático, Volumen I, de Julio Rey Pastor que todavía conservo. Claro, el arte y la ciencia no se miran igual, pero yo no lo sabía.

Con humor y con un tono protestón que no abandoné jamás, me decía: *Por qué la Facultad de Ingeniería no imprime un libro más accesible. No se dan cuenta que los estudiantes aprendemos mejor cuando nos hablan en nuestro idioma*.

En esa época habían comenzado los cursos de primer año y yo asistía a las clases teóricas donde el Profesor Titular que era muy claro cuando sostenía: *La ciencia está en el primer piso pero yo voy a la planta baja para enseñarles*. Sin embargo, cuando llegaba a mi casa y comenzaba a leer y estudiar encontraba que las notas de mi cuaderno eran magras, muy pobres.

Hablando con otros alumnos averigüé que en una librería cercana vendían unas grabaciones de las clases teóricas de matemática. Aunque no se señalaba en ese texto, *el libro dialogaba con el lector* y le indicaba posibles preguntas de examen. Claro, era un riesgo señalar interrogantes porque el alumno que lo leyera podía recortar el conocimiento y caer en el error de pensar que estudiar significaba encontrar esas respuestas. O mucho peor, tentarse de elegir un camino fácil de informarse de lo mínimo necesario y perder la posibilidad de desarrollar su curiosidad, su amor por el conocimiento a partir del propio esfuezo, del conflicto cognitivo o de alguna búsqueda.

Finalmente adquirí el "ADEM I", como le llamábamos por aquellos años, que no era otra cosa que las iniciales de Apunte de Matemática I.

Lo he conservado *por espacio* de cuarenta años y cada vez que necesité enseñar integrales, derivadas o funciones u otros temas que me resultaban olvidados porque nunca más los había vuelto a utilizar como los cálculos combinatorio o el vectorial, incluso matrices y determinantes, siempre recurrí a él y luego algún texto matemático de Santaló o Sadosky y Guber, o el mencionado más arriba. Y también siempre me dije: *si yo que soy ingeniero y profesor, con experiencia de tantas cosas de la vida, vuelvo a este viejo texto, qué ocurrirá con los alumnos de dieciocho años que recién salen de la escuela*.

Algunos años más tarde me he animado a escribir con un lenguaje relativamente afín a los jóvenes universitarios para facilitar la comprensión de los temas del cálculo diferencial e integral.

Este es **El Apunte** que reclamaba aquel alumno.

El Autor

INTRODUCCIÓN

El Apunte es un escrito que intenta acercar a los estudiantes de Cálculo algunos puntos básicos de una rama de la disciplina matemática que suele ser un *dolor de cabeza*, tanto para alumnos como para profesores.

El lugar asignado a este texto es el de la Zona de Desarrollo Próximo[1] para "mediar" entre el intelecto de los alumnos y la epistemología de la ciencia más exacta, representada por los diferentes autores citados. Por eso este trabajo contempla fundamentalmente el pensamiento del nobel, del inexperto, antes que el propio rigor matemático. Sin embargo, se salva esta dificultad sugiriendo otras lecturas que permitan una comprensión más profunda, más científica.

En primer lugar, se plantea una **Revisión** de la matemática elemental: algunos ítems del álgebra, la trigonometría y la noción de función a partir del Capítulo I. Hay una seria preocupación de enseñar a estudiar, lo que da cuenta del espíritu del texto manifestado en las sugerencias de lectura de los dos primeros apéndices que señalan algunos elementos del proceso educativo.

El concepto de función y el lugar de este en el currículo del estudiante no–matemático, así como los desarrollos de **Funciones Algebraicas** primero y **Trascendentes** después constituyen el Capítulo II.

En coherencia con el análisis precedente se plantea en los Capítulos III y IV la necesidad de repensar los procesos de enseñanza–aprendizaje de la disciplina.

El siempre difícil de comprender, casi inaccesible concepto de **Límite** se presenta a partir de ejemplos sencillos que permitirían arribar adecuadamente a la definición. Se sugieren distintas estrategias didácticas, frutos de la experiencia de este autor, y se señalan ejercicios que se dirijan antes a la discusión que al consabido resultado, paradigma de la enseñanza matemática tradicional. En **Notas** se debate el concepto de límite desde la perspectiva de diferentes autores que pertenecen a distintas épocas, países y formaciones profesionales.

En **Derivadas** se privilegia la construcción del conocimiento por encima de una definición impositiva. Para ello se invita al lector a consultar el Apéndice III que se ocupa de agregar significados a los siempre abstractos entes matemáticos. Con ese propósito se ofrecen numerosos Gráficos y diferentes expresiones en el lenguaje simbólico o analítico que enriquecerían el vocabulario científico de los estudiantes.

En los Capítulos V y VI se examinan dos procesos y la relación entre ellos. En uno se determina una función a partir de su derivada (**Integrales Indefinidas**). Con el otro se llega a fórmulas exactas para cosas tales como volumen y área, por aproximaciones sucesivas (**Integrales Definidas**).

En las primeras integrales se comienza con el concepto de Diferencial de una función. La experiencia señala que contradictoriamente con aquello que se presume para su enseñanza a priori, se comprende mejor este tema cuando se incluye en el *Cálculo Integral*

[1] Vygotsky, L.

porque aquí cobra significado, y se manifiesta así su necesidad, para estudiar el concepto de primitiva de una función y su posterior cálculo.

Como en los Capítulos anteriores, se señalan diferentes estrategias y también oportunos Gráficos que ilustran y facilitan el estudio.

Hay un énfasis singular en el cuadro de operaciones directas e indirectas ya mencionado en otros Capítulos. Una omisión reflexionada, que pertenece al currículo nulo, es la no presentación de una Tabla de integrales invitando al alumno al cálculo de integrales a partir de la Tabla de derivadas que conlleva una búsqueda, una selección de métodos y modelos evitando la aplicación irreflexiva y mecánica de un listado de fórmulas. Sin embargo, se indican dos listas de propiedades de los dos tipos de integrales.

Se descubren diferentes modelos de integrales indefinidas que van desde las más simples a las más complejas siguiendo el camino de: inmediatas – por sustitución – trigonométricas – por partes – por descomposición en fracciones simples – racionales – irracionales cuadráticas – irracionales lineales – métodos generales de integración.

Hay una indicación reiterada sobre la invitación al lector a la verificación del cálculo de la integral en ejercicios resueltos que permite destacar la oposición de las operaciones derivación–integración.

El Capítulo VI está dedicado a clarificar el concepto de Integral, una categoría conceptual que ha servido para conectar la dimensión más teórica: integral indefinida con la dimensión más práctica: integral definida e incluso, si se permite, una tercera dimensión extradisciplinar: la resolución de problemas de física, no desarrollados en este texto. Desentrañar estos vínculos supondrá describir la estructura matemática en la que puede trabajar el ingeniero y las complejas relaciones entre las ideas y las realidades.

Se plantea la noción de integral definida, su definición y un breve desarrollo histórico de la cuadratura del círculo a modo de introducción al tema.

Se presenta varios teoremas siguiendo recomendaciones de la Enseñanza del Análisis Matemático señaladas en un Curso del CONICET[2]. A continuación se indica un Cuadro a modo de resumen de los teoremas anteriores que permiten un análisis. El Capítulo sigue con aplicaciones de las integrales definidas y se agregan las integrales impropias.

En el Capítulo VII, **Teoremas Fundamentales del Cálculo**, se escribe la siguiente introducción: “Un investigador se preguntaría por qué este capítulo en un libro de matemática para no matemáticos y un ingeniero formularía el interrogante para qué. Al primero le interesan las causas e incluso los antecedentes, al otro los objetivos y las metas. El científico estudia para comprender, el profesional ¿aplicado? desea llevar a cabo, desarrollar. Las respuestas a las preguntas por qué y para qué el estudio de la matemática y en particular este Capítulo pueden encontrarse en el Apéndice I que señala los elementos comunes y las diferencias entre la Matemática y la Enseñanza de la Matemática.”

Finalmente, el Capítulo VIII **Sucesiones y Series** está dedicado a poner de relieve los temas de sucesiones primero y series después. El eje que atraviesa este último tema (series) es el del *criterio*. La selección del criterio es el ejercicio al que invita

---

[2] CONICET *Programa de Perfeccionamiento Docente*. Análisis Matemático

permanentemente el desarrollo del Capítulo a partir de dos aspectos: descubrir el criterio más *económico* (el que requiere menos esfuerzo o el más rápido), y buscar el más *confiable* (cuando indica o mide aquello que se pretende de él, como señalar la convergencia o la divergencia de una serie).

Una insustituible habilidad de un profesional universitario ante un problema es seleccionar el mejor camino ante varios posibles y para ello deberá saber elegir el criterio más óptimo. Este es el objetivo intrínseco en el desarrollo del Capítulo, el que se aspira enriquezca al lector.

Primera Parte

Cálculo Diferencial

CAPÍTULO I: REVISIÓN

Resumen

Introducción. Potencias. División de Polinomios. Dos Casos de Factores (3º y 5º). Racionalización. Trigonometría. Teorema de Pitágoras. Introducción de Función. Noción, concepto y definición de función. Concepto práctico de función. Intervalos. ¿Cómo estudiar la Revisión?

Introducción

En este Capítulo se van a desarrollar algunos conceptos del álgebra que usualmente pertenecen al sistema educativo preuniversitario. El lector deberá observar qué grado de dominio posee y si necesita ampliar alguno de ellos o si además requiere, para su mejor comprensión, buscar algunos otros.

Potencias [3]

Potencia negativa

$a^{-2} = 1 / a^2$

Es decir el 2 en el exponente indica cuántas veces se multiplica por sí misma la base y el signo negativo señala que esa potencia debe estar dividiendo, debe ir al denominador. Por supuesto, si la potencia estuviese en el denominador debe escribirse en el numerador.

$1 / a^{-2} = a^2$

Ejercicios:

$a^{-2}.[a^3]^{-2} = a^{-2}. a^{-6} = a^{-8} = 1 / a^8$

Potencia Cero

"De acuerdo con la definición de potencia[4], el exponente indica el número de factores y debe haber por lo menos dos factores. Entonces la expresión a^0 no tiene sentido porque no podemos hablar de 0 factores." (237).

Nosotros vamos a ver si podemos calcularla de otra manera. Para ello vamos a analizar el cociente de dos números iguales (a^6) por un lado y por el otro el cociente de dos potencias de la misma base, que implica otra potencia de exponente resultado de la diferencia de los exponentes de la división.

Es una definición $a^0 = 1$

Pero, podríamos hacer esto:

$a^6 / a^6 = a^{6-6} = a^0 = 1$. Es decir, como los exponentes son iguales en potencias de la misma base, resulta que por un lado el cociente da 1 y por otro resulta una potencia de exponente cero.

---

[3] Ver Tapia 1 y 2: Potencia de números naturales y enteros.

[4] Tapia 1.

Potencia Fraccionaria

La raíz cuadrada de un número puede expresarse como: $\sqrt{a}$, pero también puede escribirse como $a^{1/2}$. Cuando un número a está elevado a un exponente m y simultáneamente está bajo el signo radical de una raíz de índice n, o sea: $\sqrt[n]{a^m}$ se puede expresar como: $a^{m/n}$; a esta última expresión se denomina potencia de exponente fraccionario que resulta ser más cómoda que la anterior cuando se realizan algunos cálculos.

Producto de Potencias

$a^3 . a^2 = a^5$

Ahora hay que preguntarse por qué el producto de potencias de la misma base me da otra potencia de igual base donde su exponente es la suma de los exponentes. Aprender la regla en forma mecánica, de memoria repetitiva conduce a que después de otros aprendizajes similares se la olvide o confunda con otras reglas. Conviene aprender a deducir. ¿Qué es una potencia? Es el producto de un número por sí mismo tantas veces como indica su exponente.

$a^3 = a. a. a$

$a^2 = a. a$

por lo tanto $a^3. a^2 = a. a. a. a. a$ pero este producto es a^5

Cuando una persona ha realizado suficientes ejercicios es posible recordar la regla y utilizarla, pero no memorizar la regla. Esta se recuerda naturalmente y se utiliza porque se aprendió en la praxis, no porque se aprendió como una información que se repite sin conocer su origen o su deducción.

Potencia de Potencias

$[(a^2)^2]^3$

Para resolver este ejercicio hay que formularse la misma pregunta ¿Qué es a^2? La respuesta es: $a^2 = a. a$

Ahora, después de reemplazar en a^2, se tiene $(a^2)^2 = (a. a)^2$ y podemos volver a preguntarnos ¿qué es $(a. a)^2$?, la respuesta es $(a. a) . (a. a) = a. a a. a = a^4$, finalmente qué es

$[a^4]^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a. a. a . a. a. a . a. a. a . a. a. a= a^{12}$

Estudiar[5] *es una cosa, lo que estamos haciendo ahora, que permite comprender no busca un fin de resultado, no es un cálculo. No se trata de un ingeniero que debe presentar los planos de un puente o el diseño de una serie de reacciones químicas para comenzar la producción de una sustancia. Cuando se estudian estos temas se busca la comprensión, y si esto ocurre, entonces la síntesis o el resumen o la consabida regla se adquiere sin ningún otro esfuerzo.*

[5] Estudiar es investigar. Es colocar varios libros sobre la mesa, apuntes personales, sugerencias de quien sabe más que uno y leer para comprender. No es repetir, no es memorizar.

División de Polinomios

Esta operación comienza a estudiarse en la escuela secundaria o 2º ciclo EGB y Polimodal. En las escuelas técnicas alrededor de los catorce años, en el 2º año, y en los bachilleratos en el 3º. Generalmente se presenta como un tema no vinculado a la división de números naturales o enteros y por tanto parece un "tema nuevo". Pero no lo es, sigue siendo un reparto de objetos, abstractos, entre personas u otros entes abstractos o materiales.

El cociente de polinomios no difiere de la división de números naturales que se aprende en los primeros años. Por ejemplo:

Cuando se divide en el 1º ciclo de EGB (ex primaria) se consideran las dos primeras cifras del número (o la primera, depende de la división) a dividir (dividendo) por la 1ª cifra del divisor:

$$\begin{array}{l|l} 4367 & 23 \\ \hline \end{array}$$

para ello se prueba en este caso con 4 : 2 y se dice "le está a dos",

$$\begin{array}{l|l} 4367 & 23 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array}$$

luego se hace el producto, se procede a multiplicar el divisor por el cociente, como se hacía en la escuela primaria: 2 . 23 = 46 y se observa que es mayor que las dos primeras cifras del número a dividir, entonces se prueba con un número menor: 1

$$\begin{array}{l|l} 4367 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{23} & \;1 \\ 20 & \end{array}$$

el cálculo sigue multiplicando 1 por 23 = 23 y luego restando al 43.

Por qué esto que se aprendió, ¿se aprendió de qué forma?, ahora al llegar al 3º ciclo de la EGB, prácticamente la ex–secundaria, no logra conectarse con la división de polinomios. Incluso se cree que es un tema distinto, que no tiene nada que ver con todo lo visto: el conocimiento fragmentario. Se aprende por partes, por solicitud extraña a los propios intereses, para una fecha determinada, generalmente próxima. De nada sirve repetir ejercicios de división de polinomios infinidad de veces.

Volvamos a ver la división anterior:

Tenemos 4.367 unidades a repartir equitativamente entre 23 conjuntos, o entre 23 personas o simplemente y en forma abstracta entre 23. Yo puedo considerar 4.300 unidades por un lado y 67 unidades por el otro y repartir primero el conjunto más grande y luego el más pequeño, siempre y cuando reparta en cantidades iguales a los 23; ese reparto, en matemática, se llama división. Además esas 4.300 unidades se pueden pensar o llamar o son iguales a 43 centenas. Por lo tanto:
43 centenas: 23 = 1 centena y sobran 20 centenas y nuestro esquema anterior era:

$$\begin{array}{l|l} 43 & 23 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

Pareciera que es lo mismo (el reparto de elementos concretos entre niños y la división de un polinomio por otro polinomio) pero, ¡no! En un esquema, o razonamiento; se sabe qué se está repartiendo pero en el otro no. Por supuesto tampoco se sabe qué se obtiene al dividir. Entonces ese joven que fue niño y aprendió que la matemática se desarrolla por reglas cree que la división de polinomios es también una serie de reglas y sin embargo realiza miles de operaciones y no puede avanzar[6].

¿Cómo hay que estudiar?

43 centenas dividido 23 es igual a 1 centena. Como se le entregó 1 centena a cada uno en total se han entregado 23. 1 = 23 por eso se multiplica 23. 1 y luego se resta para ver qué sobró: 43–23 igual (sobraron) 20 centenas. Por supuesto esas 20 centenas son 200 decenas. Del conjunto pequeño de 67 había 6 decenas y se pueden sumar a las 200 y da 206. Si en cambio se dice bajo el 6 y lo pongo al lado del 20 ¿qué se puede entender? Y ese alumno va aprendiendo a realizar cosas sin entender, y por supuesto luego dice que no le gusta. Es lógico.

Ahora hay que dividir 206 decenas dividido 23, a cada uno le toca 9 decenas. ¿Cuánto se repartió? 9 decenas. 23 = 207 decenas pero ocurre que no hay, entonces hay que darle menos a cada uno: 8 y volver a ver cuánto se repartió: 8 decenas. 23 = 184 decenas, si restamos de las 206 decenas que teníamos quedan por repartir 22 decenas. Éstas son iguales a 220 unidades que con las 7 que quedaban del conjunto pequeño suman 227 unidades. Repartidas entre 23 les toca a cada uno: probamos con 9 unidades y resulta un reparto total: 207 unidades y sobran 20 unidades (227 – 207 = 20 unidades) .

Finalmente: 4367 dividido 23 es igual a 1 centena + 8 decenas + 9 unidades o también 1c + 8d + 9u, por supuesto esto es un polinomio.

Verifiquemos ahora si está bien. Para ello multiplicamos 189 unidades. 23 = 4.347 unidades y si le sumamos el resto resulta: 4.347 + 20 = 4.367 unidades que coincide con el dividendo inicial que se tenía a repartir.

Veamos ahora cómo es la división de polinomios:

$$4x^3 - x + 2 \quad \underline{\big|\; x^2 + x - 1 \quad}$$

El concepto es el mismo, se trata de repartir una cantidad de objetos: $4x^3 - x + 2$ entre una cierta cantidad de conjuntos o personas: $x^2 + x - 1$. Para ello probamos con la primera cifra o las dos primeras, como en la forma de escribir polinomios análogo a cuando escribíamos centena, decena, unidades, etc., ahora en vez de centena se trata de las equis al cuadrado o las equis a la primera potencia, etc. Además antes los polinomios se ordenaban por el grado del conjunto en potencias de diez, así la centena es más grande que la decena y va primero de izquierda a derecha, etc,. entonces se tomaba el primero o las dos primeras cifras de la izquierda, ahora también se toma el primer grupo de equis de la izquierda que se llama monomio, se podría llamar de otra forma: juancito pero le pusieron así. Porque mono es uno y nomio es nombre. Si fuesen dos términos separados por un signo de sumar o restar se llamaría binomio. Cada uno con su nombre. Ahora se considera el primer monomio y se

[6]CONICET. *Programa de Perfeccionamiento Docente. Metodología de Enseñanza de la Matemática.*

prueba cuántas veces "entra" el primer monomio del divisor. O sea cuánto le toca al divisor lo que se está por repartir del dividendo.

¿Por qué toda esta elaboración de un ítem elemental de la materia para los temas que pretende este texto? Porque las dificultades en el estudio de la matemática no residen en los propios contenidos, en su complejidad o no sino en ciertos hábitos contraídos en los primeros años del estudiante, que se hace necesario dilucidar. Los objetos matemáticos, su epistemología, es decir cómo son los temas en la matemática, nos señalan entes vacíos de contenido, carecen de significado. Nunca nadie vio un ocho, o una raíz cúbica de 21, ni un uno o un dos. Entonces cómo estudiar[7] *algo que no tiene existencia real. Porque estamos en presencia de una disciplina no–semántica (o sea sin significado), que es puramente sintáctica*[8]*, he aquí la cuestión: se trata de agregar significados a los entes matemáticos que carecen de ello. Y por ello nos hemos preocupado de decir:* "206 decenas dividido 23, a cada uno le toca 9 decenas (…) 8 decenas. 23 = 184 decenas …" *hubiese sido más simple señalar 206 dividido 23 = 8 y fracción.*

Veamos nuestro ejemplo:

$4x^3 - x + 2 \quad \underline{\big| \; x^2 + x - 1}$

$\dfrac{4x^3}{x^2}$ en esta división de potencias de la misma base resulta otra potencia de base x

y exponente 3 – 2 = 1 o sea x por lo tanto el cociente es: 4x

$4x^3 - x + 2 \quad \big| \; \underline{x^2 + x - 1}$

$\qquad\qquad\qquad 4x$

Si multiplicamos para saber cuánto se repartió es $4x \cdot (x^2 + x - 1) = 4x^3 + 4x^2 - 4x$

Ahora tenemos que restar este reparto al dividendo para ver cuánto queda y, si se puede continuar distribuyendo. Pero, para restar conviene primero cambiar de signo el producto y luego sumar. O sea: $-(4x^3 + 4x^2 - 4x) = -4x^3 - 4x^2 + 4x$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - x + 2 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^3 - 4x^2 + 4x} & 4x \\ -4x^2 + 4x & \end{array}$$

(hasta aquí sólo se simplificó $+4x^3$ con $-4x^3$)

ahora le tengo que sumar $-x + 2$ o sea:

$-4x^2 + 4x + (-x + 2) = -4x^2 + 3x + 2$ y como se puede seguir dividiendo:

$-4x^2 + 3x + 2 \quad \big| \; \underline{x^2 + x - 1}$

Cálculo auxiliar: $-4x^2 / x^2 = -4$ entonces el cociente queda:

$$\begin{array}{l|l} -4x^2 + 3x + 2 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} & 4x - 4 \end{array}$$

---

[7] Ver Apéndice I

[8] Klimovsky, G.

volviendo a multiplicar $-4 \cdot (x^2 + x - 1) = -4x^2 - 4x + 4$ y cambiando de signo:
$-(-4x^2 - 4x + 4) = 4x^2 + 4x - 4$

$$
\begin{array}{l|l}
-4x^2 + 3x + 2 & \\
\underline{4x^2 + 4x - 4} & \underline{x^2 + x - 1} \\
\text{----}\ \ 7x - 2 & 4x - 4
\end{array}
$$

Verificación:
$(x^2 + x - 1) \cdot (4x - 4) + 7x - 2 = 4x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 4x - 4x + 4 + 7x - 2$

$-4x^2 + 4x^2 = 0$
$-4x - 4x + 7x = -x$
$4 - 2 = 2$, reordenando resulta:
$4x^3 - x + 2$ que es el dividendo inicial.

Dos Casos de Factoreo (3º y 5º)

¿Qué es el factoreo?¿Por qué se lo llama así?
Se llaman factores a aquellos elementos matemáticos que se multiplican entre sí.
Por ejemplo:
$a. b. c. m + 7.x = 8x - 3. y$
a, b, c, m, 7, x en el primer miembro son factores
8, x, 3. y son factores del 2º miembro

a.b.c.m es el primer término o sumando del 1º miembro, 7x es el 2º sumando del primer miembro, 8x, (– 3. y) son el 1º, y 2º términos del 2º miembro. Los términos son las expresiones matemáticas que se suman o restan en una igualdad.

El factoreo, la acción de factorear, refiere a transformar una suma, una resta en un producto de factores. Por ello se llama factoreo porque produce o está formado o constituido por factores. ¿Para qué sirve? Por ejemplo cuando se tiene una expresión compleja en una división de polinomios, y su división es engorrosa, recién hemos visto que lleva algunos procedimientos, entonces es más fácil a partir del factoreo. Más adelante vamos a ver algunos ejemplos.

Vamos a mencionar dos de los seis casos. Usualmente quienes comprenden el 3º (trinomio cuadrado perfecto), el 4º (cuatrinomio cubo perfecto) le resulta accesible dado que ambos son similares. Y también se agrega que este último no es frecuente.

El primero es más conocido (factor común) y en general no ofrece dificultades y el 2º que es poco frecuente se basa en el anterior. Finalmente agregamos el 5º (diferencia de cuadrados) pero no el 6º muy poco frecuente y es preferible consultar textos cuándo se puede utilizar.

3º Caso: Trinomio Cuadrado Perfecto

Cuando se tiene un trinomio (un polinomio de tres términos) de grado 2, es decir que ese polinomio posee dos raíces o valores que anulan al polinomio, se puede descomponer en el producto de dos factores.

Ejemplos:

a) $-2x^2 - 8x - 6$; para transformar en un producto se pueden hallar las raíces utilizando la fórmula resolvente para ecuaciones de 2º grado. Esto se puede ver en el Capítulo II de funciones, en Parábola, en Resolución de la ecuación polinómica de segundo grado: $x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$; si sacamos factor común a nuestro ejercicio:

$-2 . (x^2 + 4x + 3)$, vamos a usar los coeficientes del paréntesis que son más pequeños.

Para nuestro caso $x = \frac{-4 \pm (16-12)^{1/2}}{2} = -2 \pm \frac{4^{1/2}}{2} = -2 \pm 1 =$ $\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

Entonces el polinomio se puede expresar como: $(x - \alpha) . (x - \beta)$ siendo α y β las raíces del polinomo de 2º grado, el trinomio, con su signo. Luego podemos expresar nuestro trinomio:

$-2 (x^2 + 4x + 3) = -2 . (x + 1) . (x + 3)$

Si ahora verificamos, realizando el producto indicado:

$-2 . (x^2 + 3x + x + 3) = -2 . (x^2 + 4x + 3) = -2x^2 - 8x - 6$

b) $x^2 + 4x + 4$, podemos sacar las dos raíces con la fórmula resolvente:

$x_1 = x_2 = -2$, las dos raíces son iguales.

Luego $x^2 + 4x + 4 = (x + 2).(x + 2) = (x + 2)^2$

Este ejercicio lo pudimos haber resuelto de otra forma:

Consideramos cada término del trinomio y le extraemos la raíz cuadrada, probamos con aquellos términos que resulte accesible, por ejemplo el 1º y 3º término es sencillo:

$\sqrt{x^2} = \pm x$; consideramos sólo el término positivo (aunque se podría considerar la raíz negativa)

$\sqrt{4} = \pm 2$; ídem anterior.

Una vez que tenemos esas raíces: $\underline{x}$ y $\underline{2}$, las multiplicamos entre sí y luego por $\underline{2}$, $2.x.2 = 4x$, y comparamos este resultado con el único término al que no extrajimos ninguna raíz. En este caso era el colocado en 2º lugar 4x, **si coincide con nuestro resultado** entonces estamos en presencia de un trinomio cuadrado perfecto que se puede expresar como

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Entonces observar esta factorización, podremos hacerla si las raíces cuadradas de dos términos (en nuestro caso x^2 y 4, que resultan <u>x</u> y <u>2</u>) multiplicadas por 2 me dan (4x) el otro término restante.

c) $x^2 + 6x + 9$; extraemos las raíces de x^2 y 9, que resultan x y 3. Como 2.x.3 = 6x es un trinomio cuadrado perfecto y se puede factorear:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

También se pudo colocar en el resultado las raíces negativas: <u>-x</u> y <u>-3</u>. El resultado hubiese sido $(-x - 3)^2$ *que es igual al anterior o sea* $(x + 3)^2$. *Pero no podría haberse elegido una positiva y otra negativa como ser +x, -3.¿Por qué? En este lugar del desarrollo matemático es enriquecedor, es educativo preguntarse: ¿por qué el estudiante no–matemático estudia el 3º caso de factores? Es muy posible que como ingeniero u otra disciplina aplicada de las ciencias básicas no recurra nunca, ni una sola vez en su vida profesional a este conocimiento. Verdaderamente es casi seguro que así ocurra. ¿Entonces…? Se trata de las operaciones lógicas*[9] *que se realizan en el ejercicio matemático. Se destaca esa búsqueda de las excepciones y de las regularidades. Es decir, aquello que realiza el investigador cuando estudia un objeto. Entonces la respuesta está dada por: aprender contenidos formales u operativos. Cuando se estudia el 3º caso de factores no es en sí ese tema lo relevante, no se trata del propio 3º caso sino en buscar cómo fundamentar el resultado, o qué ocurre cuando se ha modificado alguna de las condiciones iniciales, el trinomio es distinto en los signos que el estudiado tradicionalmente, o si existen situaciones en que no se puede factorear, ...la riqueza educativa no está en el qué sino en el cómo estudiar. La disciplina no es informativa para el no–matemático sino formativa, eminentemente educativa.*

d) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ como es un trinomio cuadrado perfecto se puede factorear como el cuadrado de un binomio. Por supuesto esas dos raíces iguales se pueden calcular aplicando la fórmula resolvente.

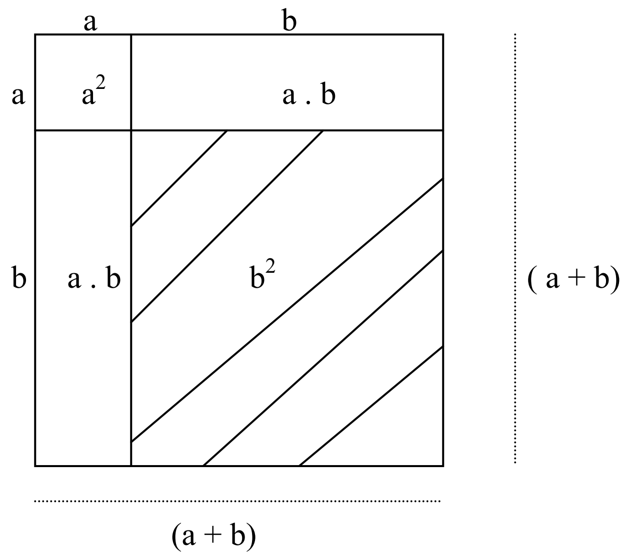
<u>Analogía[10] geométrica</u>

Para comprender mejor el 3º caso se puede recurrir a una analogía geométrica:
Construimos un cuadrado de lado (a + b), y luego trazamos líneas por las divisiones entre a y b. Se forman dos cuadrados de lados: <u>a</u> uno de ellos y <u>b</u> el otro. Y dos rectángulos iguales de lados a y b. El área de los dos cuadrados será a^2 y b^2, y el de los rectángulos ab. El área total del cuadrado de lado (a + b) será igual a la suma de las áreas: $a^2 + b^2 + ab + ab$, o sea $a^2 + b^2 + 2ab$. Por otro lado, multiplicando lado por lado en el cuadrado más grande se obtiene: $(a + b)^2$.

Igualando se obtiene: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

---

[9] Lorenzi, A. *Mi Aula*. Capítulo V
[10] La analogía es una estrategia, ver el Apéndice de "Las cuatro formas de pensar".



<u>5º Caso: Diferencia de Cuadrados</u>

Este caso se aplica a binomios, o sea polinomios de dos términos de signos distintos. Esa diferencia se descompone en el producto de una suma por una diferencia. ¿Cómo son esos términos que componen la suma y la diferencia? Son las raíces cuadradas de los términos del binomio primitivo.

Ejemplo: Factorear $b^2 - 2^2 = (b - 2) . (b + 2)$

Verifiquemos si es correcto: $(b - 2) . (b + 2) = b^2 + 2b - 2b - 4 = b^2 - 2^2$

Ejemplos:

a) $x^2 - 1 = (x - 1) . (x + 1)$
b) $- 4 + y^2 = (y - 2) . (y + 2)$
c) $- 49 + x = (- 7 + \sqrt{x}) (7 + \sqrt{x})$
d) $- 3^2 + y^2 = (y - 3) . (y + 3)$

Racionalización

La racionalización es la transformación de un divisor irracional en uno racional, es la operación algebraica que permite obtener una razón con un divisor racional[11].

Como no se puede dividir por un número irracional se lo transforma en un número racional, es decir que el denominador sea un número entero.

Hay dos casos: que el denominador sea una suma o no.

<u>a) No es una suma el denominador:</u>

$\frac{x + y}{(x + y)^{1/2}}$ para eliminar la raíz se multiplica por el mismo valor, de ese modo se obtiene una raíz al cuadrado. El cuadrado y la raíz se eliminan entre sí.

[11] Tapia IV (p. 82 – 85).

$$\frac{(x+y)\,.\,(x+y)^{1/2}}{(x+y)^{1/2}\,(x+y)^{1/2}} = \frac{(x+y)\,.\,(x+y)^{1/2}}{(x+y)} = (x+y)^{1/2}$$

b) Es una suma el denominador:

$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$ para eliminar las raíces del denominador conviene multiplicar y dividir por la diferencia de raíces de modo que se simplifiquen las raíces de a y b en el denominador y resulte la diferencia de cuadrados.

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(a - b)\,.\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}).\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(a - b)\,.\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} =$$

$$\frac{(a - b)\,.\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(a - b)} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

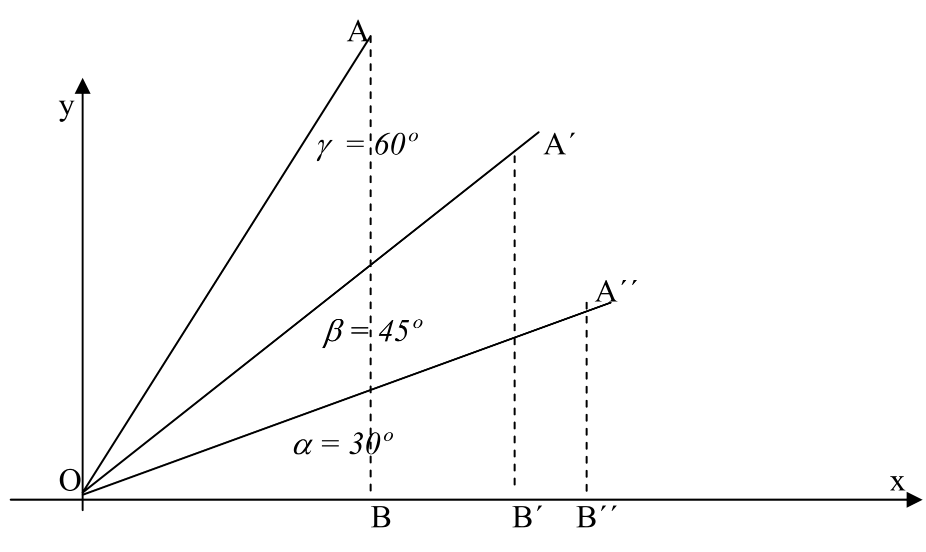
Por supuesto cuando en el denominador hay una diferencia entonces se multiplica y divide por una suma. A modo de síntesis, se trata de obtener un producto de una suma por una diferencia para transformar en una diferencia de cuadrados que permita eliminar las raíces.

Trigonometría

Definición de las funciones senα, cosα, tgα.

Cuando un estudiante comienza, accede por vez primera a la trigonometría, es conveniente que desarrolle algunos pasos como sigue:

a) *Dibujar en un diagrama cartesiano varios ángulos como ser de valores: 30º, 45º y 60º. Asignarles las letras griegas α, β, γ. Que se denominan alfa, beta y gamma.*



b) *Medir sobre las tres semirrectas de origen O un segmento cualquiera de 5 a 10 cm, por ejemplo 8 cm, pero el mismo en los tres casos.*

c) *Trazar la perpendicular hasta cortar a la semirrecta horizontal que se constituye en borde de los tres ángulos.*

d) *Colocar letras a los puntos que son pie de perpendicular:* B, B´, y B´´. También a los que están en los tres segmentos: A, A´, y A´´.

e) *Realizar las medidas OA,… OB,…y AB,…*

Efectuar los cocientes entre los segmentos AB / OA,… OB / OA, … AB / OA…

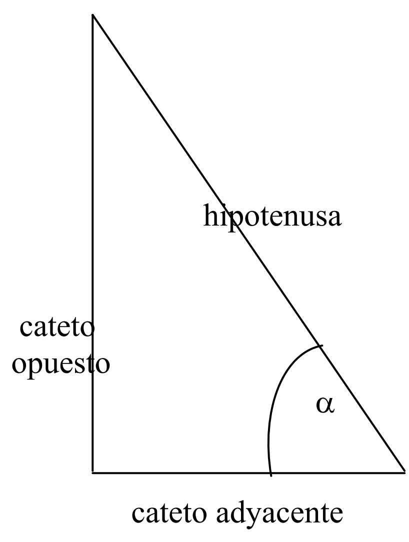
Las funciones trigonométricas son seis. Nosotros sólo vamos a presentar las tres más utilizadas a modo de revisión.

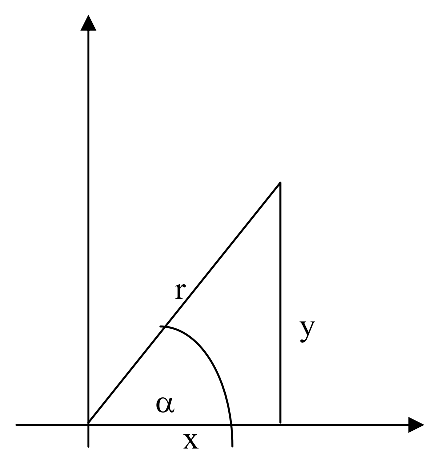
sen α = cateto opuesto / hipotenusa; sen $\alpha = y / r$

cosα = cateto adyacente / hipotenusa; cos$\alpha = x / r$

tgα = cateto opuesto / cateto adyacente; tg$\alpha = y / x$

f) *Calcular las tres funciones trigonométricas definidas, de los tres ángulos 30º, 45º y 60º (con calculadora) y comparar con los valores obtenidos del gráfico.*





Relaciones Fundamentales

A partir de las definiciones se pueden deducir cinco relaciones denominadas fundamentales para las funciones trigonométricas.

De ellas sólo vamos a mencionar dos:

a) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

la demostración se desarrolla a partir de elevar al cuadrado la igualdad de las definiciones del seno y coseno y luego sumar. Finalmente, aplicando el teorema de

Pitágoras se obtiene la anterior. De esta relación se puede deducir otra dividiendo ambos miembros por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ resulta } \text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

b) $\text{tg}\, \alpha = \text{sen}\, \alpha / \cos \alpha$,

se obtiene a partir de la definición de las dos funciones del 2º miembro. Haciendo el cociente se obtiene y/x que es la definición de la tangente.

Otras Relaciones de las funciones trigonométricas

c) $\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\, \alpha \,.\, \cos \beta \pm \cos \alpha \,.\, \text{sen}\, \beta$

d) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \,.\, \cos \beta \pm \text{sen}\, \alpha .\, \text{sen}\, \beta$

e) $\text{sen}^2 (\alpha/2) = \dfrac{1 - \cos \alpha}{2}$

f) $\cos^2 (\alpha/2) = \dfrac{1 + \cos \alpha}{2}$

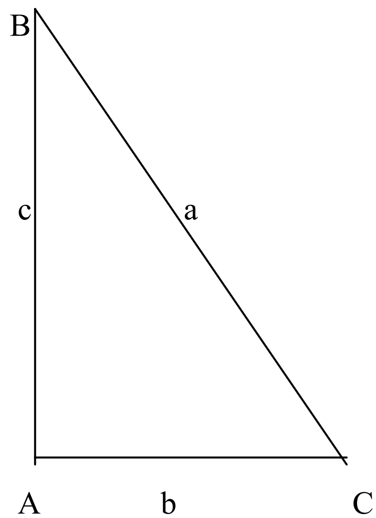
g) $\text{sen}\, \alpha + \text{sen}\, \beta = 2 \,.\, \text{sen} \dfrac{(\alpha + \beta)}{2} \,.\, \cos \dfrac{(\alpha - \beta)}{2}$

h) $\text{sen}\, \alpha - \text{sen}\, \beta = 2 \,.\, \text{sen} \dfrac{(\alpha - \beta)}{2} \,.\, \cos \dfrac{(\alpha + \beta)}{2}$

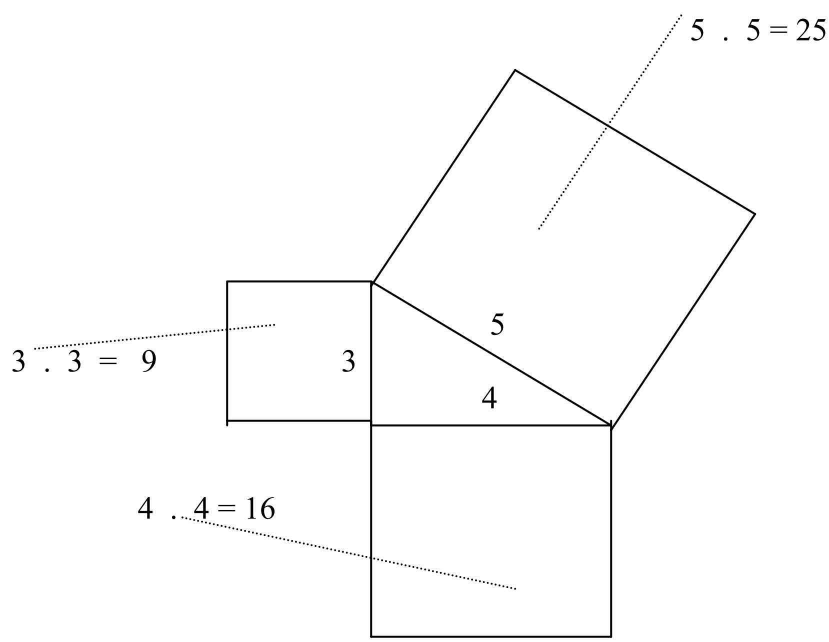
i) $\cos \alpha + \cos\beta = 2 \cos \dfrac{(\alpha - \beta)}{2} \,.\, \cos \dfrac{(\alpha + \beta)}{2}$

j) $\cos \alpha - \cos \beta = -2\, \text{sen} \dfrac{(\alpha - \beta)}{2} \,.\, \text{sen} \dfrac{(\alpha + \beta)}{2}$

Teorema de Pitágoras



La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
Simbólicamente: $c^2 + b^2 = a^2$



$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$

Introducción de Función

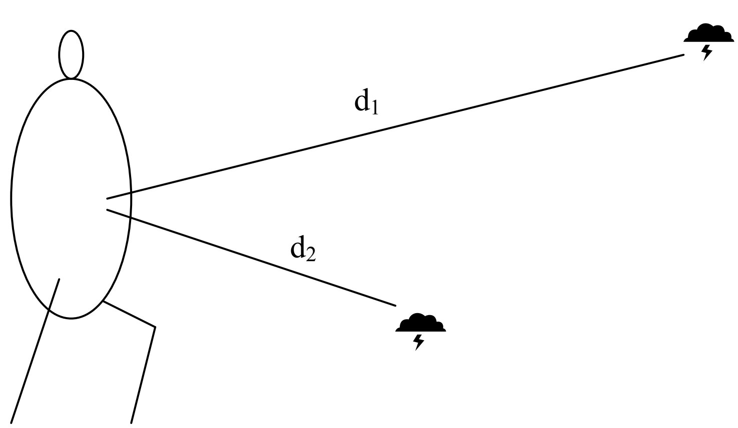
A modo de aproximación al conocimiento se propone al lector una serie de ítems que le permita comenzar a estudiar el tema.

- ¿Qué sabe y qué no sabe de funciones?
- Buscar en la Bibliografía, construir conocimientos y elaborar la referencia de cada texto.
- Trabajar individualmente.
- Trabajar en grupo.
- Exponer en clase.
- ¿Cuál es el concepto de función que encuentra en los libros? ¿Lo entiende?
- ¿Qué relación tiene la palabra función con la palabra variable?
- ¿Qué es el gráfico de una función?
- ¿Qué son el dominio, el codominio y el conjunto imagen de una función?
- ¿Conoce alguna clasificación de funciones? Si la respuesta es sí cuál es el criterio adoptado para la elaboración de la misma.

Noción, concepto y definición

La idea primera es la noción, aquello que surge con cierta espontaneidad, a veces por asociación libre de ideas, *con lo que nos es más familiar*, y que luego podrá elaborarse como concepto y cuando se ajusta, o digamos cuando se expresa con precisión estricta se convierte en definición. Entonces, desde el punto de vista de la enseñanza conviene primero propiciar la búsqueda de lo intuitivo: la noción del conocimiento.

Cuando vemos la luz de un rayo en una tormenta sabemos que al cabo de unos segundos se escuchará un estruendo propio del denominado trueno. El fenómeno es un todo que se manifiesta primero con transmisión de luz, que llega rápidamente al sitio donde estamos porque la velocidad lumínica es de 300.000 Km. por segundo; en cambio la velocidad del sonido es mucho menor y por ello el "ruido" del trueno se escucha bastante después del rayo.



Pero a nosotros nos interesa señalar que ese tiempo que tarda en "llegar" el sonido del trueno está en correspondencia con la distancia a que se encuentra el oído, o el aparato receptor de sonidos, del sitio donde se produce el fenómeno climático. Ese tiempo será mayor si la distancia es más grande, es decir el tiempo de percepción auditiva del trueno depende, es función de la distancia.

Matemáticamente $t = f(d)$ que significa la variable tiempo depende de la variable distancia. La primera variable, el tiempo, se dice variable porque puede tomar distintos valores, puede modificarse. Pero esa variación depende del valor que tome la otra variable: la distancia, que también puede considerarse con distintos valores. Cuando a la segunda se la considera, matemáticamente, que puede tomar valores arbitrariamente se la llama variable independiente.

Un segundo ejemplo es el de la ducha eléctrica. Se observa que cuando aumenta el volumen de agua que pasa por la "flor", y esto ocurre porque se abre más la canilla, el agua se presenta más fría y por el contrario cuando sale poca agua la temperatura aumenta y puede hacerlo hasta hervir si la cantidad es muy poca, esto se manifiesta con el humo blanco (vapor de agua) como el de una pava.

Ahora la T (temperatura) depende del volumen V del agua que pasa: $T= f(V)$.

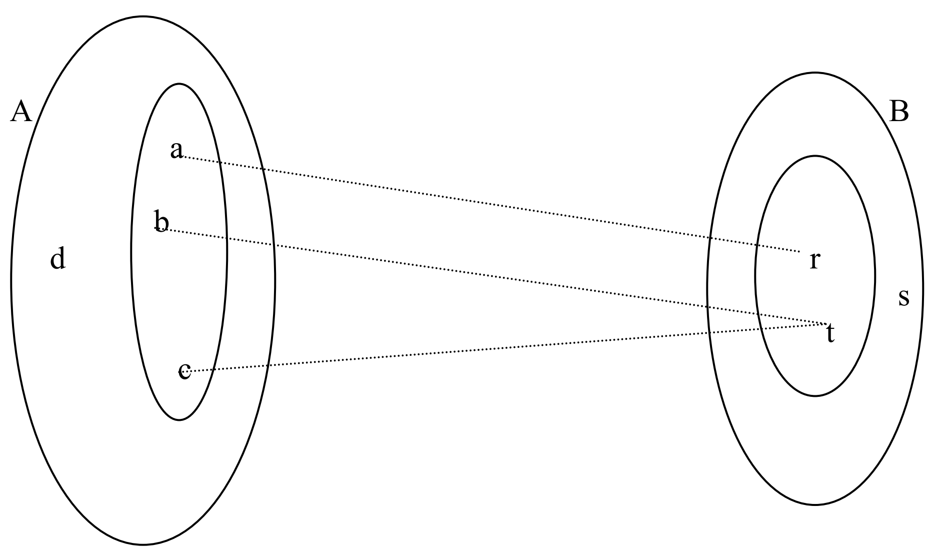
Hasta aquí aquello que forma parte del "saber cotidiano".

A continuación vamos a "precisar" más para construir el concepto, es decir la idea elaborada de todo lo anterior que dijimos. Para ello nos formulamos algunas preguntas:

Cuando dos variables están vinculadas, ¿cuándo tenemos una función?, o ¿qué debe cumplirse para que podamos hablar de función?, ¿cómo deben ser las variables, o qué valores pueden considerarse?

La matemática considera dos conjuntos para definir función. Pero, ¡ojo!, esos conjuntos son matemáticos, no son físicos, ni biológicos, no poseen existencia real, sólo existen en la mente del matemático ¡Es una abstracción!

Antes de escribir la definición y para una mejor comprensión se puede pensar en un primer conjunto, en todos aquellos valores que puede tomar la variable distancia: d_1, d_2, d_3,… y el otro conjunto el tiempo que tarda en llegar el sonido: t_1, t_2, …



Dominio de la función
Dm= (a, b, c)

Codominio o Imagen de la función
Codm o Im= (r, t)

En el segundo ejemplo los conjuntos son: V= (V_1, V_2,…) y T= (T_1, T_2,…).

El concepto de función está vinculado con el tipo de correspondencia que existe entre los valores que toma la variable independiente y la variable dependiente.

Por ejemplo, si "a" es un valor de un conjunto A y para cada uno de los elementos del primer conjunto (A) existe un solo elemento "r" del otro conjunto B, y si todos los valores "a" tienen su correspondiente "r" entonces decimos que tenemos una función. Señalemos la definición:

Dados dos conjuntos A y B, se dice que una relación de A en B es una función cuando de cada punto (o elemento) de A sale a lo sumo una flecha.

La simbología de la función se escribe de distintas formas:

$f : x \longrightarrow y$, que se lee: f transforma o aplica x en y

y = f (x) que se lee y es la imagen de x por la función f

En general en ingeniería y carreras no matemáticas: ciencias económicas, arquitectura, medicina, …se lee y igual a f de x.

Otra definición de función:

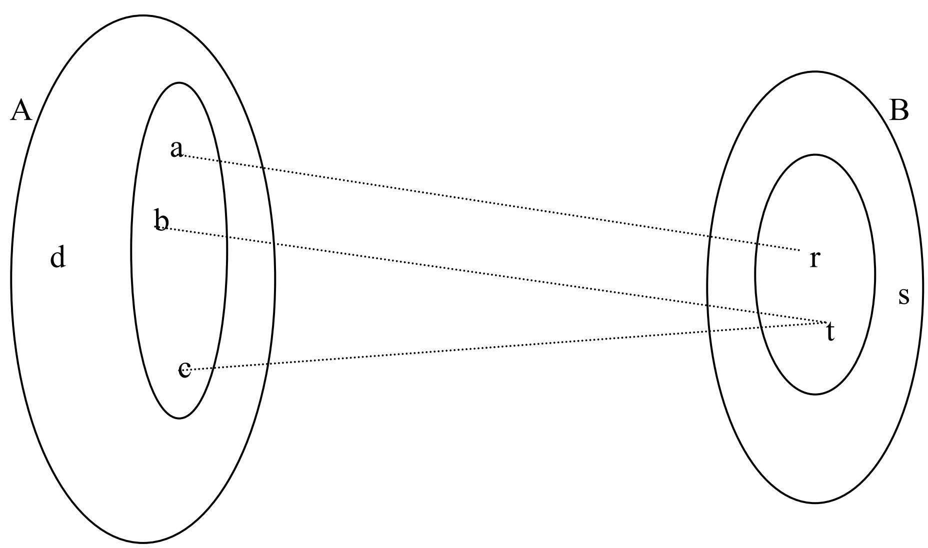
Dados dos conjuntos A y B, ∃ (existe) una función f si:

1º) f es un conjunto de pares ordenados tales que la 1ª componente pertenece al conjunto A y la 2ª componente a B.

si (x;y) ε (pertenece) f $\Longrightarrow$ x ε A Λ y ε B.

2º) Para todo elemento "x" del conjunto A existe y es único el elemento "y" del conjunto B tal que el par (x;y) pertenece a la función

∀ x ε A, ∃ y (y es único) ε B / (x; y) ε f.



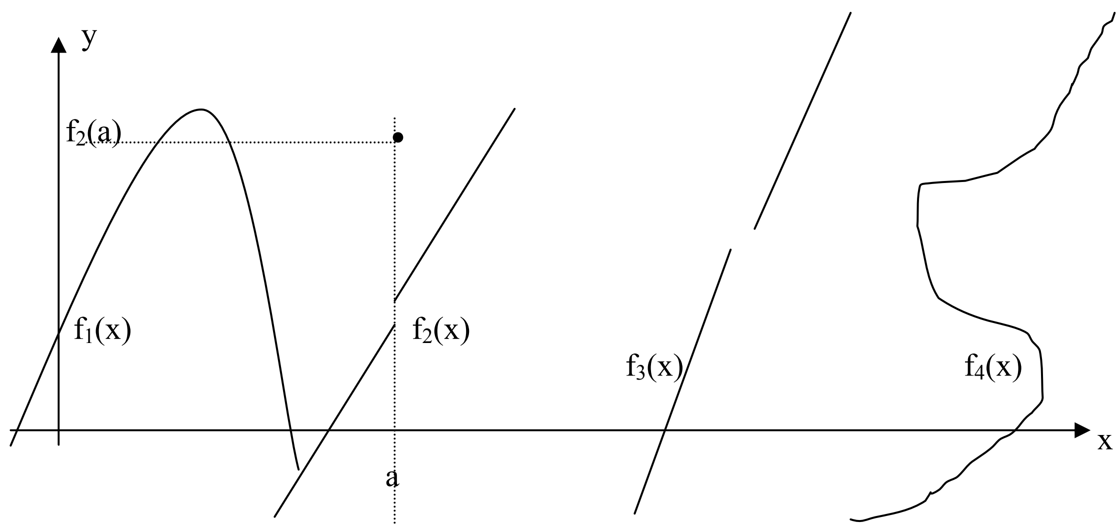
Dominio de la función
Dm= (a, b, c)

Codominio o Imagen de la función
Codm o Im= (r, t)

Concepto práctico de función

Se dice que una relación entre dos conjuntos de valores de dos variables (por ejemplo distancia y tiempo en el caso del trueno, o temperatura y volumen para el otro) es una función si para cada valor del dominio de la función en el intervalo considerado existe la imagen y es una sola. Repetimos resumidamente: existe la imagen y es una sola.

En el siguiente Gráfico se han representado cuatro relaciones: $f_1(x)$ es una función porque cumple con la definición para cada punto del dominio de la función que suponemos de $-\infty$ a $+\infty$; $f_2(x)$ es una función porque aunque para un punto, en $x = a$ no es continua la función existe una imagen: $f_2(a)$ para ese valor de $x = a$; $f_3(x)$ y $f_4(x)$ no son funciones porque en $f_3(x)$ existe un valor del dominio de la función que no posee imagen y para $f_4(x)$ hay valores de x del dominio que poseen más de una imagen.



Intervalos

Para este curso introductorio que nos proponemos interesa que el estudiante desarrolle el lenguaje analítico o simbólico, el coloquial (de la palabra) y el gráfico para estudiar matemática.

Intervalo cerrado a ●———● b $[a ; b]$; $a \leq x \leq b$, incluye a y b.

Intervalo abierto a ——— b $(a ; b)$; $a < x < b$, no incluye ni a ni b.

Intervalo acotado a ●———▶ ∞ $[a ; \infty)$; $a \leq x < \infty$; $x \geq a$

Cuando queremos limitar el número de valores que puede tomar una variable, establecemos un rango, un espacio, acotamos las posibles cantidades que puede adoptar la variable y llamamos a ese espacio: intervalo. Por ejemplo, si estudiamos el comportamiento de una sustancia al calentarla entre 20ºC y 50ºC, en los cálculos pondremos $20 \leq T \leq 50$ lo que significa que la temperatura puede tomar el valor 20 como mínimo y el 50 como máximo, incluyendo ambos valores. Los valores 20 y 50 se denominan extremos del intervalo. En el caso considerado los extremos forman parte del intervalo.

Pero, puede ocurrir que no sea así. Una división a / b es factible si el denominador es distinto de cero, pues la división por cero es operación prohibida. Por eso escribimos:

$- \infty < b < 0$ y $0 < b < + \infty$; b toma cualquier valor entre cero y menos o más infinito exceptuando los extremos. En este caso de la división se trata de un intervalo abierto mientras que cuando los valores extremos entran en el intervalo, es un intervalo cerrado. El intervalo cerrado lo indicaremos con corchetes y el abierto con paréntesis. Se denominan intervalos infinitos cuando uno de los extremos es infinito o los dos y en ese caso en ese extremo se indica con paréntesis pudiendo ser el otro abierto o cerrado. Por ejemplo: [c ; d) que nos dice $c \leq x < d$ que nos dice que el intervalo es cerrado a la izquierda y abierto a la derecha.

¿Cómo estudiar la Revisión?

Hay un primer momento que puede ser de gran dificultad y se requiere paciencia aunque no menos esfuerzo y también cierta celeridad en operar con estos elementos de la matemática pre–universitaria.

Se trata de realizar operaciones planteadas en textos de la escuela pero no solo alcanzar el resultado sino observar las dificultades que se plantean y fundamentalmente se le plantean al estudiante. Por ejemplo estudiar (no memorizar), es decir buscar, analizar, reflexionar, consultar a los docentes. Algún tema puede ser como indica el texto: potencias.

Realizar los cocientes de polinomios y luego verificar que el resultado (cociente y resto) es correcto. Vincular esta operación con las realizadas en los primeros años en las divisiones con algunas cifras.

Lectura y reflexión del Apéndice I acerca de la Enseñanza de la Matemática.

Revisar el 1º y 2º casos de factores. Comparar el 3º y 4º casos acerca del cuadrado y el cubo de un binomio.

Llevar a cabo las tareas sugeridas en el tema trigonometría: construir ángulos y calcular las funciones trigonométricas para distintos ángulos, deducir las relaciones fundamentales aplicando las definiciones.

Buscar la demostración de la tesis de Pitágoras. ¿Cómo se podría verificar experimentalmente?

CAPÍTULO II: FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Funciones Algebraicas

Resumen

Introducción. Constantes y Variables. Variables para el mejoramiento vegetal. Función o Variable Dependiente y Variable Independiente. Representaciones Gráficas. Sistemas de coordenadas. Clasificación de funciones. Funciones explícitas e implícitas. Funciones paramétricas. Función Lineal. Forma Explícita de la recta. Caso $y = mx$. Caso $y = mx + b$. Forma Implícita de la recta. Forma segmentaria de la recta. Casos particulares de la función lineal. Ecuación de una recta que pasa por un punto y su pendiente m. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Ángulo de dos rectas. Rectas Paralelas y Perpendiculares. Ejercicio. Introducción a la parábola. Definición. Deducción de la expresión analítica $y = a. x^2$. Dominio de la función ax^2. Deducción de la expresión analítica $y = a. x^2 + bx + c$. Estudio de los coeficientes “a”, y “c”. Pasaje de la forma polinómica a la canónica o polar o normal. Resolución de la ecuación polinómica de segundo grado. Carácter de las raíces.

Introducción

¿Qué lugar[12] ocupa el concepto de función en la formación del ingeniero? En la carrera profesional, más que en los años de grado, de estudiante, el ingeniero busca correlaciones entre posibles variables de aquellos fenómenos que estudia o investiga, o también procesos con los que trabaja. Generalmente tabula, es decir anota o registra cantidades, números en tablas que le permiten comprender aquello que le interesa.

Así por ejemplo:

Cuadro: 18[13]
1.- Especie: *Holocalyx balansae* Mich
1.1.- **Características Dendrométricas principales**

Predio Caract.	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº Arb / ha	3,23	2,16	3,17	1,95	2,71	-	3,13	1,22
ϕm	33,69	51,92	42,98	42,32	38,98	-	41,91	37,87
ϕmo	24,16	57,14	62,87	Bi.*	19,16	-	48,52	28,75

[12] Lugar: refiere a una elaboración intelectual, es una posición del pensamiento no una situación física.
[13] Yvyraretá 2. Septiembre de 1991.

Cuadro 1[14]: Fenología de 31 especies forestales nativas, Misiones, Argentina. (Pág.87)
Referencias: La primera cifra entre paréntesis corresponde a la fecha de comienzo de fase, la segunda a la duración en días de la misma, n: número de ejemplares de la misma.

Especie	Brotación	Cambio de Color del follaje	Floración	Caída del Follaje	Crecimiento del Fruto	Maduración del fruto	Caída del Fruto
Aguay (n:1)	Setiembre (30 – 79)	Marzo (14 – 99)	Abril (06 – 93)	Octubre (04 – 38)	❈	❈	❈
Alecrin (n:6)	Enero (26-117) Agosto (24-77)	Marzo (09 - 80)	Marzo (26 -75)	Setiembre (23 – 52)	Octubre (25-54)	Noviembre (18-52)	Noviembre (22-42)
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

……………………………………………………………………………………………

❈: No se observó, durante los períodos analizados, en ninguna de las estaciones fenológicas.

En general, esos valores y la propia relación es aproximada. La matemática estudia y define con exactitud sus entes, en forma estricta cada uno de sus conceptos. El ingeniero se interesa más por comprender sus fenómenos de estudio e intenta darle un tratamiento matemático aunque no necesariamente exacto. Por ello está más preocupado por construir funciones para optimizar o alcanzar mayores rendimientos que por averiguar cómo son las estructuras de aquellas. Sin embargo es muy educativo para el estudiante el acercamiento a este tema. En el Capítulo de Revisión se ha visto el concepto de función, ahora vamos a presentar algunos elementos que componen las funciones y son las que describimos a continuación.

Constantes y Variables

Durante un proceso matemático existen valores que no se alteran durante el desarrollo. Esos valores se denominan constantes.

Por ejemplo: cuando se calcula el volumen de una esfera se indica una expresión matemática como:

$V = (4/3)\ .\ \pi.\ R^3$

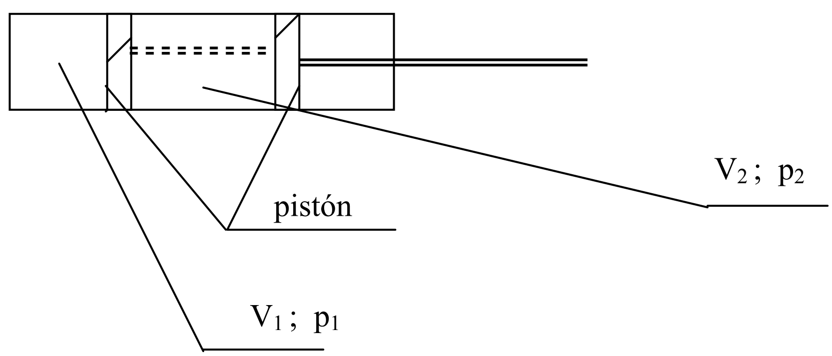
Los factores 4/3 y π no se alteran cualquiera sea la esfera de que se trate, y por lo tanto no dependen del radio de la misma. Entonces, 4/3 y π son constantes.

La constante π, se encuentra muy a menudo en toda la matemática, tiene el mismo valor en todos los procesos: $\pi = 3{,}141592$ y por ello se llama constante universal. Luego, así se llaman aquellas constantes que no se modifican de un proceso a otro.

[14] Yvyraretá 6. Octubre de 1995.

En química general: p.V = n . R .T donde R es la constante universal de los gases ideales R = 0,082 lt . atm / mol . ºK. Pero existen otras constantes. Cuando se calcula la resistencia de un conductor se emplea la expresión R = ρ . (l/s) donde ρ es la resistencia específica del conductor, l su longitud y s el área de sección transversal. Para un material dado, cobre, aluminio ρ resulta definido y constante pero l y s no. Puede ser un conductor de cobre de distintas longitudes y secciones y su resistencia específica será siempre la misma. Este tipo de constantes se denominan parámetros.

En un proceso matemático, existe otro tipo de elementos además de las constantes. Son las variables. Si comprimimos un gas, este va pasando por diferentes estados con presiones y volúmenes distintos.



Por lo tanto, los términos de un cálculo, de una fórmula matemática utilizada en física o química, poseen constantes y variables. Por convención, las constantes se designan con las primeras letras de los alfabetos griego y latino: a, b, c, α, β… y las variables con las últimas donde "x" e "y" son las más utilizadas, o: z, w, v, u,…

Variables para el mejoramiento vegetal

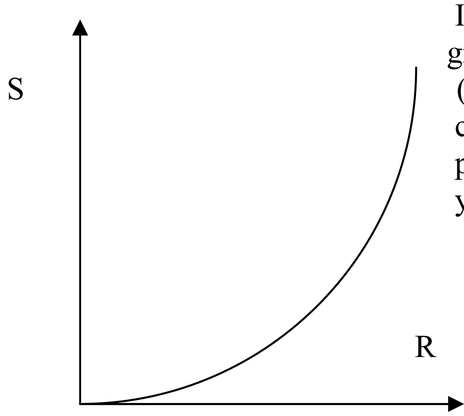
Vamos a dar algunas variables que se consideran cuando se busca un mejoramiento vegetal:

- Cantidad de individuos
- Volumen de madera
- Calidad: dureza
  resistencia
- Forma de las toras
- Rectitud del fuste, forma de cilindro
- Derrame natural (con poca edad, evita que queden nudos)
- Poca cantidad de ramas
- Fibras para papel

Función o Variable Dependiente y Variable Independiente

Habíamos visto en el Capítulo anterior que cuando para cada valor de una variable x obtenemos un valor de una variable y decimos que y es función de x.

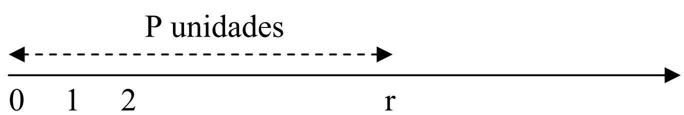
Así por ejemplo, para cada valor del radio de una esfera, obtenemos una determinada superficie $S = \pi . R^2$, decimos que la variable S es función de la variable r.



Incluso a veces nos puede resultar útil realizar un gráfico de las dos variables "en juego", la función (S) y la variable independiente (R). En este caso como la independiente R está elevada a la 2ª potencia la forma de la curva es la indicada y se denomina parábola.

Representaciones Gráficas. Sistemas de coordenadas

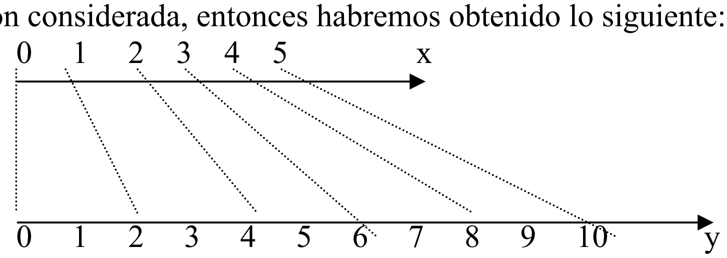
Si quisiéramos representar gráficamente los valores que toma una variable bastaría elegir un eje cualquiera, determinar sobre el mismo un origen O, un sentido positivo y elegir una unidad. De esa forma, a todo número real r le corresponde un punto P de la recta de modo tal que la longitud del segmento OP se expresa mediante el número r.



Es decir que para cualquier valor real de la variable queda determinado un punto: extremo del segmento orientado cuya medida es ese valor.

La recíproca es cierta: a cada punto del eje le corresponde un único número real de manera que la representación de todos los números constituye íntegramente la recta. Como a cada punto le corresponde un único número real y recíprocamente, se establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos del eje.

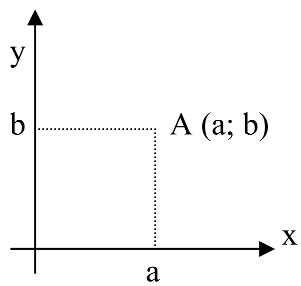
Si ahora consideramos un conjunto de valores que simbolizamos con la letra x, y un 2º conjunto representado por y tal que a cada valor de y le corresponde uno de x y donde el número de y es el doble de su correspondiente x, es decir simbólicamente: y = 2x, gráficamente podemos representar con dos rectas y unir los homólogos de uno y otro conjunto con segmentos, es decir si por ejemplo, a cada variable asignamos un eje y unimos los puntos de uno con los correspondientes del otro, tal que esa correspondencia sea la función considerada, entonces habremos obtenido lo siguiente:



Representación de
y = 2x

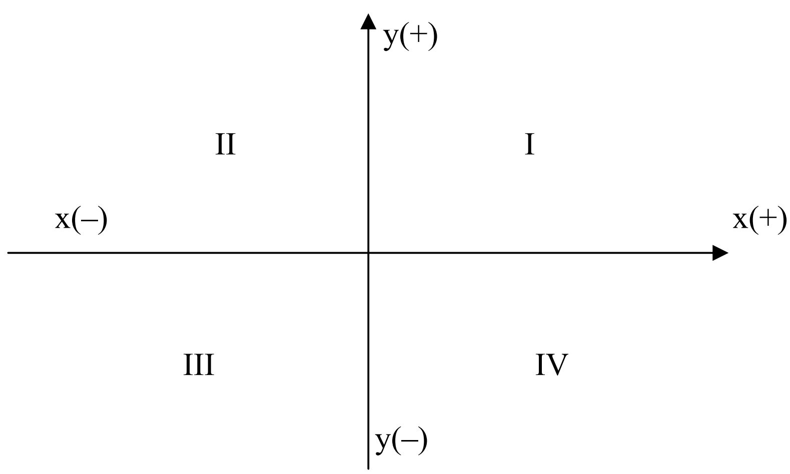
Mucho más práctica y útil es la representación cartesiana. Utiliza un par de ejes que se cortan bajo cierto ángulo, generalmente recto, en cuyo caso tenemos las coordenadas cartesianas ortogonales. Para los ejes se utiliza generalmente la notación de las variables, por ejemplo: “x” e “y”.

La representación gráfica se hace por puntos, tal que a cada uno le corresponde un par de valores (x ; y), que cumplen la relación y = f(x). Por ejemplo en la representación gráfica que habíamos hecho más arriba con dos ejes paralelos era y = 2x si tomamos un par de valores de aquellos unidos por un segmento como ser (3;6) tal que reemplazados en esa expresión verifiquen la igualdad, o sea 6 = 2.3.



El punto al que corresponde un par de valores se halla por intersección de dos segmentos: sobre el eje x llevamos el valor a llamado abscisa del punto y por ese punto trazamos una recta paralela al eje y. Del mismo modo, por el punto b trazamos una paralela al eje x. La intersección de ambas es el punto A(a ; b) que indica un punto en el plano cartesiano de coordenadas: abscisa a, ordenada b.

Los ejes cartesianos[15] dividen el plano en cuatro cuadrantes que suelen indicarse con números romanos como señala la figura.



En cada uno de ellos x e y poseen un signo. Por ejemplo el punto A anterior de coordenadas a y b posee una abscisa x = a positiva y una ordenada y = b también positiva.

Se sugiere agregar algunos puntos en cada cuadrante previo adoptar alguna escala para ambos ejes y señalar los segmentos de los puntos a los ejes y observar los signos.

Clasificación de funciones

Las funciones pueden ser algebraicas o trascendentes.

Las algebraicas tienen la forma de un polinomio. Es decir son aquellas donde las variables están “afectadas” por signos de suma, diferencia, multiplicación, división, potencia o raíz. Cuando decimos potencia o raíz vale aclarar que la variable x opera como

[15] El plano cartesiano o los ejes cartesianos deben su nombre a Descartes, filósofo y matemático francés.

base de la potencia o participa como radicando pero nunca como exponente o índice en la potencia o raíz respectivamente.

Una expresión general que se podría indicar sería:

$P_1(y) . x^n + P_2(y) . x^{n-1} + P_3(y) . x^{n-2} + P_1(y) . x^n + ….$

Siendo $P_n(y)$ un polinomio de y.

Ejemplos:

$x^3 – yx – 12 = 0$

$4 y^2 – 2yx - x^4 = 0$

Las funciones que no son algebraicas se llaman trascendentes,

$y = \cos x$

$y = e^x$

$y = \ln x$

Las funciones algebraicas pueden ser racionales o irracionales y tanto unas como otras pueden ser enteras o fraccionarias. Por ejemplo, las anteriores algebraicas son todas ellas enteras. La siguiente es algebraica fraccionaria:

$y = (2x + 3) / (3x^2 – 8)$ a diferencia de las enteras, en las fraccionarias la variable independiente figura en el divisor. Finalmente en las irracionales la variable x figura bajo algún signo radical.

Funciones explícitas e implícitas

Cuando una función está escrita en forma tal que no decide cuál es la variable independiente, se dice escrita en forma implícita:

$(x^2 / a^2) + (y^2 / b^2) = 1$

Si distingue una variable como independiente, generalmente en el 2º miembro, y una función o variable dependiente, generalmente en el 1º miembro, está en forma explícita:

$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ….$

No todas las funciones se pueden escribir en forma explícita pero sí en forma implícita.

Funciones paramétricas

Hay veces en que la relación entre ambas variables no está dada directamente sino mediante una tercera variable denominada parámetro:

$x = a \operatorname{sen} t$

$y = b \cos t$

son las ecuaciones paramétricas de la elipse, t es el parámetro. A cada punto de la figura, es decir a cada par de valores (x ; y) corresponde un valor de t. La transformación de las ecuaciones paramétricas en la función implícita de la elipse se puede realizar pasando de miembro a y b en cada ecuación y luego elevando al cuadrado en ambos miembros en cada ecuación, y finalmente sumando miembro a miembro ambas ecuaciones se obtiene la ecuación de la elipse en forma implícita aplicando la relación pitagórica de la trigonometría con $sen^2\ t + cos^2\ t = 1$

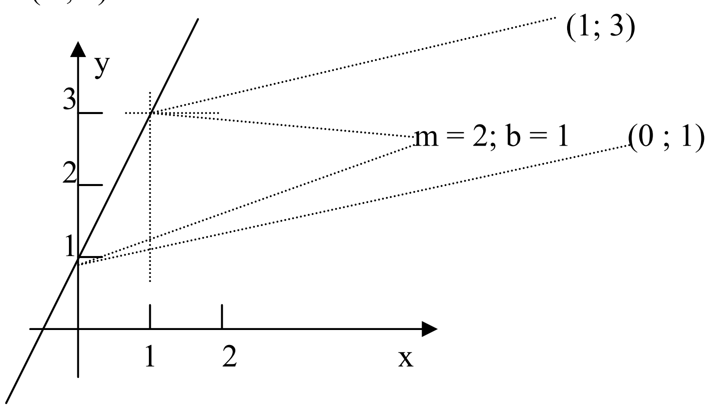
Función Lineal. Forma Explícita de la recta

Se llama grado de una función algebraica al mayor exponente a que está elevada su variable independiente. Así la función $y = 3x + 2$ es de primer grado y la función $y = 6\ x^5 + 8x$ es de 5º grado.

En particular, la función de primer grado recibe el nombre de lineal, la de 2º cuadrática, la de 3º cúbica, etc.

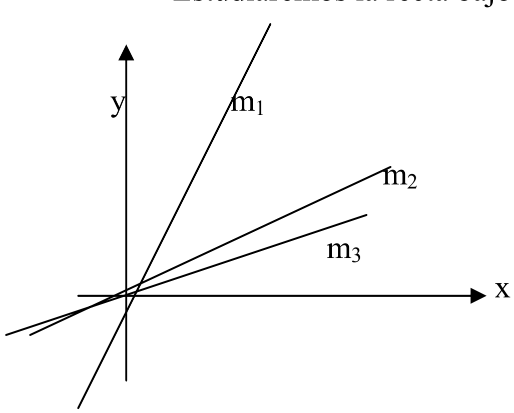
La función lineal puede aparecer escrita en la forma implícita $Ax + By + C = 0$ ó en la forma explícita $y = mx + b$ donde A, B, C, m, b son constante numéricas. Recordar cuando se dice constante numérica que cada recta posee un valor para cada una de esas letras, es decir para cada uno de los puntos de la recta, m, b son las mismas, como también lo son las otras tres constantes. En cambio en un punto de coordenadas (x; y) estas variables son distintas de las de cualquier otro punto.

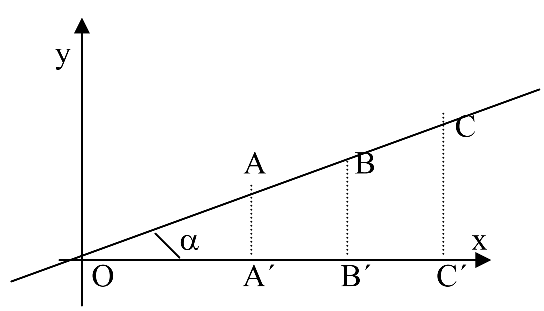
Por ejemplo: $y = 2x + 1$, consideremos dos puntos de la recta. En ambos m y b son iguales porque son característicos de la función, son las dos constantes. Independientemente de los puntos que se consideren de la función $m = 2$ y $b = 1$ permanecen con el mismo valor. Por ello se denominan constantes. En cambio x e y son variables. Los puntos son (1; 3) y (0 ; 1).



Caso y = mx

Estudiaremos la recta bajo la forma explícita. Un caso particular se presenta cuando





$b = 0$. Entonces $y = mx$. Es decir $(y / x) = m =$ constante ¿Cuál será la representación gráfica de esta recta, donde $(y / x) =$ constante?

La recta que pasa por el origen es la que cumple que para cada punto el cociente y/x es constante. Esta constante usualmente se indica con la letra m. Podemos observar que en cada uno de los triángulos que se forman entre los puntos de la recta: A, B, C… y los pies de perpendicular sobre el eje x: A´, B´, C´…y el punto O (origen de coordenadas) se cumple que $\text{tg } \alpha = AA'/ OA' = BB' / OB' = CC' / OC' = \ldots$ a este cociente se lo denomina pendiente de la recta e indica cuántas unidades aumenta "la altura" de cada punto cuando aumenta una unidad "el avance". La altura se mide en vertical y el avance en dirección horizontal. Recordemos que cociente es el número de unidades del numerador por cada unidad del denominador. Por ejemplo la velocidad en mecánica se indica como el número de km (por ejemplo) por cada hora que recorre el móvil. O la densidad es el número de gramos o kilogramos (por ejemplo) por cada unidad de volumen, en ml o en m^3. Entonces el significado geométrico de la pendiente m de una recta del tipo $y = mx$ está dado por la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x ($\text{tg } \alpha$).

¿Cómo estudiar este tema? Desde los distintos lenguajes. Realizar los gráficos y encontrar las relaciones, por ejemplo: entre ordenada, pendiente, abscisa. Comparar rectas de igual pendiente. O rectas que pasen todas por el origen de coordenadas.

Cuando se dibuja en el plano cartesiano simultáneamente escribir en el lenguaje analítico y "ponerle palabras"[16]*. Recordar que el docente utiliza términos, vocablos, palabras que a veces el alumno no emplea con frecuencia o sencillamente no los conoce, entonces es el momento para el estudiante en "verbalizar" aquello que hace. Por ejemplo algunas preguntas o pensar como palabras claves que se pueden utilizar para este tema: ¿cuándo la recta es creciente, cuándo decreciente, qué es la variable independiente, y qué o cuál dependiente, cuál es el término lineal en la expresión de la recta, por qué se llama así?,¿qué significa ordenada al origen, se diferencia el algo de las infinitas ordenadas que posee una recta, tiene sentido hablar de la ordenada unitaria,…?¿Tendrá sentido hablar de la abscisa al origen?*

Pero, no solo desde los lenguajes es necesario pensar los temas matemáticos. En algunos cursos de carreras no matemáticas o del sistema educativo preuniversitario se requiere lo interdisciplinario. Las ciencias fácticas, la economía, a veces la biología, los profesorados requieren de la matemática en su currículo pero también es la matemática la que necesita de todas ellas para darle significado, y de ese modo facilitar la enseñanza, de sus entes abstractos no semánticos.

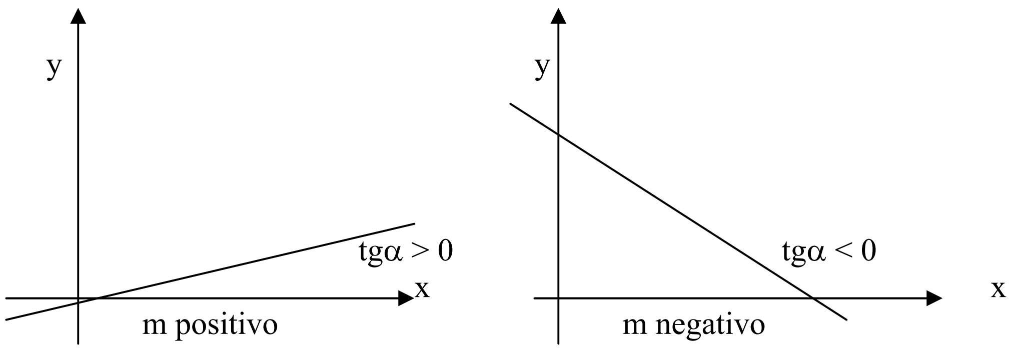
En la mecánica elemental cuando se estudia el mur (movimiento uniforme rectilíneo) se indica $e = vt + e_0$, ¿esta expresión analítica se puede asemejar a la de una recta? Si así fuese, ¿qué hay de común entre los elementos que la componen y la fórmula general $y = mx + b$?, ¿por qué el subíndice cero para la expresión de la física? En la fórmula cinemática ¿cuáles son las constantes y cuáles las variables?

---

[16] "Ponerle palabras": significa evitar el trabajo mecanizado, disociado que es aquel que se realiza para "cumplir" mientras se lee y piensa en otra cosa. Para ello cuando se dibuja, cuando se escribe analíticamente, agregar palabras o frases que resulten pertinentes como ser: *cada recta posee una pendiente distinta de aquellas dibujadas que pasan por O. En cada punto de una misma recta se cumple que la pendiente es la misma*.

Todas las rectas que pasan por el origen se diferencian únicamente por el ángulo que forma cada recta con el eje horizontal x, es decir que se distinguen por la tangente de ese ángulo y por tanto por la pendiente.

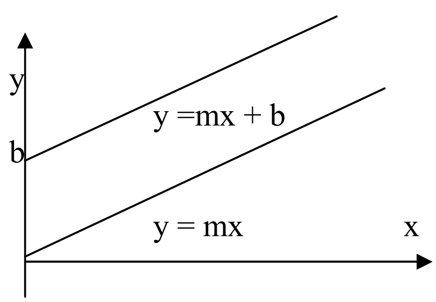
Para definir, determinar una recta $y = mx$ (que pasa por el origen), basta conocer o determinar el valor de m. Como $m = \text{tg}\ \alpha$, y α varía entre 0 y π, resulta que:



$0 < \alpha < \pi / 2$ (90º), la tangente trigonométrica es positiva, en cambio si: $\pi / 2 < \alpha < \pi$ la $\text{tg}\ \alpha$ es negativa.

Caso y = mx + b

Consideremos ahora el caso en que $y = mx + b$. Esta recta difiere de la anterior en que a cada una de sus ordenadas se les ha sumado un valor b. Son rectas paralelas. Es el caso general de la función lineal donde b es la ordenada al origen o término independiente. Geométricamente es el punto donde la recta corta al eje y vertical y analíticamente es el valor que toma y cuando $x = 0$. En $y = mx + b$ si $x = 0$ es $y = 0.x + b = b$. Luego el punto posee coordenadas (0 ; b). El eje y se indica analíticamente como $x = 0$



Forma Implícita de la recta: Ax + By + C = 0

Si ahora consideramos nuevamente la expresión $y = mx + b$, y llevamos todos los términos al 1º miembro haciendo pasajes de términos de un miembro a otro, resulta:

$y – mx – b = 0$, ejemplo: $y = 2/3\ x + 3$ por lo tanto: $y – 2/3\ x – 3 = 0$, multiplicando por 3 en ambos miembros de la igualdad es: $3y – 2\ x – 9 = 0$,

en general resulta: $Ax + By + C = 0$, que para el ejemplo considerado resulta $A = –2$ $B = 3$, $C = – 9$.

Forma segmentaria de la recta

Una tercera forma de expresión resulta de dividir la forma explícita en ambos miembros por b:

$y / b = mx / b + b / b$, y haciendo pasajes de términos:

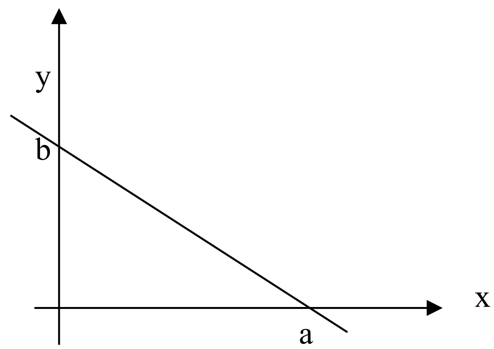
$y / b - mx / b = 1$, y teniendo en cuenta que el número m que multiplica en el numerador es equivalente a colocarlo en el denominador dividiendo a “b” con su signo negativo es: $y / b + \{x / (- b / m)\} = 1$, usualmente $- b / m = a$ o sea:

$y / b + x / a = 1$

Estudiemos el significado geométrico de las nuevas constantes.

Hagamos $x = 0$ entonces $y / b = 1$, luego $y = b$, podemos decir, aunque ya lo sabíamos, que b es la ordenada al origen (porque $x = 0$).

Ahora consideremos $y = 0$ entonces $x / a = 1$, luego $x = a$ es decir la abscisa al origen (porque $y = 0$)



Esta forma de expresión se denomina segmentaria aludiendo a los segmentos a, b sobre los ejes coordenados.

Casos particulares de la función lineal

<u>Consideremos $b = 0$</u>.

Luego $y = mx$, ya se comentó es el haz de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

<u>$m = 0$</u>

Significa $y = b$ es el conjunto de las infinitas rectas paralelas al eje x denominadas y = constante. Es decir para cualquier valor de x, la ordenada vale siempre lo mismo: $y = b$.

<u>$m = 1, b = 0$</u>

En este caso es una recta de pendiente uno que pasa por el origen. Luego tg $\alpha = 1$, es decir $\alpha = 45^{\circ}$ y por lo tanto para cualquier valor de x es $y = x$, que corresponde a la llamada función identidad. Gráficamente es la recta que resulta bisectriz de los cuadrantes primero y tercero.

<u>$\alpha = \pi / 2$,</u>

La tg $\alpha = \infty$, cuando el ángulo es de 90º resulta una recta perpendicular al eje x, y por tanto para un único valor de x existen ∞ imágenes. Estrictamente no es una función pero por extrapolación del concepto se la considera como tal y se indica por ejemplo:

$x = 2$, $x = 3$, …etc.

Ecuación de una recta que pasa por un punto y su pendiente m

(Si la pendiente puede ser conocida, si se determina, entonces la recta es una sola, por eso a veces este ítem se presenta como la ecuación de una recta de pendiente m que pasa por un punto $(x_0 ; y_0)$ si se conoce sólo el punto entonces hablamos de un haz de rectas).

Sea un punto P de coordenadas $(x_0 ; y_0)$, veamos qué condición debe cumplir una recta para pasar por el punto. La ecuación en forma explícita de una recta es: $y = mx + b$,

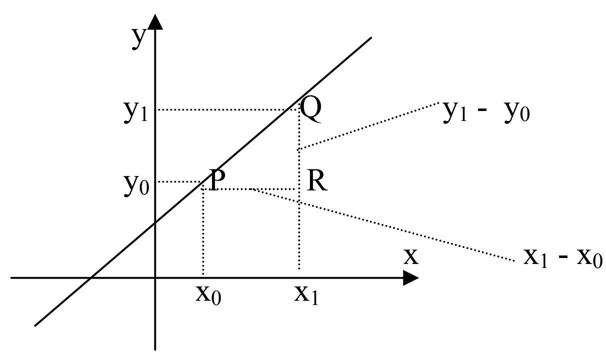
en el punto P, cuyas coordenadas conocemos, se transforma en: $y_0 = mx_0 + b$,

si ahora restamos miembro a miembro las dos igualdades resulta: $y - y_0 = mx - mx_0$

reordenando (sacando factor común) es: $y - y_0 = m (x - x_0)$

Esta es la ecuación de toda recta que pase por el punto P. Es el haz de rectas que pasa por P $(x_0; y_0)$. Cada una de esas rectas se caracteriza por tener un valor de m distinto, es decir otra pendiente. Entonces, conocidos los valores de las coordenadas $x_0 ; y_0$, y la pendiente m de la recta, esta queda determinada.

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos



Sean P $(x_0 ; y_0)$ y Q $(x_1 ; y_1)$ dos puntos cualesquiera del plano cartesiano. Estudiaremos la expresión analítica de la recta que pasa por esos dos puntos. Si la recta pasa por P tiene que cumplir con: $y - y_0 = m (x - x_0)$,

además $m = \text{tg } \alpha = QR / PR = y_1 - y_0 / x_1 - x_0$

y reemplazando esta última expresión en la igualdad anterior resulta:

$y - y_0 = (y_1 - y_0 / x_1 - x_0) . (x - x_0)$,

o también:

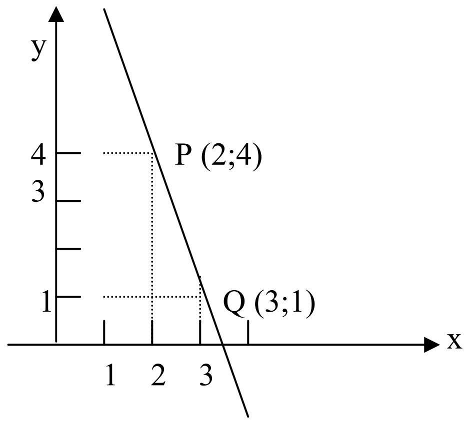
$(y - y_0 / x - x_0)= (y_1 - y_0 / x_1 - x_0)$

Por ejemplo, hallemos la ecuación de la recta que une los puntos P (2;4) y Q (3;1)

Reemplazando los datos en la fórmula:

$y - 4 = \frac{1-4}{3-2}(x-2) = -3x + 6$, pasando todo al 2º miembro:

$y = -3x + 10$

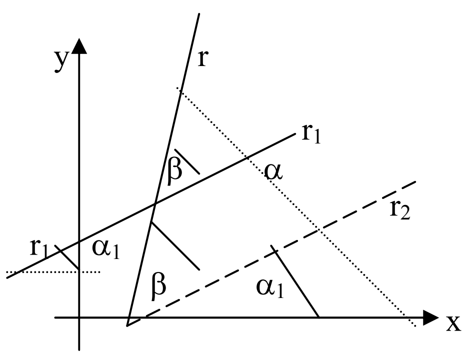


Ángulo de dos rectas

Sean dos rectas de ecuaciones $r \equiv y = m\,x + b$;

$r_1 \equiv y = m_1\,x + b$

Interesa estudiar el ángulo β que forman la recta r y la recta r_1



El signo $\equiv$ indica determinar. Luego r es la recta de fórmula $y = mx + b$, y la r_1 tiene por expresión simbólica: $y = m_1\,x + b_1$

Donde la recta r corta al eje de abscisas tracemos otra paralela a r_1, sea r_2. Llamemos α y α_1 a los ángulos que forman r y r_1, se observa que $\beta = \alpha - \alpha_1$, el ángulo buscado es la diferencia de inclinaciones entre las dos rectas dadas. En realidad las rectas al cortarse forman dos ángulos y por convención se considera sólo el agudo. Como r_2 es paralela a r_1, sus inclinaciones son iguales, las que están indicadas con la misma letra: α_1. Entonces $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,(\alpha - \alpha_1)$ y aplicando la fórmula[17] de la tangente de la diferencia de dos ángulos resulta: $\mathrm{tg}\,\beta = (\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha_1) / (1 + \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha_1)$ y como tg α y $\mathrm{tg}\,\alpha_1$ son las pendientes de las rectas: $\mathrm{tg}\,\alpha = m$, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = m_1$,

$\mathrm{tg}\,\beta = (m - m_1) / 1 + m.m_1)$;

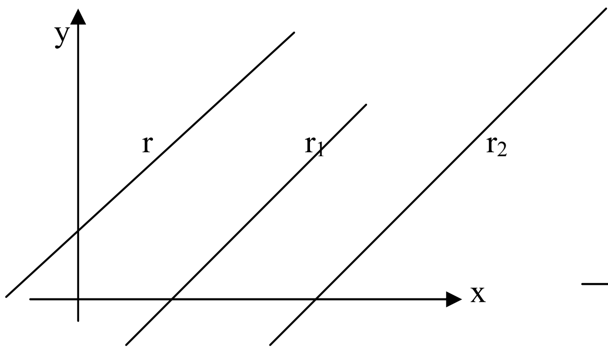
$\beta = \mathrm{arctg}\,\{ (m - m_1) / 1 + m.m_1\}$;

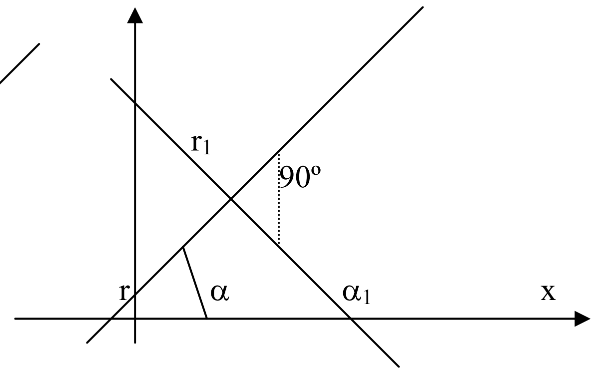
[17] Con sen (α – β) y cos (α – β) deducir tg (α – β) . Ver Capítulo I.

Rectas Paralelas y Perpendiculares

Rectas Paralelas

Todas las rectas paralelas tienen la misma inclinación y por lo tanto la misma pendiente. Es condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas que tengan la misma pendiente:





Será r, r_1, r_2 paralelas si y sólo si $m = m_1 = m_2$.

Rectas Perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares el ángulo que forman es de 90º. Por lo tanto $tg\ 90º = (m - m_1) / 1 + m.m_1) = \infty$ para que esto se cumpla debe ser $1 + m.m_1 = 0$, por lo tanto

$$m = - 1 / m_1$$

en realidad la tg 90º "tiende" a ∞. Esto va a comprenderse en el tema límites.

"Las pendientes de dos rectas perpendiculares son recíprocas y de signo opuesto".

Ejercicio

Dados tres puntos sobre el plano cartesiano: A(2; -3); B (5;1); C(-1;4), calcular:

a) Ecuación del lado AB,
b) Ecuación de la mediana correspondiente a AB
c) Ecuación de la mediatriz correspondiente a AB
d) Longitud de AB
e) Ángulo A

a) La ecuación del lado AB es sencillamente la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, problema ya conocido, como

$$y – 1 = \left[– 3 – 1 / 2 – 5 \right] . (x – 5)$$

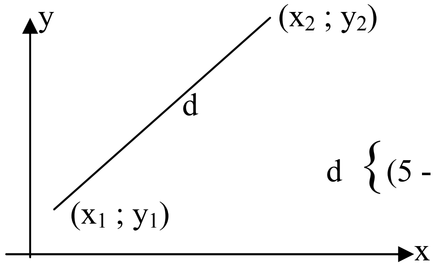
$\underline{y = 4/3\ x – 17/3}$

b) La mediana es el segmento que une el punto C con el punto medio del lado AB (que llamaremos M). Calculemos las coordenadas del último que son el promedio de las de los extremos del lado.
$x_M = (x_A + x_B) / 2 = (2 + 5) / 2 = 7/2$, análogamente $y_M = -1$

Conocidas las coordenadas del punto M (7/2 ; -1) y del punto C (-1; 4) se construye la recta que pasa por esos dos puntos:
$\underline{y = -(10 / 9) . x + 26 / 9}$

c) La mediatriz de AB es una recta que pasa por M (punto medio de AB) y cuya pendiente se puede calcular sabiendo que es perpendicular a AB:
$m = - 1/ m_1$
siendo m_1 la pendiente de AB, $m = - 1 / (4/3) = - 3 / 4$ es la pendiente de la mediatriz.
Como $y - y_0 = m (x - x_0)$,
$y + 1 = - 3 / 4 (x – 7/2) = - 3 / 4 \; x + (13 / 8)$
$\underline{y = - 3 / 4 \; x + (13 / 8)}$

d) Longitud de AB: Por el teorema de Pitágoras $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



$$d = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$d \left\{ (5 - 2)^2 + [(1 – (-3)]^2 \right\}^{1/2} = (9 + 16)^{1/2} = (25)^{1/2}$$

$\underline{d = 5}$

e) Ángulo A
Conocemos la pendiente de AB: $m_{AB} = 4/3$, y calculamos la de AC:
$m_{AC} = (y_A - y_C) / (x_A - x_C) = (- 3 - 4) / (2+1) = - 7 / 3$

$tg\, A = (m_{AB} - m_{AC}) / 1 + m_{AB} . m_{AC} = (4/3 + 7 / 3) / 1 - 4/3 \; 7 / 3 = (11/ 3) / (- 19 / 9)$
$tg\, A = (- 33 / 19)$ por lo tanto: $\underline{A = arc\ tg (- 33 / 19)}$

Introducción a la parábola

La función cuadrática es un polinomio de segundo grado por ello el nombre, que proviene de cuadrado.

Su expresión general es:

$y = ax^2 + bx + c$

Se reconocen tres constantes que son las que definen la función y usualmente se indican con a, b, c. El primero (de esos tres coeficientes numéricos con signo incluido) se encuentra en el término cuadrático o sea multiplica a x^2. El segundo b es el término lineal o sea multiplica a "x" (cuando está elevado a la primera potencia, por ello lo lineal) y finalmente c se lo reconoce como el término independiente (se podría pensar que multiplica a "x" elevada a la potencia cero).

Por ejemplo:

$y = -2x^2 + x - 2$, $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$
$y = -x^2 - 2x + 1$, $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$.

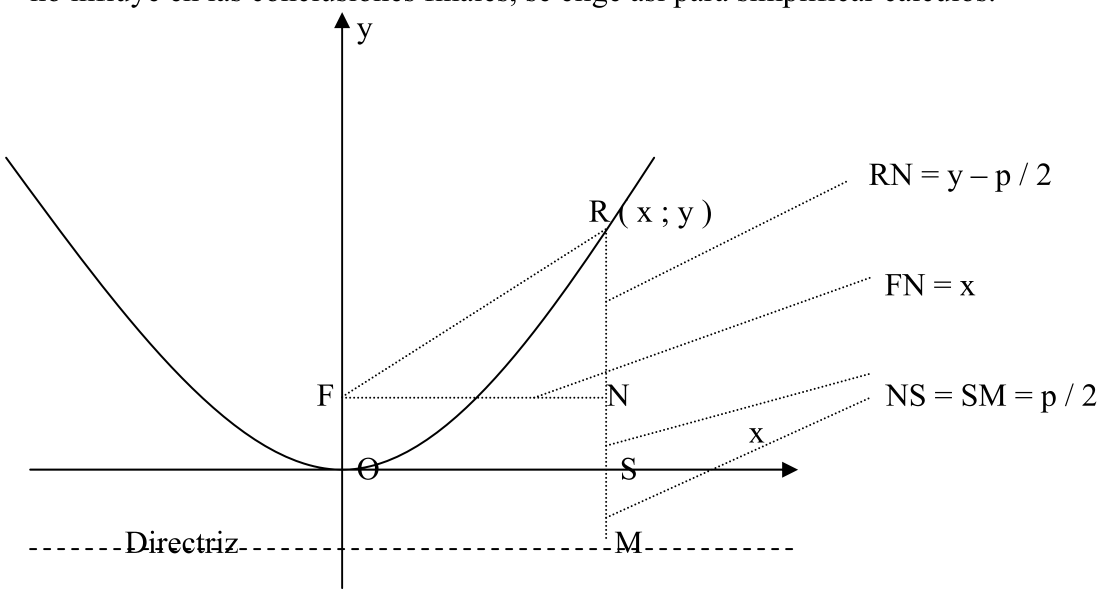
Existen otras formas de ecuación de segundo grado. Cada una de ellas representa una cónica. Las cónicas son curvas que se obtienen como secciones planas de superficies cónicas. Es decir de “cortar un cono” con planos paralelos a la base (del cono) o no, se obtienen otro tipo de curvas como circunferencias, elipses, etc. Primero definiremos qué es una parábola y luego deduciremos su expresión analítica: $y = ax^2$, y a continuación demostraremos que $y = ax^2 + bx + c$ también es una parábola.

Definición

Definimos a la parábola como lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a un punto fijo llamado foco es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

Deducción de la expresión analítica $y = a.\ x^2$

Se considera una distancia p desde el foco hasta la recta directriz (es un segmento perpendicular a la recta medido desde F hasta la directriz). Se considera que tanto la recta directriz como el Foco están a la misma distancia del eje x: p/2. Esto último es arbitrario y no influye en las conclusiones finales, se elige así para simplificar cálculos.



Dada la definición de la parábola se estudiará ahora qué relación existe entre la ordenada (y) y la abscisa (x) de un punto R cualquiera de esa parábola de coordenadas (x; y). Presumimos y tenemos información de que la relación es del tipo del cuadrado de la variable independiente pero queremos hallarla. Ver de dónde sale esa expresión matemática. Como otros datos sabemos que existe un punto especial: el foco F que para mayor comodidad lo colocamos sobre el eje de ordenadas y, es decir F (0 ; p / 2) y también se considera una recta denominada directriz de forma explícita y = - p / 2.

De la definición surge que RF = RM.

De modo que ahora tenemos que comprender, según nuestra figura, qué es en términos matemáticos, en el lenguaje analítico esos dos segmentos. Además el qué es se dirige a expresar en términos de nuestros datos: x, y, p/2.

Por el Teorema de Pitágoras es:

$RF = [\, x^2 + (y - p / 2)^2 \,]^{1/2}$,

Además $RM = y + p / 2$,

Luego: $[\, x^2 + (y - p / 2)^2 \,]^{1/2} = y + p / 2$,

elevando al cuadrado ambos miembros: $x^2 + (y - p / 2)^2 = (y + p / 2)^2$

desarrollando los cuadrados y simplificando: $x^2 + y^2 - py + p^2 / 4 = y^2 + py + p^2 / 4$;

$x^2 = 2py$;

$$y = (1/ 2p) \,.\, x^2$$

$$\underline{y = a.\, x^2}$$

Hemos demostrado que la parábola es la representación de una función cuadrática del tipo: $y = a\,.x^2$, siendo a un parámetro que caracteriza a cada parábola tal que es $a = 1/ 2p$.

Dominio de la función ax^2

Df es el conjunto de los números reales o sea $- \infty < x < \infty$, Df = { R }.

Deducción de la expresión analítica $y = a.\, x^2 + bx + c$

Hasta ahora habíamos visto que $y = ax^2$ es una parábola pero si bien consideramos que $y = ax^2 + bx + c$ también lo es no lo hemos demostrado.

Sacando factor común a: $y = a\, [\, x^2 + (b / a)x + c / a \,]$

Sumamos y restamos ($b^2 / 4\, a^2$) dentro del corchete, es decir queda ese factor, repetido, multiplicado por a

$y = a\, [\, x^2 + (b / a)x + (b^2 / 4\, a^2) - (b^2 / 4\, a^2) + c / a \,] =$

$y = a\, [\, x^2 + (b / a)x + (b^2 / 4\, a^2) - (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a^2 \,] =$

$y = a\, [\, (x + b / 2a)^2 - (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a^2 \,] =$

$y = a\, (x + b / 2a)^2 - (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a$

$y + (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a = a\, (x + b / 2a)^2$

Si hacemos $Y = y + (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a$

$X = x + b / 2a$

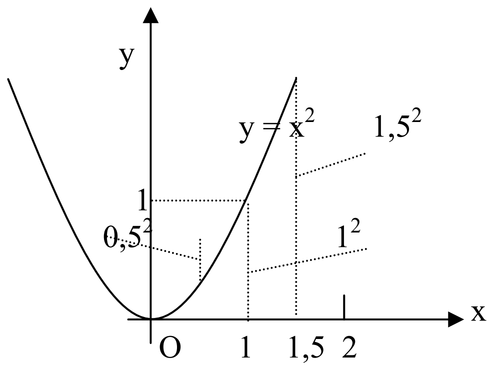
Resulta $Y = a\, X^2$

que es una parábola donde el eje vertical pasa por: $\underline{- b / 2a}$, y el eje horizontal pasa por $\underline{- (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a}$.

Efectivamente las coordenadas del vértice son:

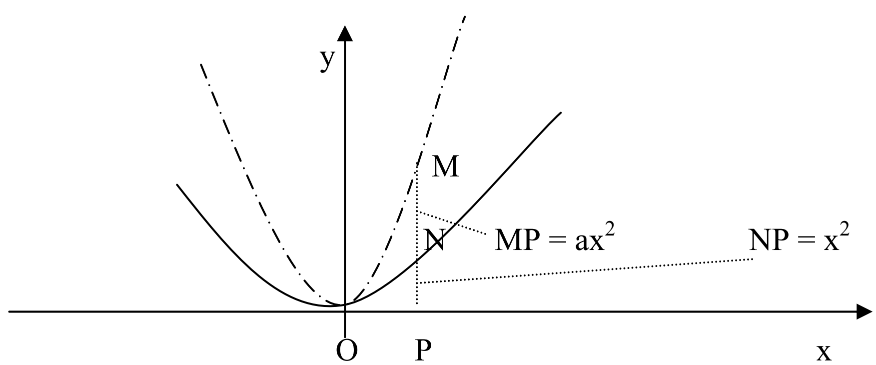
$x_v = - b / 2a$, $y_v = - (b^2 - 4\, a\, c) / 4\, a$

Estudio de los coeficientes "a", "c"[18]



La parábola $y = x^2$ posee un eje de simetría: "el eje y" o sea la recta vertical: $x = 0$. En el Gráfico se han indicado algunas ordenadas para visualizar que cada uno de esos segmentos verticales es igual a la abscisa que le corresponde elevada al cuadrado. Por ej: $0,5^2$, 1^2, $1,5^2$, …

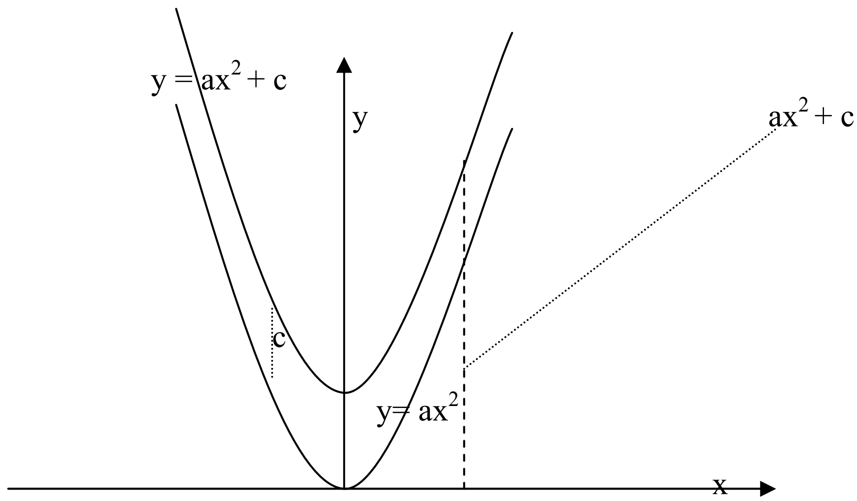
Los alumnos utilizan con frecuencia el diagrama cartesiano sin reflexionarlo por ello el Gráfico que antecede puede parecer trivial pero guarda la intención de poner énfasis en que cada ordenada significa exactamente eso: la abscisa al cuadrado pero no sólo decirlo sino dibujarlo. Y además agregar en la representación gráfica la escritura simbólica para reconocer que cada ordenada f(x) es igual a x^2.



En el 2º Gráfico se comparan dos parábolas $y = x^2$ con $y = ax^2$. Es decir la parábola $y = x^2$ puede ser multiplicada por un número "a", en ese caso la parábola se dice que se "cierra" o se "abre", según los valores que tome "a". Es aconsejable que el lector se encargue de buscar cómo son esos valores que puede tomar el coeficiente cuadrático.

En el 3º Gráfico se le ha sumado un valor "c" a la parábola, se obtiene: $y = ax^2 + c$. Análogamente a lo anterior es conveniente estudiar qué ocurre con los posibles valores de "c". La distancia, medida perpendicularmente al eje x, entre las dos parábolas es c.

[18] Se sugiere consultar Tapia. *Matemática IV* (págs. 237 – 242).



Pasaje de la forma polinómica a la canónica o polar o normal

En algunos cursos interesa otra forma de expresión denominada usualmente normal y es la siguiente: Polinómica: $y = ax^2 + bx + c$; Normal: $y = a (x - \alpha)^2 + \beta$

A continuación vamos a buscar la relación entre las constantes de una y otra expresión. Desarrollamos la ec. normal (su modelo) e intentamos observar cómo es reorganizado como un polinomio de tres términos:

$y = a (x - \alpha)^2 + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$

entonces: $b = -2a\alpha$, por tanto $\alpha = - b / 2.a$, $c = a\alpha^2 + \beta$, por tanto $\beta = c - a\alpha^2 = c - a (-b / 2.a)^2 = (4ac - b^2) / 4.a = -(b^2 - 4ac) / 4.a$

¿Para qué nos puede servir a nosotros que estamos estudiando la parábola, y aprendiendo a representar gráficamente funciones la expresión en forma normal?

Si en la expresión normal consideramos $x = \alpha$ resulta $y = \beta$, pero además $x = \alpha$ es el eje de simetría de la parábola. Observar que cuando $x = \alpha$ se anula el término cuadrático y es similar para $y = ax^2$ cuando $x = 0$ y esta última expresión indica el eje de simetría. Esto último hasta ahora no lo habíamos dicho, podemos agregar que el vértice de la parábola se encuentra en $(\alpha ; \beta)$, siendo <u>$\boldsymbol{\alpha = - b / 2a}$</u> expresión[19] que se va a corroborar cuando en el tema derivadas volvamos a estudiar el vértice bajo la idea de máximo o mínimo de una parábola.

<u>Ejemplo</u>: pasar de la forma polinómica a la normal y representar gráficamente, $y = 2x^2 -3x + 1$.

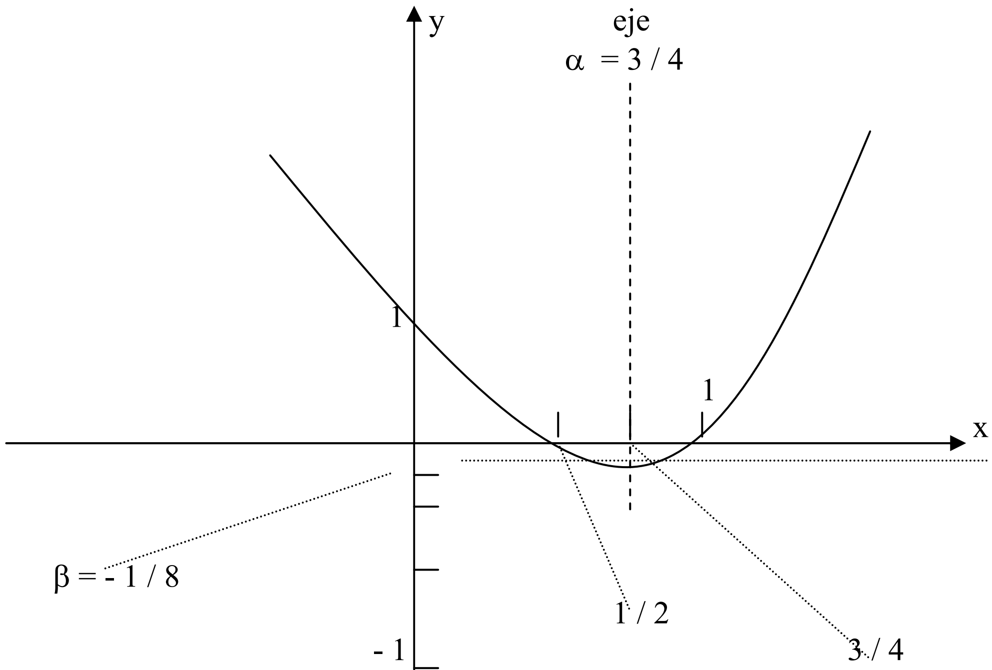
De lo anterior $\alpha = - b / 2.a$. En vez de calcular β por la fórmula, la que a veces uno no recuerda basta darle a $x = \alpha$ y el valor de ordenada que resulte es β.

$\alpha = -(-3 / 2.2) = 3 / 4$

$\beta = 2 .(3 / 4)^2 - 3 . (3 / 4) + 1 = 9 / 8 - 9 / 4 + 8 / 8 = - 1 / 8 = \beta$

Por lo tanto: $y = 2 (x - 3 / 4)^2 - 1 / 8$

[19] Ver en páginas anteriores.



Df = { R }; Codm o Im = [- 1 / 8; +∞)

Resolución de la ecuación polinómica de segundo grado

Nos falta calcular los puntos sobre el eje x denominados raíces donde y = 0. Para ello es necesario estudiar cómo poder hacerlo.

Se observa que cuando un alumno tiene información acerca de una fórmula que permite calcular esos valores denominados raíces de la parábola, manifiesta una disociación entre la fórmula y qué representa gráficamente o qué significa analíticamente, qué implica y = 0. Esto resulta del aprendizaje mecánico sin reflexión. Se sugiere mirar la expresión analítica general o la particular de un ejemplo y preguntarse qué indica "x" y qué señala "y". Cuando el polinomio se iguala a cero preguntar ¿por qué? "¿Tendrá algo que ver con las raíces, por qué?" ¿Para qué se obtiene la expresión de la normal? La expresión de la normal posee una sola x ¿es esto importante?

En el ítem "Deducción de la expresión analítica $y = a. x^2 + bx + c$", habíamos llegado a una expresión del tipo: $y + (b^2 - 4\ a\ c) / 4\ a = a\ (x + b / 2a)^2$, como y = 0 y pasando al primer miembro el factor "a" que multiplica al paréntesis, y luego el exponente 2 como raíz cuadrada resulta:

$[(b^2 - 4\ a\ c) / 4\ a^2]^{1/2} = x + b / 2a$, si ahora invertimos los miembros o sea:

pasando el 2º miembro al primero y este al segundo resulta:

$x + b / 2a =[(b^2 - 4\ a\ c) / 4\ a^2]^{1/2}$

extrayendo la raíz del numerador y del denominador, por ser raíz de un cociente

$x + b / 2a = (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a$, finalmente pasando el 2º término del primer miembro:

$\underline{x_{1,2} = - b / 2.a \pm (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a}$

que es la fórmula resolvente de la ecuación de 2º grado.

Se reitera, particularmente para el alumno principiante que ha egresado del sistema educativo preuniversitario, que la resolución de la ecuación anterior posee dos valores solución x_1 y x_2 dado que la raíz cuadrada posee dos soluciones. Muy especialmente se le recomienda que observe que esta fórmula se ha estudiado y deducido porque resulta imposible despejar x de la expresión: $a.\ x^2 + bx + c = 0$, *hay dos términos que contienen a x y un 3º no. Entonces no es factible factorear ese polinomio y por ello se recurre a la deducción anterior, que es la fórmula resolvente de la ecuación de 2º grado.*

Haciendo más explícitas las expresiones de las dos raíces se tiene:

$x_1 = - b / 2a + (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a$

$x_2 = - b / 2a - (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a$

Carácter de las raíces

El carácter de las raíces está determinado por el valor que tome la expresión subradical, el radicando de la raíz, que aparece en las dos expresiones anteriores. A este se denomina discriminante y se indica con la letra delta mayúscula:

$\Delta = b^2 - 4\ a\ c;$

como las raíces están dadas por la expresión:

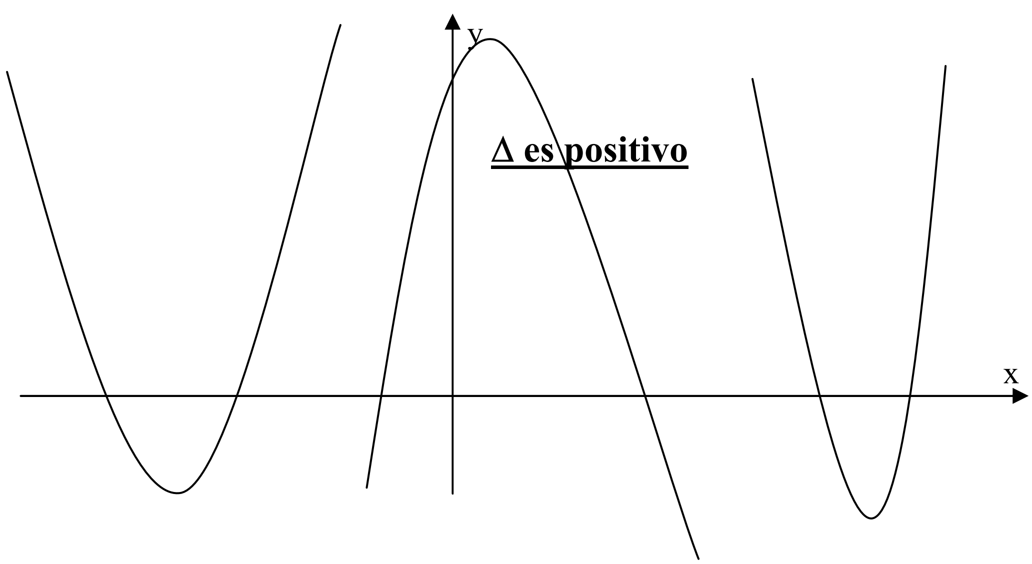
$x_1 = - b / 2a + (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a$

$x_2 = - b / 2a - (b^2 - 4\ a\ c)^{1/2} / 2a$

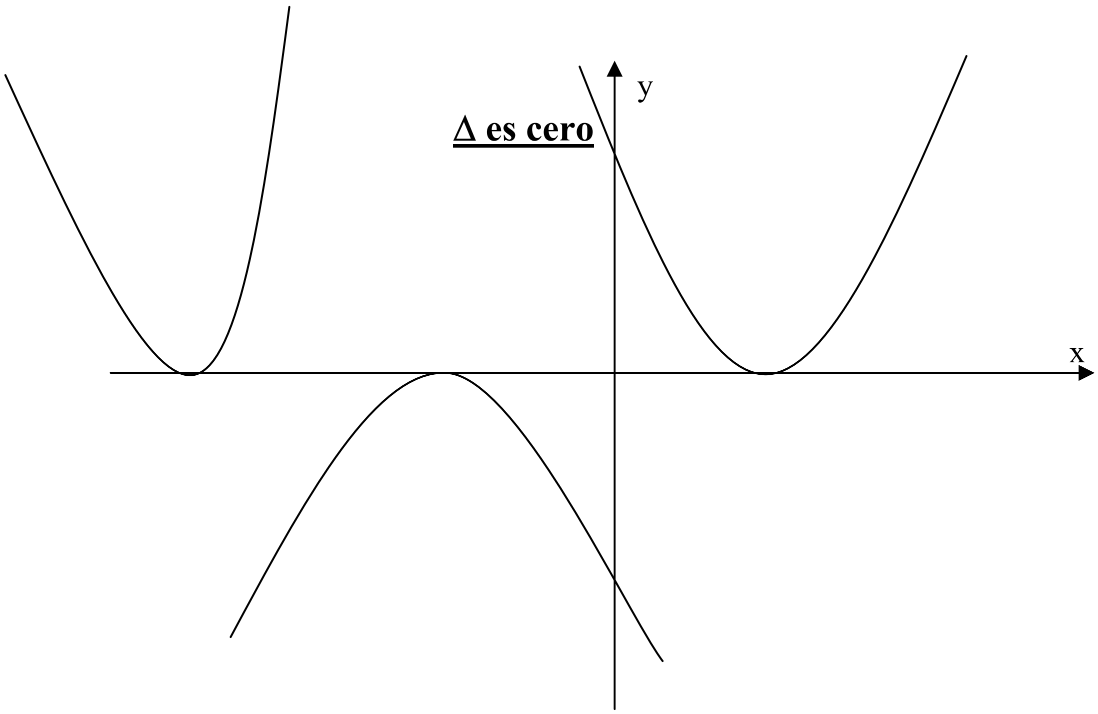
se presentan tres casos:

Si Δ es positivo las dos raíces son reales y distintas, pues podemos tomar el signo (+) o el (–) en las expresiones anteriores.

En el primer Gráfico se observa que cuando Δ es positivo la curva corta al eje x en dos puntos. Estos pueden ser los dos positivos o los dos negativos o uno positivo y el otro negativo. La parábola puede ser con la concavidad hacia arriba o hacia abajo.

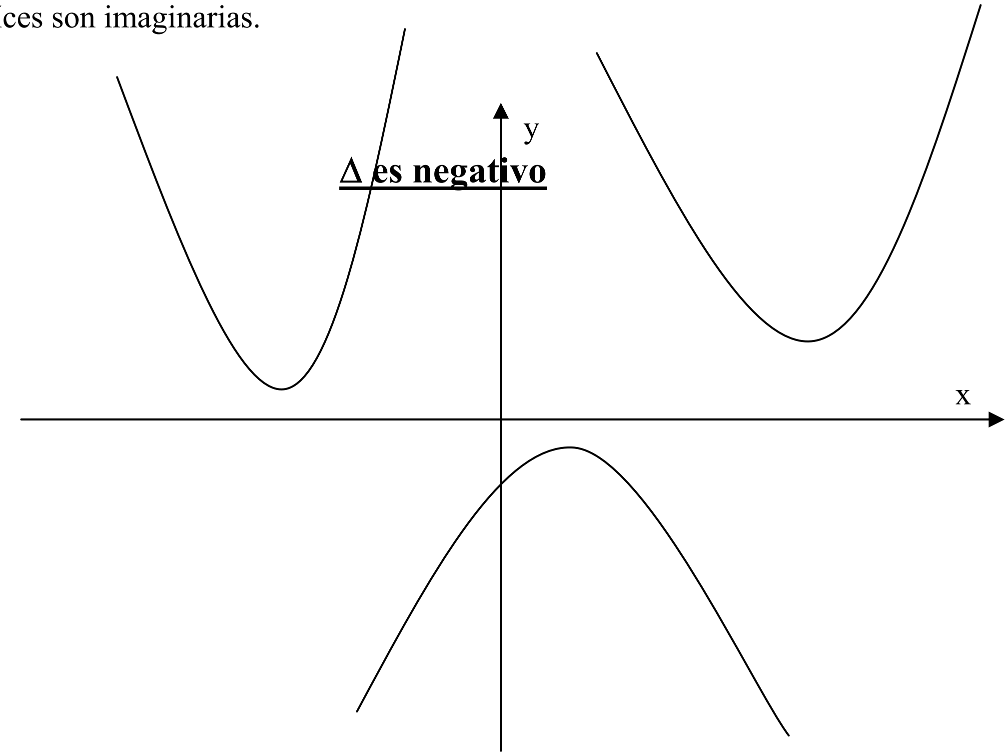


Si Δ es cero el doble signo no influye y la expresión resulta ser: $x_1 = x_2 = - b / 2.\ a.$ En este segundo Gráfico, como Δ es cero las parábolas cortan al eje x en un punto. Es decir las raíces son reales e iguales. Pueden ser negativas o positivas.



¿Para qué sirve lo que estamos haciendo? Cuando se tiene la expresión cuadrática $y = a.\ x^2 + bx + c$, haciendo el cuadrado del coeficiente lineal b y restándole el producto 4ac, que no es otra cosa que obtener Δ, con este ya sabemos cómo son las raíces.

En este último Gráfico, como <u>Δ es negativo</u> las parábolas no cortan al eje x. Es decir las raíces son imaginarias.



Es conveniente visualizar, observar, el vínculo del Gráfico con el carácter de las raíces. Para ello se sugiere tomar dos o tres polinomios cuadráticos completos algunos e incompletos otros y representarlos gráficamente y luego cotejar los Gráficos con los discriminantes, los signos de a, el valor de c y calcular el vértice.

Ejemplo:

$y = (x – 2)(x - 1)$, es otra forma de expresar el polinomio con la ventaja que ahora se conocen los valores de las raíces. En este caso resulta:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$. También se puede expresar en la forma polinómica tradicional:

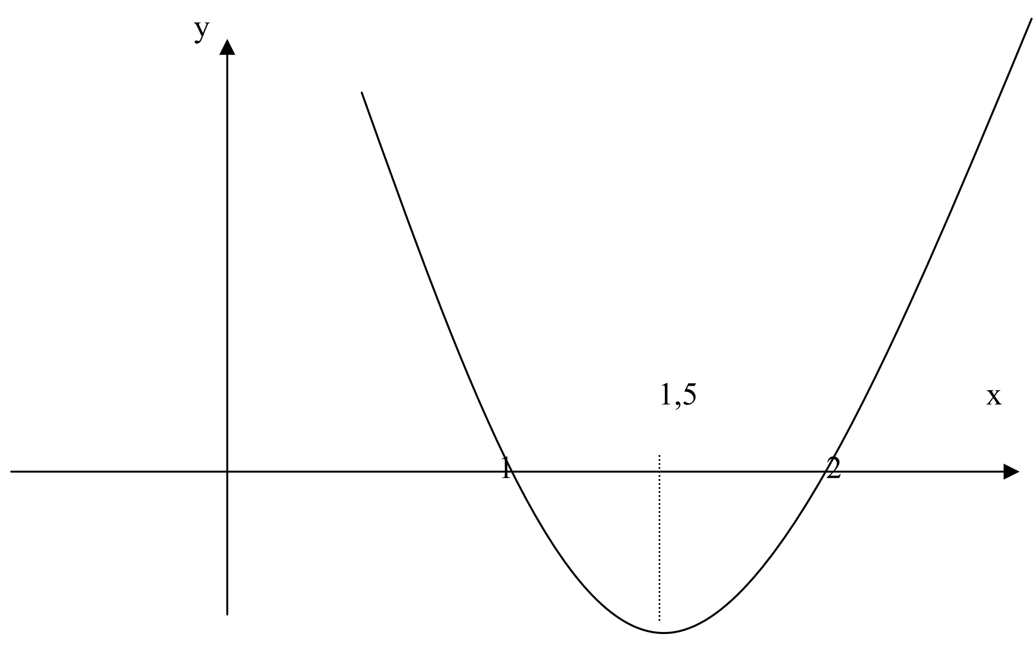
$y = x^2 - 3x + 2$

Calculamos el discriminante: $\Delta = (-3)^2 – 4 . 1 . 2 = 9 – 8$, luego habrá dos raíces reales y distintas.

Ya sabíamos cuando vimos la expresión como producto de $(x - x_1).(x - x_2)$ que había dos raíces distintas. Como a es positivo sabemos que la concavidad es hacia arriba. Podemos calcular la abscisa del vértice:

$x_v = - b / 2a = 3/ 2 = 1,5$

Además el vértice está "en el medio de las dos raíces", es decir es la semisuma de esos dos valores: $x_v = (x_1 + x_2) / 2 = (2 + 1) / 2 = 1,5$



Funciones Trascendentes

Resumen

Introducción. Definición de logaritmo. Propiedades de la logaritmación. Ejemplo: pH de una solución. Logaritmos decimales y neperianos o naturales. Función Logarítmica. Representación gráfica. Función exponencial. Las funciones a^x, $-a^x$, a^{-x}, $-a^{-x}$. Las Funciones $y = a^x$, e $y = \log_b x$. Funciones Trigonométricas: seno, coseno y tangente.

Introducción

Para distinguir a las funciones logarítmica, exponencial y trigonométricas, y a determinadas combinaciones de estas, se da el nombre de funciones trascendentes[20].

La primera función que se considera es la función logarítmica. Para llegar a este concepto es necesario conocer antes qué es logaritmo de un número. Es decir cuál es la definición de logaritmo. Puede ser también útil una breve reseña histórica[21] del logaritmo, ¿cómo surgió?, ¿cuáles eran las necesidades? Los banqueros escoceses deseaban saber el número de años: t, a que debían colocar un capital C_0 para obtener un capital acumulado C. Es decir $C_0 . k^t = C$ El problema se reducía a **estudiar un número** (del griego logos: estudio y arithmo: número) o "logaritmo" al que había que elevar una base de potencia para calcular un segundo número. Es decir el logaritmo es un exponente c (en lo mencionado más arriba lo indicamos por t) al que se eleva una base b para obtener un número a.

De la definición de logaritmo como exponente, tal como se da en Álgebra, se deduce que si

$y = \log_b x$, es $x = b^y$

La expresión b^y en que b es constante e y variable se define como función exponencial de y. Según la definición de función inversa, se ve inmediatamente que las funciones logarítmica y exponencial son funciones inversas una de la otra.

El Capítulo concluye con las funciones trigonométricas pero, solo tres de ellas: el seno, el coseno y la tangente. Acerca de las mismas interesa señalar primero las definiciones, luego alguna de las relaciones fundamentales y finalmente las gráficas.

Definición de logaritmo

Se llama logaritmo en base *b* de un número a otro número *c*, tal que, *b* elevado a la *c* sea igual a *a*.

En símbolos:

$\log_b a = c$, si se cumple que: $b^y = a$

Entonces el logaritmo es un exponente de una potencia de base igual a la base del logaritmo.

---

[20] Thompson, J.E. *Cálculo Infinitesimal.*

[21] Babini, J. y Rey Pastor, J.; Collette, J-P (Ver Notas)

Ejemplo: pH de una solución

Vamos por un instante al campo de la química y consideremos el tema pH de una solución. Este es un indicador de la acidez o basicidad (alcalinidad) de una solución. Cuando digo pH bajo es muy ácida, por ejemplo pH = 2,5 es una solución ácida. Pero ¿qué es pH? Es el exponente (cambiado de signo) al que hay que elevar 10 para obtener la concentración de ión Hidrógeno. Es decir da una idea de la acidez que no es otra cosa que "la cantidad de *Hidrógeno*" que hay. Entonces pH es igual:

$pH = -\log [H^+]$ si se cumple que $10^{-pH} = [H^+]$, bastaría sustituir b = 10, $a = [H^+]$ y c = pH, para comprender que se ha aplicado o utilizado la definición de logaritmo para comprender o expresar o elaborar una expresión matemática para operar con un concepto de la química general.

A la matemática como disciplina no le interesa, no forma parte de su epistemología, la historia, con sus anécdotas, con su realidad social de cada época, ni tampoco las utilizaciones que otras ciencias utilizan para su desarrollo. Pero a la enseñanza de la matemática y singularmente en los cursos de no-matemáticos y niveles elementales sí le interesa. Por ello estas referencias que contextualizan históricamente y estas aplicaciones en una ciencia fáctica como la química. Por ello, se ha considerado para facilitar la comprensión <u>lo histórico</u> y <u>lo interdisciplinar</u>.

Propiedades de la logaritmación

El logaritmo de un número negativo no siempre es posible, el logaritmo de cero es imposible, ídem el logaritmo en base 1. De ahora en adelante nos ocuparemos de analizar las propiedades de los logaritmos de números positivos y base positiva distinta de 1.

a) La logaritmación es uniforme

$a = d \Rightarrow \log_b a = \log_b d$

b) Ley cancelativa

$\log_b a = \log_b d \Rightarrow a = d$

c) Logaritmo de un producto, de un cociente

$\log_b (a \, . \, d) = \log_b a + \log_b d$

$\log_b (a : d) = \log_b a - \log_b d$

d) Logaritmo de una potencia, una raíz

$\log_b (a^n) = n \, . \log_b a$

$\log_b (a^{1/n}) = (1/n) \, . \log_b a$

e) Propiedad no distributiva

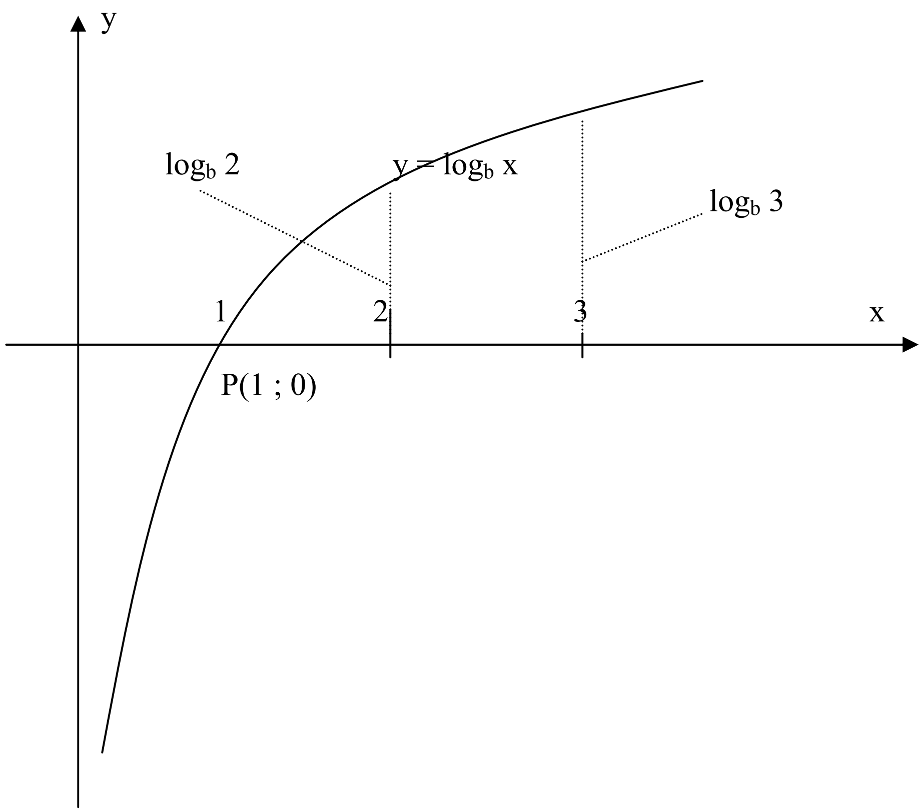
La logaritmación no es distributiva respecto a la suma o a la resta.

Logaritmos decimales y neperianos o naturales

Los logaritmos que más se utilizan son los decimales, de base diez y los neperianos (por Neper) o naturales de base e. Por lo tanto las funciones más empleadas son las que corresponden a logaritmos de esas dos bases.

Función Logarítmica. Representación gráfica

El estudio de esta función está vinculado al estudio de la función exponencial. Para ello consideraremos la definición de logaritmo para cada cálculo necesario de $y = \log_b x$. Si observamos su campo de variabilidad, por lo dicho anteriormente (… nos ocuparemos de analizar las propiedades de los logaritmos de números positivos y base positiva distinta de 1), nos daremos cuenta que su representación pertenece a los cuadrantes primero y cuarto, "sin tocar" el eje de ordenadas, luego veremos en el Capítulo de Límites que el eje y es una asíntota de la curva logarítmica $y = \log_b x$, ya que $x > 0$. Observar que dice mayor que cero y no mayor o igual.



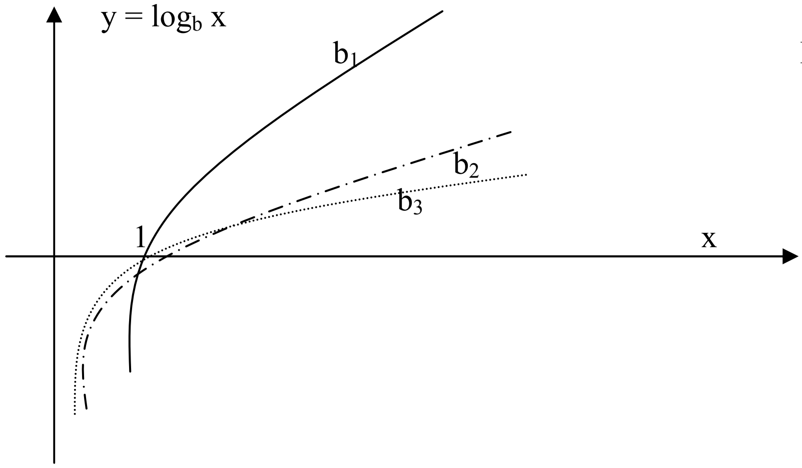
Además la función tiene una sola raíz, que coincide con todas las funciones logarítmicas cualquiera fuera su base, ya que:

$\log_b 1 = 0$, por ser $b^0 = 1$

Luego, la función logarítmica se anula cuando la variable independiente vale 1, y es una función siempre creciente, cualquiera sea el intervalo de su variable independiente. Es positiva para todo valor de la variable mayor que la unidad, y negativa para todo valor de la variable independiente menor que la unidad. En símbolos, para $y = \log_b x$:

$y > 0$ si $x > 1$; $y < 0$ si $x < 1$.

Tenemos que agregar que esto se cumple para todo valor de b (dijimos con b positivo distinto de 1). Es decir toda curva logarítmica pasa por P.

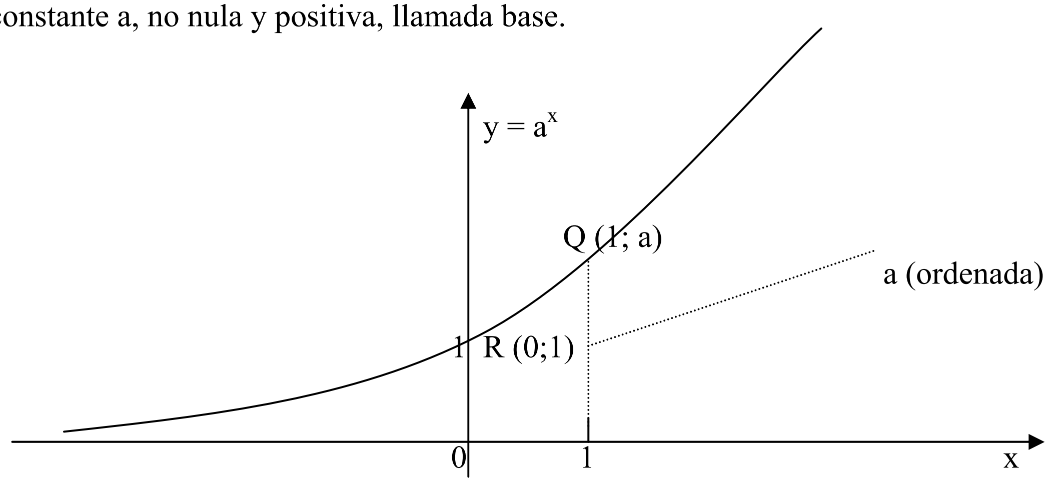


Son "curvas paramétricas". El parámetro es la base del logaritmo.

Función exponencial

Se llama función exponencial a toda expresión del tipo:

$y = f(x) = a^x$, donde la variable independiente x figura como exponente de una constante a, no nula y positiva, llamada base.



Dicha base ha de ser mayor que cero, para evitar, por ejemplo, que la función tome valores imaginarios, según el exponente a que esté afectada.

Por ejemplo si $a = -3$ resulta $y = (-3)^x$, y para $x = 1/2$, será: $y = (-3)^{1/2}$. La base a no podrá ser tampoco igual a la unidad, ya que esta elevada a cualquier exponente da siempre la unidad.

Luego se define $y = a^x$ como función exponencial, con la condición de ser: $a > 0$, y $a \neq 1$. Como x puede tomar cualquier valor, el intervalo de definición de la función es:

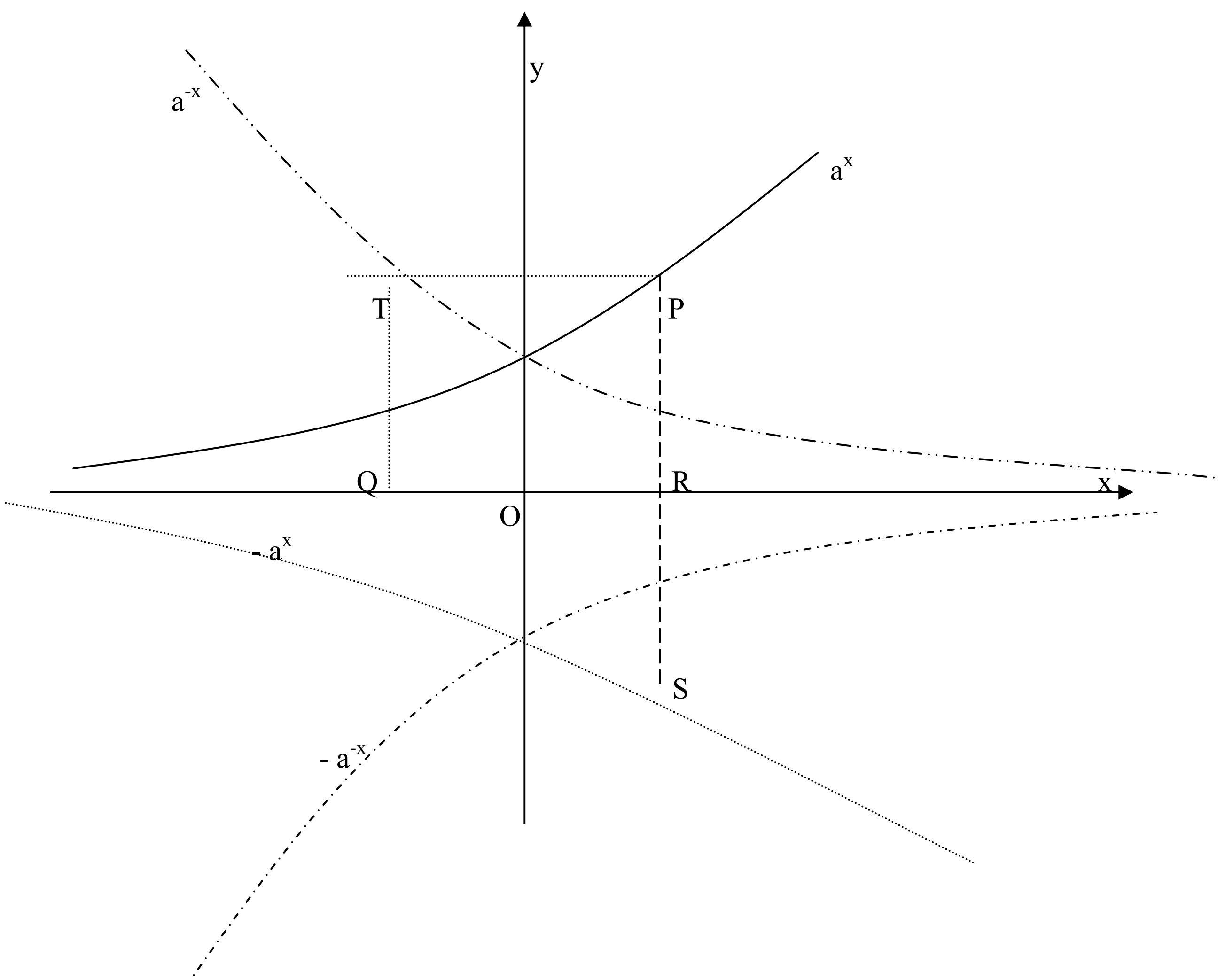
$-\infty < x < +\infty$.

Además cualquiera que fuera el valor asignado a la variable x, la función resulta positiva. O sea que $y > 0$ siempre. Luego, la curva representativa de esta función pertenece siempre al primer o segundo cuadrante. Además, la gráfica pasa siempre por dos puntos:

a) cuando $x = 0$, será $f(x) = a^x = a^0 = 1$, luego pasa por el punto R(0;1)
b) cuando $x = 1$, resulta $f(x) = a^x = a^1 = a$, luego la curva pasa por Q (1; a).

Es interesante observar las representaciones de las siguientes cuatro curvas en un mismo Gráfico:

Las Funciones a^x, $-a^x$, a^{-x}, $-a^{-x}$



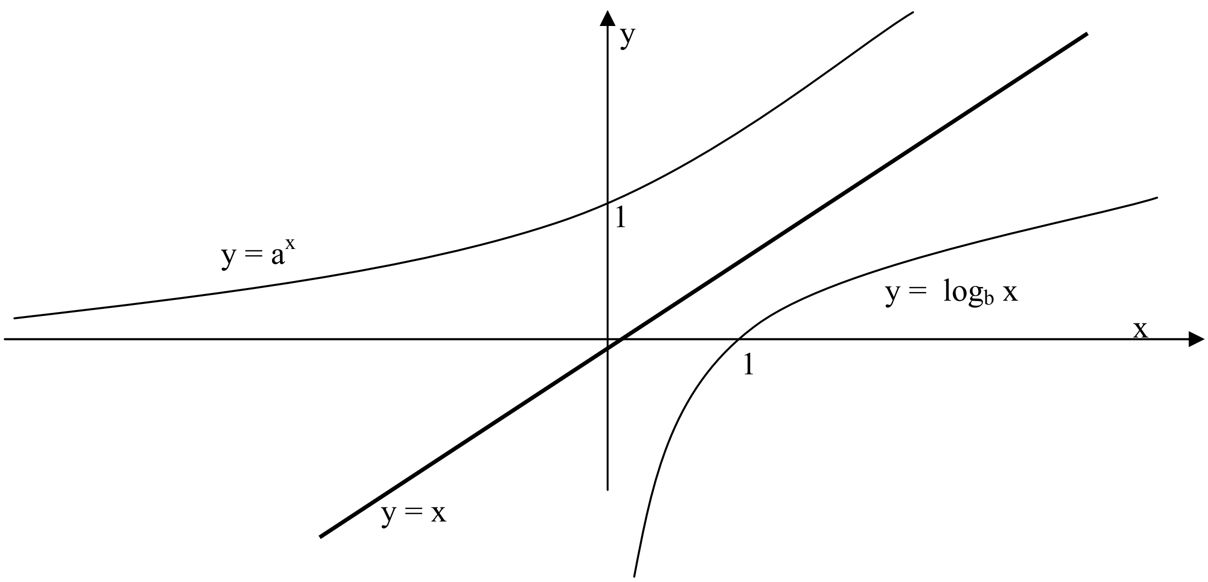
Observar que para las curvas $y = a^x$, e $y = -a^x$ resulta la siguiente relación entre las ordenadas: PR = - RS.

La relación entre $y = a^x$, e $y = a^{-x}$, indica que cuando la abscisa cambia de signo como QO = - OR, la ordenada es igual: QT = PR, estas dos curvas son simétricas respecto al eje y.

Se sugiere al lector, fundamentalmente al estudiante que hace sus "primeras armas" en el análisis matemático, que se formule diversos interrogantes acerca de las cuatro curvas, por ejemplo: dónde cortan las curvas a los ejes coordenados, sólo al eje de ordenadas, y como siempre justificando las respuestas: ¿por qué?

Se observa también que para dos curvas de las cuatro el semieje positivo de las x es la asíntota y para las otras dos el semieje negativo.

Las Funciones $y = a^x$, e $y = \log_b x$



Aunque en este texto no se ha mencionado la simetría de funciones, es dable observar que las dos funciones inversas dibujadas o representadas gráficamente más arriba son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Para la función exponencial se presenta una "asíntota" cuando "x tiende a $(-\infty)$" es decir el semieje para las abscisas negativas, análogamente la curva logarítmica posee un semieje asintótico para las "y negativas".

Algunos problemas que suelen plantearse en economía, o simplemente en cursos de matemática están asociados con el crecimiento con una tasa de un porcentaje determinado sobre una cantidad inicial.

<u>Por ejemplo:</u>

Es interesante observar cómo puede generarse la función exponencial. Si una cierta cantidad inicial C_0, que puede ser un capital inicial, (0 también materialmente un V_0, volumen inicial o finalmente una población P_0 población inicial de individuos) sufre una transformación de carácter evolutivo, digamos crece, aumenta su valor con una tasa de crecimiento del 8% anual, entonces al cabo de un año se tendrá:

$C_1 = C_0 + \Delta C = C_0 + C_0 \,.\, 8\ \% = C_0 + C_0 \,.\, 0{,}08 = C_0\,(1 + 0{,}08) = C_0\ 1{,}08$

Análogamente se puede considerar para el 2º año:

$C_2 = C_1 + \Delta C = C_1 + C_1.\ 8\ \% = C_1 + C_1.\ 0{,}08 = C_1\ (1 + 0{,}08) = 1{,}08\ \ C_1 = C_0\ 1{,}08\ .\ 1{,}08 = C_0\ 1{,}08^2$

Análogamente $C_3 = C_0\ .\ 1{,}08^3$

…………………………………………………………..

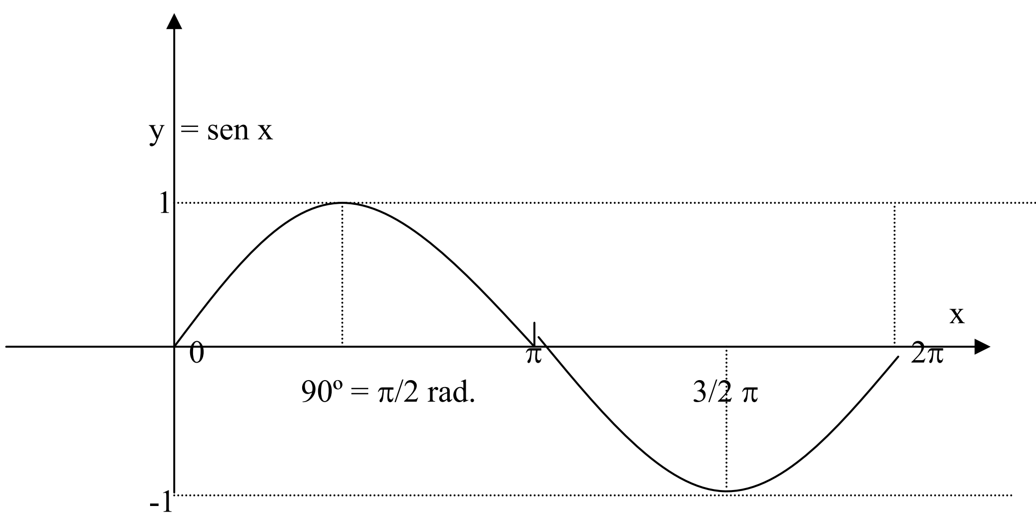
$C_n = C_0\ .\ 1{,}08^n$, luego la función exponencial será:

$\underline{\mathbf{y = k\ .\ a^x}}$

donde x indica la variable independiente, para nuestros casos analizados podría ser t: el tiempo, y indica el capital, o volumen material o número de individuos de población al cabo de un tiempo t, k es el valor de y inicial, es decir cuando t = 0 pues,
$y = k\ .\ a^0 = k$, se podría decir que $k = y_0$ es la ordenada al origen, y a para nuestro ejemplo es 1 más la tasa de crecimiento (en números decimales).

De modo que la expresión de la función exponencial se puede transformar en una ecuación cuando se conocen tres de las variables y se desea calcular la 4ª.

Funciones Trigonométricas: seno, coseno y tangente



La función sen x varía entre 1 y -1 y hemos considerado para x (el ángulo) desde 0 hasta 2π. Los valores que indicamos en este gráfico donde se representa y = sen x, x es el ángulo.

Es conveniente que el alumno verifique porqué ocurre esto, dibujando un diagrama cartesiano con y vs x siendo y el cateto opuesto de un triángulo rectángulo y x el cateto adyacente[22]*. Cuando α el ángulo respecto al cual se consideran los catetos (opuesto y*

[22] Ver definición en páginas anteriores en Capítulo I.

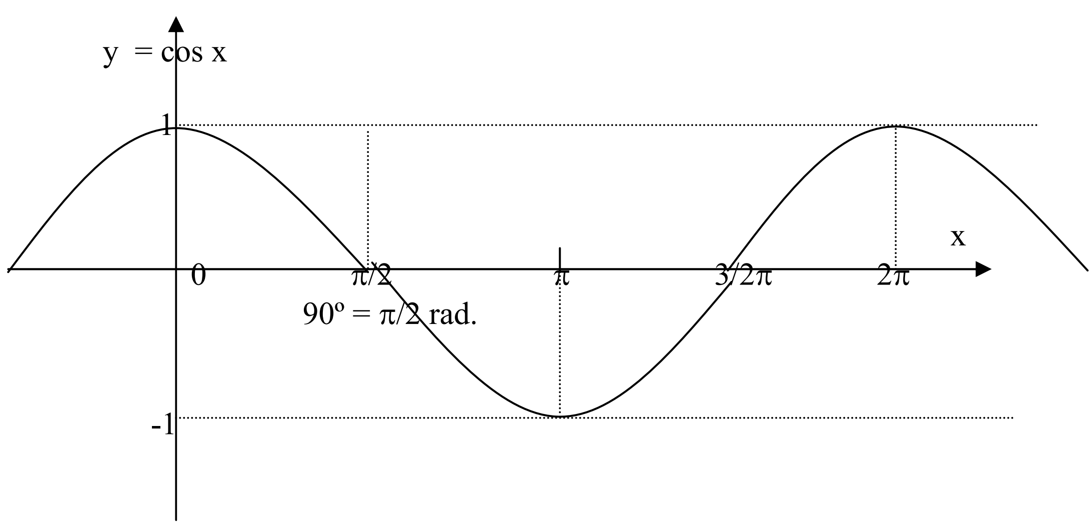
adyacente) va tomando distintos valores desde 0 hasta 2π, se observa que la ordenada y alcanza valores máximos para π/2, y 3/2 π así como para 0, π y 2π vale cero.

La función cos x también varía entre 1 y -1 y también hemos considerado para x (el ángulo) desde 0 hasta 2π. Los valores que indicamos en este Gráfico donde se representa y = cos x, x es el ángulo.

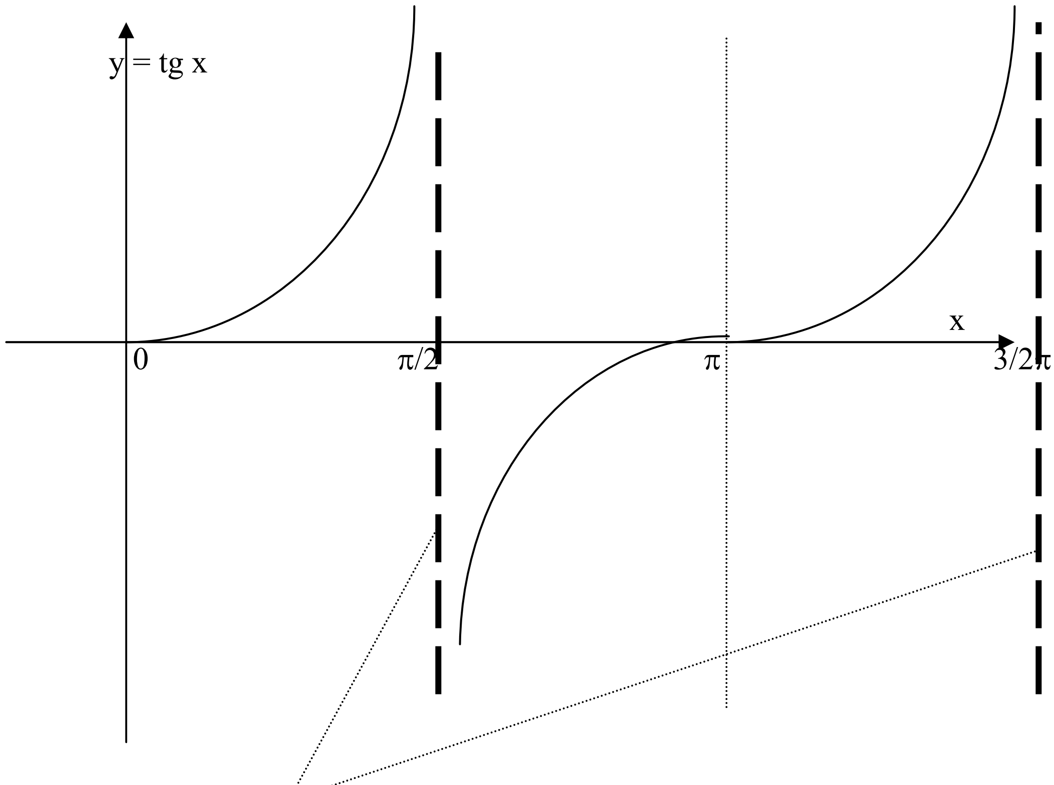
También es aconsejable que el alumno verifique porqué ocurre esto, dibujando un diagrama cartesiano con y vs x siendo y el cateto opuesto de un triángulo rectángulo y x el cateto adyacente. Cuando α el ángulo respecto al cual se consideran los catetos (opuesto y adyacente) va tomando distintos valores, en este caso cos α es x/r siendo r el radio vector o distancia del punto que gira alrededor del centro O describiendo los distintos ángulos.

El tercer gráfico es el de la tangente. En algunos cursos es clave esta función, y particularmente en este mismo curso para el Capítulo de derivadas. Ahí se utiliza mucho cuando se trabaja con la pendiente a una curva.

Se aconseja al estudiante que construya un Gráfico de tangente de un ángulo vs el ángulo, y luego represente la función tangente utilizando los valores de los Gráficos anteriores y cotejándolos con calculadora. Recordar que una de las relaciones fundamentales es tg α = sen α / cos α..



Para ello es conveniente que coloque un Gráfico debajo de otro y observe cómo para cada valor de x, el cociente sen x / cos x es igual a tg x.



Asíntotas verticales de la función tg x

¿Cómo estudiar Funciones?

En una primera lectura de todo el Capítulo intentar comprender, no preocuparse por recordar o por memorizar ni siquiera aprender, lo que significaría un esfuerzo importante. Reitero, dirigir el estudio a la **comprensión**.

Para la realización de esta tarea se puede recurrir a alguna de las estrategias tradicionales: con lápiz subrayar las palabras claves a juicio del alumno, producir notas en el margen del texto, cuando sea propio, y si no en algún cuaderno, elaborar preguntas y luego reflexionarlas, buscar ítems que estén vinculados con lo ya visto en la escuela.

Una segunda tarea puede referirse a buscar otros textos, no muchos, uno o dos y comparar con la presentación del tema en este texto y con las clases de los docentes. Comparar es: en qué época se escribió cada libro, en qué región, país o geografía, utiliza elementos extradisciplinarios (cada libro) para facilitar la comprensión o sea historia de la matemática, pedagogía, filosofía de la ciencia, (…).

Una tercera etapa del estudio la puede constituir la construcción de: resumen, síntesis, mapa conceptual (en algunas ingenierías se denomina “flow sheet”, para esto consultar una amplia Bibliografía y señalar en qué coinciden y cuáles son las diferencias de los autores. Indicar los aspectos comunes y marcar si los hay, los contradictorios.

Leer las sugerencias de reflexión que propone el texto y las lecturas de otros Capítulos.

CAPÍTULO III: LÍMITES

Resumen

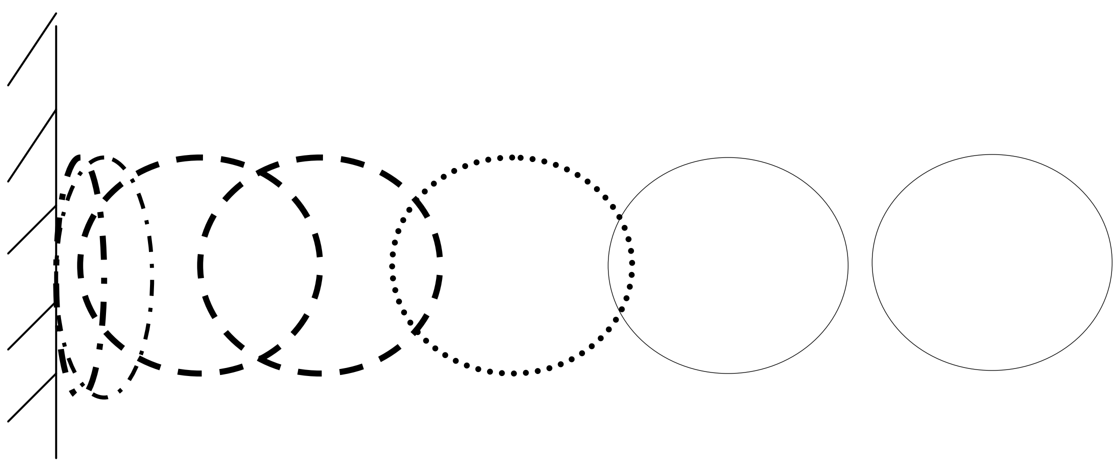
Introducción. Noción. Definición. Ejercicios que utilizan el concepto de límite. Cálculo de límites. Infinitos. Límites Infinitos. Definición. Límite finito cuando la variable independiente tiende a infinito. Ejercicios de límites cuando la variable tiende a infinito. Asíntotas. Continuidad.

Introducción

Noción

Para comenzar a desarrollar la idea matemática de límite se puede asociar transitoriamente con la concepción física de límite. Esto es: estudiar por analogía[23]. En física, límite puede significar que un cuerpo no puede ocupar un espacio o posición donde se encuentra otro, es decir donde hay otra porción de materia. Luego, cuando un cuerpo se acerca a una pared se puede aproximar mucho, incluso si "dejamos volar la imaginación" podemos pensar que ese trozo material que *se aproxima* puede hacerlo cada vez más en la medida que los espacios intermoleculares que existen entre las moléculas se pueden disminuir con suficiente presión; es decir, a través de la fantasía, se piensa un modelo de acercamiento de un cuerpo hasta otro *tanto como yo quiera*, aunque no más allá de la pared.

La idea matemática de límite <u>se sustenta sobre esa distancia</u> que se acorta entre la pared y el cuerpo, mesa, silla, (…).



Cuando nosotros definamos el límite matemático vamos a hablar de que esa distancia entre el límite y la variable que se estudia debe ser tan pequeña como se quiera. Como si yo dijese que esa distancia entre el cuerpo simbolizado por las distintas esferas y el perfil de la pared fuese cada vez menor, tanto que las dos esferas más próximas están cada vez más chatas. Matemáticamente diría tanto como yo quiera. La esfera se puede acercar mucho pero no puede hacerlo más allá de ese muro. Luego la pared es un límite

[23] Ver Apéndice "Las cuatro formas de pensar".

para esa mesa, o silla o nosotros mismos. Nos podemos acercar tanto como queramos pero no vamos a atravesar ese límite físico.

Definición

Se define al número l como límite de una función f(x) cuando la variable independiente x se acerca, o se aproxima o tiende a un valor definido b, si se cumple que: la diferencia en valor absoluto entre la función f(x) y el límite l, $| f(x) - l |$, se puede hacer tan pequeña como se quiera, con tal de tomar valores de x próximos a b, sin interesarnos lo que ocurre precisamente en el punto de la función para x = b.

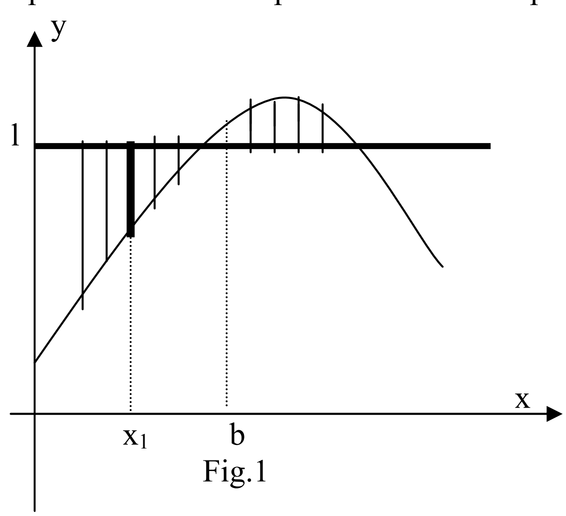


Fig.1

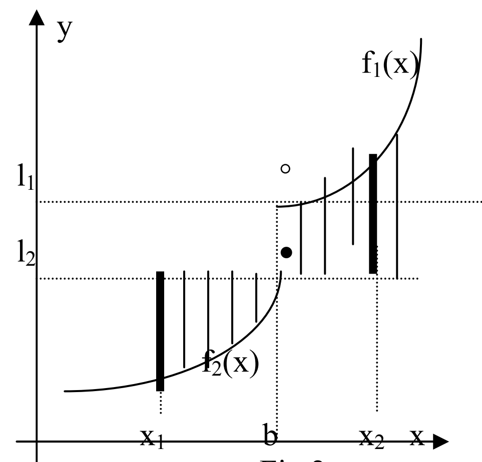


Fig.2

La definición anterior necesariamente debe analizarse para su comprensión y su posterior utilización. En principio hay límite si "la diferencia" se puede disminuir tanto como se quiera. Por ejemplo en la Fig.1 para un valor de x_1 es $f(x) - l$ de signo negativo. En realidad a los efectos del concepto de límite no interesa ese signo pero, sí interesa que esa diferencia (indicada con trazo grueso) pueda achicarse cuando uno se aproxima a x = b tanto por izquierda como por derecha. En este caso se observa que al ir desde x_1 a b desde la izquierda de x = b la diferencia va disminuyendo tanto como se quiera. Ocurre lo mismo cuando se va desde la derecha hacia b, la diferencia disminuye.

Si ahora se analiza la Fig.2, ¿cómo es esta f(x)? Nos ha sido dada gráficamente pero, cómo es su expresión analítica. En principio, observamos que posee dos ramas: $f_1(x)$ y $f_2(x)$ según sea $x > b$ o $x \leq b$ respectivamente. ¡Bien!, analicemos el límite de la función f(x) cuando x tiende a b. Repitamos que f(x) es:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x > b \\ f_2(x) \text{ si } x \leq b, \text{ es decir: } f(b) = l_2 \end{cases}$$

Consideremos el lím. f(x) cuando x tiende a b, suponemos que el límite es l_2, entonces al acercarnos desde x_1 la diferencia disminuye pero, cuando nos acercamos desde x_2 no ocurre lo mismo. Es decir la diferencia disminuye cuando nos acercamos a b desde x_2

pero, no logramos que se "achique" todo lo que nosotros queremos, porque al llegar a $x = b$ la diferencia entre $f(x)$ que es igual a $f_1(x)$ resulta que nunca es $| f(x) - l_2 | < l_1 - l_2$. Ese "salto" que posee la función en $x = b$ se traduce en no poder disminuir la diferencia de la función y el límite supuesto más allá de $l_1 - l_2$, y este razonamiento que hicimos para el supuesto de considerar al límite como $l_2 = f(b)$ se puede repetir si ahora suponemos que el límite es l_1. Luego en $x = b$ la $f(x)$ no tiene límite (en la función de la Figura 2). La Figura 2 constituye un "contraejemplo".

El tema suele ser muy complejo cuando se estudia por primera vez.

Estrategia nº1: En principio, puede ser útil considerar el tema desde tres lenguajes: el analítico (de las fórmulas o también lenguaje simbólico), el coloquial o de las palabras (buscando qué significa cada término que en un libro de matemática cuando se utiliza es porque previamente se ha definido o se ha indicado qué indica) y finalmente el lenguaje gráfico. En el esquema que sigue se señala todo esto que se ha dicho donde el primer Cuadro manifiesta la posibilidad de construir una tabla para comprender el concepto. Precisamente en esa Tabla se ha considerado la función: $x^2 + 1$, se desea estudiar el límite para x tendiendo a dos. Si nosotros reemplazamos en la expresión analítica obtenemos el valor de la función u ordenada $y = 5$, pero no es esto lo que se persigue, independientemente que puede ser el resultado del ejercicio, aquí se trata de comprender el concepto de límite. Podemos considerar que el

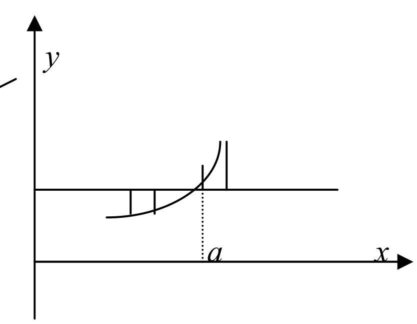
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5, \text{ es decir } l = 5.$$

Pero el ejercicio no concluyó, ahora se busca justificar, sustentar lo dicho anteriormente según la definición, es decir es 5 si se cumple que $f(x) - 5$ … y para eso se construye una Tabla que muestre cómo evoluciona esa diferencia. Se observa que la diferencia disminuye cuando uno se acerca por izquierda como por derecha.

x	2,2…………..2		1,999	1,99	1,9
$x^2 + 1$	5,84……..$l = 5$		……	….	…

Límite

Entorno, Entorno reducido punto de acumulación, diferencia límite-función



De modo que el estudiante no solo se aboca a aprender el objeto cognitivo matemático: límite, sino necesita saber cómo[24] comprenderlo. Aquí se han sugerido los tres lenguajes.

*Estrategia nº 2: Otro análisis interesante, que surge de las experiencias de las clases, refiere al por qué de **justificar el concepto** de límite a partir de una diferencia. Pareciera como algo nuevo, no visto antes, sin embargo no es así. Desde los años más*

[24] La pregunta que lleva un cómo se dirige a lo metacognitivo, es decir a una reflexión acerca de algo. Puede ser del aprendizaje, el metaprendizaje, o del conocimiento lo metacognitivo, …

tempranos cuando se aprende aritmética y luego con el álgebra y finalmente el análisis matemático se encuentran *<u>los invariantes</u>. Algo se mantiene, algo ya el estudiante sabe y es necesario rescatarlo. Necesitamos descubrirlo y para ello presentamos el siguiente Cuadro:*

Operación directa	*Operación indirecta*	*Si se cumple que:*
Suma	*Resta* $7 - 3 = 4$	$4 + 3 = 7$
Multiplicación	*División* $8 : 4 = 2$	$2 . 4 = 8$
Potenciación	*Radicación* $(36)^{1/2} = 6$	$6^2 = 36$
	Logaritmación $\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
--------------------------	*Límite* $\lim\limits_{x \text{ ----- } a} f(x) = l$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$ para todo x …..

Con la resta o diferencia no es tan frecuente a pesar que podemos decir que: 7 – 4 = 3 si se cumple que: 4 + 3 = 7. Pero, con la división que es también una operación que podríamos llamar indirecta como la anterior y también como el límite, se requiere de otra 2ª operación, decíamos con la división es totalmente aceptado que cuando uno divide está multiplicando, utiliza las tradicionales tablas de multiplicar para saber si es correcto el número que eligió como cociente y luego para obtener el resto, es decir cuánto quedó sin repartir, sin dividir. O sea 8 : 4 = 2 si se cumple que 4 . 2 = 8. Y esto se cumple con la raíz cuadrada de 36 que es 6 porque se cumple que 6 al cuadrado igual a 36 y también con el logaritmo porque la potencia posee dos operaciones opuestas: la radicación y el logaritmo. De modo que el límite de una función es l (cuando x tiende a b) si se cumple (igual que en la resta y la división) que la diferencia en valor absoluto se hace tan pequeña como se quiere.

Las anteriores son distintas estrategias para abordar el tema límites. Este texto pretende presentarle al lector diferentes presentaciones del ente en estudio y para ello se han consultado diferentes autores[25].

Ejercicios que utilizan el concepto de límite

Son cálculos que se proponen con el objetivo que el estudiante vincule el concepto de límite a partir de la gráfica de la función f(x) que se está estudiando. En otras situaciones se poseen como datos algunos límites de la función para distintos valores de la variable independiente, entonces se solicita que se dibuje aproximadamente la función o el conjunto de funciones que da solución al problema.

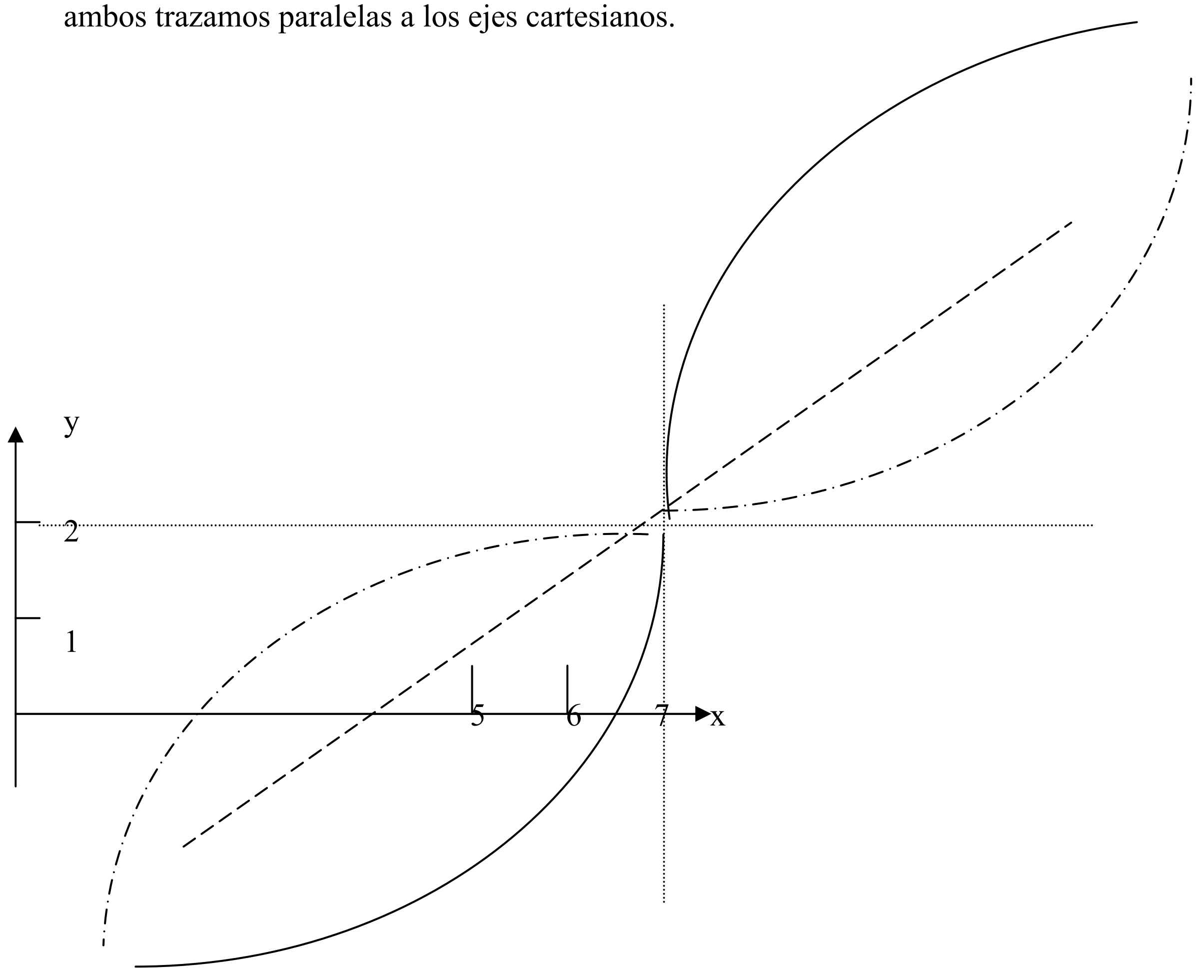
[25] Ayres, F. y otros

Ejemplo: Representar gráficamente en un diagrama cartesiano la función tal que:

$$f(x) \begin{cases} > 2 \text{ si } x > 7 \\ < 2 \text{ si } x < 7 \end{cases}$$

$\exists$ el $\text{lím}_7\, f(x)$

Siempre dibujamos los ejes cartesianos y comenzamos por marcar x = 7 e y = 2. Por ambos trazamos paralelas a los ejes cartesianos.



Se puede comenzar considerando que en x = 7 existe el límite, ¿esto qué significa? De acuerdo con la definición de límite debe ocurrir que para ese valor de x por derecha y por izquierda la función debe ser tal que $| f(x) – l | < \varepsilon$, que significa que sea tan pequeña como se quiera, siendo l el límite. Además hay dos definiciones acerca de la función, como dos ramas, entonces hacia la izquierda de x = 7 la función debe estar por debajo de y = 2 y a la derecha por arriba. Se puede pensar que el límite es 2, y en ese caso la diferencia mencionada debe ser tan pequeña como se quiera tanto por derecha como por izquierda. Cualquiera de las tres funciones que se dibujaron cumple con las restricciones indicadas.

Pero, hay dos cosas más: una, existen infinitas funciones que cumplen con los datos del problema aunque solo se indicaron tres, y otra, nada se dijo acerca de f(7) que puede valer dos o no, e incluso la función puede no estar definida para x = 7.

Estos ejercicios no son muy frecuentes en la literatura de la enseñanza del cálculo; sin embargo, son muy conceptuales en tanto y en cuanto permiten operar con el concepto. Es difícil el trabajo con el límite porque no es constructivo[26]*, y por lo tanto no existe una secuencia de pasos predeterminada que permita su cálculo, pero esto en sí mismo constituye su riqueza educativa. El trabajo con el límite es un verdadero desafío. Desde luego existen otros ejercicios de límites, estos sí más difundidos.*

Es aconsejable que en el ejercicio anterior el alumno, el lector, indique gráficamente con barras verticales, en el diagrama cartesiano, la diferencia entre la función y el límite para alguna de las funciones dibujadas para que facilite su comprensión el poder visualizar como se justifica que el lím f(x) = 2 para x tendiendo a 7.

Un segundo ejemplo lo vamos a ver luego de límites infinitos.

Cálculo de límites

Estos son los ejercicios tradicionales de toda la matemática. Se busca un resultado, un número, una solución.

a) $\lim_{x \to 1} \; (x^2 + 2) / (x - 2) = f(1) = 3$

Este límite es sencillo porque en ese punto la función es continua y por lo tanto el límite y la función son iguales, luego basta reemplazar el valor al que tiende x en la función y se resuelve el cálculo.

b) $\lim_5 \; (x^2 - 25) / (x^2 - 2x - 15)$

Aquí la función f(5) no coincide con el límite f(x) cuando x tiende a 5, porque la función no está determinada, por lo menos no se ha explicitado en el enunciado y podemos pensar que no está definida.

Si ahora reemplazamos en x el valor 5 resulta: 0 / 0. Si el numerador y el denominador se anulan para x = 5 es porque esta última es una raíz de ambos polinomios, entonces podemos dividirlos a los dos por x – 5 y obtenemos:

$(x - 5) . (x + 5) / (x - 5) . (x + 3) = (x + 5) / (x + 3)$;

ahora sí podemos calcular el límite cuando x tiende a cinco porque esta nueva función posee un valor definido para x = 5 que coincide con su límite:

$\lim_5 (x + 5) / (x + 3) = 10 / 8 = 5 / 4$

Se puede simplificar porque no nos interesa lo que ocurre en el punto donde analizamos el límite. Pero además tenemos lo siguiente:

Una 1ª función es: $f(x) = (x^2 - 25) / (x^2 - 2x - 15)$;

una 2ª función es: $g(x) = (x + 5) / (x + 3)$

Las dos funciones coinciden en todos sus puntos menos en x = 5. Para ese valor de x f no está definida y g sí y vale 5 / 4.

De acuerdo con las propiedades de los límites[27] "Si dos funciones *f(x)* y *g (x)* toman valores iguales en un entorno reducido de un punto de acumulación *x = a* y una de ellas tiene límite *l* en ese punto para x = a, la otra también tiene ese límite *l* en *a*."

---

[26] Ver en Notas de "Límite": Rojo, A. *Análisis Matemático I.*

[27] Repetto, C. (Prop.d/ Límites, pág.124).

Es esta propiedad la que nos permite decir cómo las dos funciones tienen el mismo límite y cómo para nuestra *f(x)* está indeterminado, entonces sustituimos una función por otra dado que ambas tienen el mismo límite.

> *Cuando se resuelve un ejercicio matemático y no se explicita el marco teórico que sostiene cada uno de los "pasos" necesarios para llegar a su resolución se está transformando la operación, el cálculo, en un simple mecanismo que antes que educar termina ridigizando o estructurando en demasía el pensamiento y perdiendo el carácter formativo que posee la disciplina para ser una mera información más.*

c) $\text{Lím}_4\ \sqrt{x} - 2 / x^2 - 16$; el símbolo $\sqrt{x}$ indica raíz cuadrada, o sea $(x)^{1/2}$. Para $x = 4$ el resultado inmediato es $0 / 0$. Es decir: la función no está definida, por lo menos no explícitamente para $x = 4$. Si logramos construir (algebraicamente, por ejemplo factoreando numerador y denominador) otra función que se encuentre definida para $x = 4$ y que tome los mismos valores en un entorno reducido de $x = 4$, entonces podremos calcular su límite.

Podemos razonar que si el numerador y el denominador se anulan para $x = 4$ es porque esta es una raíz de ambos. Luego se puede dividir los dos por $x - 4$. Vamos a ver si esto es cierto:

$\sqrt{x} - 2 / x^2 - 16 = \sqrt{x} - 2 / (x - 4) . (x + 4)$, aparentemente no se puede simplificar, por lo menos es lo que surge de la simple observación. Sin embargo, hay un factor que se podría todavía volver a descomponer o factorizar como diferencia de cuadrados: $x - 4 = (\sqrt{x} - 2) . (\sqrt{x} + 2)$. Entonces aquello que conjeturábamos a priori de dividir todo por $x - 4$ no resultó pero, sí factorizar por diferencia de cuadrados. Reemplazamos la última expresión en la anterior y tenemos:

$\sqrt{x} - 2 / x^2 - 16 = \sqrt{x} - 2 / (\sqrt{x} - 2) . (\sqrt{x} + 2) . (x + 4)$, ahora sí podemos simplificar el factor común $(\sqrt{x} - 2)$ por lo que:

$\sqrt{x} - 2 / x^2 - 16 = 1 / (\sqrt{x} + 2) . (x + 4) = 1 / 4. 8 = 1 / 32$

d) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - \sqrt{x} / \sqrt{(x - 1)} = \lim_1 x^2 - \sqrt{x} / \sqrt{(x - 1)} = 0 / 0$

Nuevamente será necesario recurrir al álgebra para intentar transformar la función que se tiene por otra donde se pueda simplificar el factor que anula numerador y denominador cuando $x = 1$. Hay una primera tentación de multiplicar por el mismo denominador a este y al numerador con la idea de simplificar la raíz del denominador. Y es correcto, se logra pero no se elimina el factor que anula a ambos de modo que el procedimiento no nos sirve.

Después de varios intentos probamos con el factor: $x^2 + \sqrt{x}$, esto se hace observando que en el numerador se encuentra una diferencia y si se multiplica por la suma de las mismas "bases" se obtiene una diferencia de cuadrados, o sea:

$x^2 - \sqrt{x} / \sqrt{(x - 1)} = (x^2 - \sqrt{x}) . (x^2 + \sqrt{x}) / \{\sqrt{(x - 1)}\}. (x^2 + \sqrt{x}) =$
$= x^4 - x / \{\sqrt{(x - 1)}\}. (x^2 + \sqrt{x})$, como todavía no hemos simplificado nada entre numerador y denominador sigue siendo $0 / 0$ para $x = 1$. Abajo ya tenemos separado el factor $x - 1$ elevado a un exponente fraccionario: $1 / 2$.

Entonces se busca separar ese mismo factor x – 1 del numerador. Para ello se divide el numerador por x – 1.

Haciendo cociente de polinomios, y antes extrayendo el factor común x:

$x^4 – x = x\ (x^3 – 1)$

$(x^3 – 1) / x – 1 = (x^2 + x + 1) . (x – 1)$, reemplazando en el numerador resulta:

$x^4 – x\ /\ \{\sqrt{\ }(x – 1)\} . (x^2 + \sqrt{x}) = (x^2 + x + 1) . \underline{(x – 1)}\ /\ \underline{(x – 1)}^{1/2} . (x^2 + \sqrt{x})$, simplificando los dos factores de base x – 1 resulta:

$(x^2 + x + 1) . (x – 1)^{1/2} / (x^2 + \sqrt{x})$, y ahora podemos sacar el límite:

$$\lim_1 x^2 – \sqrt{x} / \sqrt{\ }(x – 1) = \lim_1 (x^2 + x + 1) . (x – 1)^{1/2} / (x^2 + \sqrt{x}) = 0$$

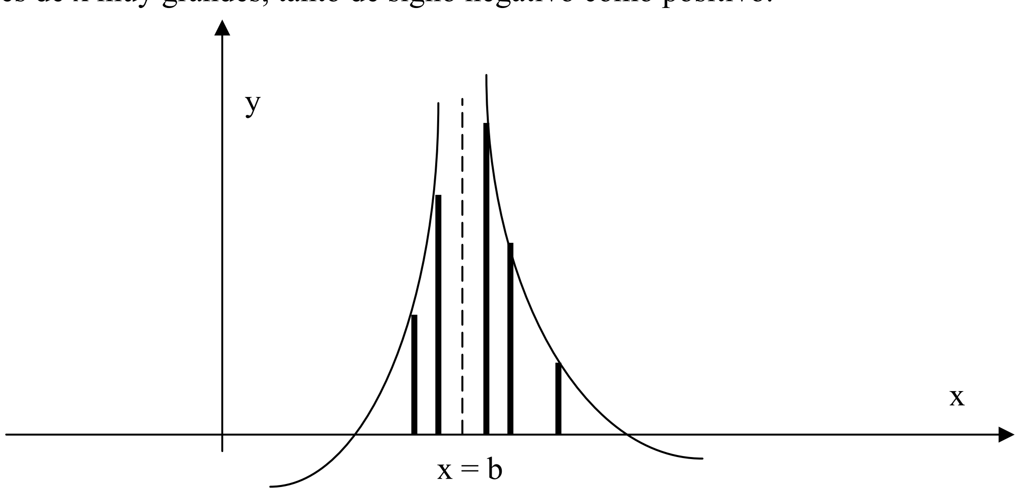
Es indudable que el estudio del cálculo de límites finitos requiere conocimiento del álgebra elemental: el conocimiento de cociente de potencias de la misma base, los exponentes fraccionarios, la división de polinomios, los casos de factoreo. Por ello el Capítulo de revisión se destinó a recuperar esos aspectos, e incluso sugerir al lector que tuviese algunas carencias consultara en otros autores esos entes elementales para ingresar luego al análisis matemático.

Infinitos

Infinito quiere decir sin fin. Su símbolo es ∞, "un ocho achatado". Refiere por ejemplo a un conjunto cuyo número de individuos es ilimitado. Precisamente ilimitado está asociado a no tener límite. Esta idea de infinito no refiere a un número, cuando uno dice los números naturales son infinitos no indica cuántos son sino que no conoce el último. Luego infinito es otra cosa distinta de la idea de número.

Límites Infinitos

La matemática amplía su concepción de límite para aquellos casos de funciones donde interesa estudiar cómo es el comportamiento de la misma cuando se consideran valores de x muy grandes, tanto de signo negativo como positivo.



Hasta aquí se hablaba de límites finitos, o sea, de valores numéricos concretos, constantes. Y esto había permitido sustentar ese concepto a partir de una diferencia en valor absoluto entre un límite finito a prueba y la función. Ahora se necesita otra idea. Consideremos el siguiente Gráfico:

La función presentada en la Figura anterior a partir de un Gráfico no está definida en el punto x = b. Si ahora se consideran valores de x por izquierda o sea x < b se observa por las ordenadas señaladas que estas cada vez toman valores más grandes con tal de estar próximos a x = b. Si ahora se toman valores de x > b y estos se consideran cada vez más próximos al punto en cuestión, nuevamente las ordenadas son cada vez mayores. Entonces se dice que la función puede hacerse tan grande como se quiera. Aquí ya no hay una diferencia en valor absoluto que se consideró para el concepto de límite finito.

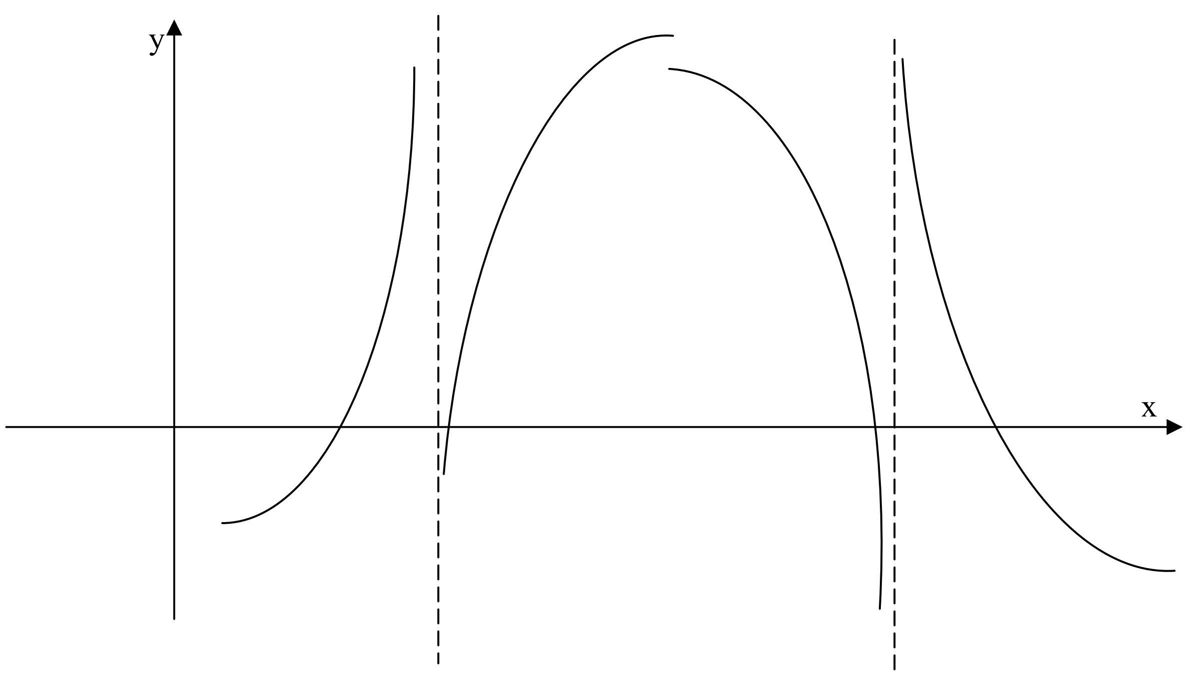
Definición

Una función tiene límite + ∞ o tiende a + ∞ en un punto de acumulación *b*, si dado un numero positivo *k* por grande que este sea los valores que determina la función superan a dicho número, con tal de considerar valores de *x* en un cierto entorno reducido de *b*.

En el lenguaje simbólico: $\text{lím}_b\ f(x) = \infty$ si para todo $k > 0$ es $f(x) > k$ en E'_b

E'_b : indica entorno reducido de b.

Algunas funciones poseen puntos donde el límite por izquierda es - ∞ y por derecha es + ∞, o al revés, pero digamos que son de signo distinto. Como en las Figuras que siguen:

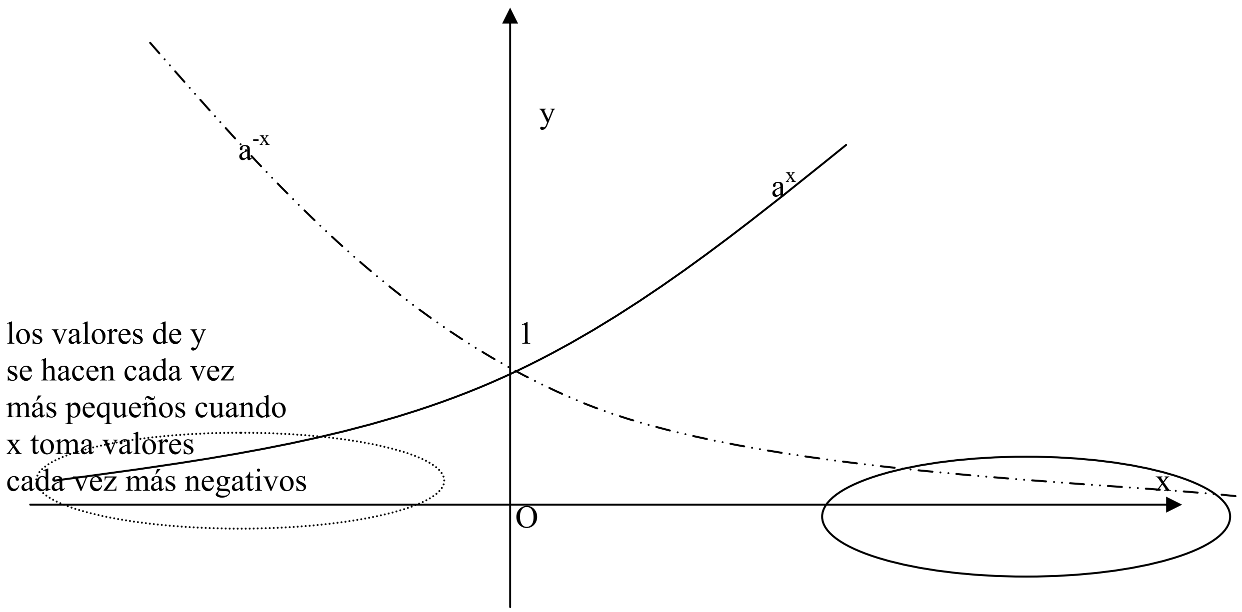


En algunos casos se indica que el límite es infinito prescindiendo del signo y tomando los valores absolutos que toma la función.

Los ejemplos numéricos se van a indicar más adelante cuando se estudien esas rectas verticales punteadas que reciben el nombre de asíntotas verticales.

Límite finito cuando la variable independiente tiende a infinito

La función exponencial es un claro ejemplo de este tipo de límite:



Si nosotros estudiamos el límite de la función exponencial, lím $_{-\infty}$ 2^x , construyendo una tabla y suponiendo que a = 2, es decir la base de la potencia, para facilitar los cálculos, ¿cómo son los límites de una y otra función para valores muy grandes de la variable independiente?, tendremos:

x	0	- 10	- 100	- 1000
$f(x) = 2^x$	1	$2^{-10} = 1 / 2^{10} = 0,\ldots\ldots\ldots$	$2^{-100} = 1 / 2^{100} = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$2^{-10\ 00} = 1 / 2^{10\ 00} = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Se observa que a medida que x toma valores cada vez más grandes en valor absoluto, y de signo negativo, como la potencia de este signo significa que “pasa” al denominador y por tanto se tiene un número cada vez más grande que divide y luego el cociente es cada vez más pequeño.

Para la otra función: a^{-x} con a = 2, resulta un cuadro análogo pero ahora cuando x toma valores positivos, el razonamiento es el mismo.

x	0	10	100	1000
$f(x) = 2^{-x}$	1	$2^{-10} = 1 / 2^{10} = 0,\ldots\ldots$	$2^{-100} = 1 / 2^{100} = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$2^{-10\ 00} = 1 / 2^{10\ 00} = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

En el primer caso de 2^x se dice que el semieje negativo de las abscisas es una recta asíntota (horizontal) de la función 2^x. El límite se expresa así:

lím f(x) = lím $_{-\infty}$ f(x) = lím f(x) cuando x tiende a $-\infty = 0$

$x \longrightarrow -\infty$

En el segundo caso de 2^{-x} la asíntota es el semieje positivo de las x. El límite también es cero:

lím f(x) = 0

$x \longrightarrow +\infty$

Ejercicios de límites cuando la variable tiende a infinito

Los ejercicios más difundidos en la literatura de la enseñanza de la matemática son aquellos que presentan funciones racionales del tipo P(x) / Q(x), es decir el cociente de dos polinomios en x. Es interesante que el estudiante busque cómo es el cálculo de los límites de estos polinomios que suelen indicarse como $P(x^m)$ y $Q(x^n)$ que indica que *P* y *Q* son polinomios en x de grado m y n respectivamente.

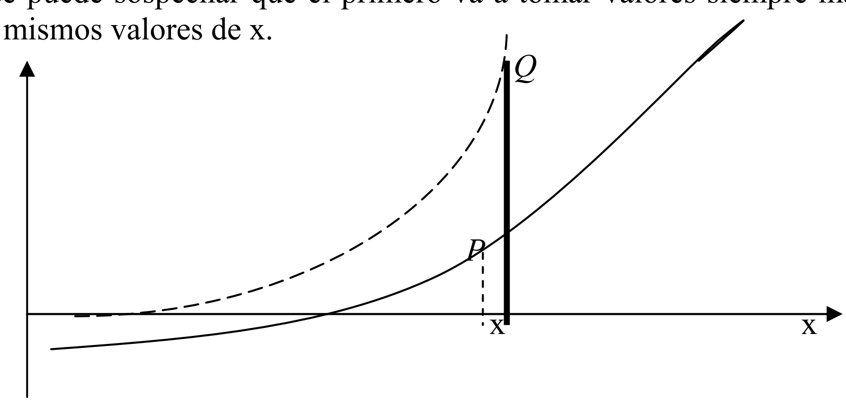
Frecuentemente el alumno aprende cómo son los procedimientos para resolver esos ejercicios, y eso no es hacer matemática. Esta no es un conjunto de reglas para utilizar mecánicamente, sino es un área del conocimiento para desarrollar el pensamiento y para esto último hay que descubrir antes que aplicar. Desde un texto es prácticamente imposible compartir un proceso educativo con el lector, a lo más se lo puede invitar a desarrollar estrategias y luego depende de los intereses de cada uno.

Ejemplo:

$\text{lím}_\infty f(x) = \text{lím}_\infty (3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x - 1) / (4x^6 - x^3 + 5x^2 + x - 7)$,

indudablemente cada polinomio va a tender a infinito cuando la variable x vaya tomando valores cada vez más grandes, entonces estamos ante una indeterminación del tipo ∞ / ∞.

Para estudiar este límite se puede pensar que el polinomio Q es de mayor grado que *P*. Luego se puede sospechar que el primero va a tomar valores siempre más grandes que *P*, para los mismos valores de x.



$x_Q > x_P$

Podemos elaborar una estrategia para eliminar la indeterminación recurriendo al álgebra:

Dividimos todo por algún monomio en x^m , x^n, o x^r, que por ahora estamos buscando.

Observar que el planteo del ejercicio no se reduce a seguir los pasos que el autor sabe de antemano porque ha realizado este ejercicio o similares desde hace muchos años, sino que está intentando mostrar posibles caminos para que el lector comprenda cómo resolver estos ejercicios e incluso si existen algunas reglas él solo pueda descubrirlas. Hubiese sido más fácil e incluso más reducido el camino si se exponía la solución más directamente pero esto se encuentra en gran cantidad de textos que ya están citados en la bibliografía.

Por ejemplo en el cociente anterior dividimos todo por x^r, con $r = 4$, y analizamos cada polinomio independientemente del otro:

$3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x - 1$ se transforma en: $3x + 2 - (3 / x^2) + (1/ x^3) - (1/ x^4)$

$4x^6 - x^3 + 5x^2 + x - 7$ se transforma en: $4x^2 - (1/x) + 5 / x^2 + (1 / x^3) - (7 / x^4)$

Observamos que aquellos monomios que tenían grado cuatro o mayor ahora (al ser divididos por x^4) están con un grado positivo o cero, y los que tenían grado menor a cuatro ahora tienen la variable x en el denominador. Analicemos cómo es el límite de uno y otro monomio, por ejemplo: $\lim_\infty 4x^2 = \infty$, $\lim_\infty (7 / x^4) = 0$

A nosotros nos interesa superar la indeterminación del límite; para ello hay que tratar que cada monomio tienda a algo finito. En el ejemplo anterior, al dividir cada polinomio (de cinco monomios) por x^4 se obtuvieron monomios que tienden a cero cuando x tiende a infinito, son todos aquellos que ahora poseen x en el denominador (son siete: tres en el numerador y cuatro en el denominador). Luego esos monomios ya no van a ser "responsables" de la indeterminación pero, todavía quedan aquellos que siguen tendiendo a infinito. Ahora, ¿esto por qué ocurrió?, porque nosotros implícitamente hipotetizamos que dividiendo por x^4 podíamos resolver el problema. Los tres monomios, después de dividir por x^4 quedaron $3x + 2$ y $4x^2$, estos tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

Bastaría ver entonces de lograr eliminar estos tres monomios y para ello habría que aumentar el grado del monomio que divide. Por ejemplo a x^6. En este caso resultaría:

$$\{(3 / x) + (2 / x^2) - (3 / x^4) + (1/ x^5) - (1/ x^6)\} / \{4 - (1/x^5) + (5 / x^4) + (1 / x^5) - (7 / x^6)\}$$

Hemos obtenido un cociente de dos polinomios donde de los diez términos solo uno no posee la variable x en el denominador, los otros nueve son de la forma $(1 / x^b)$, con b número natural. Cuando se toma límite con x tendiendo a infinito ese cociente $(1 / x^b)$ tiende a cero y solo queda el primer término del denominador 4. Luego el límite es:

$$\lim_\infty (3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x - 1) / (4x^6 - x^3 + 5x^2 + x - 7) = 0 / 4 = 0$$

La reflexión que se puede hacer es dividir siempre por la parte literal del monomio de mayor grado y luego ver qué monomios quedaron en cada polinomio[28].

<u>Caso a:</u> $P(x^m) / Q(x^n)$ si $n > m$ como vimos recién el límite es cero.

<u>Caso b:</u> $P(x^m) / Q(x^n)$ si $n < m$, entonces podríamos razonar que habrá monomios distintos de cero en el numerador y todos los monomios del denominador cero o sea $k / 0$, no es que el denominador vale cero porque ese cociente en matemática no tiene sentido pero sí tiende a cero o sea tomar valores muy, muy pequeños y por tanto el cociente tiende a tomar valores muy, muy grandes, luego el límite vale infinito.

[28] Pregunta: si se tiene un cociente de polinomios de grados distintos m y n. <u>La indeterminación</u>, ¿se puede resolver dividiendo por x^m y por x^n, y también por otra potencia de x de grado intermedio entre m y n?

Caso c:

$P(x^m) / Q(x^n)$ si n = m, en este caso queda un monomio en el denominador y otro en el numerador distintos de cero, luego el límite es finito y distinto de cero.

Ejemplo (n = m)

$\text{lím}_\infty\ (x^7 + 4x^3 - 12) / (8x^7 - 2x^5 + 3x^4 + 2x - 7)$, dividimos numerador y denominador por x^7.

$\text{lím}_\infty \{(x^7 + 4x^3 - 12) / x^7\} / \{(8x^7 - 2x^5 + 3x^4 + 2x - 7) / x^7\} =$

$\text{lím}_\infty \{1 + (4/x^4) - (12/x^7)\} / \{8 - (2/x^2) + (3/x^3) + (2/x^6) - (7/x^7)\} =$

$= 1/8$

Ejercicio:

$\text{Lím}_{-1}\ (x^2 + 2x + 2) / (x + 1)$;

Antes de resolverlo hagamos un chequeo de qué valores se obtienen cuando se reemplaza -1 en el numerador y el denominador. En el primero se obtiene: $(-1)^2\ -1.2\ + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$ o sea un número finito y el denominador cero. Pero este no es un valor que va a tomar sino un valor al que tiende, o sea, serán números cada vez más pequeños como ser $10^{-5} = 0,00001$, $10^{-8} = 0,00000001$, 10^{-10}, 10^{-20}, … ¿y qué pasa con esos valores tan pequeños en el denominador?, se convierten en 10^5, 10^8, 10^{10}, 10^{20}, o sea 100000, 100.000.000, etc. al pasar al numerador y números cada vez más grandes a medida que x tiende a – 1. Luego el límite del cociente de polinomios tiende a infinito.

$\text{Lím}_{-1}\ (x^2 + 2x + 2) / (x + 1) = \infty$

Asíntotas

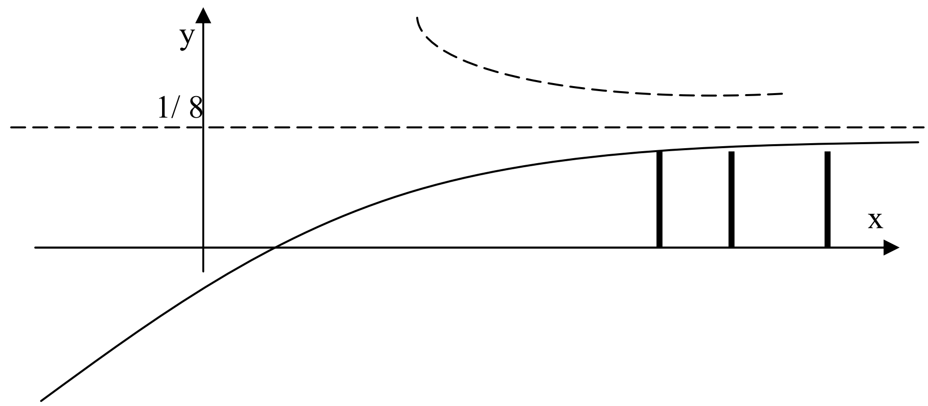
Cuando estudiamos las funciones exponenciales: a^x, $-a^x$, a^{-x}, $-a^{-x}$, en el Capítulo de funciones trascendentes y luego las volvimos a mencionar al estudiar límites finitos cuando la variable tiende a infinito, encontramos que en matemática se encuentran rectas que reciben el nombre de asíntotas de funciones f(x). ¿Qué son? ¿Para qué sirven? O, ¿cuándo se utilizan?

Cuando uno es estudiante y se le presenta un tema nuevo, por ejemplo: "Hoy vamos a ver asíntotas", dice un profesor en su clase, es difícil que el alumno se plantee preguntas con carácter interrogante hacia el conocimiento. En general las plantea a sus compañeros o al profesor y son demandas que se resumen en cómo entiendo esto, cómo hago para recordar, esto "entra" en el examen. En realidad a quien hay que interrogar, al único que debería interrogarse es: al conocimiento. Y esto presupone una posición ante el mismo. Pero, formularle cuestiones es abducir[29] y esto presupone una actitud de investigar, de descubrir, no de consumir conocimientos ajenos.

Las asíntotas son límites. Por ejemplo las asíntotas horizontales, como los semiejes positivo y negativo que señalábamos en Capítulos anteriores, como rectas a las cuales se acercaban las funciones exponenciales que estudiábamos en ese momento. Es decir, esas rectas que denominamos asíntotas horizontales se obtienen cuando calculamos los límites para la variable x tendiendo a infinito.

[29] Ver Apéndice "Las formas de pensar".

$\text{lím}_\infty f(x) = \text{lím}_\infty (x^7 + 4x^3 - 12) / (8x^7 - 2x^5 + 3x^4 + 2x - 7) = 1/8$ en este caso la f(x) que es el cociente de polinomios tiene una asíntota en $y = 1/8$.

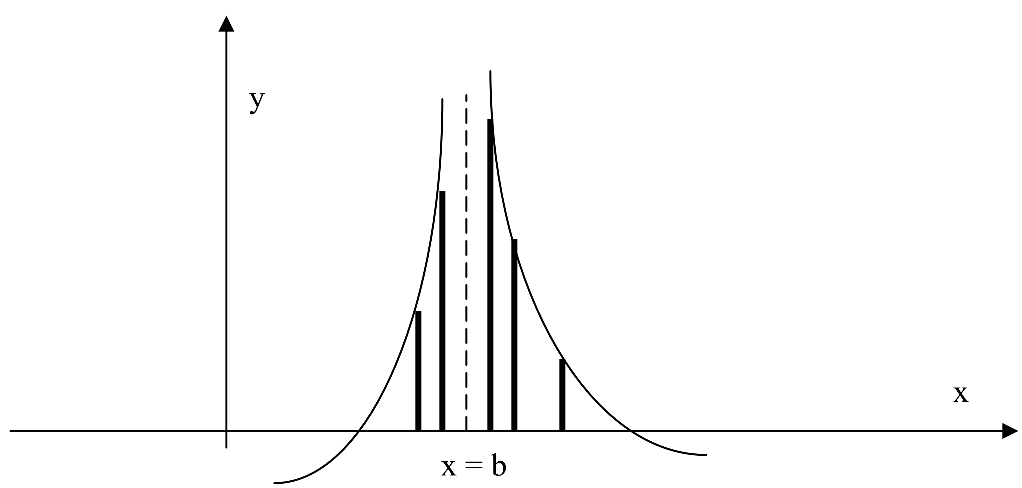


Es un ejemplo, no hemos estudiado cómo es en realidad la función pero sabemos que su límite cuando x tiende a infinito es 1/8 y por tanto significa que sus ordenadas para valores muy, muy grandes de x se van a acercar a 1/8. Podría ser cualquiera de las dos formas que hemos indicado (la de trazo lleno o la de trazo punteado).

<u>Asíntotas Verticales</u>

Cuando vimos límites infinitos vimos el Gráfico que sigue más abajo.

En él se dibujaba una recta perpendicular al eje x. En ese ítem interesaba señalar que la función puede tomar valores muy, muy grandes cuando se aproxima a un punto x = b, también indicábamos que entonces el concepto de límite debíamos ampliarlo. Ya no se trataba de considerar una diferencia en valor absoluto entre la función y el supuesto límite porque ahora la función se hacía precisamente ilimitada. Debíamos reconsiderar el concepto de límite y también incorporar una nueva idea, un nuevo ente: el infinito. Ahora a nosotros nos interesa poner énfasis en esa recta vertical a la cual se acerca la función cuando x se acerca a un valor b determinado. Repitamos ese Gráfico.

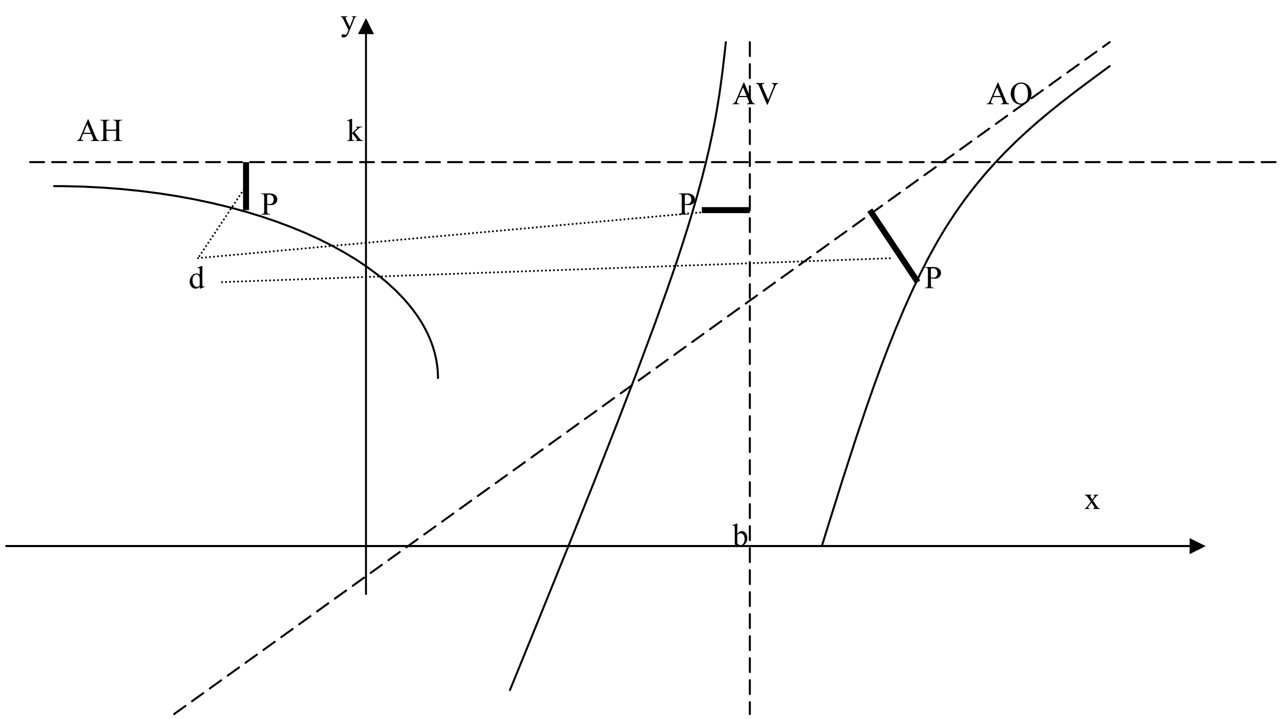


Simbólicamente: $\text{lím}_b\ f(x) = \infty$, ahora la expresión analítica de la recta es: $x = b$.
Se puede considerar una definición[30] de asíntota:

Dada o considerada una función $y = f(x)$, se llama asíntota r de esa función $f(x)$ si la distancia d (P, r), que significa la distancia *d* de cada punto *P* de la curva a la recta *r*, y además distancia se mide perpendicularmente a la recta, converge a cero al tender P a infinito sobre la curva. Se consideran tres tipos de asíntotas:

AH (horizontal): cuando el $\text{lím}_\infty\ f(x) = k$, la recta de ecuación $y = k$ se llama asíntota horizontal.

AV (vertical): si alguno de los límites por izquierda o por derecha[31], es infinito, entonces la recta de ecuación $x = b$ se llama asíntota vertical.



Asíntota oblicua: ver autores mencionados.

Ejemplo Resuelto:

Dibujar la gráfica de la función f(x) tal que:

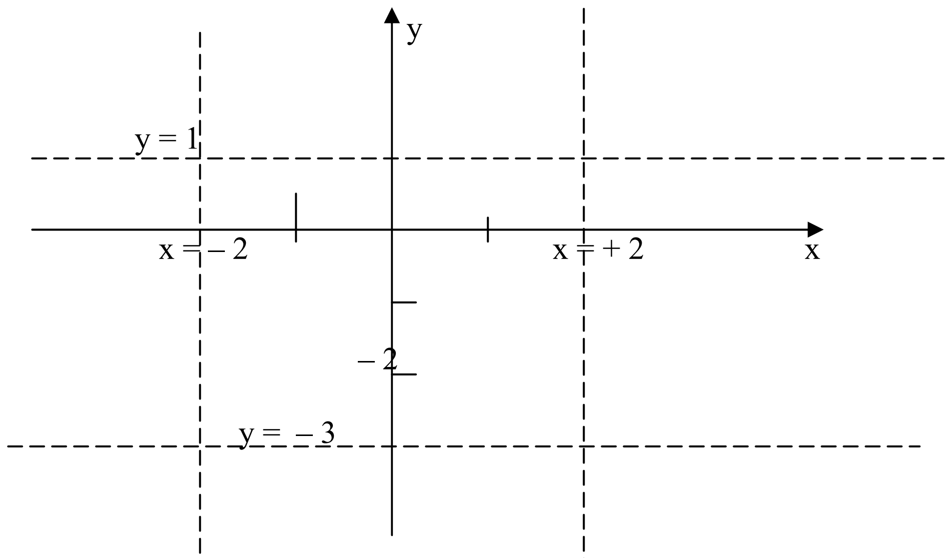
$$f(x)\begin{cases} \text{lím } f(x) = 1 \text{ ; para x tendiendo a } \infty \\ \text{lím } f(x) = -3 \text{ ; para x tendiendo a } -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \text{ ; para x tendiendo a } 2 \\ \text{lím } f(x) = +\infty \text{ ; para x tendiendo a } -2 \\ \text{lím } f(x) = 3 \text{ ; para x tendiendo a } 1 \end{cases}$$

---

[30] Rojo, A.

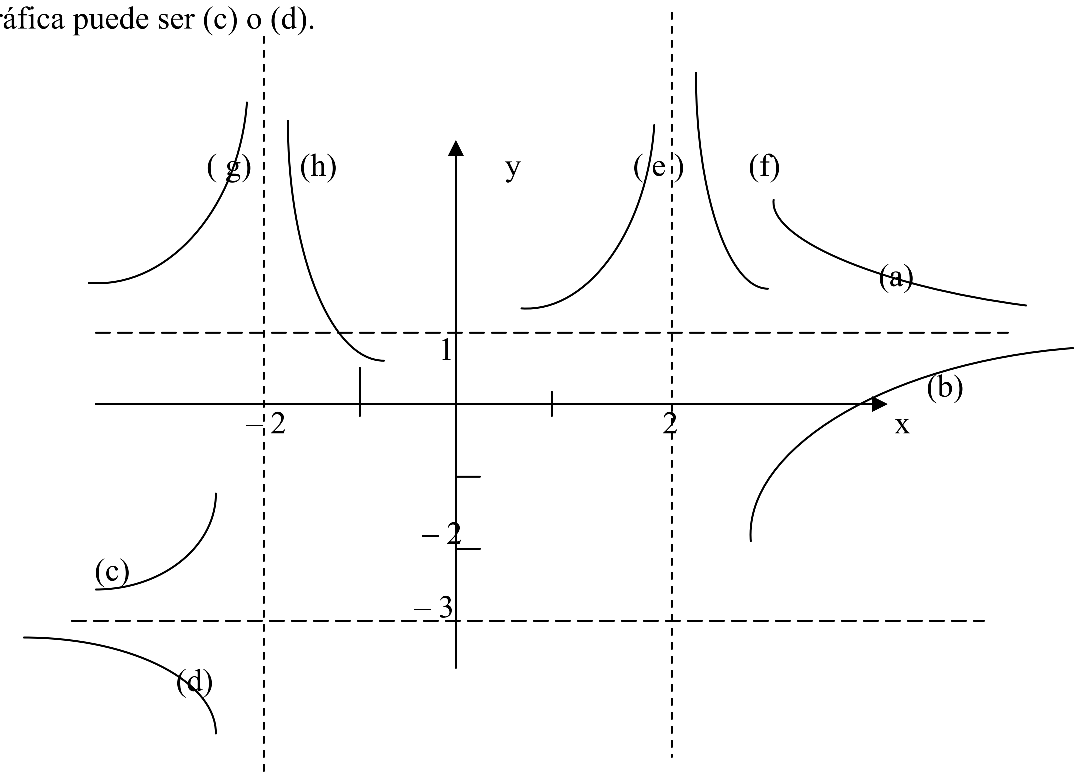
[31] Límites laterales, en este texto no se han mencionado hasta ahora pero son indicados por casi toda la literatura matemática.

Comenzamos el ejercicio interpretando parcialmente las cinco restricciones que debe cumplir f(x). Dibujamos las dos asíntotas horizontales donde x tiende a + infinito y – infinito: y = 1, y = – 3.

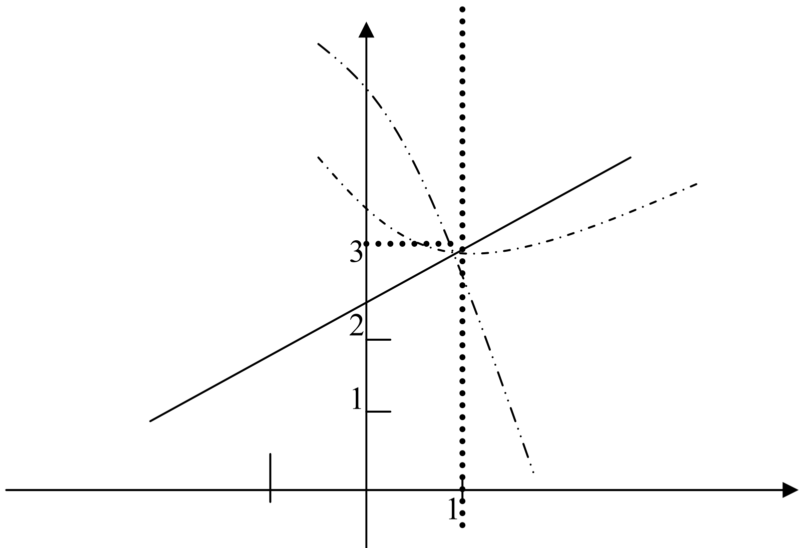


Luego dibujamos las dos asíntotas verticales: x = 2, x = – 2.

Ya podemos conjeturar cómo puede ser la función, en borrador. Repetimos el diagrama y vamos agregando las posibles curvas según las cuatro asíntotas que ya tenemos dibujadas. Por ejemplo según AH, y = 1 resultan (a) o (b) porque la f(x) tiende a 1 cuando x tiende a + ∞, análogamente cuando x tiende a – ∞ f(x) tiende a – 3, luego la representación gráfica puede ser (c) o (d).

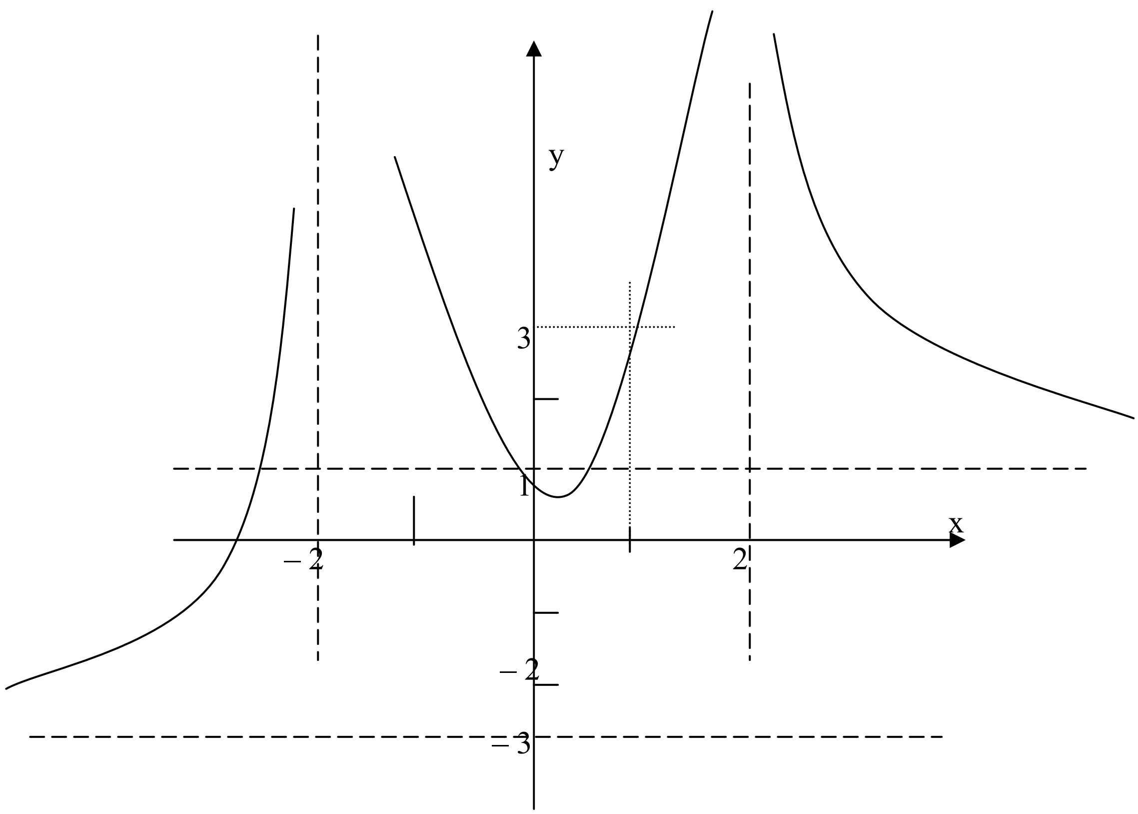


Ahora podemos dibujar las posibles gráficas que contemplen la restricción que sufre la f(x) según las AV (asíntotas verticales). Todavía nos falta considerar $\lim_1 f(x) = 3$



Es un límite finito, la función debe pasar por ese punto (1;3), no sabemos la forma ni la pendiente, pero pasa por ese punto. Cualquiera de las tres dibujadas puede ser.

Reunimos en un mismo Gráfico todos los borradores:



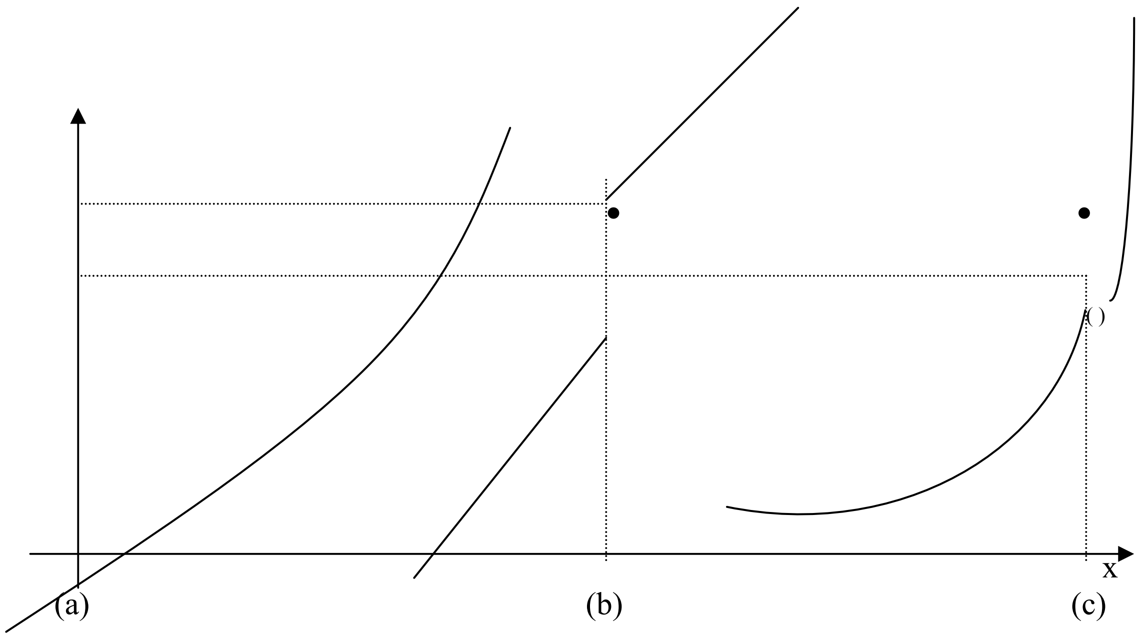
Analizamos ahora por intervalo, el 1º: $-\infty < x < -2$. Las curvas que habíamos dibujado eran las (g), (c), (d). Nos parece que la (d) no puede ser porque la curva para cumplir con la A.V o sea tiende a + infinito (en $x = -2$) debe ser la (g) y esta no la podemos unir con la (d) pero sí con la (c) porque una de estas últimas hay que dibujarlas para cumplir con la restricción de la AH.

El 2º intervalo es – 2 < x < + 2. Ahora se trata de unir las curvas (h) y (e). Las restricciones a cumplir están dadas por las AV en 2 y – 2 y el límite de x = 1. ¡Ojo! esta rama no es una parábola. ¿Puede cortar a la AH? Sí ¿Por qué? Porque es asíntota solo en x tendiendo a infinito.

Finalmente el 3º y último intervalo x > +2. Es un razonamiento análogo al 1º intervalo.

Continuidad[32]

Intuitivamente podríamos decir que si para cada valor de x del dominio, o del intervalo en general que se considere existe, está definida la imagen, el valor de la ordenada: la función es continua.



Se han indicado tres ejemplos de funciones continuas (a) para todo el intervalo señalado en el diagrama, discontinuas (b) y (c). Pero la discontinuidad es distinta en estas dos. En una hay un “salto” y en la otra: ¿falta la ordenada?, ¿no está definida para un punto del intervalo? Pero, ¿cómo lo podríamos expresar más precisamente?, porque se entiende, se comprende pero no está definido matemáticamente. Se recurre a dos entes matemáticos: **la función** y **el límite**.

Para que sea continua debe existir la función en todos los puntos, y también debe existir el límite. En (b) hay un punto donde no hay límite pero la función está definida, o sea si no existe el límite en un punto no hay continuidad, en (c) existe la función en un punto y también existe el límite pero no son iguales entonces no hay continuidad. En resumen debe existir la función, el límite y además deben ser iguales para que la función sea continua en ese punto.

[32] Ver continuidad en Notas: Sadosky; M., Guber. R.

¿Cómo estudiar Límites?

En principio realizar una lectura general acerca de todo el Capítulo. Fundamentalmente esa “leída” que se dirija a la **comprensión**. Hacer las correspondientes anotaciones que ya se han sugerido en el final de los Capítulos anteriores. Cuando fuere necesario buscar en esos Capítulos aquellos elementos que plantean dificultades: pueden ser los casos de factores o los conceptos de potencia, o también el concepto de función.

En una segunda lectura desarrollar cálculos, buscar propiedades de límites. Leer la discusión acerca del concepto de límite en el Capítulo de Notas. Revisar muy especialmente cada una de las recomendaciones que señala el Capítulo y que están escritas en cursiva (*K*) y contestar las preguntas que invitan a reflexionar.

Realizar una búsqueda de temas que no se han desarrollado en el texto como ser: asíntota oblicua.

En un tercer momento realizar una síntesis, resumen o mapa conceptual.

CAPÍTULO IV: DERIVADAS

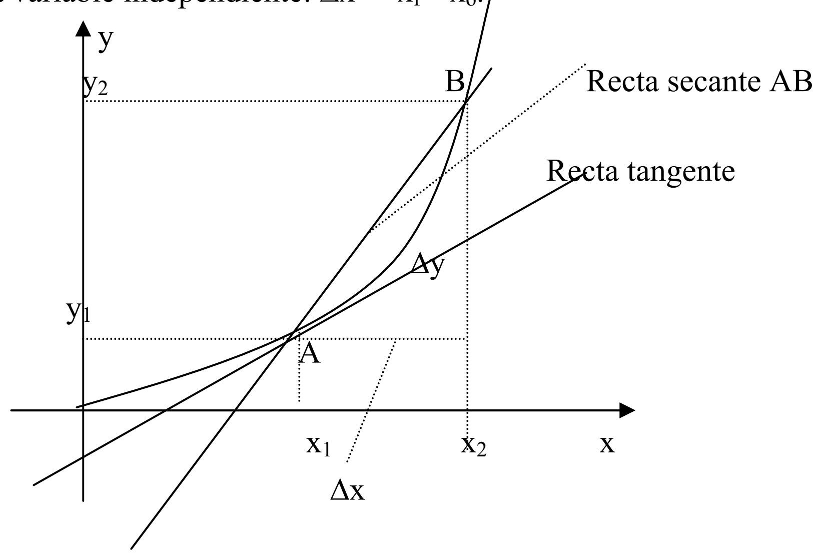
Resumen

Incremento de una variable. Derivada, concepto. Derivada, definición. Cálculo por definición de la derivada de una parábola. Cálculo por tablas. Función derivada. Función derivable. Reglas generales para el cálculo de derivadas. Derivada de función de función (o función compuesta). Derivada de $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \log_b x$, $y = a^x$ Derivada de funciones implícitas. Derivada de funciones inversas. Derivadas sucesivas. Puntos Máximos y Mínimos. Determinación de máximos y mínimos por el Criterio de la derivada 2ª y el Criterio de la derivada 1ª. Puntos de inflexión. Determinación de los Puntos de inflexión. Problemas de optimización de funciones. ¿Cómo estudiar Derivadas? Preguntas para el final de la 1ª Parte (Cálculo Diferencial).

Incremento de una variable[33]

Es el aumento (positivo o negativo) de una variable. También se llama variación.

Ejemplo: la temperatura del medio ambiente que se modifica durante el dia, o desde un mes a otro se "puede pensar" desde un valor inicial, se indica con el subíndice cero: T_o, y_o, x_o, hasta un valor final T_f, y_f, x_f. Ese incremento se indica con la letra griega Δ y se agrega la letra que representa la variable en este caso T por lo tanto: $\Delta T = T_f - T_o$. Cuando se trata de la variable independiente: $\Delta x = x_f - x_o$.



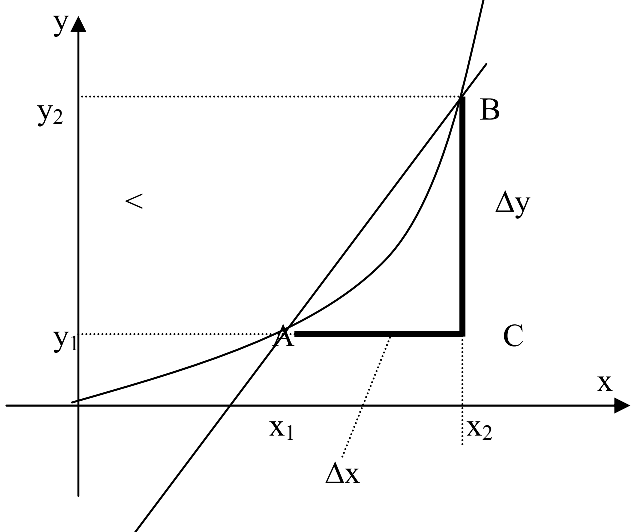
Consideremos una f(x) cualquiera que puede ser una recta, una parábola o una función exponencial, por citar algunos de los ejemplos ya vistos. En esa curva detengámonos en un punto A (x_1; y_1) es decir, de coordenadas x_1; y_1. La primera coordenada indica la abscisa y la 2ª la ordenada: la imagen de x_1: $f(x_1)$. Supongamos que en el fenómeno que indica f(x) hay una evolución hasta un punto B (x_2; y_2). Se suele decir que se experimenta o sufre una evolución o un avance. O sea si se produce un incremento en x, al

---

[33] Ver Apéndice III.

pasar de A a B y por tanto x_1 aumenta Δx unidades y pasa a x_2. Por lo anterior $\Delta x = x_2 - x_1$ pues dijimos que $x_1 + \Delta x = x_2$. Haciendo pasaje de términos de un miembro a otro resulta la primera igualdad. El otro incremento que se produce es el de la función cuando se pasa de A a B. Se expresa como $\Delta y = y_2 - y_1$, algunos autores utilizan $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, que no es otra cosa que la diferencia de ordenadas entre el punto B y el A.

Los dos incrementos se han indicado en la Figura con trazo grueso. En el triángulo ABC se tiene que los dos incrementos están dados por los catetos AC = Δx, BC = Δy,

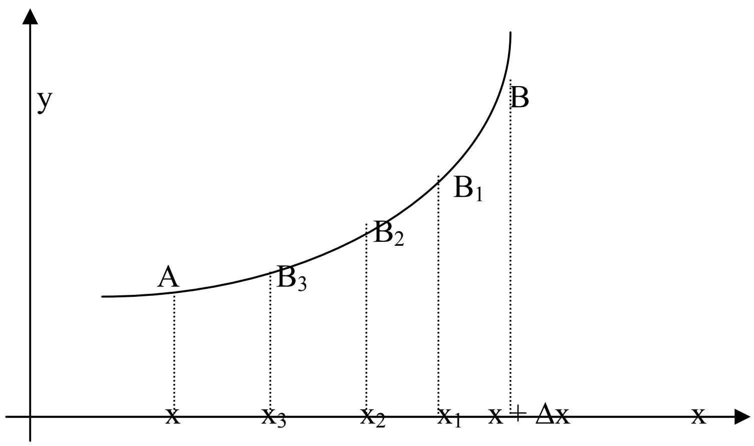


En algunos textos suele utilizarse $\Delta x = h$.

Derivada, concepto

Este concepto está asociado al de pendiente. Es bastante común confundir el ángulo de inclinación con la pendiente propiamente dicha; sería como creer que α es igual a tg α. El ángulo es α y la pendiente (que indica cuánto sube en altura el piso, el suelo, una función cuando avanza una unidad o también cuánto sube por cada unidad que avanza) $\Delta y / \Delta x$ = BC / AC. Es decir, si el avance horizontal es Δx, la altura que sube la curva al pasar de A a B es Δy = BC. Pero, también interesa saber si el aumento de la ordenada o función BC es mucho o poco comparado con el incremento en x. En matemática esta comparación se realiza con el cociente entre esas cantidades (ya mencionado).

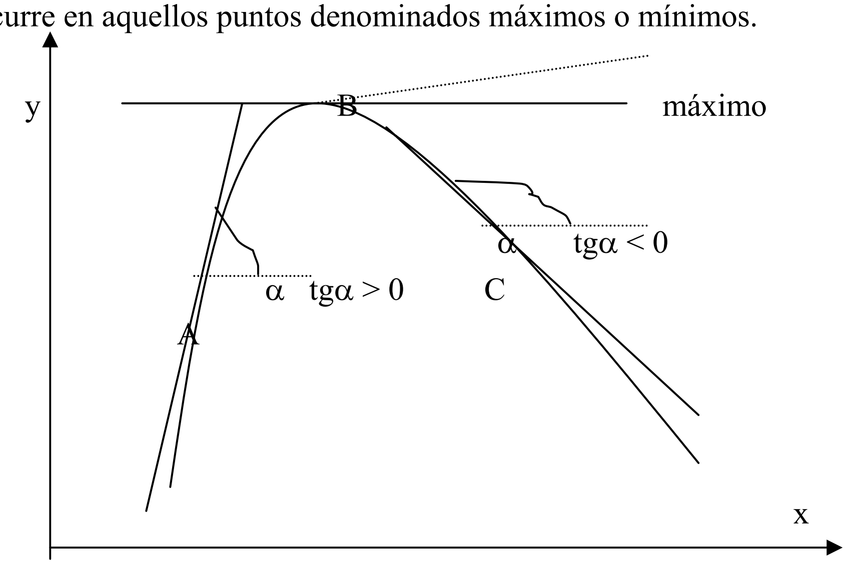
Pero, el estudio de la derivada no es la pendiente en un intervalo en x, ya sea de: x_1 a x_2 o de x a $x + \Delta x$, sino la pendiente en un punto. Pero, en ese caso el segmento AC valdrá cero y no podremos dividir. Entonces se piensa en considerar distintos puntos B_n tal que cada abscisa esté más próxima al valor de la x correspondiente a A. O sea, B tiende a A y por tanto Δx tiende a cero. Entonces interesa estudiar en cada función cómo es el límite cuando Δx tiende a cero. Cuando esto ocurre la recta AB tiende a la recta tangente en A. Luego esto era lo que deseábamos desde el inicio: saber cuánto vale la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Y hemos hallado que esa pendiente, la tangente.



trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente con el eje x es igual a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Este límite se llama derivada de la función y se indica como y´[34]. O sea, con un ápice. ¿Y por qué interesa la y´ de una función? Porque el conocimiento de ese valor permite saber si la curva crece en ese punto, y si crece rápido o despacio o si en cambio decrece. También puede ser que la curva esté detenida, es decir, no crece ni decrece. Esto último ocurre en aquellos puntos denominados máximos o mínimos.



En A la curva crece y la pendiente es positiva, en B es cero y en C es negativa. Los signos están dados por los valores que toma el ángulo α y consecuentemente la correspondiente tgα.

---

[34] La notación de la derivada suele ser: f´(x) o y´, dy / dx o df(x) / dx, D(y) o D f(x), a veces estas últimas dos pueden llevar un subíndice x después de la D, por ejemplo: D_x (y).

Interesa ahora poder medir o producir u obtener una fórmula para conocer las pendientes en cada punto de una f(x) y luego poder calcularlas.

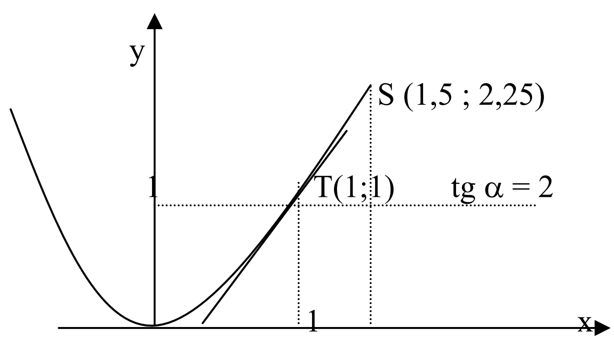
Derivada, definición

Ya la vimos es: $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cálculo por definición de la derivada de una parábola

Dada la función $y = x^2$ vamos a considerar:

1º Incremento en x: Δx



2º Incremento en y, Δy, producido por el incremento en x:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$, en este paso es usual realizar el álgebra que permite una expresión más simplificada de Δy,

$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x\ (2x + \Delta x)$

3º El cociente incremental:

$\Delta y / \Delta x = \Delta x\ (2x + \Delta x) / \Delta x = 2x + \Delta x$

4º Límite del cociente incremental:

$\text{lím}_0\ \Delta y / \Delta x = \text{lím}_0\ (2x + \Delta x) = 2x$

La pendiente en cualquier punto de la parábola es el doble de la abscisa de ese punto luego, en x = 1 es y´ = 2.1 = 2, y la tg α = 2 en x = 1.

En S la pendiente vale: y´= 2. 1,5 = 3

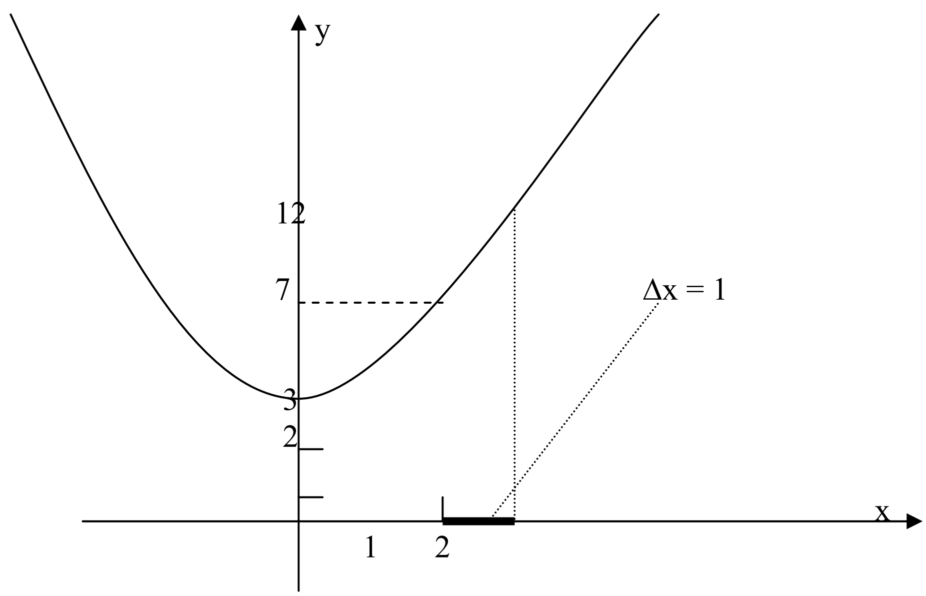
Cálculo por tablas[35]

$f(x) = x^2 + 3$

[35] Repetto, C.

x_0	$f(x_0)$	Δx	$f(x_0+\Delta x)$	Δy	$\Delta y / \Delta x$
2	7	1	12	5	5
2	7	0,8	10,84	3,84	4,8
2	7	0,6	9,76	2,76	4,6
2	7	0,4	8,76	1,76	4,4
2	7	0,1	7,41	0,41	4,1
2	7	0,01	7,0401	0,0401	4,01

$$\lim_{\Delta x \to 0} [\Delta y / \Delta x] = 4$$



Esta estrategia de utilizar una Tabla de valores o un Cuadro de doble entrada se ha introducido en el texto con el objeto de invitar al lector a poder mirar otro camino para la comprensión no siempre fácil del concepto de derivada.

Se sugiere:

a partir de la expresión analítica se construya la Tabla, consultar la primera fila de valores pero luego "seguir" el cálculo personalmente;

con los valores del Cuadro construir un Gráfico y señalar en él las cantidades obtenidas en la Tabla.

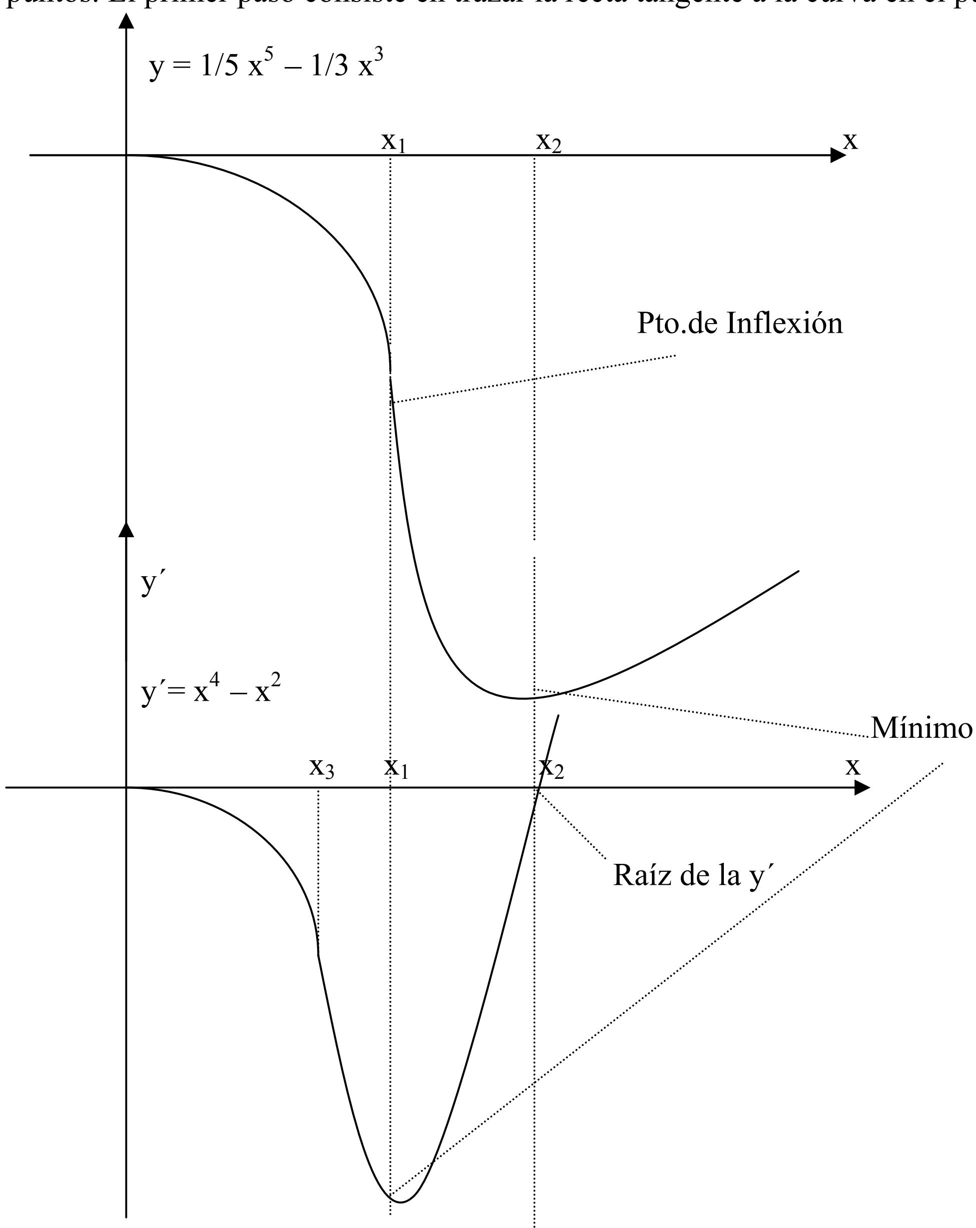
Se recomienda especialmente no leerlo y mirarlo solamente, sino realizar las operaciones y dibujar en el diagrama cartesiano.

Función derivada

Hemos calculado la derivada de la función $y = x^2$ obteniendo $y' = 2x$. Esta expresión tiene también las características de una función, puesto que permite asignar un valor de y´ a cada valor de x; se trata de la función derivada, o más estrictamente la función derivada 1ª.

Cuando se ha comprendido que la derivada es un límite, desde luego un límite singular donde la variable ahora es un incremento Δx, y se puede "utilizar", o aplicar ese concepto y también se interpreta el significado geométrico de la derivada de una función, entonces se está en condiciones de estudiar la función derivada 1ª y por lo tanto se puede comenzar a pensar: l*a derivación gráfica*.

Este procedimiento consiste en representar la función derivada cuando se conoce la representación gráfica de la función. (Ver en el capítulo de Integrales Indefinidas el estudio de la función $y = 1/5\ x^5 - 1/3\ x^3$). Para ello se determina el valor de la derivada en varios puntos. El primer paso consiste en trazar la recta tangente a la curva en el punto en

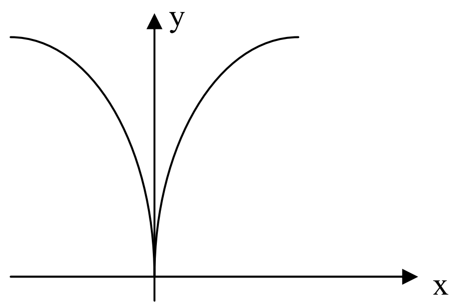


consideración, luego se mide la tg α del ángulo α que forma la recta tangente con el eje x.

Ese valor numérico es y´ y por tanto es la ordenada de nuestro Gráfico y´ vs x. El Gráfico que sigue es el de la función y su 1ª derivada.

Cada valor de la ordenada y´ del Gráfico de abajo se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la curva del Gráfico de arriba (de la función) para el mismo valor de x. Por ejemplo, para x_2 la función posee un mínimo o sea su tangente es una recta horizontal para ese valor de x_2 por tanto y´(x_2) es cero y cuando f(x) posee un punto de inflexión en x_1, y´ presenta un mínimo en x_1, ya veremos por qué.

Función derivable

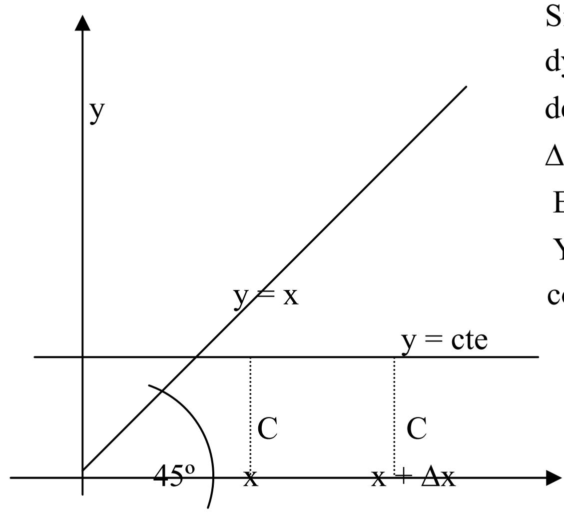


Si una función tiene derivada definida en todos sus puntos, es decir si es derivable, es continua. En cambio, no podemos afirmar lo contrario. Hay funciones continuas que no son derivables en todos o en algunos de sus puntos. Por ello: la continuidad es condición necesaria pero no suficiente para que una función sea derivable.

La función indicada más arriba posee un punto especial para x = 0 que se denomina punto cuspidal. En él se cumple que la función posee una recta tangente por derecha y otra por izquierda, es decir, no está definida la pendiente en ese punto y por tanto no está definida la derivada para x = 0.

Reglas generales para el cálculo de derivadas

01. <u>La derivada de una constante es nula</u>



Si f(x) = y = cte será:

dy / dx = 0, en efecto, sea y = C, aplicando la definición de derivada: $y + \Delta y = C$, luego $\Delta y = C - y$, pero como y = C resulta $\Delta y = 0$.

El cociente incremental es $\Delta y / \Delta x = 0$,

Y el límite para Δx tendiendo a cero de ese cociente es cero, o sea **y´ = 0**

02. La derivada de la variable independiente es la unidad.

Sea y = x.

$y + \Delta y = x + \Delta x$, por lo tanto será $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$ y por lo tanto el cociente incremental $\Delta y / \Delta x = 1$ y el límite de ese cociente será también 1. En efecto, la recta y = x es la bisectriz del primero y tercer cuadrante y por tanto forma un ángulo de 45º con el eje x. Por tanto su tangente trigonométrica, la pendiente, es uno.

y´ = 1

03. La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$y = u + v - w$

La función incrementada será: $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$, si restamos a esta igualdad la función y, $y = u + v - w$, obtendremos:

$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$, dividiendo en ambos miembros por Δx

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$ y tomando límites en ambos miembros

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right\}$$

Y como el límite de una suma es la suma de los límites, propiedad de los límites, resulta: **y´ = u´+ v´ – w´**

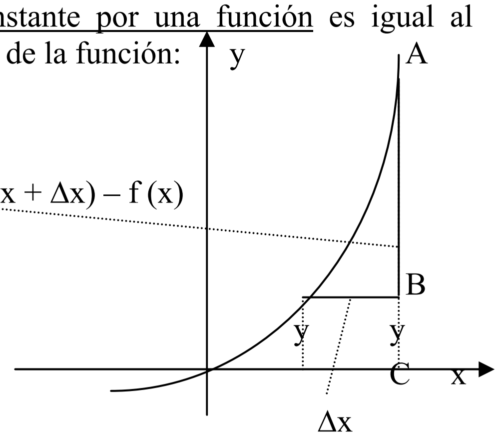
04. La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

Sea $y = K \cdot f(x)$

Si consideramos un incremento en x, Δx:

$y + \Delta y = K\, f(x + \Delta x)$ (1) $\qquad \Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$BC + AB = y + \Delta y$



Simbólicamente $f(x + \Delta x)$ es la ordenada para $x + \Delta x$ es decir para el punto A. El incremento Δy o $\Delta f(x)$ se puede señalar de las dos formas, se obtiene restando a la ordenada en A el valor de y, luego queda el segmento AB. Si ahora proseguimos con nuestra deducción analítica, y restamos en la igualdad (1) $y = K f(x)$, resulta:

$y + \Delta y - y = K\, f(x + \Delta x) - K\, f(x)$, resulta:

$\Delta y = K\,[f(x + \Delta x) - f(x)] = K\, \Delta f(x)$, dividiendo todo por Δx:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{K\, \Delta f(x)}{\Delta x}$, y tomando límites en ambos miembros:

$\text{lím}_0\, \Delta y / \Delta x = \text{lím}_0\, K\, \Delta f(x) / \Delta x = K\, \text{lím}_0\, \Delta f(x) / \Delta x = K\, f'(x)$

$\mathbf{y' = K\, f'(x)}$

05. La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la 2ª función sin derivar más la derivada de la 2ª función por la primera función sin derivar.

Sea $y = u \cdot v$ siendo $u = f_1(x)$, y $v = f_2(x)$.

$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$

$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

restemos la igualdad $y = u \cdot v$

resulta: $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$, dividiendo en ambos miembros por Δx

$\Delta y / \Delta x = (u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v) / \Delta x$

$\Delta y / \Delta x = (u\Delta v / \Delta x) + (v\Delta u / \Delta x) + (\Delta u\Delta v / \Delta x)$ tomando límites en ambos miembros cuando Δx tiende a cero, se tiene:

$\mathbf{y' = v' \cdot u + u' \cdot v}$ porque el límite de $(\Delta u\Delta v / \Delta x)$ es cero.

06. La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, dividido todo por el cuadrado del denominador.

Sea $y = u / v$, incrementando la variable independiente en un Δx, o sea se pasa de un valor cualquiera x a otro $x + \Delta x$, se incrementa la función que es cociente de otras dos:

$y + \Delta y = (u + \Delta u) / (v + \Delta v)$

restemos la igualdad $y = u / v$, $\Delta y = [(u + \Delta u) / (v + \Delta v)] - (u / v)$

$\Delta y = [uv + v\Delta u - uv - u\Delta v] / (v^2 + v\, \Delta v) = [v\Delta u - u\Delta v] / (v^2 + v\, \Delta v)$

Dividiendo en ambos miembros por Δx para obtener el cociente incremental

$\Delta y / \Delta x = [v\,(\Delta u / \Delta x) - u\,(\Delta v / \Delta x)] / (v^2 + v\, \Delta v)$,

y luego tomando límites cuando Δx tiende a cero resulta:

$\mathbf{y' = (v \cdot u' - u \cdot v') / v^2}$

07. La derivada de $y = x^n$ vale $y' = x^{n-1}$

Sea $y = x^n$

incrementando la variable independiente … la función…

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{n}$

Siguiendo los pasos de cálculo de la derivada por definición y desarrollando el binomio:

$\Delta y = x^{n} + n\, x^{n-1} \Delta x + [\, n.(n-1) / 2!\,]\ [\, x^{n-2} \Delta x^2\,] + \ldots + [\, n.(n-1) \ldots 1/ (n-1)!\,].[x\ \Delta x^{n-1}\,] + \Delta x^{n} - x^{n}$

Dividimos por Δx y simplificamos los términos x^{n}

$\Delta y / \Delta x = n\, x^{n-1} + [\, n.(n-1) / 2!\,]\ [\, x^{n-2} \Delta x\,] + \ldots + [\, n.(n-1) \ldots 1/ (n-1)!\,].[x\ \Delta x^{n-2}\,] + + \Delta x^{n-1}$

Si tomamos el límite para Δx tendiendo a cero:

$\mathbf{y' = n\, x^{n-1}}$

Es interesante observar que esta fórmula que concluimos de deducir es aplicable cuando n es negativo, n vale cero (la derivada de una constante), n es la unidad (corresponde a la función $y = x$), o cuando n es fraccionario. De modo tal que se puede utilizar como una fórmula general. (Ver Tabla de derivadas en Anexo I)

Derivada de función de función (o función compuesta)

Se dice que una variable y es función de función cuando su variable independiente (por ejemplo v) es a su vez función de otra variable (por ejemplo x).

En ese caso es:

$y = f(v) \qquad v = g(x)$

La función de función es $y = f[\, g(x)\,]$

Un ejemplo es:

$y = (3x^2 - 2)^{1/2}$

Si hacemos $v = g(x) = 3x^2 - 2$, resulta $y = f(v) = (v)^{1/2}$

FÓRMULA de la DERIVADA de FUNCIÓN de FUNCIÓN

Veamos ahora cómo se hace para derivar una función de función. Consideremos que y es una función continua de v, y también que v es una función continua de x. Luego cuando consideramos que Δx ----- 0, también Δv ----- 0, y Δy ----- 0. Para hallar la derivada de la función de función calculamos el cociente incremental de y en función de v que vale: $\Delta y / \Delta v$

Y el de v como función de x vale: $\Delta v / \Delta x$, si ahora hacemos el producto de ambos: $(\Delta y / \Delta v) . (\Delta v / \Delta x) = \Delta y / \Delta x$

Vemos que es igual al cociente de los incrementos de x e y. Si llevamos esta expresión al límite para Δx que tiende a cero tendremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} [(\Delta y / \Delta v) . (\Delta v / \Delta x)] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta v) . \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta v / \Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta v \to 0} (\Delta y / \Delta v) . \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta v / \Delta x) = y_v' . v_x' =$$

$$= (dy / dv) . (dv / dx)$$

Si una función y es función de una variable v, siendo v función de x, la derivada de y respecto de x es igual al producto de la derivada de y respecto de v, por la derivada de v respecto de x.

En el ejemplo anterior: $y = (3x^2 – 2)^{1/2}$

Con $v = 3x^2 – 2$, se tiene:

$y_v' = 1/2\ v^{– 1/2}$

$v_x' = 6x$, luego haciendo el producto para obtener y' (cuando no se coloca subíndice se supone que la derivada es respecto a x) resulta:

$y' = 1/2\ v^{– 1/2}6x = 1/2\ (3x^2 – 2)^{– 1/2}6x$

Cuando se tiene una función compuesta o función de función se resuelve así:

¿Cuál es el primer operador? La raíz cuadrada. ¿Cuál es su derivada? 1/2 por la base de la potencia elevado a la menos un medio. Luego se pregunta: ¿cuál es el segundo operador? Es la variable independiente elevada al cuadrado y su derivada es 2x; se recuerda que la derivada de la constante es cero. Y además como se tenía una diferencia es la derivada del primer término menos el segundo. Luego se multiplica cada una de las derivadas y se obtiene el resultado.

Calcular la derivada de $\text{sen}^3 \ln [(x^3 / 2x – 1)^{3/4}]$

Entonces detectamos cuáles son los operadores que afectan a x:

1º la función seno, su derivada es el coseno del logaritmo natural …etc.

2º El cubo del seno, su derivada es 3 sen^2… del logaritmo natural etc…

3º El logaritmo…

4º La potencia fraccionaria del cociente, su derivada es 3/4 del cociente elevado a la menos 1/4 …

5º La derivada de un cociente donde el denominador es una diferencia.

Derivada de $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \log_b x$, $y = a^x$

a) $y = \text{sen } x$

$y + \Delta y = \text{sen}(x + \Delta x)$

$\Delta y = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x$;

Utilizando una fórmula de transformación en producto:

$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cos (p + q) / 2 \,.\, \text{sen } (p - q)/ 2$

$$\Delta y = 2 \,\text{sen} \frac{(x + \Delta x - x)}{2} \,.\, \cos \frac{(x + \Delta x + x)}{2};$$

$$\Delta y / \Delta x = \left\{ 2 \,\text{sen} \frac{(\Delta x)}{2} \,.\, \cos \frac{(2x + \Delta x)}{2} \right\} / \Delta x$$

$$\Delta y / \Delta x = \left\{ \text{sen} \frac{(\Delta x)}{2} \,.\, \cos \frac{(2x + \Delta x)}{2} \right\} / (\Delta x / 2);$$

y como este límite es uno[36]: $\lim\limits_{\Delta x/2 \to 0} \left\{ \text{sen} \frac{(\Delta x)}{2} \right\} / (\Delta x / 2) = 1$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{(2x + \Delta x)}{2} \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \text{sen} \frac{(\Delta x)}{2} \right\} / (\Delta x / 2)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

b) $y = \cos x$, se demuestra con la fórmula: $y' = -\text{sen } x$

$\cos p - \cos q = - 2 \,\text{sen } (p + q) / 2 \,.\, \text{sen } (p - q)/ 2$

c) $y = \log_b x$, se demuestra con la fórmula: $y' = \log_e b \,.\, (1/x)$

para el caso particular de b = e es decir de un logaritmo natural o neperiano la derivada es: $y' = \ln x$. (ver Tabla de derivadas en el Anexo).

d) $y = a^x$, se demuestra que $y' = \ln a \,.\, a^x$

si $y = e^x$, $y' = \ln e \,.\, e^x = e^x$

Derivada de funciones implícitas

Cuando una función está dada en la forma implícita y no se puede o no es conveniente llevarla a la forma explícita, para hallar la derivada debemos derivar término a término, siguiendo las reglas vistas y considerando a "y" como función de x.

---

[36] lím sen x / x para x tendiendo a cero es el límite de dos infinitésimos equivalentes, ver demostración.

De la derivada en forma implícita luego se despeja y´.

Por ejemplo:

$x^3 + 8y - y^7 = 13$

Si ahora derivamos término a término:

$3x^2 + 8y' - 7y^6 \cdot y' = 0$, observar que la derivada del tercer término ($-y^7$) es la derivada de una función de función donde primero se derivó la potencia: $-7y^6$, y luego la propia función y que resulta: y´. La derivada de la constante es cero. Si interesa despejar el valor de y´se procede a despejarla. $y' = -3x^2 / (8 - 7y^6)$.

Derivada de funciones inversas

Dada una función y = f(x) es a menudo posible hallar otra función que exprese la misma relación entre las variables, pero tomando a "y" como variable independiente:

x = g (y)

Vamos a hallar la relación entre ambas derivadas:

Si al calcular la derivada de y = f(x) consideramos a "x" como variable independiente, al derivar la función inversa debemos hacer lo propio con "y". Si la derivada de y = f(x) es y´, la derivada de la función inversa x = g (y) será x´.

Veamos cómo es el vínculo: Para y = f(x) el cociente incremental será:

$\Delta y / \Delta x$, para la función inversa, si consideramos a "y" como variable independiente, tendremos $\Delta x / \Delta y$. Evidentemente es: $\Delta y / \Delta x = 1 / [\Delta x / \Delta y]$. Si ahora tomamos límites y considerando que ambas funciones son continuas y por lo tanto cuando Δx ---- 0 también Δy ---- 0 resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta y \to 0} 1 / [\Delta x / \Delta y]$$

o sea: $y' = 1 / x'$

Ejemplo: $y = e^x$ luego $x = \ln y$

$y' = e^x$

$x' = 1 / e^x$ es decir es $1 / y$

Pero además nosotros sabemos que la derivada de un logaritmo es 1 / y que coincide con lo anterior.

Ejemplo: Hallar la derivada del arc sen x.

Como y = arc sen x, es x = sen y, luego x´ = cos y.

Por la relación pitagórica de la trigonometría es $\cos y = (1 - \operatorname{sen}^2 y)^{1/2}$

Y reemplazando es $x' = (1 - x^2)^{1/2}$, ahora podemos calcular y´. Como es la inversa de x, $y' = 1 / (1 - x^2)^{1/2}$

Derivadas sucesivas

Hemos visto que la derivada de una función es otra función, llamada función derivada. Si a esta última le calculamos la derivada siguiendo los métodos que correspondan obtendremos la derivada de la derivada, es decir la derivada segunda, de la función.

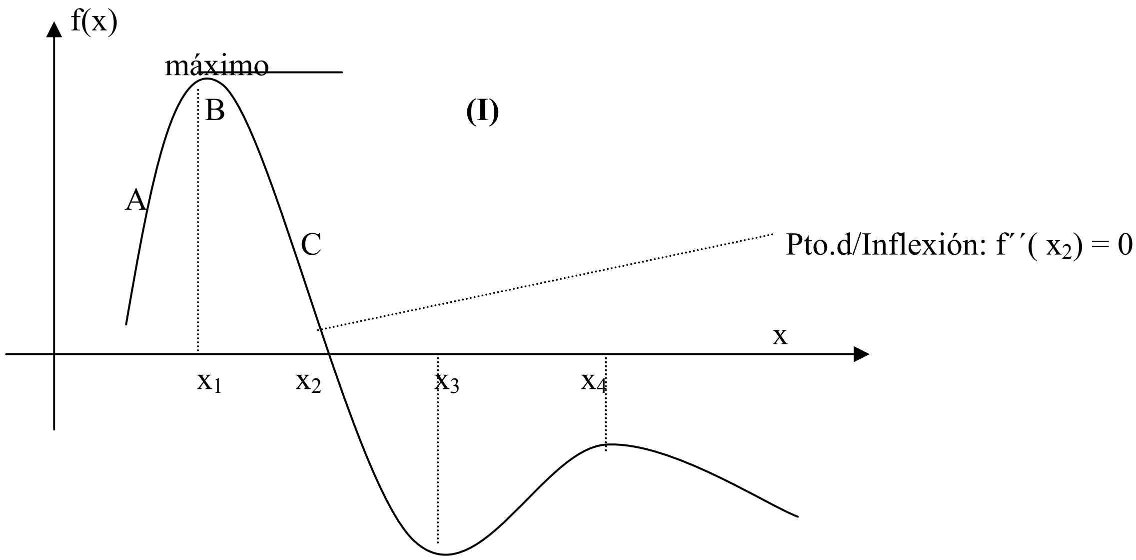
Notación: $\dfrac{d}{dx}(dy / dx) = y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ son tres formas de escribir lo mismo.

Es conveniente conocerlas para poder leer los diferentes autores.

Ejemplo:
$y = 5\,x^5$
$y' = 25\,x^4$
$y'' = 100\,x^3$
$y''' = 300\,x^2$
$y^{IV} = 600\,x$
$y^{V} = 600$

Puntos Máximos y Mínimos

Cuando la f(x) es creciente, es decir, cuando la función crece al aumentar x, la pendiente es positiva o sea la recta tangente (a la curva f(x)) forma un ángulo α menor de 90º y por lo tanto la derivada es positiva. Observar en el Gráfico (I), la curva desde A hasta B, donde se representa f(x) vs x.



En el Gráfico (II)[37], en la página siguiente, donde se representa $f'(x)$ vs x, la derivada posee ordenadas positivas para el mismo intervalo, es decir para $x < x_1$.

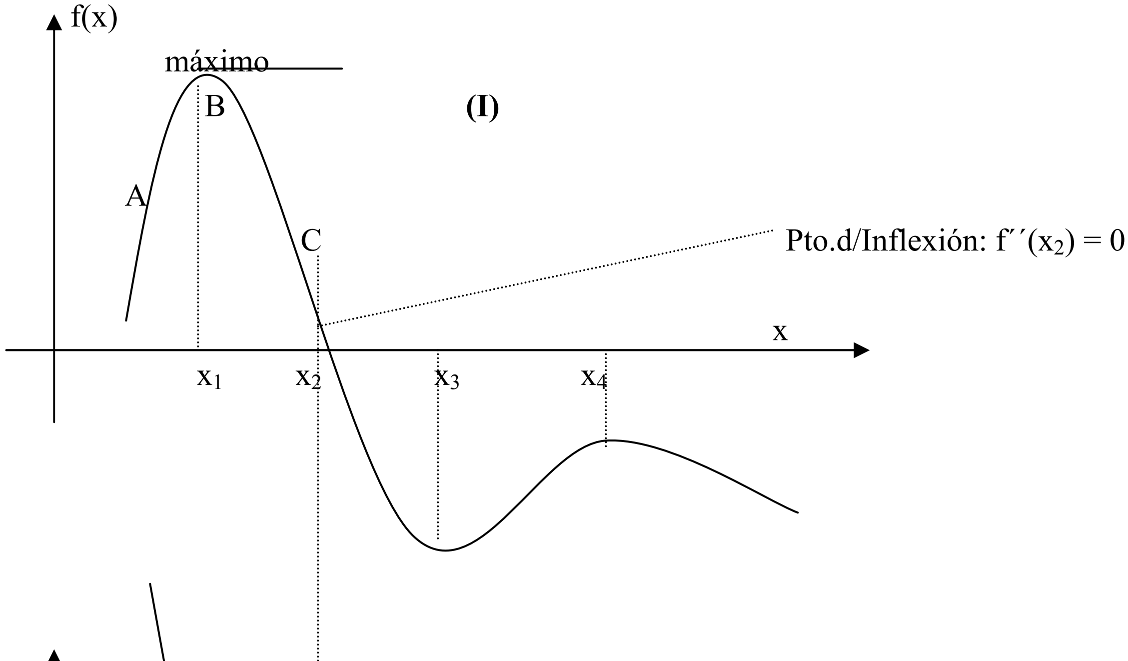
[37] Se sugiere redibujar los tres Gráficos I, II y III en una misma hoja, o colocar dos hojas tamaño A4 a continuación una de otra y pegarlas por atrás para estudiar f(x) y sus dos derivadas.

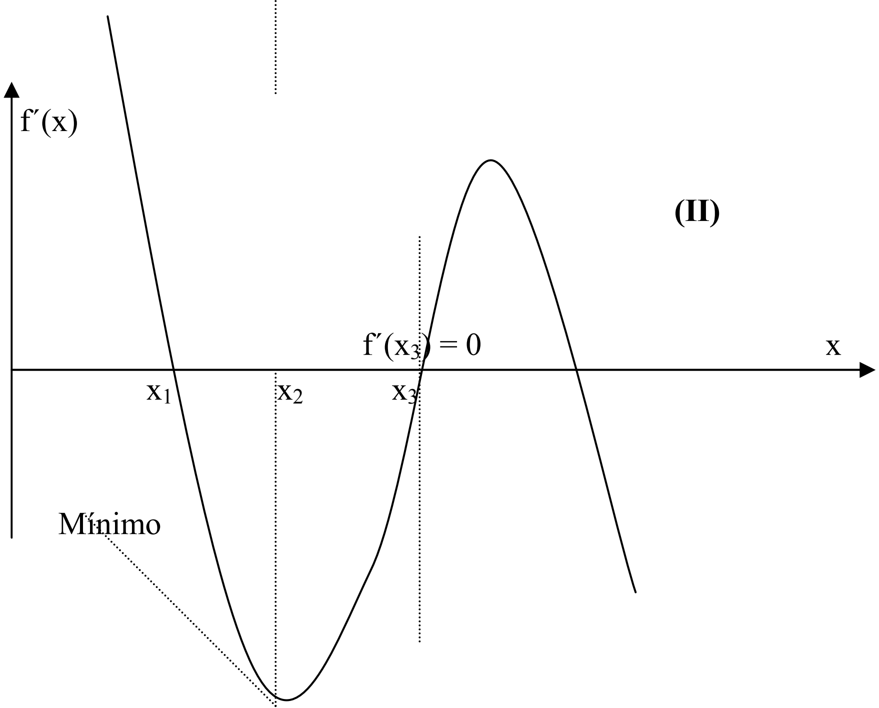
Si ahora volvemos al Gráfico (I) en el intervalo $x_1 < x < x_2$, es decir desde B hasta C la función decrece al aumentar x, la pendiente es negativa o sea la recta tangente, a la curva f(x), forma un ángulo α mayor de 90º y por lo tanto la derivada es negativa. Observar en el Gráfico (II), en el intervalo $x_1 < x < x_2$ las ordenadas son negativas.

Si ahora analizamos el punto máximo M de la función f(x) ahí la pendiente no es ni positiva ni negativa y por tanto la derivada primera $f'(x)$ no es ni positiva ni negativa sino $f'(x_1) = 0$, es decir en el Gráfico II la curva presenta una raíz en $x = x_1$.

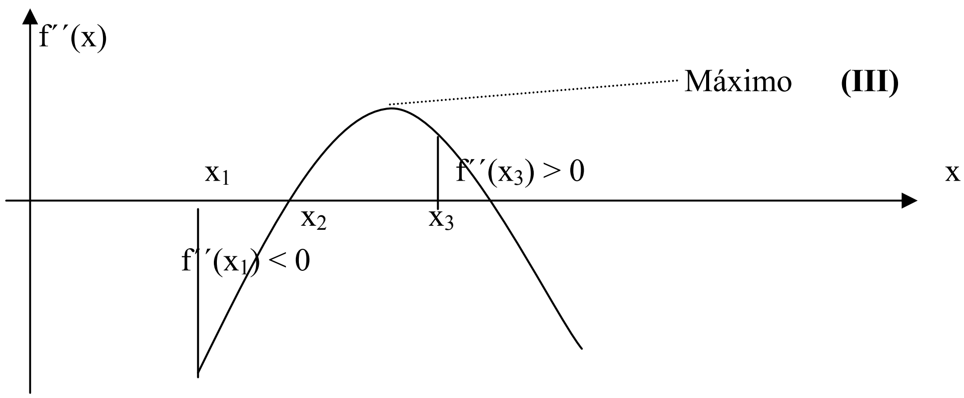
Determinación de máximos y mínimos por el Criterio de la derivada 2ª

1º - Derivada 1ª igual cero (Para saber donde hay posibles máximos o mínimos)





Entonces, para el cálculo analítico del punto máximo o mínimo se comienza por anular la derivada primera y obtener las raíces, es decir, los valores de x donde f´(x) = 0. En el Gráfico (I) se han indicado los valores de x donde se tienen esos puntos: x_1, x_3, x_4.



2º - Derivada 2ª, su signo. (Para saber si es un máximo o mínimo).

Solo sabemos que f´(x_1), f´(x_3), f´(x_4) valen cero. Pero observando el Gráfico (III) resulta que la f´´(x) cambia su signo cada vez que en el Gráfico (I) la función presenta un punto de inflexión. ¿En qué ayuda esto para nuestro problema? Cuando la f(x), nuestra función, posee concavidad hacia abajo como en el primer intervalo analizado $x < x_2$, la función para cualquier punto de la curva donde f´(x) valga cero debe ser un máximo porque con esa concavidad solo puede ser un punto donde $f(x) > f(x - \Delta x)$ o $f(x) > f(x + \Delta x)$, es decir, a izquierda o derecha respectivamente del punto máximo B. Como para esa concavidad la f´´(x) mantiene su signo (negativo) y no lo cambia hasta que la función presenta un punto de inflexión $x = x_2$ (donde f´´(x) es cero) podemos decir que el signo de la f´´(x) nos puede decir si estamos en presencia de un máximo o un mínimo.

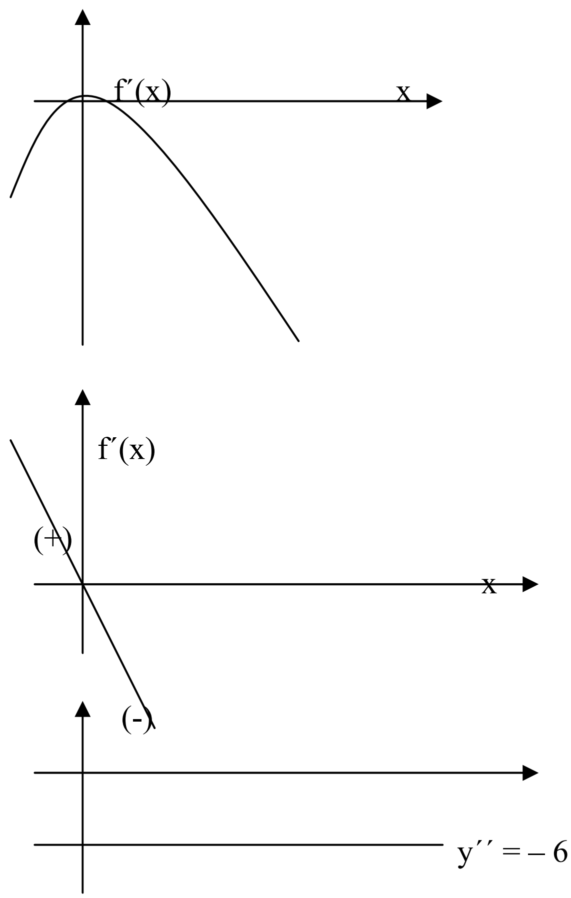
Analizar los Gráficos (I) y (III). Corrobora todo esto que la f(x) presenta un mínimo en x_3, y la derivada segunda correspondiente a ese punto es f´´(x_3) > 0. Aunque ya sabemos calcular los máximos y mínimos con la derivada 1ª y la 2ª podríamos preguntarnos por qué el signo de la derivada 2ª me indica si es un máximo o un mínimo.

Observemos en la curva de f(x) vs x en el Gráfico (I) para los puntos desde A hasta C que la curva pasa de creciente luego el máximo y finalmente decreciente. En el mismo intervalo de x pero en la derivada primera, Gráfico (II), esta pasa de positiva a cero y luego negativa. Si ahora consideramos la derivada 2ª, que es la derivada 1ª de la derivada 1ª, el estudio de la pendiente de y´nos va a decir cómo es y´´. En el Gráfico (II), en el intervalo considerado desde $-\infty < x < x_2$, la pendiente de y´es negativa y por tanto su derivada (y´´) debe ser también negativa, o sea, en ese intervalo es y´´ negativa. Y por tanto cuando la función f(x) pasa de creciente (A) a cero (B) y luego decreciente (C), con la concavidad hacia abajo, la derivada primera posee pendiente negativa (en $x < x_2$) y la derivada 2ª es negativa (en $x < x_2$) y en conclusión: **para un máximo la y´´ es negativa**. Análogamente **para un mínimo la y´´ es positiva**.

Determinación de máximos y mínimos por el Criterio de la derivada 1ª

También se puede saber si se está en presencia de máximos o mínimos a partir de puntos próximos al posible máximo o mínimo. Si f´(x) es positiva a la izquierda (o sea para valores de x menores que la abscisa del posible máximo o mínimo) y negativa a la derecha el punto es un máximo. Observar los Gráficos I y II.

Un ejemplo sencillo para revisar todo lo dicho hasta aquí es el de $f(x) = -3x^2$

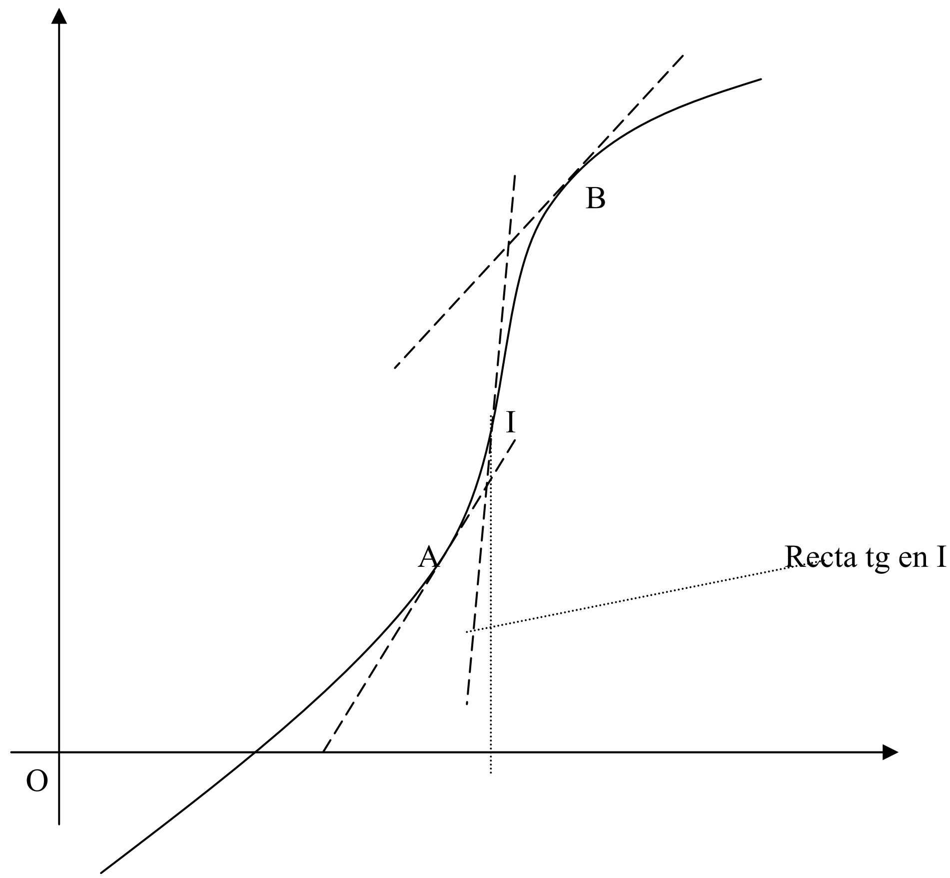


La derivada primera y´= – 6x, es la 2ª gráfica. Es una recta que pasa por el origen de pendiente negativa. f´´(x) = – 6. Es una recta paralela al eje x que pasa por y = – 6.

Si aplicamos el criterio de la derivada primera para saber si en x = 0 se tiene un máximo o mínimo resulta: a la izquierda es positiva y a la derecha es negativa luego es un máximo.

Puntos de inflexión

Son aquellos puntos donde cambia la concavidad. Algunos autores dan la definición respecto a la recta tangente en ese punto. En general, en un punto de una curva la recta tangente además de tener un punto en común, y solo uno con la curva, deja a esta en un semiplano, por lo menos los puntos más próximos. En un punto de inflexión la recta tangente atraviesa la curva. A veces en las áreas de ciencia aplicada, en Gráficos de alguna variable económica o biológica o de la mecánica clásica, se distingue al punto de inflexión por ser el punto donde se alcanza la máxima velocidad de crecimiento.



Se puede observar en el Gráfico anterior que la pendiente es positiva desde x = 0 hasta el punto I. Pero además de ser positiva la pendiente crece porque crece tg α. Luego de I la pendiente sigue siendo positiva pero ahora cada vez es menos positiva, o sea decrece la pendiente. O sea, y como ejemplo: en A la pendiente tienen un valor, en I es mayor y luego en B es menor que en I. Si la curva fuese de volumen de algo material y crece en el tiempo (x es la variable tiempo) la derivada primera es la velocidad de crecimiento, y en el punto I está la máxima velocidad de crecimiento.

Determinación de los Puntos de inflexión

Se puede observar en los Gráficos anteriores (I, II, III) que mientras la concavidad no se modifica la derivada 2ª posee el mismo signo. Para la concavidad hacia abajo la $f''(x) < 0$ habíamos analizado y cuando la concavidad es la opuesta (hacia arriba): $f''(x) > 0$. Luego en el cambio de concavidad en la función se produce un cambio de signo y por ende en los puntos de inflexión $f''(x) = 0$.

Problemas de optimización de funciones

Estos son clásicos problemas de empresas, industrias. Refieren al diseño en ingeniería, arquitectura y tratan de encontrar el valor de una variable en estudio que permita alcanzar el valor óptimo (puede ser un máximo o mínimo) de una función. Encontrar ese valor óptimo significa alcanzar una dimensión numérica adecuada, la mejor, y por ende se habla de dimensionar.

1º Ejemplo (de tipo matemático)

Se desea construir un recipiente cilíndrico de volumen 3140 m^3. Hallar sus dimensiones para que la cantidad de material a emplearse sea mínima.

En el enunciado la frase subrayada

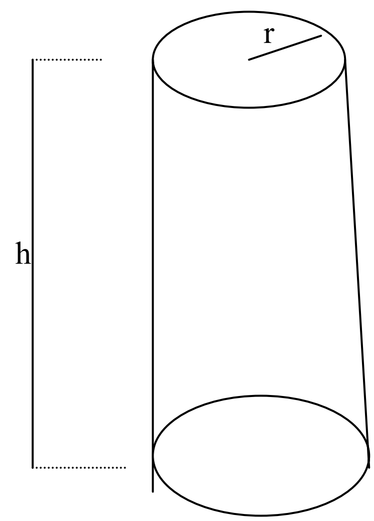
es clave: la cantidad de material debe ser mínima.

¿Qué significa cantidad de material?

Para nuestros datos es volumen: V[38]

Luego $V = \pi r^2.h$

S: Superficie de la base + superficie Lateral



Nosotros sabemos por los datos del problema que el volumen está definido. Podrá ser más alto o más corto el cilindro con un radio mayor o muy pequeño pero, la relación h *vs* radio tiene que ser tal que el V = 3140 m^3. El recipiente es hueco, luego el material depende de la superficie que construyamos. O sea, tenemos una función a optimizar: S y una relación entre las variables a dimensionar (r, h). Esa relación es: $3140\ m^3 = \pi r^2.h$ (1)

Planteamos la función $S = \pi r^2 + 2\pi r.h$.

Nosotros podemos pensar en una S = f (r) o una S = f(h). Para ello despejamos de la expresión de volumen una de las variables y la reemplazamos en la otra. Eliminemos h de la función S. De la expresión (1): $3140 = \pi r^2.\ h$ es $3140 / \pi r^2 = h$, y reemplazando en S,

$S = \pi r^2 + 2\pi r.\ (3140 / \pi r^2) = \pi r^2 + 2.\ 3140 / r$

$S' = 2\pi r + 6280.\ (-1)\ .\ r^{-2}$

El mínimo será S´ = 0, o sea: $0 = 2\pi r + 6280.\ (-1)\ .\ r^{-2}$

$-2\pi r = +6280.\ (-1)\ .\ r^{-2}$

$r^3 = 3140 / \pi = 1000$, luego r = 10 m.

$S'' = 2\pi + 2\ .\ 6280\ .\ r^{-3}$

$S''(10) > 0$ luego para r = 10 es S un mínimo.

---

[38] En realidad, lo correcto cuando hablamos de cantidad de material el término físico es: masa. Este es sinónimo de cantidad de materia pero si el material es homogéneo, igual densidad en todos los puntos la relación masa/volumen es constante y si el espesor del recipiente es también constante entonces V/S es constante y por tanto hablar de optimizar la cantidad de materia es minimizar la superficie.

2º Ejemplo: Una empresa de la región ha almacenado 5000 ft^3 de una especie nativa en sus depósitos. En la actualidad el precio es de \$ 200.- por cada ft^3. En cada semana aumenta el precio \$ 0,30.- por ft^3, mientras se pierde 5 ft^3 por deterioro también en cada semana. Los gastos de almacenamiento alcanzan a \$ 400.- semanales ¿En qué semana será el momento óptimo para vender los ft^3 guardados si se desea que el monto de dinero percibido por la venta resulte máximo?

¿Cómo pensar este problema? Un método (técnico)[39] *sería observar cuál es "la teoría" estudiarla primero y aplicarla después o un método práctico que trata de comprender y luego teorizar (en la propia práctica, en la praxis). Vamos a hacer lo segundo.*

Leemos el texto y anotamos nuestros datos mientras los vamos reflexionando. Poseemos 5000 ft^3 *"stockeados" como se dice en la industria.*

Se observa por un lado lo que se pierde: 5 ft^3 */sem, y se gasta \$ 400 /sem.*

Por otro lado está aquello que favorece a la empresa que es el aumento del precio que es de \$ 0,30 por ft^3*/ sem.*

Lo que se desea maximizar es la función Venta (lo facturado y cobrado), la llamamos V.

O sea tenemos un factor a favor, el aumento de precio que nos hace pensar cuánto más tardemos en vender, mejor y dos factores en contra, las pérdidas por deterioro y lo que cuesta el almacenamiento. Todos los factores dependen del tiempo, que también observamos nos conviene asignar la unidad semana.

Comenzamos por construir la función V.

Esta va a ser igual a la cantidad vendida por el precio por unidad. En el momento que se considera hay un volumen de 5000 ft^3 *pero va a disminuir en cada semana. Comencemos por poner los 5000* ft^3 *aunque sabemos que va a ser menos. Y el precio en el momento inicial va a ser de \$200.-pero sabemos que va a aumentar. O sea:*

$V = 5000\, ft^3 \,.\, \$ / ft^3\ 200.-$, *simplificamos* ft^3 *y multiplicamos*

$V = \$\ 250.000.-$ *Esto sería la ordenada al origen es decir en un Gráfico Venta (\$) vs tiempo (sem) la gráfica arrancaría desde aquí.*

Bueno, ahora tenemos que restarle al stock inicial de 5000 ft^3*, y sumarle el aumento de precio a los 200 y hay otro gasto, que tenemos que ver cómo se debe restar. Ojo, el aumento de precio no es constante es: 0,30 t, en todo caso es constante la velocidad de aumento: 0,30. Lo mismo que el deterioro no es constante porque se va acumulando en cada semana que pasa. Estas reflexiones es conveniente hacerlas porque ahí radica la educación.*

$V = [\,(5000 - 5\ t)\ ft^3 .\ (200 + 0{,}30\ t)\,]\ \$ / ft^3 - \ 400\ \$/ sem\ .\ t\ sem$

[39] Ver Apéndice IV: Los razonamientos de Aristóteles.

Analicemos los tres términos: desde el punto de vista matemático estrictamente son dos términos de una diferencia y en el primer término hay dos factores. A nosotros ahora nos interesa analizar los dos factores y el término que resta.

1º Es conveniente colocar las unidades hasta que se está seguro que se están sumando términos similares, o semejantes.

(5000 – 5 t) ft^3, es la cantidad de madera inicial menos la que se va consumiendo por deterioro, hay que tener en cuenta que para t = 0 da 5000 que es lo correcto. Además, en esta función debe aparecer el tiempo que es la variable independiente que se va a poder "manipular"para hacer el diseño: <u>decidir en qué semana se vende</u>. Es un diseño comercial. Ojo 5 va en ft^3/ sem multiplicado por t sem resulta los pies cúbicos. Y 5000 va en pies cúbicos o sea se puede restar perfectamente 5000 – 5 t. No es fácil todo esto.

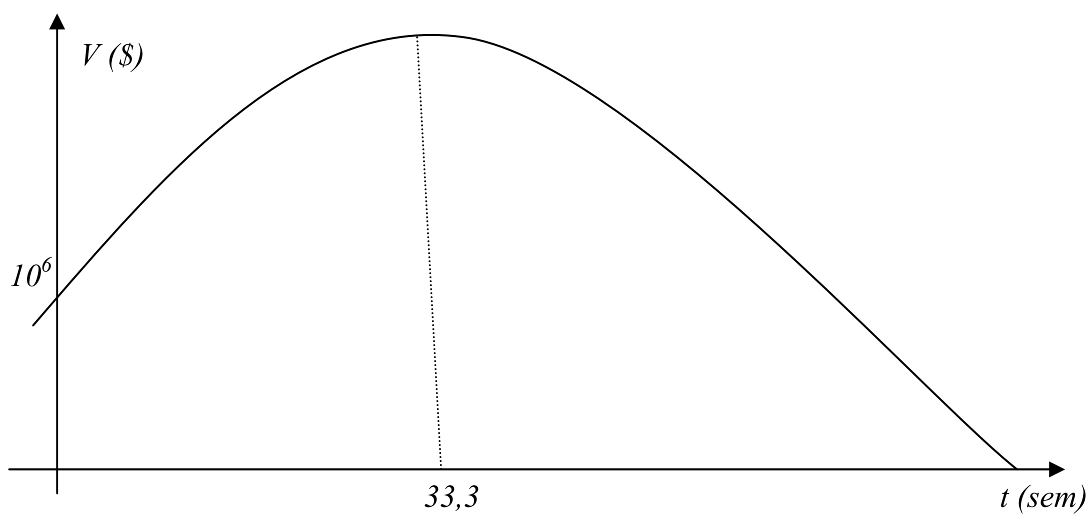
2º Ahora veamos el precio (200 + 0,30 t)] \$ / ft^3 "en todas partes del mundo"es dinero por una unidad de lo que se vende, en este caso \$ / ft^3, por ejemplo para 200 esa es la unidad pero no para 0,30 ya que ese valor es por semana luego se multiplica por t (sem) y queda en 0,30 t \$ / ft^3 que se puede sumar con 200 y todo este 2º factor se puede multiplicar por el primer factor entre paréntesis, así se eliminan los pies cúbicos y queda en pesos.

3º El segundo sumando, que resta, es \$ 400 semanales o sea por cada semana, luego debemos multiplicar por t para saber el gasto total y la unidad resulta en \$.

4º La ecuación final o función final sin unidades es:

$V = [\,(5000 - 5\,t)\,.\,(200 + 0{,}30\,t)] - 400\,t$

$V = 1.000.000 + 1500\,t - 1000\,t - 1{,}5\;t^2 - 400\,t = -1{,}5\;t^2 + 100\,t + 1.000.000$



*Si calculamos la abscisa del vértice es $x_v = -b / 2a = -100 / 2\,(-1{,}5\ ) =$ = **<u>33,3 semanas</u>**.*

Vamos a teorizar acerca de estos problemas. Comenzamos a preguntarnos: ¿qué se pretende con estos ejercicios? Respuesta: optimizar (hallar el máximo o mínimo) de una función: $S = f(r)$.

La expresión matemática queda indicada por la disciplina de la que se trate, ya sea geometría, física o economía.

A veces la función depende de dos variables, entonces debe eliminarse una de ellas. Para ello debe haber datos en el problema que permitan obtener una función de una variable.

Construida la función, luego prosigue como cualquier otra a partir de la primera derivada, la raíz de esta en la ecuación igualada a cero y finalmente la verificación en la derivada 2ª para corroborar que sea un máximo o mínimo.

¿Cómo estudiar Derivadas?

Realizar una primera lectura general **comprensiva** para construir una idea acerca de qué temas trata el Capítulo de Derivadas. Realizar las primeras anotaciones provisorias, transitorias, que solo serán borradores. En esta primera lectura buscar en el Apéndice III el concepto y significado de los incrementos de las variables independiente y dependiente (la función) y del cociente incremental.

Una segunda lectura acompañarla con búsquedas similares a la realizada en Límites y señalada en el Capítulo de Notas. Es decir, buscar numerosos autores y comparar lo que indican acerca de Derivadas.

Comparar entre sí y con el texto y las clases de los docentes.

Realizar una búsqueda de temas que no se han desarrollado en el texto como ser: derivada de la función paramétrica.

Estudiar una función a partir de: dominio, raíces, asíntota, máximos y/o mínimos, puntos de inflexión y representaciones gráficas.

Elaborar una lista de 15 o más funciones aproximadamente, expresadas analíticamente y acerca de ellas señalar, a priori de cualquier cálculo o estudio:

- posee o no raíces y cuál es su carácter,
- asíntotas, etc.

En un tercer momento realizar una síntesis, resumen o mapa conceptual.

Los dos problemas de optimización de funciones han sido suficientemente "teorizados" y no es necesario volver a repetir cómo estudiarlos.

Preguntas para el final de la 1ª Parte (Cálculo Diferencial)

01. ¿Qué es una función?: a) Indica el concepto matemático; b) Señala los elementos o componentes que posee cuando se la expresa en el lenguaje analítico; c) Señala los elementos o componentes que posee cuando se la expresa en el lenguaje analítico.
02. Indica qué tipos de intervalos conocés.
03. ¿Qué representan gráficamente las siguientes expresiones analíticas?
    a) f (x); b) f (x_0); c) $x_{0;}$ d) f (x)= 1; e) f (x_0)= -1;
04. Dada una f(x) y un punto A (x_0 ; y_0) ¿Cómo construyes la gráfica de la recta tangente a la función f(x) en el punto A que pertenece a la f(x). Describí los pasos señalando qué cálculos o fórmulas debés emplear.
05. ¿Qué es la función valor absoluto? a) Concepto b) Gráfica.
06. ¿Cuáles son los elementos o componentes de la expresión analítica de la parábola?
07. ¿Qué ventaja tiene escribir la parábola en forma polinómica y en forma normal?
08. ¿Se pueden obtener las raíces de la parábola a partir de la normal? Justificá la respuesta.
09. ¿Qué es el límite de una función? Concepto. Expresá en lenguaje analítico y gráficamente.
10. Señalá un ejemplo no numérico, sino general, de una función que no posee límite en un punto.
11. ¿Cuáles son los límites más sencillos de calcular? ¿Por qué?
12. Qué ocurre cuando existe una indeterminación del tipo 0/0 en el cálculo de un límite? ¿Qué procedimientos hay que adoptar? ¿Qué se hace?
13. ¿Qué significa que una función es continua en un punto? Explica, grafica y señala contra ejemplos.
14. ¿Qué es la derivada de una función? Concepto. Expresión analítica y gráfica.
15. Aplica la definición de parábola para obtener la expresión general del trinomio cuadrático.
16. Indica el vínculo que hay entre el parámetro α de la forma normal de la parábola y la abscisa del mínimo o máximo de la forma polinómica.
17. Indica gráficamente cómo están vinculadas tres curvas que fuesen f(x), f´(x), f´´(x). Es decir una función y sus dos primeras derivadas.
18. En un problema de optimización ¿qué hay que saber? ¿qué hay que hacer?

Segunda Parte:
Cálculo Integral

CAPÍTULO V: INTEGRALES INDEFINIDAS

Resumen

Diferencial de una función. Interpretación geométrica del diferencial de una función. Integral Indefinida. El álgebra de las integrales. Propiedades de las integrales indefinidas. Cálculo de integrales indefinidas. Integrales inmediatas. Integrales por Sustitución. Integrales Trigonométricas. Integrales por Partes. Integrales de funciones racionales por descomposición en fracciones simples. Integrales de funciones racionales por sustitución. Integrales de funciones irracionales cuadráticas. Integrales de funciones irracionales lineales. Métodos Generales de Integración.

Diferencial de una función[40]

En los Capítulos anteriores se ha visto, a partir del concepto de límite, aquello que se denomina Cálculo Diferencial. Es decir, límites, derivadas y algunas aplicaciones de ambos como continuidad, asíntotas, máximos, mínimos, puntos de inflexión y optimización de funciones. Sin embargo, un concepto característico del Cálculo Diferencial: Diferencial de una Función no se indicó. Ahora lo vamos a definir.

¿Qué es diferencial de una función? Es el producto de la derivada de una función por el incremento de la variable independiente. Expresado analíticamente:

$df(x) = f'(x) \,.\, \Delta x$, Δx: incremento en x.

<u>Caso $f(x) = x$</u>

$dx = 1 \,.\, \Delta x$, de aquí se deduce que el diferencial de la variable independiente y el incremento de la variable independiente son iguales.

Esto permite expresar el diferencial de una función de otra forma:

$df(x) = f'(x) \,.\, dx$, y esta expresión es la que vamos a considerar a partir de ahora.

Veamos algunos ejemplos:

$d \operatorname{sen} x = \cos x \,.\, dx$

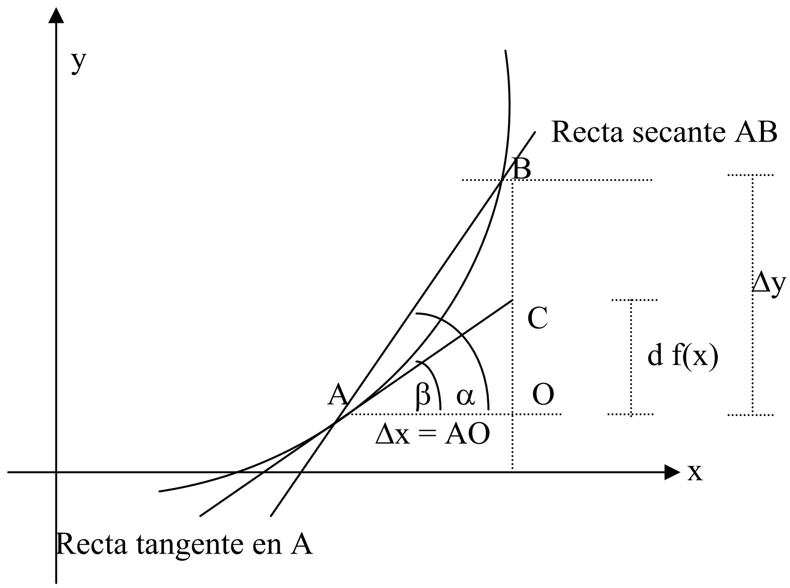
$d\, x^2 = 2x \,.\, dx$

$d\,(x^5 + 2x) = (5x^4 + 2)\, dx$

Interpretación geométrica del diferencial de una función

Como el diferencial es por definición el producto de la derivada por el incremento en x, y como la derivada es la tg trigonométrica del ángulo β, ver dibujo en la página siguiente, que forma esa recta con el eje x, resulta que el df(x) es igual al segmento CO. Entonces, geométricamente el diferencial de una función es igual al aumento que experimenta una función cuando evoluciona de A a B, con un incremento en x(Δx), tal que si en vez de evolucionar según la curva lo hiciese según la recta tangente en ese punto. Es decir, evolucionase de A a C.

[40] Se puede revisar el concepto en Sadosky y Guber, Tomo I.



$\Delta y = \text{tg } \alpha \, . \, \Delta x$
$d \, f(x) = f'(x). \, \Delta x = \text{tg } \beta \, . \, \Delta x$

Integral Indefinida

El estudio de este concepto se puede abordar por diferentes caminos. Uno de ellos refiere a la idea de diferencial de una función.

<u>*Estrategia nº 1*</u>: La integral Indefinida se puede pensar como la operación opuesta a la derivación. Con esto completaríamos el Cuadro de operaciones directas e indirectas.

Operación directa	*Operación indirecta*
Suma	*Resta*
Multiplicación	*División*
Potenciación	*Radicación*
	Logaritmación
- -	*Límite*
Derivación	*Integración*

Es decir, la integral indefinida sería la operación antiderivada. Y consistiría en encontrar la f(x) dada una f´(x) tal que la derivada de f(x) resulta igual a f´(x). A partir del concepto de diferencial se puede algebrizar la integral. Si df(x) = f´(x) . dx, entonces df(x) / dx = f´(x) que es otra forma de escribir la derivada de una función y se puede leer como: f´(x), la derivada de f(x), es la derivada de f(x) respecto a x o también el cociente del diferencial de f(x) dividido por el diferencial de la variable independiente.

Pero, volvamos a lo expresado acerca de la operación integral indefinida y el cálculo de la antiderivada. Podemos decir que la integral indefinida de f(x) respecto a x, y se escribe: $\int$ **f(x) dx**, es igual a F(x) si se cumple que: dF(x) / dx = f(x).

Ahora tenemos que corregir porque lo anterior está incompleto:

$\int$ f(x) dx = F(x) + C, ¿Por qué agregamos una constante C? Porque d [F(x) + C] / dx = f(x), ya que dC / dx = 0. Es decir, como la D_x [F(x) + C] = f(x) entonces ¿qué significa esta integral? El resultado no es una función sino **un conjunto infinito de funciones**.

Estrategia nº 2. El significado de los términos, de las palabras.

De lo anterior podemos indicar tres acepciones de este concepto o tres términos:

Primitiva F(x): se denomina así pensando que F(x) es la función de la que proviene la función f(x) (por derivación), siendo f(x) la que se posee como dato.

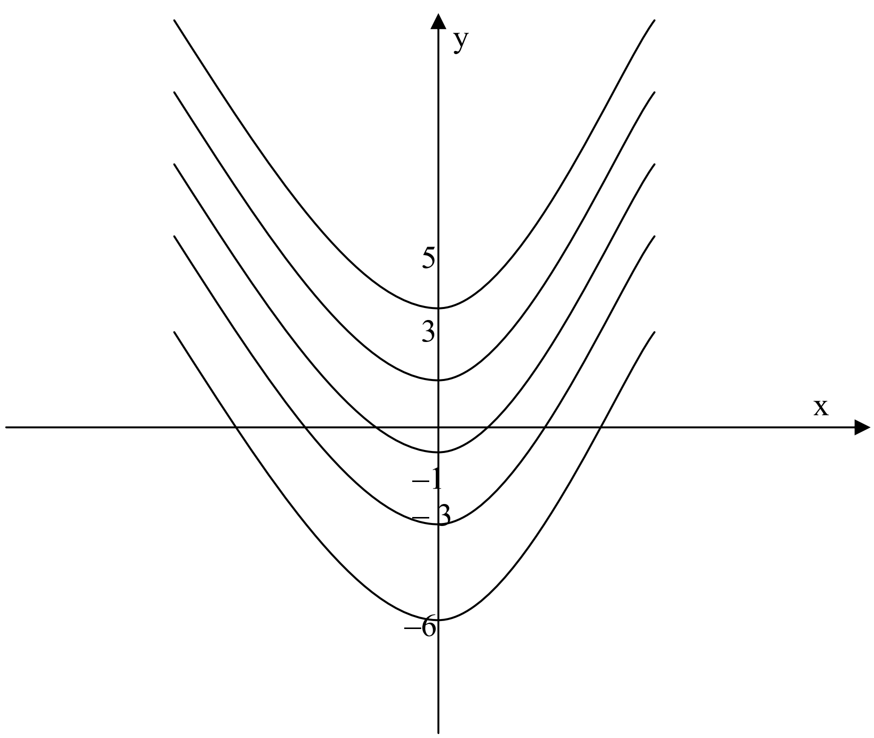
Antiderivada: indica la integración como la operación opuesta a la derivación.

Indefinida: es un conjunto infinito de funciones que difieren en una constante.

Estrategia nº 3: A propósito de esto último geométricamente se tiene:

Las siguientes son el conjunto de curvas que difieren en la constante, en un caso es F(x) +5, en otro F(x) + 3, F(x) –1, F(x) – 6, F(x) – 8, …

Un ejemplo más concreto puede ser: $\int$ 2x dx = x^2 +5, o x^2 + 3,…y las curvas abajo indicadas podrían ser el conjunto de las infinitas parábolas del tipo: x^2 + C

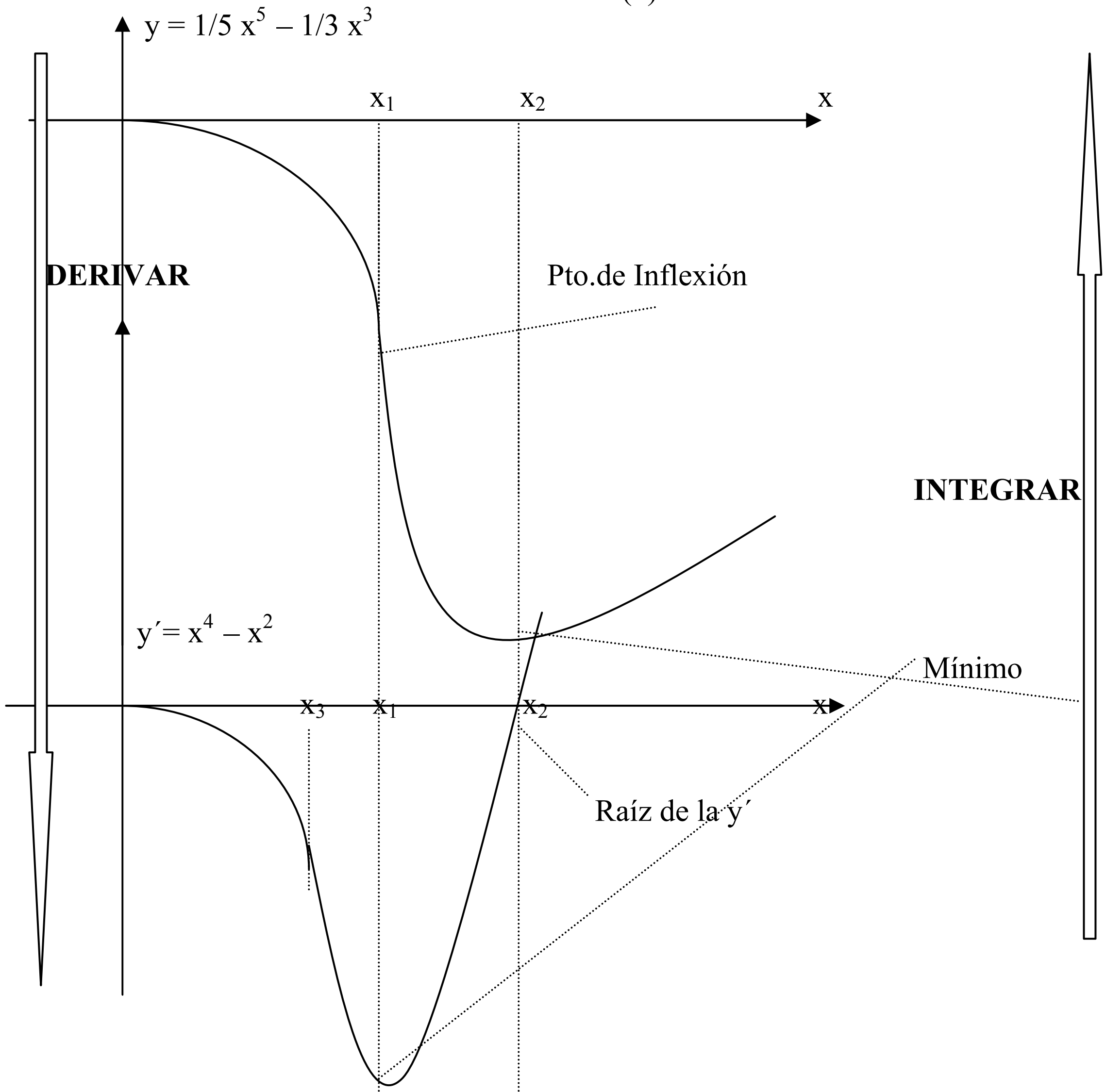


El algebra de las integrales

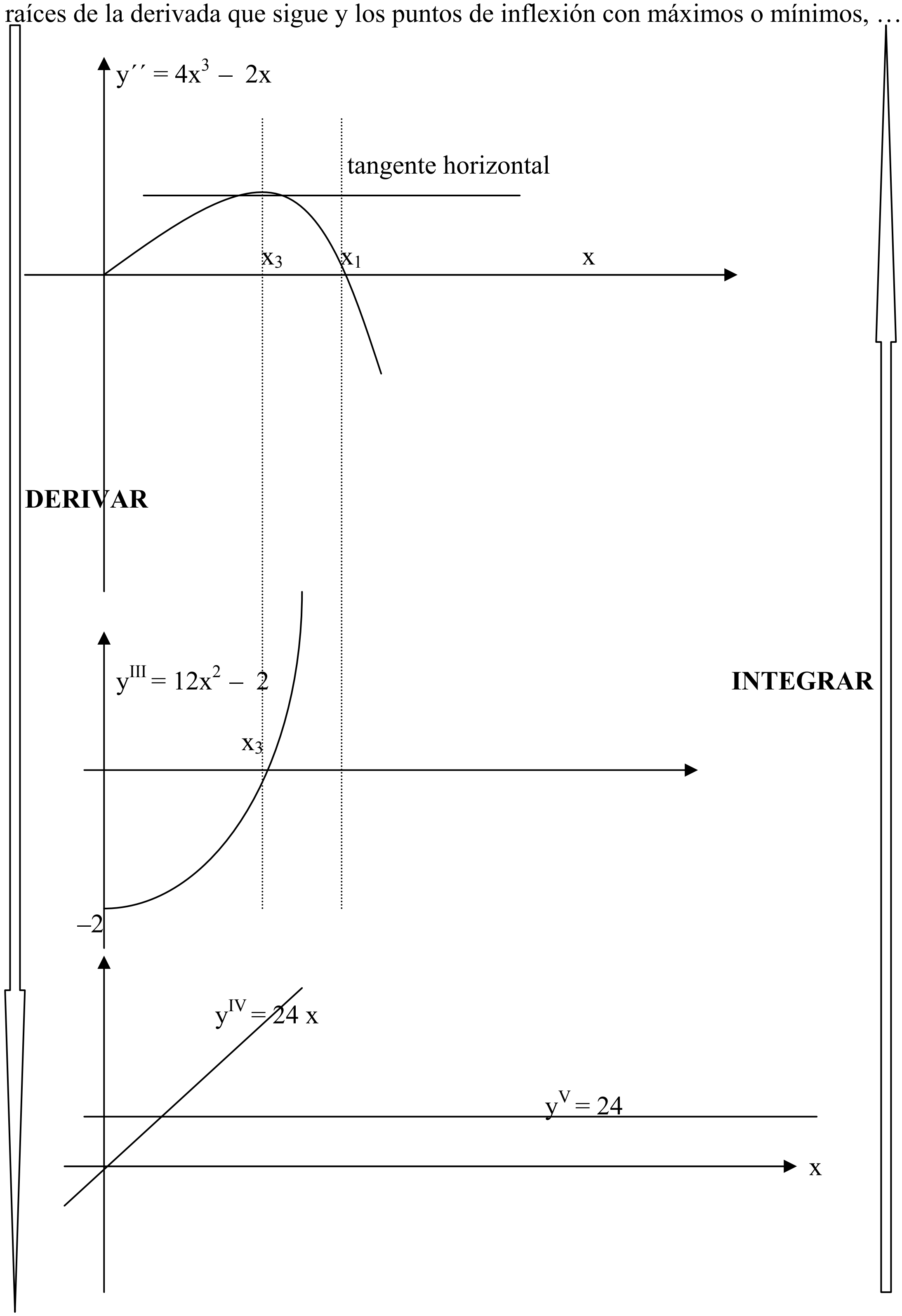
Si $\int 2x\,dx = x^2 + C$ y ahora operamos con el signo integral "pasándolo" al 2º miembro, es decir planteamos la operación opuesta en ambos miembros:

$2x\,dx = d(x^2 + C)$ (1) que es una igualdad correcta pues $d(x^2 + C)$ es igual a la derivada ($2x$) multiplicado por el diferencial de la variable independiente. Ahora en la expresión (1) se puede "pasar" el dx al 2º miembro, es decir, se puede dividir en ambos miembros por dx: $2x = d(x^2 + C) / dx$, también es legítimo pues $2x$ es la derivada de $(x^2 + C)$ respecto de x como expresa la igualdad. Ahora podríamos integrar en ambos miembros en la expresión (1), $\int 2x\,dx = \int d(x^2 + C)$, el 2º miembro resulta ser $x^2 + C$ y el resultado de la integral del 1º miembro también. En el primer miembro la función es $2x$, su integral respecto de x es la función cuadrática más una constante, ¿por qué?, su derivada…, en el 2º miembro la función es uno luego el resultado de la integral deberá ser tal que la derivada de la función respecto de $(x^2 + C)$ de uno y sólo puede ser la misma variable "independiente" o sea $(x^2 + C)$.

Resulta interesante considerar la función $f(x) = 1/5\,x^5 - 1/3\,x^3$.



Realicemos las derivadas sucesivas y', y'', y''',… hasta y^V. Luego hallemos las raíces de cada función y representemos gráficamente y en forma ordenada cada derivada debajo de la función, de modo tal que coincidan los máximos o mínimos con las raíces de la derivada que sigue y los puntos de inflexión con máximos o mínimos, …



Expresamente se han indicado los valores de x_1, x_2, y x_3. La lectura de “arriba hacia abajo” es derivar la función y en el sentido opuesto de “abajo hacia arriba” es integrar, ya que salvo la constante C en cada integración permite obtener las funciones anteriores a las derivadas o sea las primitivas. Por ejemplo:

$\int 24\, dx = 24x + C$, en nuestro caso $C = 0$

$\int 24\, x\, dx = 12\, x^2 + C_1$ que para nuestro ejemplo es $C_1 = -\ 2$, …

Propiedades de las integrales indefinidas

Se puede consultar a los autores sugeridos para un estudio más completo. Para el interés de este texto sólo presentamos un resumen de aquellas que se consideran más necesarias:

01. El signo diferencial, antepuesto al integral, lo anula. En efecto, como la diferenciación y la integración son operaciones opuestas:

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx$$

02. La integral del diferencial, es decir, el signo integral antepuesto al diferencial, es la propia función, siempre que se le sume una constante:

$$\int d\, f(x) = f(x) + C$$

Es un caso similar al anterior, pero ahora la última operación que se efectúa es la integración, la cual por no tener una única solución requiere agregar una constante.

03. La integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales respectivas.

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx$$

04. La integral de un producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int K \,.\, f(x)\, dx = K \,.\, \int f(x)\, dx$$

Cabe aclarar que la integral de un producto de funciones ***no es el producto*** de la integral de la 1ª función por la integral de la 2ª función, …

Cálculo de integrales indefinidas

La idea de cálculo proviene históricamente de los movimientos que realizaban los hombres de los pueblos antiguos, con piedras u otros objetos similares, para llevar a cabo sus contabilidades. Etimológicamente, piedra se dice *calculus* en latín. De modo que los cálculos se convirtieron en las distintas operaciones que se realizan con los objetos de la matemática. Y estos, como dijéramos antes son entes cognitivos (de conocimiento) vacíos.

Es decir, no poseen significado. También se expresa que son objetos **no semánticos**[41]; es decir, sólo sintácticos, de forma, o sin significado.

La enseñanza tradicional pone énfasis en el resultado y esto conlleva a una educación[42], que el alumno adquiere, donde se privilegia el producto final en desmedro del proceso. Pero, es este último quien provoca los cambios en las conductas, en el estudio y no la mera aplicación de fórmulas, las que enriquecen al futuro profesional, pero que no constituyen las metas u objetivos de la educación.

El cálculo de la integral indefinida no es sencillo, y no siempre es posible con los medios que se cuenta.

Para el profesional y el estudiante no matemáticos, es necesario conocer el concepto y luego poseer algunos elementos básicos de integrales.

Integrales inmediatas

Comenzamos con aquellas integrales donde el cálculo puede intentarse a partir del conocimiento de derivadas. Es análogo a la operación de dividir que se realiza utilizando "las tablas" de multiplicar. Estas integrales se denominan "**Inmediatas**".

Ejemplos:

a) $\int x^2\, dx$, esta es igual a una función que derivada resulte igual a x^2. Nosotros sabemos que las derivadas de las funciones polinómicas reducen en un grado a la función. De modo que en este caso el resultado debe ser una función cúbica.

Es decir $D(x^3) = 3 \,.\, x^2$. Ahora debemos corregir el factor 3 de modo que la derivada de la función cúbica resulte igual al integrando. Para ello dividimos por 3 en ambos miembros y resulta:

$D(x^3)/3 = 3 \,.\, x^2/3$. En el primer miembro podemos introducir el número tres como parte de la función dado que $D(x^3/3) = x^2$. De modo que ya tenemos la función primitiva o antiderivada que buscábamos:

$$\int x^2\, dx = x^3/3 + C, \text{ porque } D(x^3/3 + C) = x^2$$

b) $\int x^{2/3}\, dx$, en este ejercicio se puede pensar que la variable está elevada a la potencia 2/3, o sea $x^{2/3}$. Si consideramos el proceso anterior bastaría sumar 1 al exponente y luego dividir toda la expresión por el exponente final. O sea:

	Cálculos auxiliares
$\int x^{2/3}\, dx = 3/5\, x^{5/3} + C = I$ Si ahora derivamos para verificar o para justificar el resultado: $I' = D(3/5\, x^{5/3} + C) = x^{2/3}$	$2/3 + 1 = 5/3$ $I' = 5/3 \,.\, 3/5\, x^{5/3-1}$ $I' = x^{2/3}$

[41] Klimovsky, G. (pág. 199).
[42] Ver Apéndice I.

c) $\int dx / x$, para pensar esta integral comenzamos preguntándonos: ¿hay alguna función cuya derivada es $1 / x$? En la Tabla de derivadas tenemos

$D(\ln x) = 1/ x$ luego $\int dx / x = \ln x + C$, porque $D(\ln x + C) = 1/ x$

d) $\int e^{\pi x} dx$, de la tabla de derivadas se sabe que $D (e^{f(x)}) = f'(x) . e^{f(x)}$

En este caso $D(e^{\pi x}) = \pi . e^{\pi x}$. Como en el ejercicio a) pasamos π al primer miembro y lo introducimos en la función porque es una constante y como $D [K. f(x)] = K.f'(x)$, luego $D(e^{\pi x}) / \pi = e^{\pi x}$ que es la función buscada. Por lo tanto:

$\int e^{\pi x} dx = e^{\pi x} / \pi + C$, porque $D(e^{\pi x}) / \pi = . e^{\pi x}$

e) $\int a^x dx$, análogamente al ejercicio anterior y como $D(a^x) = \ln a . a^x$ resulta[43]:

$$\int a^x dx = a^x / \ln a + C, \text{ porque } D(a^x / \ln a + C) = a^x$$

f) $\int \dfrac{4 x^5 + 2 x^3 + x - 1}{x} dx =$ (la integral es de todo el cociente, o sea x está bajo el signo integral)

$= \int (4 x^4 + 2 x^2 + 1 - 1/x) dx = \int 4 x^4 dx + \int 2 x^2 dx + \int dx - \int 1/x dx =$

$= 4/5 x^5 + 2/3 x^3 + x - \ln x + C = I$, porque

$I' = 4 x^4 + 2 x^2 + 1 - 1/x$

Integrales por Sustitución

Se trata de estudiar la integral y observar si existe algún elemento, parte, porción de la función bajo el signo integral que sea derivada o algo similar (una derivada que difiera en alguna constante) de otra 2ª parte de la función.

Cuando esto ocurre se sustituye (de aquí el nombre de este método) esa 2ª parte de la función por otra variable por ejemplo: *u*. Luego se halla el diferencial de *u*, y si la sustitución es adecuada debe quedar bajo el signo integral una función en *u* que debe cumplir ser más accesible para su integración. Este sería el aspecto teórico previo. Es decir, aquello que se puede reflexionar, elaborar como una idea más general o más abstracta que surge de la práctica, de distintos ejercicios realizados.

Es conveniente que el alumno desarrolle su propia experiencia y teorice sobre o acerca de aquellos ejercicios de integrales y resuelva por el método de sustitución para llegar a la conclusión de una idea general o teoría. Por el contrario, no se sugiere que aplique lo dicho anteriormente, como una fórmula mecánica, porque ese no es el fin que persigue la educación matemática.

a) $\int \dfrac{x^2}{3 + 2 x^3} dx$

Las dos partes que podemos considerar son : x^2 por un lado y una 2ª parte $3 + 2 x^3$ por el otro donde se observa que x^2 es derivada de $3 + 2 x^3$, no exactamente porque $D_x(3 + 2 x^3) = 6 x^2$. Entonces podemos comenzar a estudiar la sustitución a partir de

[43] Pregunta: ln a es una constante o una función.

$u = 3 + 2x^3$, por lo tanto $du = 6x^2\,dx$ (1). Bajo el signo integral se tiene $x^2 . dx$, y despejando $x^2 . dx$ de la última igualdad (1), es: $x^2 . dx = du / 6$.

Reemplazando en la integral se tiene:

$$\int \frac{x^2}{3 + 2x^3}\,dx = \int \frac{1/6}{u}\,du = 1/6 \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(3 + 2x^3) + C = I$$

$$I' = (1/6) . (3 + 2x^3) . 6x^2 = (x^2) / (3 + 2x^3)$$

b) $$\int \frac{x}{(x^2 - 3)^{1/4}}\,dx$$

Podemos probar con $z = (x^2 - 3)$ o $z = (x^2 - 3)^{1/4}$, consideramos la primera sustitución. Luego $dz = 2x\,dx$ y por lo tanto: $dz / 2 = x\,dx$. Procedemos a sustituir en la integral la variable x por z de acuerdo con la igualdad planteada. Resulta:

$$\int \frac{dz/2}{z^{1/4}} = 1/2 \int \frac{dz}{z^{1/4}} = 1/2\,\frac{z^{3/4}}{3/4} + C = 2/3 . z^{3/4} + C = 2/3 . (x^2 - 3)^{3/4} + C = I$$

$$I' = 2/3 . 3/4\,(x^2 - 3)^{-1/4}\,2x = x / (x^2 - 3)^{1/4}$$

El lector podría probar con la 2ª sustitución propuesta.

c) $\int tgx . \ln sec^6x\,dx$ Entre las posibilidades[44] que tenemos de elegir distintas sustituciones está:

1ª) $u = tg\,x$, luego $du = sec^2x\,dx$, dado que $D_x(tgx) = sec^2x$, se observa que no se logra una función en u porque el logaritmo natural de la función trigonométrica a la sexta potencia no se puede sustituir en la integral por una función en u.

2ª) Se intenta ahora con $z = sec^6x$, si ahora hacemos el diferencial de z: $dz = 6\,sec^5x . secx . tgx\,dx = 6\,sec^6x . tgx . dx$, tampoco es posible sustituir la f(x) bajo el signo integral por una integral en f(z).

3ª) Una tercera sustitución es $y = \ln sec^6x$, luego $dy = (1/ sec^6x) . 6\,sec^5x . secx\,tgx\,dx$, sustituyendo en la integral la variable *x* por *y*, y simplificando: $dy = 6 . tgx\,dx$, "haciendo pasaje" del factor 6 de un miembro a otro: $dy / 6 = tgx\,dx$, sustituyendo en la integral:

$$\int tgx . \ln sec^6x = \int y . dy / 6 = 1/6 \int y . dy = 1/6\, y^2 / 2 + C = \mathbf{1 / 12\,(\ln sec^6x)^2 + C = I}$$

Por lo tanto $I' = (1/12)\,2 . \ln sec^6x . (1/ sec^6x) . 6\,sec^5x . tg\,x . secx$, simplificando resulta: $\mathbf{I' = \ln sec^6x . tg\,x.}$

d) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x . \ln x}\,dx$ Se puede pensar en dos[45] posibles sustituciones: 1º) u= ln(lnx) que origina un diferencial:

$du = (1/ \ln x) . (1/ x)\,dx$

2º) $z = \ln x$ ------------------------------------$dz = (1/x) . dx$

El 1º) permite la sustitución completa de todo el integrando, el 2º nos genera una integral del tipo: $\int \ln z / z . dz$

[44] Constituye una buena educación que el alumno pruebe todas las sustituciones que aquí se sugieren incluso algunas más que se le ocurran a él. Luego que fundamente por qué no son viables esos caminos. No se trata de decir está mal porque no es así sino indicar su no conveniencia a la sustitución que no produzca una mejora, un avance.

[45] Quizás al estudiante se le ocurra alguna otra más, todo esto sirve si educa, no es para repetir.

En cambio, la integral con la sustitución *u* es más accesible:
$\int u\, du = u^2 / 2 + C = [\ln(\ln x)]^2 / 2 + C = I$, porque I´…
$I' = 2 \cdot [\ln(\ln x)] \cdot (1/\ln x) \cdot (1/x) / 2$, simplificando el 2 del numerador y el denominador resulta el integrando.

Este tipo de resolución de integrales, este método: <u>*por sustitución*</u> *es muy educativo para el profesional no – matemático. Ofrece la posibilidad de probar, experimentar, no se trata de aplicar ninguna fórmula sino insisto: ensayar y luego a posteriori de esa estrategia de elección* $u = f(x)$ *con* $f(x) = x^2$, *o* $f(x) = \ln x$, *o* $f(x) = \operatorname{sen} x^2 + 4$, *se reemplaza y se observa si la integral es inmediata.*

Hay que "aprovechar" esta posibilidad que nos da la matemática de jugar con el conocimiento sin quitar ese otro aspecto también característico de la epistemología de la disciplina más exacta que es la lógica y que constituye el camino, la estrategia para fundamentar, para sustentar, es decir, para saber si lo que uno hizo está bien. Todo esto es necesario para la formación del futuro ingeniero, contador, médico o economista: ensayar y verificar lógicamente.

Integrales Trigonométricas

Para abordar este método, o esta clase de integrales, es necesario poseer algunos elementos de trigonometría. (Ver Capítulo I)

1º <u>La Relación Pitagórica</u> (una de las cinco relaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas) de la Trigonometría. Su expresión:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2º <u>Las relaciones del ángulo doble</u>:

$$\operatorname{sen}^2 (\alpha/2) = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2 (\alpha/2) = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

a) $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^6 x \cdot dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^6 x \cdot dx$

Este método de resolución guarda una sustitución no explícita. Se podría considerar que pertenece a las integrales a resolver por sustitución pero muy específicas, son sustituciones en integrales con funciones trigonométricas. En este caso se sustituye la variable independiente x por cos x. En realidad no es así como se piensa la resolución del ejercicio, sino como modificación del diferencial. En nuestro ejemplo se busca transformar el dx en otro: $\operatorname{sen} x \cdot dx = -\, d \cos x$, por definición de diferencial[46].

A continuación se transforma el resto del integrando hasta que todo quede expresado con cos x como variable independiente.

$I = -\int (1 - \cos^2 x)\ \cos^6 x \cdot d\cos x =$

[46] Se sugiere al lector que "revise" la definición de diferencial en el comienzo del Capítulo.

$= -\int (\cos^6 x - \cos^8 x)\ d\cos x = -(1/7)\cos^7 x + (1/9)\cos^9 x + C$, porque:

$I' = -(1/7) \cdot 7\cos^6 x\,(-\text{sen } x) + (1/9) \cdot 9\cos^8 x \cdot (-\text{sen } x) = -\cos^6 x\,(-\text{sen } x) + \cos^8 x \cdot (-\text{sen } x) = \cos^6 x \text{ sen } x\,(1 - \cos^2 x) = \cos^6 x \text{ sen } x \text{ sen}^2 x = \cos^6 x \cdot \text{sen}^3 x$

b) $I = \int \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x\, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\, dx$

	Cálculos Auxiliares
$\int (\cos^2 x - \cos^4 x)\, dx =$ $= \int (1/8 - 1/8 \cdot \cos 4x)\, dx =$ $= (1/8)\, x - 1/32 \cdot \text{sen } 4x + C$ porque $I' = 1/8 - 1/8 \cos 4x$ $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ que implica: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $1 + \cos 4x = 2 \cdot (2\cos^2 x - 1)^2$ $\cos 4x = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 =$ $= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ $I' = 1/8 - 1/8\,(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) =$ $I' = 1/8 - \cos^4 x + \cos^2 x + 1/8 =$ $I' = -\cos^4 x + \cos^2 x$ o también $I' = \cos^2 x - \cos^4 x$ que resulta ser el equivalente del integrando.	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $\cos^4 x = (1/4) \cdot (1 + \cos 2x)^2$ $(1 + \cos 2x)^2 = 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x$ $\cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2} = (1/2)(1 + \cos 4x)$ $\cos^4 x = (1/4) \cdot [1 + 2\cos 2x + (1/2) + (1/2)\cos 4x] = 3/8 + (1/2)\cos 2x + 1/8 \cdot \cos 4x$ $\cos^2 x - \cos^4 x = (1/2) + (1/2)\cos 2x - [3/8 + (1/2)\cos 2x + 1/8 \cdot \cos 4x] =$ $= 1/8 - 1/8 \cdot \cos 4x$

Entonces como síntesis podemos indicar que:

1º Caso: una de las funciones trigonométricas (por lo menos una) está elevada a una potencia impar.

$\int \text{sen}^m x \cdot \cos^n x\, dx$ (con m o n impar, o ambos)

La función elevada al exponente impar se descompone en un producto de un factor de exponente uno y el otro par que se transforma (por la relación pitagórica) en la otra función trigonométrica. El factor “unitario” con el dx se transforma en un nuevo diferencial. Finalmente se integra.

2º Caso: ambas funciones son potencias de exponente par.

$\int \text{sen}^{2m} x \cdot \cos^{2n} x\, dx$

Una de las funciones se reemplaza en la otra a partir de la relación pitagórica. Luego con la fórmula del ángulo doble se transforma en una función con el doble del ángulo anterior. Esto se repite hasta que se eliminan las potencias superiores a 1. Finalmente se integra respecto a la variable x.

Integrales por Partes

En este método se opera con dos funciones de x tradicionalmente indicadas como *u* y *v*. Por ejemplo: u = sen x o $v = e^x$, podríamos pensar nuevamente como en el tipo o método anterior que estamos en presencia de una sustitución y en este caso una doble sustitución que además guarda otras particularidades. Es decir, es un método de doble sustitución porque se consideran dos funciones bajo el signo integral, incluso una de ellas puede ser 1. O sea $u = 1$ y la otra v' (ya veremos por qué se puso derivada de la función v).

Para llevar a cabo esta forma de trabajo es necesario demostrar una igualdad, hallar una fórmula. El procedimiento es sencillo.

De las tablas de derivadas se obtiene la derivada de un producto de funciones:

$D(u.v) = u'.v + v'.u$

Luego podemos hallar el diferencial del producto de dos funciones:

$d(u.v) = u'.v\,dx + v'.u\,dx$, integrando el primer miembro y el segundo resulta:

$\int d\,(u.v) = \int (u'.v\,dx + v'.u\,dx)$, por las propiedades de las integrales el primer miembro se reduce al producto de (u.v), y el 2º miembro también por propiedades de las integrales es: $\int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$, es decir, es la suma de dos integrales. Finalmente:

$u.v = \int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$, reorganizando la igualdad:

$$\boldsymbol{\int v.u'\,dx = u.v - \int u.v'\,dx}$$

El estudiante debe observar, en caso que deba estudiarla de memoria, que las dos integrales de la fórmula son equivalentes, es decir, se componen de una función y la derivada de la 2ª función, cuando se toma u se multiplica por la derivada de v, y si se considera v se agrega como factor la derivada de u. El otro término del segundo miembro es el producto de funciones. La deducción facilita el estudio de este tema. O sea saber "de dónde salió" la expresión matemática. La integral del primer miembro es la integral que se posee como dato y la que hay que resolver. De modo que en nuestro caso como escribimos integral de v. u´ por diferencial x hay que considerar -de las funciones que se tienen en cada problema- cuál es la derivada de u y cuál la función v.

a) $\int x \,.\, \text{sen}\, x\, dx = \int v.\,u'\,dx$, vamos a adoptar:
$v = x$ implica que $v' = 1$
$u' = \text{sen}\, x$ implica que $u = -\cos x$, por lo tanto:

$\int x \,.\, \text{sen}\, x\, dx = (-\cos x)\,.\,x - \int -\cos x\, dx = -x\,.\cos x + \int \cos x\, dx =$
$= -x\,.\cos x + \text{sen}\, x + C$, porque I´…
$I' = -1\,.\cos x + (-x)\,.\,(-\text{sen}\, x) + \cos x = x\,.\,\text{sen}\, x$

Cabe aquí una reflexión. También se pudo haber elegido v = sen x y u´= x ¿Qué se hubiese obtenido? La derivada de sen x es cosx, esto no significa un cambio salvo el signo respecto a lo que hicimos pero, por el otro lado si integrábamos x resultaba $x^2 / 2$. Es decir, si elegimos como función al sen x, todo sigue igual porque integrar o derivar la función seno resulta lo mismo salvo el signo. Pero para la polinómica no es lo mismo integrar que derivar porque en un caso se aumenta el grado y en el otro disminuye.

Esta discusión es enriquecedora para el estudiante no matemático más que el mismo aprendizaje de la fórmula o la utilización para la resolución del problema o ejercicio matemático. Análisis de este tipo encierran la elección de criterios, su discriminación, la posibilidad de comparar estrategias que desarrollan la capacidad de optimizar un camino de solución.

b) ∫ lnx dx = ∫ u. v ´ dx, vamos a adoptar:
u = lnx --------- u´= 1/x
v´= 1 -------- v = x

∫ lnx dx = x . lnx – ∫ x . 1/x dx = x . lnx – x + C
I´= 1 . lnx + x . 1/x – 1 = lnx

Aquí la discusión se reduce al siguiente comentario: no existe otra posibilidad que u = lnx. El estudiante debería probar con la otra alternativa y averiguar por qué no es posible.

c) ∫ x . e^x dx,
u = x ----------- u´= 1
v´= e^x ----------v = e^x
∫ x . e^x dx = x e^x – ∫ e^x dx = x e^x – e^x + C
I´= e^x + x e^x – e^x = x e^x

El análisis es similar al caso a). La diferencia es que ahora la 2ª integral es idéntica porque v = v´, y en el caso a) era de una dificultad equivalente pero no exactamente igual. Las funciones trigonométricas seno y coseno poseen cierta diferencia de signo en la derivada del coseno, en cambio la función exponencial es exactamente igual la función y su derivada.

d) ∫ sen(lnx) dx,
u = senlnx -------- u´= coslnx. (1/ x)
v´= 1 -------------- v = x

∫ senlnx dx = x senlnx – ∫ x . coslnx. (1/ x) dx = x senlnx – ∫ coslnx dx (I)

Ahora vamos a calcular la ∫ coslnx dx, para ello adoptamos el mismo criterio de tomar u al coseno del logaritmo y la derivada a 1.
u = coslnx -------- u´= – senlnx. (1/ x)
v´= 1 -------------- v = x

∫ coslnx dx = x coslnx – ∫ x . (– senlnx) . (1/ x) dx = x coslnx + ∫ senlnx dx (II)

Reemplazando (II) en (I)
∫ senlnx dx = x senlnx – [x coslnx + ∫ senlnx dx] = x senlnx – x coslnx – ∫ senlnx dx

Como ∫ senlnx dx es la incógnita de esta ecuación se pasa la ∫ senlnx dx que está en el 2º miembro sumando y resulta:

$2 \int$ senlnx dx = x senlnx – x coslnx

$\int$ senlnx dx = (x / 2) . (senlnx – coslnx) realizando la derivada para verificar el resultado:

I´= (1 / 2) . (senlnx – coslnx) + (x / 2) . [coslnx. (1/ x) – (– senlnx) . (1/ x)] =
= (1 / 2). senlnx – (1 / 2). coslnx + (1 / 2) coslnx + (1 / 2) senlnx =
= senlnx

Cuando se tiene una función compuesta como senlnx hay que pensar en derivarla. Su integración es el propio problema, de modo que no hay otro camino que asignar a la función llámese v o u el valor senlnx y la derivada v´ o u´.

Integrales de funciones racionales por descomposición en fracciones simples

En general este método se lo conoce "por descomposición en fracciones simples".

Es de fundamental importancia la integración de estas funciones puesto que aparecen constantemente en todos los cálculos. Si se trata de expresiones enteras, no existe dificultad puesto que basta aplicar el método de descomposición, por ejemplo:

$$\int (x^7 – 6x^5) \, dx = \int x^7 \, dx – \int 6x^5 \, dx = 1/ 8 \, x^8 – x^6 + C$$

La complejidad del problema estriba en las funciones racionales fraccionarias. Sin embargo, existe un método que permite la integración de este tipo de funciones.

Por ejemplo:

$\int \dfrac{x^3 + 4x – 1}{x^2 + 2x + 5} \, dx$, ninguno de los métodos que ya vimos es práctico para aplicarlo. El método a que nos referimos es descomponer la función racional en fracciones simples. Es decir, llevar la función "cociente de polinomios" a una suma de funciones del tipo:

A / x – a + B / x – b + C / x – c) …………………… donde A, B, C, son constantes y a, b, c son raíces del denominador. Estas expresiones son sencillas de integrar como se verá más adelante. También veremos que la función racional inicial es equivalente a esa "suma de cocientes".

Estudiamos primeramente la función racional de dos polinomios P(x), Q(x):

$\int$ P(x) / Q(x) dx

El grado del numerador P(x) puede ser mayor, menor o igual que el del denominador. Cuando sea mayor se procederá a efectuar el cociente de modo tal que se obtenga:

P(x) / Q(x) = C(x) + [R(x) / Q(x)], siendo C(x) el cociente y R(x) el resto. La integral de C(x) se resuelve fácilmente porque es una función entera y queda la 2ª que será siempre de grado del numerador R(x) menor que el grado del denominador, Q(x).

Existen tres casos:

1º Que el denominador tenga raíces reales y simples.
2º Que el denominador tenga raíces reales y múltiples.
3º Que el denominador tenga raíces complejas.

Solo vamos a desarrollar el 1º y el 2º.

1º Caso: Raíces reales y simples

Dada la integral ∫ P(x) / Q(x) dx, supongamos que a, b, c son raíces reales simples. Debemos transformar este cociente en una suma del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} =$$

Calcularemos los valores de A, B, C. Recordemos que a, b, c son las raíces de Q(x) que por algún medio hemos podido conocerlas. Si realizamos la suma de fracciones en el 2º miembro tenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A \,.\, (x-b)\ (x-c) + B\,(x-a)\,(x-c) + C\,(x-a)\,(x-b)}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también deben ser iguales:

$$P(x) = A \,.\, (x-b)\ (x-c) + B\,(x-a)\,(x-c) + C\,(x-a)\,(x-b) \quad (1)$$

Para hallar las tres constantes, y en general n, se puede dar valor a x en el 1º y 2º miembro de algunas de las raíces, de ese modo se anularán dos términos del 2º miembro y se podrá despejar el valor de la constante. Ejemplo: si x = a:

$P(a) = A \,.\, (a-b)\ (a-c) + B\,(a-a)\,(a-c) + C\,(a-a)\,(a-b) =$

$P(a) = A \,.\, (a-b)\ (a-c)$ y por lo tanto

$A = \dfrac{P(a)}{(a-b)\ (a-c)}$, análogamente se calculan B y C.

Otra forma de calcular las constantes, consistiría en efectuar el producto del segundo miembro en la igualdad (1) y luego igualar los coeficientes del polinomio P(x) del primer miembro con los coeficientes del polinomio que resulta del 2º miembro donde figuran las incógnitas que nos interesan. Se origina un sistema de ecuaciones. Posiblemente la primera estrategia resulte más accesible.

a) $\int (9 / x^2 - 4x - 21)\ dx$

	Calc. Auxiliares
$(9 / x^2 - 4x - 21) = 9 / (x + 3) \,.\, (x - 7) = A/ (x + 3) + B / (x - 7)$ Por lo tanto: $\int (9 / x^2 - 4x - 21)\ dx =$ $\int A/ (x + 3)\ dx + \int B / (x - 7) dx =$	Las raíces del denominador aplicando la fórmula resolvente son: $x_{1,2} = -3$ y 7. $9 = A\,(x - 7) + B\,(x + 3)$, para x = 7 es: $9 = B\,(7 + 3) = 10\,B$, luego $B = 9 / 10$, análogamente $A = -9 / 10$

$\int (9 / x^2 - 4x - 21)\ dx = \int (-9 / 10) / (x + 3)\ dx + \int (9 / 10)/ (x - 7) dx =$

$= (-9 / 10) \ln (x + 3) + (9 / 10) \ln (x - 7) + C =$

$= (9 / 10) [\ln (x - 7) - \ln (x + 3)] + C = (9 / 10) \,.\, \ln [(x - 7) / (x + 3)] + C =$

$\int (9 / x^2 - 4x - 21)\ dx = \ln [(x - 7) / (x + 3)]^{9/10} + C$, realizando la I´

$$I = \ln \left\{ \frac{(x-7)}{(x+3)} \right\}^{9/10}$$

Hay tres operadores para derivar: el logaritmo natural, la potencia fraccionaria y el cociente[47].

$$I' = \underbrace{\left\{ \frac{(x+3)}{(x-7)} \right\}}_{D_x(\text{logaritmo})} \cdot \underbrace{(9/10) \left\{ \frac{(x-7)}{(x+3)} \right\}^{-1/10}}_{D_x(\text{potencia})} \cdot \underbrace{\frac{x+3-(x-7)}{(x+3)^2}}_{D_x(\text{cociente})} = (9/10)\ \frac{x+3}{x-7} \cdot \frac{10}{(x+3)^2} =$$

$= 9 / (x - 7)\ (x + 3) = 9/ x^2 - 4x - 21$, que es el integrando inicial.

b) $\int \frac{(3x + 2)\ dx}{x^2 - 5x + 6}$, como el grado del numerador es menor al del denominador, no es necesario dividir y por tanto la función racional queda así.

De todos modos hay que transformarla en una suma de fracciones tantas como raíces tenga el denominador, son dos.

$$\frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3x + 2}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A (x - 2) + B (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 2)}$$

Como los denominadores son iguales se pueden igualar los numeradores:

$3x + 2 = A (x - 2) + B (x - 3)$

Para $x = 3$:

$11 = A$

Para $x = 2$

$8 = B \cdot (-1)$, la integral resulta:

$I = \int 11\ dx / x - 3 + \int (-8)\ dx / x - 2 = 11 \ln (x - 3) - 8 \ln (x - 2) + C$

$$\mathbf{I = \ln \frac{(x - 3)^{11}}{(x - 2)^8} + C}$$

$$I' = \frac{(x - 2)^8}{(x - 3)^{11}} \cdot \frac{11(x - 3)^{10} (x - 2)^8 - 8 (x - 2)^7 (x - 3)^{11}}{(x - 2)^{16}} =$$

$$= \frac{(x - 2)^8 (x - 2)^7 \cdot (x - 3)^{10}}{(x - 3)^{11} (x - 2)^{16}} \cdot [11 (x - 2) - 8 (x - 3)] =$$

$$= \frac{11x - 22 - 8x + 24}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \mathbf{\frac{3x + 2}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = I'}$$

2º Caso: Raíces reales y múltiples

[47] Pregunta.: ¿cómo resolvería el producto de la primera llave elevado a la 9/10 por la 2ª a la (- 1/10)? Sugerencia: papel y lápiz.

$$\int \frac{4x^2 \ dx}{x^3 - 2x^2 + x} =$$

Las raíces del denominador son:

$x^3 - 2x^2 + x = x\ (x^2 - 2x + 1) = x\ (x - 1)^2$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Hay una raíz simple 0 y una raíz doble 1. La raíz múltiple debe aparecer tantas veces como indica su grado de multiplicidad.

Si *a* es una raíz del denominador de multiplicidad m, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{B}{(x-a)^{m-1}} + \frac{C}{(x-a)^{m-2}} \ \ldots\ldots \frac{M}{(x-a)} =$$

Es decir que, a partir de su orden de multiplicidad, la diferencia (x – a) aparece elevada a potencias de orden decreciente.

En este caso es dos. Luego:

$$\frac{4x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} = \frac{A\,x + B\,(x-1)x + C\,(x-1)^2}{x\,.\,(x-1)^2}$$

Cuando se presentan raíces múltiples, para calcular el valor de las constantes A, B, C, etc., es más conveniente utilizar el método o procedimiento de igualar los términos semejantes (con la variable x del mismo grado) en vez de dar los valores de las raíces a, b, c, etc., como habíamos realizado hasta ahora. En este caso que tenemos ahora solo se podría hallar el coeficiente A cuando se hace x = 1, pero con x = 0 no se obtienen B y C. Entonces se construye un sistema de ecuaciones:

$4x^2 = A\,x + B\,(x-1)x + C\,(x-1)^2 = A\,x + Bx^2 - Bx + Cx^2 - 2Cx + C =$

$4x^2 = (B + C)\,x^2 + (A - B - 2C)\,x + C$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes:

$$\begin{cases} 4 = B + C \\ 0 = A - B - 2C \\ 0 = C \end{cases}$$

resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: es A = 4, B = 4, C = 0.

$$\int \frac{4x^2 \ dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \frac{4\ dx}{(x-1)^2} + \int \frac{4\ dx}{x-1} = -4\,(x-1)^{-1} + 4\ln(x-1) + C$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{(x-1)}} + \mathbf{\ln(x-1)^4} + \mathbf{C}$$

$$I' = \frac{-4\,.\,(-1)}{(x-1)^2} + \frac{4\ (x-1)^3}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)}$$

$$\mathbf{I' = \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)} = \frac{4x^2}{x\,.\,(x-1)^2}}$$

Integrales de funciones racionales por sustitución

Vamos a ver aquellas funciones que son del tipo: $1/ ax^2 + bx + c$, y $1/ a(x - \alpha)^2 + \beta$, es decir, racionales fraccionarias con el denominador que indica una función cuadrática expresada en forma polinómica o normal. Si bien ya vimos un método para un polinomio particular de 2º grado (en el denominador) existe otra forma de resolver la integral.

$\int du / 1 + u^2 = \text{arc tg } u + C$

a) $\int dx / 49 + 4x^2$, se trata de transformar el polinomio del denominador por otro de la forma $1 + u^2$, entonces dividimos todo por 49 y resulta:
$1 / 49 + 4x^2 = (1 / 49) . [1 / 1 + (4x^2 / 49)]$, es decir $u = 2x / 7$ y por tanto
$u^2 = 4x^2 / 49$, $du = (2/ 7) dx$, sustituyendo x por u:

$\int dx / 49 + 4x^2 =$
$(1 / 49) \int (7/2) du / [1 + (4x^2 / 49)]$[48] $=$
$(1 / 49) . (7/2) . \int du / [1 + (4x^2 / 49)] =$

(1/14) . arc tg (2x / 7) + C, I´= ….

b) $\int dx / x^2 + 2x + 17$, se trata de transformar el polinomio de la forma polinómica a la normal. (Ver Capítulo Parábola)
Nosotros vamos a hacer: $x^2 + 2x + 17 = x^2 + 2x + 1 + 16 = (x + 1)^2 + 16 =$
$16 [1 + (x + 1)^2 / 16] = 16 [1 + (x + 1)^2 / 4^2]$, luego $u = (x + 1) / 4$, $du = 1/4\, dx$

$\int dx / x^2 + 2x + 17 = (1/ 16) \int dx / [1 + (x + 1)^2 / 4^2] = (1/ 16) \int 4\, du / 1 + u^2 =$
$(1/4) . \text{arc tg } u + C = (1/4) \text{ arc tg } [(x + 1) / 4] + C$, I´= ….

Cuando la integral es de la forma $\int du / 1 – u^2 = \text{arg th } u + C$, es decir, resulta la tangente hiperbólica. No se va a desarrollar.

Integrales de funciones irracionales cuadráticas

a) $\int (16 – x^2)^{1/2} dx$, hacemos la sustitución: $x = a \text{ sen } t$

La función tomará valores reales cuando $x^2 \leq 16$, luego deberá ser $x \leq 4$. Para realizar una sustitución deberá ser tal que se conserve esta desigualdad. Por ejemplo:
$x = 4 \text{ sen } z$, puesto que la función sen z (Ver capítulo I, trigonometría) es $\text{sen } z \leq 1$. Además $dx = 4 \cos z . dz$, $x^2 = 16 . \text{sen}^2 z$

Sustituyendo: $\int (16 – x^2)^{1/2} dx = \int (16 – 16 . \text{sen}^2 z)^{1/2} 4 \cos z\, dz =$
$\int 16 (1 – \text{sen}^2 z)^{1/2} \cos z\, dz = 16 \int \cos z \cos z\, dz$, considerando que (Cap. I Trigonometría) $\cos^2 z = 1/2 + 1/2 \cos 2z$
$I = 16 \int (1/2 + 1/2 \cos 2z) dz = 8 \int dz + 4 \int \cos 2z\, d\,2z = 8z + 4 \text{ sen } 2z + C$, y como de la trigonometría $\text{sen } (\alpha + \beta) = …$ y siendo $(\alpha = \beta)$ es:

[48] En esta expresión y en la siguiente hay un error: ¿cuál es? ¿Por qué?

sen 2z = 2 sen z . cos z,
$I = 8$ arc sen $x/4 + 2x \;.\; [1 - (x^2 / 16)]^{1/2}$
I′=…

b) $\int [(16 - x^2)^{1/2} / x^2]\, dx$, hacemos la sustitución: x = a sen t, con a = 4, dx = 4 cos t dt.

$\int [(16 - 16 \text{ sen}^2 t)^{1/2} / 16 \text{ sen}^2 t] \;.\; 4 \cos t\, dt = \int 4 (1 - \text{sen}^2 t)^{1/2} / 16 \text{ sen}^2 t] \;.\; 4 \cos t\, dt=$
$\int [(\cos^2 t)^{1/2} / \text{sen}^2 t] \cos t\, dt = \int (\cos^2 t / \text{sen}^2 t)\, dt = \int [(1 - \text{sen}^2 t) / \text{sen}^2 t]\, dt =$[49]
$\int \text{cosec}^2 t\, dt - \int dt = - \text{cotg } t - t + C$

	C.Aux.
$I = - (16 - x^2)^{1/2} / x$ – arc sen $x / 4 + C$ $I' = \dfrac{-[(1/2).\,(16 - x^2)^{-1/2}.\,(- 2x).\, x - (16 - x^2)^{1/2}]}{x^2} - \dfrac{1/4}{(1 - x^2/16)^{1/2}} =$ $I' = \dfrac{-[-x^2 - (16 - x^2)^{1/2}\; (16 - x^2)^{1/2}] - x^2}{x^2\;\; (16 - x^2)^{1/2}} =$ $I' = \dfrac{x^2 + 16 - x^2 - x^2}{x^2\; (16 - x^2)^{1/2}} = \dfrac{16 - x^2}{x^2\; (16 - x^2)^{1/2}} = \boldsymbol{\dfrac{(16 - x^2)^{1/2}}{x^2}}$	x = 4 sen t, dx = 4 cos t dt, $x^2 = 16$ sen^2 t sen t = x/4 cos t= $(1 - x^2 / 16)^{1/2} = 1/4\, (16 - x^2)^{1/2}$ cotg t = cos t / sen t = $(16 - x^2)^{1/2} / x$ ¡Ojo! D(arc sen x/4) = (¼) . $[1 / (1 - x^2/16)^{1/2}$ $(1 - x^2/16)^{1/2} = (1 / 4)\, (16 - x^2)^{1/2}$ Se simplifican los dos nros.fracc. (1/4)

c) $\int (x^2 - 4x + 13)^{1/2}\, dx.$
Hacemos la sustitución x = a tg t, vamos hacer x – 2 = 3 tg t, o sea a = 3

	Cálculos Auxiliares
$[(x - 2)^2 + 9]^{1/2} = (9 \text{ tg}^2 t + 9)^{1/2} =$ $= 3 (\text{tg}^2 t + 1)^{1/2} = 3 \sec t$ $\int (x^2 - 4x + 13)^{1/2}\, dx = \int 3 \sec t\; 3 \sec^2 t\, dt$ $= 9 \int \sec^3 t\, dt$*. $\int \sec^3 t\, dt = (1/2) \;.\; [\sec t \;.\; \text{tg } t + \ln (\sec t +$ $\text{tg } t)] + C$	Pasamos de la forma polinómica a la normal: $x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 9 = 9 \left[\dfrac{(x - 2)^2}{9} + 1\right]$ $(x^2 - 4x + 13)^{1/2} = 3 [(x - 2 / 3)^2 + 1]^{1/2}$ En este caso es x – 2 = 3 tg t $(x - 2)^2 = 9 \text{ tg}^2 t$ $dx = 3 \sec^2 t\, dt$ tg t = x – 2 / 3; $(x - 2)^2 / 9 = \text{tg}^2 t$ Del Cap. I de trigonometría: $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$ luego sect = $(1 + \text{tg}^2 t)^{1/2}$ sec t =$[(1/9)\, (x - 2)^2 + 1]^{1/2} = (1/3)\, (x^2 - 4x + 13)^{1/2}$

reemplazando los cálculos auxiliares: $(1/3)\, (x^2 - 4x + 13)^{1/2}$

$\int (x^2 - 4x + 13)^{1/2}\, dx =$

---

[49] Recordar que sen^2 α + cos^2 α = 1, y dividiendo por sen^2 α resulta 1 + cotg^{2}α = cosec^2 α.
* Esta integral se va a resolver más adelante, en métodos generales de resolución de integrales.

$= (9/2) . \{ (1/9) [(x^2 - 4x + 13)^{1/2} (x - 2) + \ln (1/3) [(x^2 - 4x + 13)^{1/2} + (x - 2)] \}$

I´= … Observar que se tiene un producto y un logaritmo natural de una suma, o sea, son dos derivadas.

Cálculos Auxiliares:

01. Recordar $D(\ln K f(x)) = 1 / Kf(x) \;.\; K. f'(x) = f'(x) / f(x)$
02. Recordar $\underline{(x^2 - 4x + 13)^{1/2} . (x^2 - 4x + 13)^{1/2}} = (x^2 - 4x + 13)^1 = (x - 2)^2 + 9$
03. $\underline{D (x^2 - 4x + 13)^{1/2}} = D (\quad)^{1/2} = (1/2) . (\quad)^{-1/2} 2 (x - 2)$
04. $\underline{D [(x^2 - 4x + 13)^{1/2} (x - 2)]} = D [(\quad)^{1/2} . (x - 2)] =$

$= (1/2) . (\quad)^{-1/2} 2 (x - 2) . (x - 2) + (\quad)^{1/2} . 1 = \dfrac{(x - 2)^2 + (x - 2)^2 + 9}{(\quad)^{1/2}}$

$= \dfrac{2 (x - 2)^2 + 9}{(\quad)^{1/2}}$

05. $\underline{D \{\ln (1/3) [(\quad)^{1/2} + (x - 2)] \}} =$

$\{1 / [(\quad)^{1/2} + (x - 2)]\} . [(1/2) . (\quad)^{-1/2} 2 (x - 2) + 1] =$

$\{1 / [(\quad)^{1/2} + (x - 2)]\} . [(x - 2) + (\quad)^{1/2}] / (\quad)^{1/2} =$

antes de seguir simplificando observar: se tiene dos fracciones, la 1ª:
$\{1 / [(\quad)^{1/2} + (x - 2)]\}$ y la 2ª: $[(x - 2) + (\quad)^{1/2}] / (\quad)^{1/2}$

el denominador de la 1ª: $[(\quad)^{1/2} + (x - 2)]$ es igual al numerador de la 2ª: $[(x - 2) + (\quad)^{1/2}]$, luego se cancelan entre sí. Resulta entonces que:

$D \{\ln (1/3) [(\quad)^{1/2} + (x - 2)] \} = 1 / (\quad)^{1/2}$

$D (9/2) . \{ (1/9) [(x^2 - 4x + 13)^{1/2} (x - 2) + \ln (1/3) [(x^2 - 4x + 13)^{1/2} + (x - 2)] \} =$

$= (9/2) . \{ (1/9) . [2 (x - 2)^2 + 9 / (\quad)^{1/2}] + [1 / (\quad)^{1/2}] \}$

Observar que se tienen dos fracciones dentro de la “llave” la 1ª multiplicada por (1/9), ambas poseen un factor común en ambos denominadores: $(\quad)^{1/2}$, esto facilita la suma de las fracciones, además se incorpora el factor nueve también en el denominador:

$(9/2) . \{ [2 (x - 2)^2 + 9 + 9] / 9 (\quad)^{1/2}$

simplificamos el 9 del numerador, factor común, con el nueve del denominador:

$= (1/2) . \{ [2 (x - 2)^2 + 18] / (\quad)^{1/2} = (1/2) . 2\{ [(x - 2)^2 + 9] / (\quad)^{1/2} =$
$= [(x - 2)^2 + 9] / (\quad)^{1/2} = [(x - 2)^2 + 9] / [(x - 2)^2 + 9]^{1/2} =$

$= [(x - 2)^2 + 9]^{1/2}$

d) $\int dx / x^3 (x^2 - 9)^{1/2}$

Hacemos la sustitución: $x = a \sec t$, en este caso:
$x = 3 \sec t$, por lo tanto $dx = 3 \sec t \operatorname{tg} t\, dt$, $(x^2 - 9)^{1/2} = (9 \sec^2 t - 9)^{1/2}$
$t = \operatorname{arc\,sec} x / 3$, $\cos t = 3/x$, $\operatorname{sen} t = (1 - 9/ x^2)^{1/2} = (x^2 - 9)^{1/2} / x$

Además del Cap. I sen 2t = 2 sen t cos t, sen 2t / 2= [$(x^2 - 9)^{1/2}$ / x] . (3/x)

$\int dx / x^3 (x^2 - 9)^{1/2} = \int [\, 3 \sec t \operatorname{tg} t \, dt \,] / \; 27 \sec^3 t \,.\, (9 \sec^2 t - 9)^{1/2}$

Observar que de la raíz cuadrada que se encuentra en el denominador se puede extraer el factor común 9 bajo el signo radical y luego resulta 3 en el denominador que se simplifica, bajo el signo radical queda una diferencia que es : tg^2 t y por tanto extrayendo la raíz cuadrada y simplificando con tg t del denominador:

$I = (1 / 27) \int \sec^{-2} t \, dt = (1 / 27) \int \cos^2 t \, dt$

$\int \cos^2 t \, dt = \int (\, 1 + \cos 2t) \, dt / 2 = (1/2) \,.\, [\, t + \operatorname{sen} 2t /2] + C'$

$I = t /54 + \operatorname{sen} 2t / 108 + C = (1 / 54) \operatorname{arc\,sec} x / 3 + (\, 1 / 108) [\, (x^2 - 9)^{1/2} / x \,] \,.\, (3/x) =$

$\mathbf{I = (1/18) [\, (1 / 3) \operatorname{arc\,sec} x / 3 + (x^2 - 9)^{1/2} / x^2)] + C}$

<u>Cálculo Auxiliar</u>: $(x^2 / 9 - 1)^{1/2} = (1/3) (x^2 - 9)^{1/2}$

$18.I' = (1 / 3). (1 / 3)[1/ (x / 3) \,.\, (x^2 / 9 - 1)^{1/2}] + [\, (1/2).2 \, x \, (x^2 - 9)^{-1/2} x^2 - 2x \, (x^2 - 9)^{1/2} \,] / x^4$

Observar que uno de los factores (1/3) se simplifica con el 3 que divide a x. En el paso siguiente se simplificará el otro (1/3) con el mismo número que se extrae de la raíz. En el 2º término se simplifican los factores (1/2) y 2.

$18.I' = (1 / 3). [1/ (1/3) \, x \, (x^2 - 9)^{1/2}] + [x^3 - 2x \, (x^2 - 9) \,] / x^4 (x^2 - 9)^{1/2}$

En el segundo término se divide por x y donde dice x^3 queda x^2, y 2x pasa a 2, y en el denominador también se transforma x^4 en x^3.

$18.I' = [1/ x \, (x^2 - 9)^{1/2}] + [x^2 - 2 \, (x^2 - 9)] / x^3 (x^2 - 9)^{1/2}$

Multiplicamos y dividimos el primer término por x^2 y resulta:

$18.I' = x^2 / \; x^3 (x^2 - 9)^{1/2} + [x^2 - 2x^2 + 18] / \; x^3 (x^2 - 9)^{1/2}$

Como los denominadores son iguales se suman los numeradores:

$[x^2 + x^2 - 2x^2 + 18] / \; x^3 (x^2 - 9)^{1/2}$

$I' = (1/18) \,.\, [\, 18 / x^3 (x^2 - 9)^{1/2} \,]$

$\mathbf{I' = 1 / x^3 (x^2 - 9)^{1/2}}$

Integrales de funciones irracionales lineales

Son expresiones del tipo: $\int (ax + b)^{1/n} dx$, puede haber más de una raíz, en ese caso conviene utilizar una sustitución con un n múltiplo de todos los índices, es decir, el mínimo común múltiplo. Ver más adelante ejercicio en Métodos generales de integración.

La sustitución es:
$ax + b = t^n$, $d(ax + b) = d\, t^n$;
$d(ax + b) = a \,.\, dx$; $d\, t^n = n \,.\, t^{n-1}\, dt$, por lo tanto $dx = (1/a)\, n \,.\, t^{n-1}\, dt$

Ejemplo: $\int \text{sen } 2\, (x)^{1/3}\, dx$, el índice de la raíz es 3, luego n = 3.
Sustitución: $x = t^3$, $dx = 3\, t^2\, dt$

$\int \text{sen } 2\, t \,.\, 3\, t^2\, dt$, es una típica integral por partes, y además podemos saber que como la función polinómica está elevada a la 2ª potencia necesitaremos integrar dos veces para eliminarla.

$\int \text{sen } 2\, t \,.\, t^2\, dt = \int u\, v'\, dt$,
$u = t^2$ ------------- $u' = 2t$
$v' = \text{sen } 2\, t$ ------ $v = (-1/2).\cos 2t$
$\int \text{sen } 2\, t \,.\, t^2\, dt = t^2\, (-1/2).\cos 2t - \int 2t\ (-1/2).\cos 2t\, dt$, simplificando en la integral y reorganizando los signos:
$\int \text{sen } 2\, t \,.\, t^2\, dt = (-1/2).\, t^2 \cos 2t + \int t \cos 2t\, dt$

$\int t \cos 2t\, dt =$
$u = t$ ------------ $u' = 1$
$v' = \cos 2\, t$ ------ $v = (1/2).\, \text{sen } 2t$
$\int t \cos 2t\, dt = (1/2).\, t \text{ sen } 2t - \int (1/2).\, \text{sen } 2t\, dt = (1/2).\, t \text{ sen } 2t + (1/4).\cos 2t + C'$

$\boldsymbol{\int \text{sen } 2\, t \,.\, 3\, t^2\, dt = 3\, [\, (-1/2).\, t^2.\cos 2t + (1/2) \,.\, t \text{ sen } 2t + (1/4).\cos 2t\,] + C}$
$I' = 3\, \{(-1/2).\, [\, 2t.\cos 2t + t^2.\, (-1)\, 2 \text{ sen } 2t] + (1/2).\, [\ \text{sen } 2t + t\, 2 \cos 2t] - (1/4).\, 2 \text{ sen } 2t\}$
$(1/3)\, I' = \underline{-t.\cos 2t} + t^2.\, \text{sen } 2t + \mathit{(1/2).\, sen\ 2t} + \underline{t \cos 2t} - \mathit{(1/2).\, sen\ 2t}$, se eliminan entre sí el 1º y el 4º término (subrayados) y el 3º con el quinto (en cursiva): $(1/3)\, I' = t^2.\, \text{sen } 2t$,

$\boldsymbol{I' = 3\, t^2.\, \text{sen } 2t}$, como $x = t^3$ es $x^{1/3} = t$, $x^{2/3} = t^2$ y $\text{sen } 2t = \text{sen } 2(x^{1/3})$, $\boldsymbol{I' = 3\, x^{2/3}.\, \text{sen } 2(x^{1/3})}$

Métodos Generales de Integración

a) $\int \sec^3 x\, dx$, la vamos a plantear por partes:
$\int u \,.\, v'\, dx = \ldots$
$u = \sec x$ --------- $u' = \sec x \,.\, \text{tg } x$
$v' = \sec^2 x$ --------- $v = \text{tg } x$
$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \text{ tg } x - \int \sec x \,.\, \text{tg}^2 x\, dx$, de la trigonometría es: $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, luego $\sec x \,.\, \text{tg}^2 x = \sec^3 x - \sec x$,

$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \,.\, \text{tg } x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx = \sec x \,.\, \text{tg } x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$
$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \,.\, \text{tg } x + \int \sec x\, dx$

Calculamos $\int \sec x\, dx$, para ello multiplicamos y dividimos por $\sec x + \text{tg } x$ (está asociado a las derivadas de la secante y la tangente).

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx$$

pero $(\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x)\, dx = d(\sec x + \operatorname{tg} x)$ teniendo en cuenta las derivadas de la secante y la tangente, por lo tanto

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{d(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C'$$

$\boldsymbol{\int \sec^3 x \, dx = (1/2)\,[\sec x \,.\, \operatorname{tg} x + \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] + C}$, I´= …..

b) $\int (e^{-t} - 1)^{1/2}\, dt$

De los métodos que conocemos podemos decir que no es inmediata, ni por partes, tampoco los últimos métodos de funciones racionales o irracionales. Aunque es una función irracional no posee un radicando polinómico sino una función no algebraica. Nos falta mencionar por sustitución. Vamos a intentar por sustitución aunque no por las funciones que ya vimos. Probamos con una sustitución logarítmica (¿Por qué?[50]):

<u>1ª Sustitución</u>

$-t = \ln x^2$ ------------ $dt = -(1/x^2)\,.\,(2x)\, dx = -2\, dx / x$

$e^{-t} = x^2$

$$\int (e^{-t} - 1)^{1/2}\, dt = \int \frac{-2\,(x^2 - 1)^{1/2}}{x}\, dx =$$

<u>2ª Sustitución</u>

$$\int \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{x}\, dx =$$

$x = \sec u$ -------------$dx = \sec u \,.\, \operatorname{tg} u\, du$, además $\operatorname{tg} u = (\sec^2 u - 1)^{1/2} = (x^2 - 1)^{1/2}$

$x^2 = \sec^2 u$ ------------- $x^2 - 1 = \sec^2 u - 1 = \operatorname{tg}^2 u$, Sustituyendo en la integral en x:

$\int [(\operatorname{tg}^2 u)^{1/2} / \sec u] \,.\, \sec u \,.\, \operatorname{tg} u\, du$, se cancelan las secantes y sólo queda bajo el signo integral $\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u - 1$,

$\int (\sec^2 u - 1)\, du = \int \sec^2 u\, du - \int du = \operatorname{tg} u - u + C$. Considerando el factor (-2) y volviendo a sustituir por x resulta:

$$-2 \int \frac{(x^2 - 1)}{x}\, dx = -2\,[(x^2 - 1)^{1/2} - \operatorname{arc\,sec} x] + C$$

y ahora podemos pasar a la variable t, teniendo en cuenta que: $e^{-t} = x^2$, y $e^{-t/2} = x$.

$$\boldsymbol{\int (e^{-t} - 1)^{1/2}\, dt = -2\,[(e^{-t} - 1)^{1/2} - \operatorname{arc\,sec} e^{-t/2}] + C}$$

<u>Cálculos Auxiliares</u>

$(e^{-t/2})^2 = e^{-t}$

[50] El logaritmo de un número es un exponente al que hay que elevar la base para que… entonces ¿para qué se toma logaritmo de un número? En este caso se elige: $t = -\ln x^2$ ¿por qué?

$D(\text{arc sec } z) = z' \, . \, [1 / z\,(z^2 - 1)^{1/2}\,]$ [51]

$I' = -2\ \{\ [\ (1/2)\ .\ (-e^{-t})\ .\ (\ e^{-t} - 1\ )^{-1/2}\ ]\ -\ [\ (-1/2)\ (\ e^{-t/2}\ )\ /\ (\ e^{-t/2}\ )\ (\ e^{-t} - 1\ )^{1/2}\ ]\ \}$

$I' = [\ e^{-t} / (\ e^{-t} - 1)^{1/2}\ ]\ - [\ 1 /\ (e^{-t} - 1\ )^{1/2}\ ] = (e^{-t} - 1\ ) / (e^{-t} - 1\ )^{1/2}\ =\ (e^{-t} - 1\ )^{1/2}$

$\mathbf{I' = (e^{-t} - 1\ )^{1/2}}$

[51] Ver cualquiera de los textos de la Bibliografía.

¿Cómo estudiar Integrales Indefinidas?

Hay una primera lectura general **comprensiva** que trata de los siguientes conceptos:

- *Diferencial de una función*: df(x), dy. Ver la definición, los gráficos y la interpretación geométrica.
- *Integral Indefinida*. Reflexionar acerca de los tres términos: primitiva, antiderivada e indefinida. Particularmente el 2º, antiderivada invita a pensar la integral como una función anterior a otra que ha sido dada o sea es primera o primitiva.

En esa primera lectura revisar todas las estrategias que propone *El Apunte* para un buen entendimiento de este ente matemático no siempre accesible.

Leer especialmente El álgebra de las integrales. En la Física y muy especialmente en la aplicación de la misma, Termodinámica o Electrotecnia, hay innumerables ejemplos para la utilización de los pasajes de miembro y otras operaciones similares realizadas con diferenciales e integrales.

Considerar la representación gráfica de la $f(x) = 1/5\ x^5 - 1/3\ x^3$ como un modelo. No está demás revisarla.

Huelga señalar la necesidad de comprender las propiedades.

Abordar el cálculo, hay una clasificación de ocho métodos, ocho "prototipos de integrales". En este trabajo de calcular es conveniente realizar todos los desarrollos tanto del álgebra como de la trigonometría. Consultar el Capítulo de Revisión y si no fuese suficiente buscar en los autores de la Bibliografía.

CAPÍTULO VI: INTEGRALES DEFINIDAS

Resumen

Introducción. Origen: cálculo de áreas de figuras planas. Integral Definida: concepto. Teorema Fundamental del Cálculo. Teorema 2 (Teorema de las integrales indefinidas). Relación entre la Integral Definida y la Integral Indefinida. Teorema 3 (Regla de Barrow). Resumen de los teoremas. Propiedades de las Integrales Definidas. Aplicación de las Integrales Definidas: a) Área limitada por dos curvas, b) Longitud de arcos, c) Áreas de sólidos de Revolución, d) Volúmenes de sólidos de Revolución.

Introducción

En este Capítulo vamos a ver:

01. ¿Por qué la integral definida?
    - Concepto – Definición
    - Gráfico (Cartesiano, dibujos, diagrama)
    - Algoritmo
    - Lenguaje simbólico
02. Teoremas
03. Propiedades de la Integral Definida
04. El área negativa
05. Algunos teoremas
06. El cálculo de integrales definidas
07. Las aplicaciones: longitud de una curva, el área y el volumen de un sólido de revolución

Origen: cálculo de áreas de figuras planas

El estudio del origen, de la historia de los conceptos matemáticos favorece su comprensión. Es bueno repetir que los objetos cognitivos que utiliza la matemática son o están vacíos de significado, son asemánticos[52], o puramente sintácticos, solo se considera el orden que ocupan en una expresión, fórmula matemática. Entonces, la búsqueda en la construcción del conocimiento por los pueblos que lo utilizaron es relevante para la enseñanza.

Los griegos trataron el tema de la cuadratura del círculo; refiere a aquel cuadrado o rectángulo de área equivalente al círculo dado. Nosotros procederemos a efectuar el cálculo del área por descomposición en sectores circulares. Es un tema que contiene algunos elementos que conoce el alumno y permite introducirnos al cálculo integral como sumatoria de "cosas muy, muy pequeñas".

Comenzamos considerando un círculo que dividimos en sectores circulares, primero en cuatro y luego en ocho, hasta … infinito.

---

[52] Semántico: aquello que posee un significado. La Semántica es el estudio del significado que poseen los signos lingüísticos.

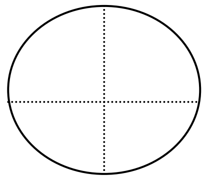


fig. I

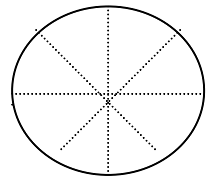


fig. II

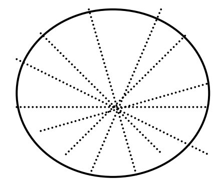


fig.III

Nosotros podríamos "acomodar" esos sectores circulares de forma tal que tanto en la Figura I, como en la II y luego en la III fuesen formando una suerte de *rectángulo*, claro, no es tal porque los cuartos, y luego los octavos y finalmente los dieciséis avos de cada círculo, respectivamente poseen "lados curvos". Pero, igualmente podemos indicar que en todos esos casos los pseudo rectángulos que se originan poseen una altura de r (radio) y una base de valor π r que es la longitud de la semicircunferencia. Claro que si ahora dividimos al círculo, no ya en un nº finito de sectores, sino en un número infinito de partes, entonces:

π r

r 

cada sector será una línea, y habrá un "nº infinito" de sectores que conformarán un rectángulo de lados π r y r tal que la superficie poseerá un área de valor $\pi r . r = \pi r^2$, que es la fórmula del área del círculo. Todo esto nos introduce a dos conceptos:

1) <u>Los elementos infinitesimales</u> (tan pequeños como yo quiera), y 2) <u>la suma de infinitos elementos</u> dieron origen al cálculo diferencial (el primero) y la otra al cálculo integral.

Observemos un poco, cuando se arriba al final de una asignatura es aconsejable realizar:

1º) alguna "descomposición" o señalar algunos núcleos que a veces se encuentran en las palabras claves; bueno, esto constituye lo que en *el análisis matemático* es el cálculo diferencial, y

2º) una síntesis, o sea una sumatoria "adecuada", que la constituye el cálculo integral.

Son dos miradas o dos lecturas necesarias para la comprensión de una materia y permiten pensar la matemática como una disciplina formativa antes que informativa, que forma y que posee objetos formales u operativos no sustanciales, no figurativos[53].

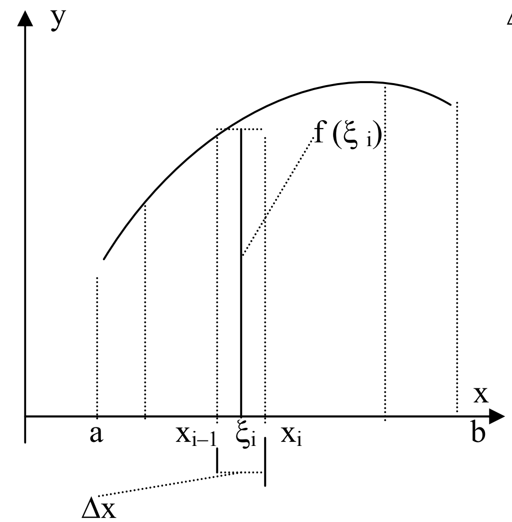
Integral Definida: concepto

¿Qué es una integral definida?

Sea y = f(x) una función continua definida en el intervalo [a ; b]. Calculemos el área encerrada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas extremas f(a) y f(b).

Para ello dividamos al intervalo en n partes, más pequeñas, con los puntos x_1, x_2, x_3, … x_{n-1}. La amplitud de cada uno de ellos es:

[53] Piaget, J. en Sacristán y Pérez Gómez.



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Elijamos en cada uno de esos intervalos un punto de abscisa ξ_i[54]. Multipliquemos entonces la amplitud Δx de cada intervalo por la función $f(\xi_i)$ tal que:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Ese producto nos da el área aproximada comprendida entre la curva, las ordenadas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ y el eje de abscisas. Es decir, el rectángulo indicado en la Figura. Sumando todos los productos semejantes, es decir las áreas de todos los rectángulos tendremos el área aproximada entre a y b.

$$A_{aprox.} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, . \, \Delta x_i$$

Para calcular el área exacta es necesario recurrir al concepto de límite, y por tanto “pensar” en intervalos con Δx_i tendiendo a cero: Δx_i -------- 0.

Si la amplitud de esos intervalos tiende a cero, y siendo b – a, amplitud del intervalo considerado para la función f(x) que no varía, el número de intervalos tenderá a incrementarse, a tomar un valor cada vez más grande y por tanto ese número tenderá a infinito. Luego el área buscada será:

$$A = \text{lím}_{\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, . \, \Delta x_i$$

(lím_{∞}: significa límite cuando n tiende a infinito)[55]

Pero cuando Δx_i ------ 0

$\xi_i \longrightarrow x_i$ (es decir el rectángulo tiende a un segmento de recta)

Entonces la expresión anterior se puede escribir:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \, . \, \Delta x_i$$

Este límite si existe es por definición: “la integral definida de la función f(x) entre a y b” y se expresa con la notación:

$\int_a^b f(x)\, dx$, donde a y b reciben el nombre de límites superior e inferior de la integral definida, o también extremos.

---

[54] $x = \xi_i$: abscisa del punto para el cual la función coincide con la altura del rectángulo formado.

[55] Se puede consultar Repetto, C. Tomo II.

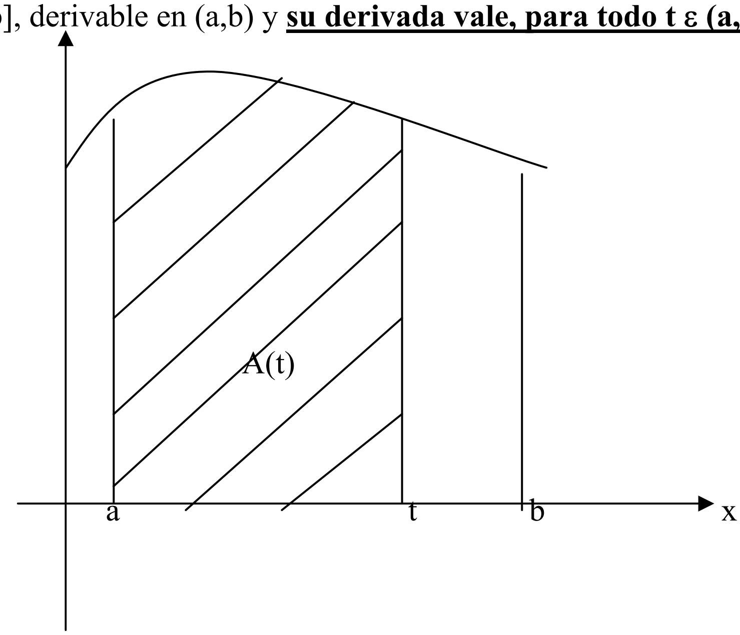
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

En consecuencia, podemos decir que:

La Integral Definida es el límite de la suma de intervalos en que se ha subdividido el área encerrada por: una curva, las ordenadas extremas de los límites del intervalo y el eje x, cuando el número de intervalos tiende a ∞ o lo que es lo mismo cuando cada subintervalo (su largo) tiende a cero.

Teorema Fundamental del Cálculo[56]

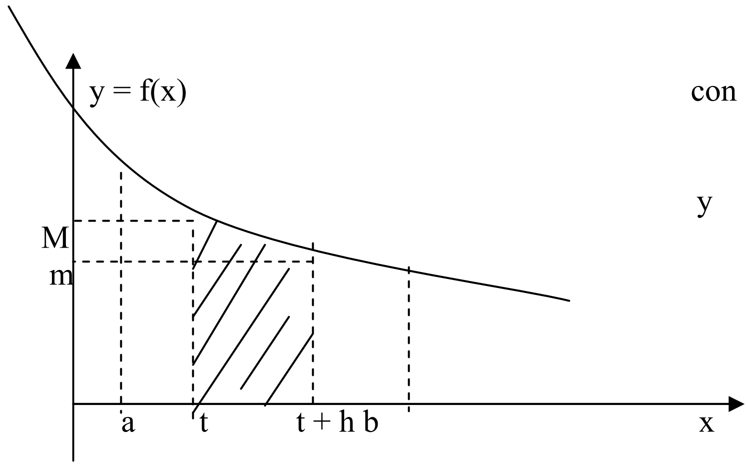
Si f(x) es una función continua en [a,b], la función $A(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ es contínua en [a,b], derivable en (a,b) y **su derivada vale, para todo t ε (a,b): A´(t) = f(t)**



Aunque el siguiente razonamiento geométrico no constituye una demostración rigurosa, muestra la validez del teorema cuya demostración se puede encontrar en textos de Análisis Matemático.

Este razonamiento se apoya en propiedades fuertemente intuitivas. Para calcular A´(t) comencemos por formar el cociente de incrementos, como hacíamos en el Capítulo de derivadas cuando aplicábamos la definición y suponiendo que $\Delta x = h \neq 0$.

[56] Esta presentación del Teorema Fundamental del Cálculo o su tratamiento teórico tanto como los dos siguientes siguen una sugerencia didáctica de los Cursos de Enseñanza del Análisis Matemático dictados por el CONICET.



con $M = f(t)$

y $m = f(t + h)$

$$A(t+h) = \int_a^{t+h} f(x)\,dx = \int_a^{t} f(x)\,dx + \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

$$\underline{A(t) \quad = \int_a^{t} f(x)\,dx}$$ restando miembro a miembro:

$$A(t+h) - A(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$ y dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \int_t^{t+h} \frac{f(x)\,dx}{h}$$ pero el primer miembro es la derivada primera cuando se

toma límite para h tendiendo a cero.

$$A'(t) = \text{lím}_0 \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \text{lím}_0 \ (1/h) \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

El valor de esta última integral es el área de la región sombreada donde m y M son los valores mínimo y máximo de f(x) en el intervalo [t ; t + h]. (que existen por el teorema de Weierstrass[57]). El área de la región sombreada estaría comprendida entre el área máxima y mínima de los rectángulos de base: t + h – t y alturas M y m. Luego, se puede establecer la doble desigualdad siguiente:

$$mh \leq \int_t^{t+h} f(x)\,dx \leq Mh$$

luego $m \leq (1/h) \int_t^{t+h} f(x)\,dx \leq M$

[57] Este teorema se estudia en el próximo Capítulo entre los Teoremas Fundamentales del Cálculo.

Cuando h tiende a cero el intervalo [t, t + h] tiende a reducirse a un único punto t y los valores m y M (valores de f(x)) tienden a coincidir con el valor f(t). Es decir, tomando límites para h tendiendo a cero los valores de las desigualdades anteriores tienden a f(t) y por lo tanto:

$(1 / h) \int_t^{t+h} f(x)\, dx = f(t)$ que es lo que queríamos demostrar. **O sea A´(t) = f(t)**[58]

Teorema 2 (Teorema de las integrales indefinidas)

Dos funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada. Este teorema es importante en nuestro estudio porque vincula la Integral Definida con la Integral Indefinida[59]. En el tema Integrales Indefinidas se señaló que éstas son las antiderivadas de la función dada. Es decir dada f(x) se trata de obtener una F(x) tal que F´(x) = f(x), para todo x en [a; b]. Si F(x) es una primitiva de f(x) en un intervalo [a; b] entonces cualquiera sea la constante C, la función definida en [a; b] por F(x) + C es también primitiva porque [F(x) + C]´ = F´(x) + 0 = F´(x) = f(x)[60]

Teorema 3 (Regla de Barrow)

Sea f una función continua en un intervalo [a; b] y sea F una integral indefinida cualquiera de f en [a; b], luego:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

<u>Demostración</u>: Según afirma el Teorema Fundamental del Cálculo, la función

$A(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ es una integral indefinida de f(x) en [a; b]. Como por hipótesis F también lo es por el teorema anterior podemos decir que existe una C tal que para todo t ε [a; b] es A(t) = F (t) + C. Si ahora consideramos t = a es:

$A(a) = \int_a^a f(x)\, dx$ que resulta ser igual a cero por ser el área desde a hasta a (o sea cero).

Luego A(a) = F(a) + C = 0 luego C = – F(a)

A(t) = F(t) – F(a) y para t = b es A(b) = F(b) – F(a) o sea:

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$, la Tesis de Barrow.

---

[58] ¿Qué nos dice este teorema? De esta forma se reflexiona acerca de la tesis. Bueno, esta última señala que el área debajo de una curva, simplificadamente, es la integral de la función en ese intervalo ¿Dice exactamente así?

[59] Este vínculo está mencionado con énfasis en la Introducción de este texto.

[60] Puede ser útil para estudiar este teorema revisar el gráfico de las parábolas: $x^2 + C$, del ppio. del Capítulo V.

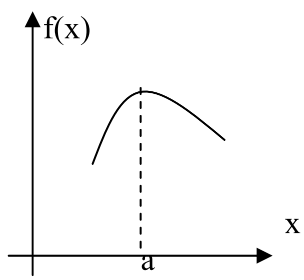
Resumen de los teoremas

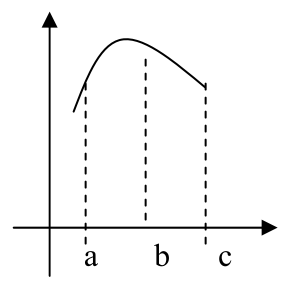
Título	Enunciado	Expresión simbólica (Tesis)
Teorema Fundamental del Cálculo	f(x) continua en [a; b], $A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$; A(t) es continua y derivable en [a; b]	$D_t\, A(t) = f(t)$
Teorema de las Integrales Indefinidas	F(x) y G(x) son funciones continuas en [a; b] y difieren en una constante C.	$F'(x) = G'(x) = f(x)$ Luego F(x) y G(x) son integrales indefinidas de f(x)
Teorema de Barrow	f(x) continua en [a; b], F(x) integral indefinida cualquiera en [a; b]	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Propiedades de las Integrales Definidas

05. Cuando los límites coinciden, el área y por lo tanto la ID, se anulan.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$





06. El intervalo de integración se puede subdividir

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

07. Si a una integral se le invierten los límites, mantiene el mismo valor pero de signo contrario.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

08. Recordando la definición de Integral Definida:

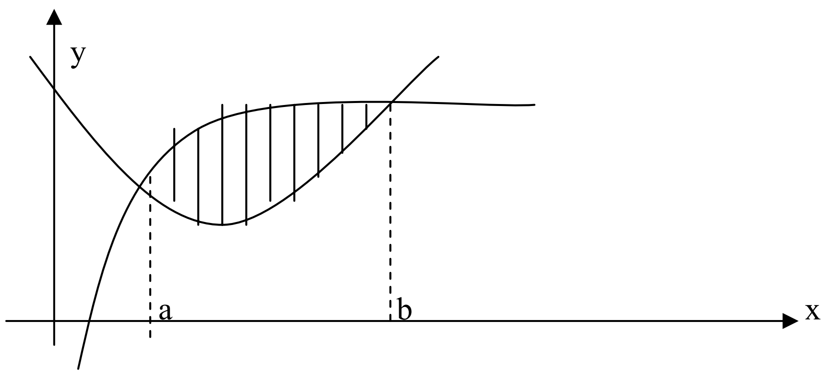
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum f(x_i) \,.\, \Delta x_i$$ y siendo Δx_i positivo, si $f(x_i)$ es negativo, los

términos de la sumatoria son negativos y el área resulta por lo tanto de valor negativo.

Un área es negativa cuando está por debajo del eje de abscisas.

Aplicación de las Integrales Definidas

a) Área limitada por dos curvas



Cuando un área está limitada superior e inferiormente por dos curvas, el procedimiento para el cálculo de dicha área consiste en hacer la diferencia de otras dos integrales definidas, que se corresponden con otras dos áreas. Estas últimas son: las comprendidas entre cada una de las curvas, el eje x y las ordenadas extremas, f(a), f(b) pertenecientes a los puntos de intersección de las curvas. Es decir que integramos cada una de las curvas por separado y restamos una superficie de otra.

Por ejemplo: Dadas las parábolas $f_1(x) = (2x)^{1/2}$; $f_2(x) = x^2 / 2$.

1º <u>Encontrar las abscisas de las intersecciones</u>:
para ello igualamos las ordenadas, o sea $f_1(x) = f_2(x)$ y por tanto
$(2x)^{1/2} = x^2 / 2$ los puntos de intersección poseen abscisas tales que
$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

2º <u>Plantear la Integral definida y proceder a su cálculo</u>. En algunos casos es muy necesario, útil, dibujar ambas curvas en un gráfico cartesiano.

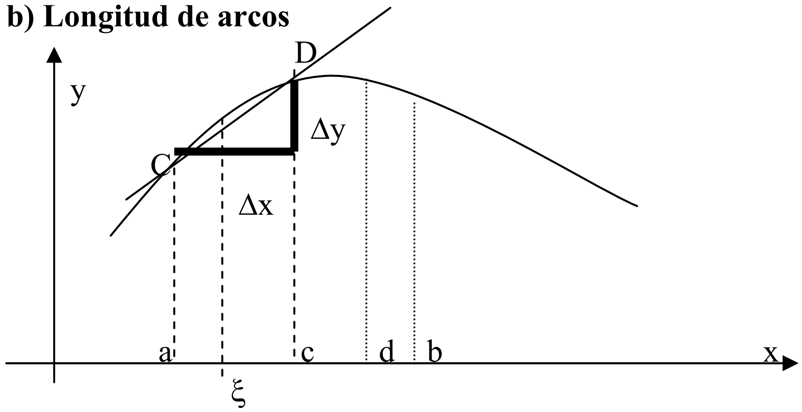
$$\int_0^2 [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int_0^2 [\ (2x)^{1/2} - x^2 / 2\ ]\, dx$$

$$= (1/2)\ \left\{ \int_0^2 (2x)^{1/2}\, d(2x) - \int_0^2 x^2\, dx \right\} = (1/2) \left| (2/3)\,(2x)^{3/2} - x^3 / 3 \right|_0^2 =$$

$$= (1/2)\,(\,2.8 / 3 \;-\; 8 / 3) = 4 / 3$$

Area = 4/3

b) Longitud de arcos



Otra gran aplicación de la integral definida es el cálculo de longitudes de arcos. Sea la función y = f(x). Si queremos calcular la longitud de un arco AB, dividamos al arco en n partes con los puntos de abscisas a, c, d, e, ….b. Uniendo esos puntos tendremos una poligonal inscripta en el arco de curva. Llamamos longitud del arco al límite de la suma de los lados de la poligonal cuando el número de estos tiende a infinito. Una poligonal de infinitos lados tiene como límite al propio arco de curva. Vemos en la Figura que, por el teorema de Pitágoras, la longitud de uno de los lados de la poligonal vale:

$CD^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$ y en general se puede escribir:

$$\overline{P_{i-1}}\, P_i = (\Delta y^2 + \Delta x^2)^{1/2}$$

Se sugiere que el lector, el estudiante, dibuje el triángulo rectángulo en un diagrama cartesiano, y señale expresamente las abscisas x_{i-1} y x_i. Indique también el valor de esos lados: Δy_i , Δx_i ,

Por el teorema del valor medio o de Lagrange del cálculo diferencial, se cumple que:

$$\Delta y_i = \Delta x_i \,.\, f'(\xi_i) \quad \text{siendo } x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

Luego $P_{i-1}\, P_i = (f'(\xi_i)^2\, \Delta x_i^2 + .\Delta x_i^2)^{½} = \Delta x_i\, (f'(\xi_i)^2 + 1)^{1/2}$

La longitud de la poligonal será la suma de sus lados:

$$\text{Long.poligonal} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, (f'(\xi_i)^2 + 1)^{1/2}$$

Y la longitud del arco es el límite de la expresión anterior cuando cada lado se hace infinitésimo, es decir cuando el nº de lados tiende a infinito.

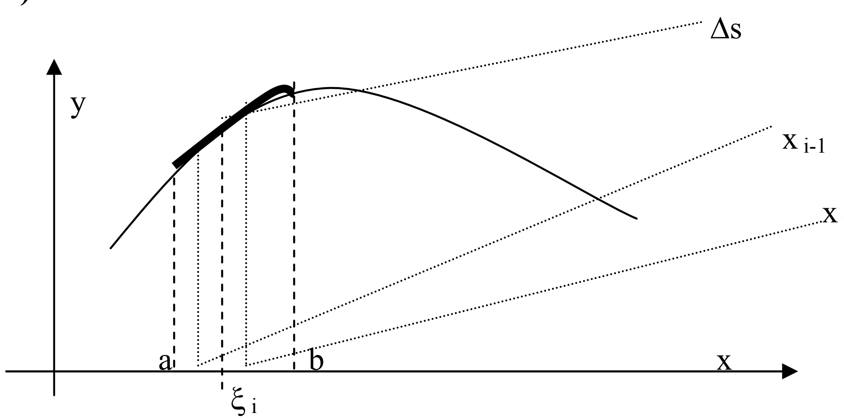
$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, (f'(\xi_i)^2 + 1)^{1/2}$$

y por definición:

$$S = \int_a^b (f'(x)^2 + 1)^{1/2} \, dx$$ pues cuando $n \to \infty$, $\xi_i \to x_i$

De lo anterior se desprende que $ds = (f'(x)^2 + 1)^{1/2} \, dx$

c) Áreas de sólidos de Revolución



Sea la función $y = f(x)$. Si la curva gira alrededor del eje x, engendrará una superficie cuyo valor calcularemos.

Consideremos un intervalo Δx_i. Al girar alrededor del eje, genera una superficie que, si Δx es suficientemente pequeño, es aproximadamente un tronco de cono. Su área lateral vale: $2\pi f(\xi_i)\,\Delta s$, siendo ξ_i un punto del intervalo Δx_i.

El área total aproximada será la suma de las áreas elementales: $A_{aprox} = \sum 2\pi f(\xi_i)\Delta s$, desde $i = 1$ hasta n, y el área exacta es el límite de esta cuando cada intervalo Δx tiende a cero.

En ese caso, cada elemento de arco también tiende a cero y el área lateral de los troncos de cono se confunde con el área buscada.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum 2\pi\, f(\xi_i)\, \Delta s$$

y por definición de integral definida

$$A = \int_a^b 2\pi\, f(x)\, ds \text{ y como } ds = (f'(x)^2 + 1)^{1/2}\, dx$$

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \,.\, (f'(x)^2 + 1)^{1/2}\, dx$$ esta es la fórmula del área engendrada por una curva que gira alrededor del eje x.

d) Volúmenes de sólidos de Revolución

Sea la y = f(x) considerada para el cálculo del área engendrada por rotación en el ítem anterior y sobre ella un arco AB. Si esta curva gira alrededor del eje de las x, engendrará un volumen, que calcularemos. Considérese un intervalo de amplitud Δx limitado por los puntos de abscisas: x_i , x_{i-1}.

En una primera aproximación, el volumen engendrado por el arco de curva correspondiente al intervalo Δx es igual al volumen del cilindro de altura Δx_i y de radio $f(\xi_i)$ siendo ξ_i una abscisa de un punto del intervalo.

$$V_i = \pi\, f(\xi_i)^2\, \Delta x_i$$

El volumen aproximado total será la suma de cada uno de esos volúmenes elementales:

$$V_{aprox} = \sum \pi\, f(\xi_i)^2\, \Delta x_i$$

El volumen exacto será el límite de esta sumatoria cuando cada intervalo tiende a cero y el número de ellos es infinito.

$$V = \lim_{n \to \infty} \pi \sum f(\xi_i)^2\, \Delta x_i = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Integrales Impropias

Resumen

Concepto de Integral impropia. Ejemplos. Áreas y Volúmenes.

Concepto de Integral impropia[61]

Comenzamos considerando una función f continua en un intervalo no acotado $[a,\infty)$. Para cada número $b > a$ podemos formar la integral

$\int_a^b f(x)\,dx$, si esta integral tiende a un límite l cuando $b \to \infty$,

$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx = l$, escribiremos: $\int_a^\infty f(x)\,dx = l$, y diremos que

la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge a l.

En caso contrario, diremos que la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

De manera análoga, las integrales impropias del tipo

$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ aparecen como límite de la forma $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplos

01. $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \Big[-e^{-x} \Big]_1^b = \lim_{b \to \infty} (1/e - 1/e^b) = 1/e$

02. $\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-1}\,dx = \lim_{b \to \infty} \Big[\ln b \Big] = \infty$, luego diverge.

[61] Salas, S., Hille, E. (760).

03. $\int_1^{\infty} x^{-2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} x^{-2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-x^{-1} \right]_1^{b} = \lim_{b \to \infty} [\, 1 - (1/b)\,] = 1$

04. $\int_{-\infty}^{1} \cos\pi x\, dx = \lim_{b \to -\infty} 1/\pi \int_b^{1} \cos\pi x\, d\pi x = 1/\pi \lim_{b \to -\infty} \left[\operatorname{sen}\pi x \right]_b^{1} =$

$= 1/\pi \lim_{b \to -\infty} \left[\operatorname{sen}\pi x \right]_b^{1} = 1/\pi \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{sen}\pi b)$; (tener en cuenta que sen $\pi = 0$)

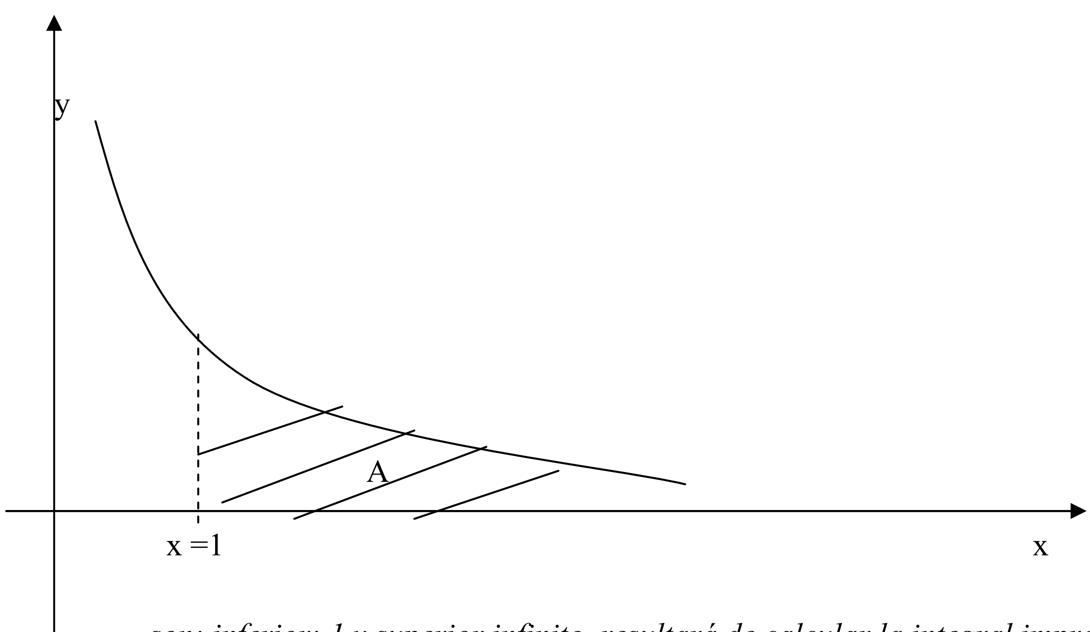
Cuando b tiende a menos infinito, senπb oscila entre – 1 y 1. Luego la integral oscila entre $1/\pi$ y $-1/\pi$, o sea no converge.

Recordar que la función sen x varía entre – 1 y 1.

Áreas y Volúmenes

Vamos a considerar por ahora, solo la integral indefinida y vamos a proceder a su cálculo: $\int dx / x^p = \int x^{-p}\, dx = x^{-p+1} / (-p+1) = \mathbf{x^{1-p} / (1-p)}$, *verificamos el resultado por la derivada*: $D_x [\, x^{1-p} / (1-p)\,] = (1-p) / (1-p) \cdot x^{-p} = x^{-p}$

Si A es la región debajo de la Gráfica de $f(x) = 1 / x^p$ con $x \geq 1$, y considerando el cálculo de la integral indefinida, el área debajo de la curva, considerando que los límites



son: inferior: 1 y superior infinito, resultará de calcular la integral impropia.

Consideremos ahora la integral definida con extremos 1 y b y luego calculemos el límite para b tendiendo a infinito.

$$\int_1^b dx / x^p = x^{1-p} / (1-p) \Big|_1^b = [1 / (1-p)] . [b^{1-p} - 1]$$

Para b tendiendo a infinito es:

$$\lim_{b \to \infty} [1 / (1-p)] . [b^{1-p} - 1]$$

$$\text{entonces área de A} = \begin{cases} 1 / (p-1), \text{ si } p > 1 \\ \infty, \quad \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

Para $p \neq 1$

$$\int_1^\infty dx / x^p = \lim_{b \to \infty} [1 / (1-p)] . [b^{1-p} - 1]$$

para $p > 1$; $\mathbf{A = 1 / (1-p)}$

para $p < 1$; $\mathbf{A = \infty}$

para $p = 1$; $\mathbf{A = \infty}$

esta última es el área debajo de la función 1 / x que ya vio.

¿Cómo estudiar Integrales Definidas?

Este Capítulo posee dos grupos de contenidos.

Por un lado, el concepto de *Integral Definida y los teoremas,* y por el otro: *las aplicaciones* del tema en estudio.

Entonces estudiar requiere a veces, cuando se arriba al final de alguna etapa, la estrategia de clasificar; en este caso se han propuesto para una revisión dos clases, una más teórica y otra llamada práctica. La mente requiere permanentemente de organizaciones provisorias que actúen como soportes.

Los teoremas necesitan de comprensión, de ponerle palabras a las expresiones simbólicas, a las tesis. El Teorema Fundamental se sustenta sobre *la definición de derivada* y arriba a una conclusión que es una derivada: A(t) = f(t). Conviene decirlo con palabras cuando se obtiene esa igualdad. El segundo teorema es más sencillo y relativamente inmediato trata de la idea de *indefinición* atribuida a las integrales del Capítulo anterior. Finalmente, el tercer teorema es la relación entre los dos tipos de integrales. A posteriori se presenta un Cuadro, como una suerte de síntesis que permita mirar los temas anteriores "en un soplo".

Se espera que no ofrezcan mayores dificultades las propiedades.

Luego siguen las aplicaciones. En el texto se han omitido dibujos de áreas y volúmenes de cuerpos. Es necesario que el lector se dedique a realizarlos. También es conveniente que busque distintos ejemplos en la bibliografía a partir de trabajar con figuras y cuerpos teóricos: elipses o circunferencias, troncos de cono y arribar a problemas extradisciplinarios o de aplicación, por ejemplo en física.

Se agrega a este Capítulo las integrales impropias que utilizan los conceptos de límites, integrales indefinidas y definidas.

CAPÍTULO VII: TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Resumen

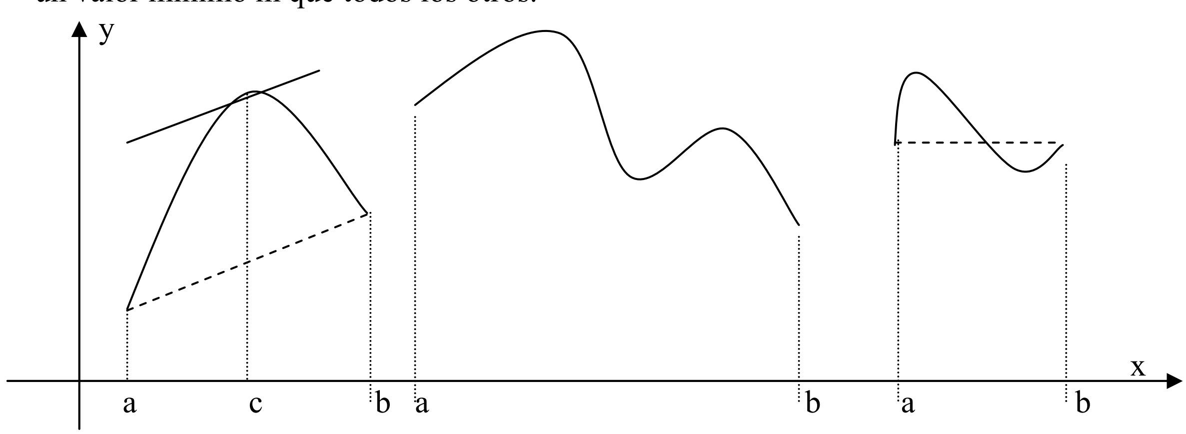
Introducción. Teorema de Weierstrass. Teorema de Rolle. Teorema del Valor Medio (o de Lagrange o de los incrementos Finitos). Teorema de Cauchy. Límites indeterminados. Regla de L´Hospital. Forma 0 / 0. Forma ∞ / ∞. Formas ($0 \cdot \infty$) e ($\infty - \infty$). Formas exponenciales ∞^0; 0^0; 1^∞. Teorema generalizado del Valor Medio. Fórmula de Taylor y Maclaurin (o Mac – Laurin). Término Complementario. Desarrollo de las funciones elementales (y = sen x)

Introducción

Un investigador se preguntaría por qué este Capítulo en un libro de matemática para no matemáticos, y un ingeniero formularía el interrogante para qué. Al primero le interesan las causas e incluso los antecedentes, al otro los objetivos y las metas. El científico estudia para comprender, el profesional ¿aplicado? desea llevar a cabo, desarrollar.

Teorema de Weierstrass

"Toda función continua en un intervalo cerrado [a; b], alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m que todos los otros."



Teorema de Rolle[62]

"Si una función continua y derivable toma valores iguales en dos puntos, (por ejemplo x = a, x = b) existe por lo menos un punto intermedio en el cual la derivada 1ª se anula".

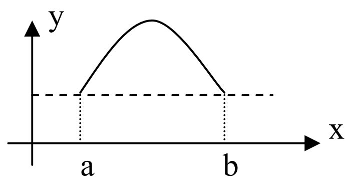
Este teorema se demuestra rigurosamente si se admite la validez del teorema de Weierstrass.

Se pueden presentar dos casos:

[62] Sadosky, M.; Guber. R. (Tomo I - Pág. 237).

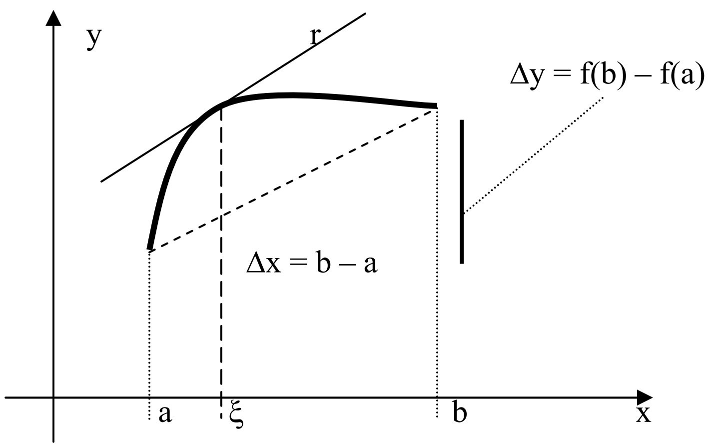
1º Si es m = M, la función es constantemente igual a este valor, y siendo nula la derivada de una constante, queda probado el teorema de Rolle.

2º En el caso de ser m ≠ M, estos puntos no pueden corresponder a los extremos del intervalo [a; b], ya que f(a) = f(b) por hipótesis.



Por lo tanto, la función alcanza uno de esos valores m o M en un punto interior del intervalo [a; b]. En esos puntos (máximos y mínimos), la función no es creciente ni decreciente, ya que separa justamente a una parte creciente de otra decreciente. Y como la derivada de la función, cuando ésta es creciente es positiva y cuando es decreciente, la derivada es negativa, resulta que en dichos puntos la derivada es nula[63]. Es lo que queríamos demostrar, la tesis de Rolle.

Teorema del Valor Medio (o de Lagrange o de los incrementos Finitos)[64]



Sea f(x) una función continua que en los puntos x = a, x = b asume los valores de f(a) y f(b) Diferentes o iguales. Existe por lo menos un punto x = ξ cuya recta tangente (r) es paralela a la secante AB.

La tesis del teorema del Valor Medio expresa:

"El incremento de la función es igual al incremento de la variable independiente por la derivada de la función en un punto intermedio de abscisa ξ", simbólicamente: $f(b) - f(a) = (b - a).\, f'(\xi)$

Teorema de Cauchy

El teorema de Cauchy surge como una consecuencia del de Lagrange, y nos será muy útil cuando analicemos la Regla de L´Hospital.

Consideremos dos funciones f(x) y φ(x) continuas y derivables, escribamos:

$f(x) + q\,\varphi(x)$, (1) ahora vamos a determinar el valor de q de modo que esa expresión tome valores iguales en los puntos x = a ; x = b, para luego aplicar la tesis del teorema de Rolle.

---

[63] Ver Capítulo IV: Derivadas, funciones crecientes y decrecientes.

[64] Ver la demostración en el Apéndice V.

$f(a) + q\ \varphi(a) = f(b) + q\ \varphi(b)$ y despejando q de esa igualdad resulta:

$$q = f(b) - f(a)\ /\ \varphi(a) - \varphi(b) = -\ [\ f(b) - f(a)\ ]\ /\ \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$f(x) - \{[\ f(b) - f(a)\ ]\ .\ \varphi(x)\}\ /\ [\ \varphi(b) - \varphi(a)\ ] \qquad (3)$$

La expresión (1) dentro del intervalo cumple con las condiciones del teorema de Rolle, pues toma igual valor para x = a y x = b[65], y además por tratarse de la suma de dos funciones continuas y derivables, también será una función continua y derivable. Por lo tanto la (3) que es lo mismo que la (1) cumple con el teorema de Rolle, de allí que debe poseer una derivada que se anula en un punto $x = \xi$ interior del intervalo, la derivada de (3) respecto de x es:

$$f'(x) - \{[\ f(b) - f(a)\ ]\ .\ \varphi'(x)\}\ /\ [\ \varphi(b) - \varphi(a)\ ]$$

y para $x = \xi$ será:

$$f'(\xi) - \{[\ f(b) - f(a)\ ]\ .\ \varphi'(\xi)\}\ /\ [\ \varphi(b) - \varphi(a)\ ] = 0$$ por el teorema de Rolle.

Reordenando la expresión anterior:

$$f'(\xi) = \{[\ f(b) - f(a)\ ]\ .\ \varphi'(\xi)\}\ /\ [\ \varphi(b) - \varphi(a)\ ]\ ,$$

$$f'(\xi)\ /\ \varphi'(\xi) = [\ f(b) - f(a)\ ]\ /\ [\ \varphi(b) - \varphi(a)\ ]$$

"Dadas dos funciones f(x) y φ(x) continuas y derivables en un intervalo [a; b], el cociente de los incrementos de dichas funciones es igual al cociente de las derivadas en un punto intermedio del intervalo".

Límites indeterminados. Regla de L´Hospital

Cuando realizábamos el cálculo del límite de funciones, recordemos que podían presentársenos los siguientes tipos de indeterminaciones:

$0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $\infty\ .\ 0$, etc., ahora vamos a estudiar cómo pueden salvarse estas indeterminaciones.

a) <u>Forma 0/0</u>

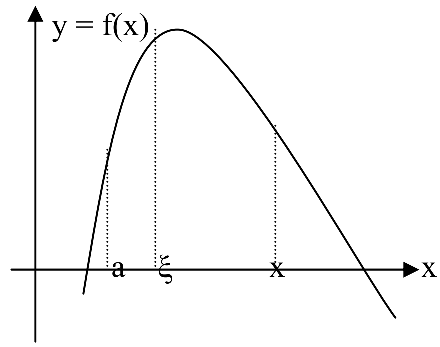
Sean f(x) y φ(x) continuas y derivables que para el punto x = a se anulan, o sea $f(a) = \varphi(a) = 0$; esto permite escribir lo siguiente:

---

[65] Demostrar que la función (3) toma igual valor para x = a y x = b.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)}$$

Si aplicamos en el segundo miembro el teorema de Cauchy que acabamos de demostrar, resulta:



$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad \text{con } a < \xi < x$$

Ocurre que cuando x tiende a “a”, también ξ tiende a “a”, por lo tanto se tiene:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Si es $\varphi'(a) \neq 0$, el cociente de las derivadas en x = a tiene sentido y el límite buscado será igual a ese cociente.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$ Esta relación constituye **la Regla de L´Hospital**[66]

Si la última expresión tiene sentido será el límite buscado, pero en caso que sea de la forma 0 / 0, es decir que continúa la indeterminación, se aplica nuevamente el procedimiento anterior, calculando las derivadas segundas y así sucesivamente.

Se indican a continuación algunos ejercicios probables para el lector con la respuesta señalada para corroborar la corrección.

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$ Rta.: 4

b) $\lim_{x \to 0} (\text{sen } 5x) / x$ Rta.: 5

c) $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)}{(3x^2 + 2x - 5)}$ Rta.: 0

b) Forma ∞/∞

Vamos a demostrar que en este caso también vale la regla de L´Hospital, o sea el límite del cociente de dos funciones puede calcularse como el límite del cociente de sus derivadas. Tenemos que:

[66] En homenaje al matemático francés Guillermo L´Hospital que la dio a conocer y que fue discípulo del eminente sabio Juan Bernouilli, regla enunciada hacia el año 1700.

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$

Demostraremos que en este caso también vale la regla de L´Hospital, que permite calcular el límite del cociente en base al límite del cociente de las derivadas. En efecto:

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1/\,g(x)}{1/\,f(x)}$ y siendo esta expresión de la forma 0/0, le es aplicable la regla de L´Hospital, ya demostrada.

Derivando a la nueva función, se tiene:

$$L = \lim_{x \to a} \frac{1/\,g(x)}{1/\,f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{-\,g'(x)\,/\,[g(x)]^2}{-\,f'(x)\,/\,[f(x)]^2} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2} \,.\, \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$L = L^2 \,.\, \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$; o sea $1 = L \,.\, \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ por lo tanto:

$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ que es lo que queríamos demostrar, y que es exactamente el mismo resultado que con la indeterminación 0/0. O sea que se emplea el mismo procedimiento de ir derivando sucesivamente hasta eliminar la indeterminación.

Ejemplos:

Verificar los siguientes límites aplicando la Regla de L´Hospital:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^4} = 0$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$

c) Formas $(0 \,.\, \infty)$ e $(\infty - \infty)$

Se resuelven fácilmente llevándolas a la formas 0/0.

El primer caso es inmediato, vamos a considerar el 2º.

$\lim_{x \to a} [\, f(x) - g(x)]$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$,

escribimos la expresión $[\, f(x) - g(x)] = \frac{1/\,g(x) - 1/\,f(x)}{1/\,[g(x)\,.\,f(x)]}$ **¡Demostrar esta igualdad!**

el segundo miembro cuando x ----- a es de la forma 0/0

Ejemplo:

lím [1/ (x – 1) – 1/ (lnx)], es de la forma (∞ – ∞) aplicando la regla de l´Hospital por
x ---- 1
dos veces, se encuentra un límite finito. **¡Demostrarlo!**

d) Formas exponenciales ∞^0; 0^0; 1^∞

La indeterminación se salva en los tres casos tomando logaritmos, en efecto sea: $f(x)^{g(x)}$ que cuando x------a toma cualquiera de las tres formas indeterminadas: ∞^0; 0^0; 1^∞.

Tomando logaritmos:

g(x) . ln [f(x)] que para x ----- a toma cualquiera de los tres casos de la forma 0 . ∞ que sabemos resolver.

Ejemplo:

lím $x^x = 0^0$ (recordar que $\log_e L$ es ln L)
x ---- a

aplicando logaritmos neperianos y tomando el límite de ese logaritmo resulta:

lím (x . ln x) = 0 . (- ∞) si reordenamos la expresión en x resulta una
x ----- 0

indeterminación del tipo - ∞ / ∞, y si ahora aplicamos la regla de l´Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} -x = 0$$

pero este resultado no es el límite L que buscamos sino el ln lím L para x ----- 0. Luego, por la definición de logaritmo que dice: $\log_e L = 0$ si se cumple que $e^0 = L$ y como toda potencia elevada a la cero es 1 resulta que L = 1.

Un 2º ejemplo puede considerarse como:

lím $(1 + 1/x)^x = 1^\infty$ aunque nosotros ya sabemos que ese límite vale e.
x ---- ∞

Se transforma primero la expresión en x en la forma de un cociente 0 / 0 y luego si se aplica la regla de l´Hospital resulta que el límite del ln de la función cociente es 1 y por lo tanto L = e.

Teorema generalizado del Valor Medio[67]

Según la fórmula de Cauchy, que permite expresar el cociente de los incrementos de dos funciones f(x) y g(x) mediante el cociente de las respectivas derivadas consideradas en un punto intermedio del intervalo, se puede escribir que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

siendo $a < x_1 < x$, donde el primer miembro de la igualdad es el cociente de los incrementos de dos funciones

[67] Sadosky, M., Guber. R. (Tomo I - Pág. 249).

$f(x)$ y $g(x)$, y el segundo, el cociente de sus derivadas en un punto intermedio x_1. Si ambas funciones se anulan para $x = a$, o sea si a es raíz común de ambas funciones, resulta: $f(x) / g(x) = f'(x_1) / g'(x_1)$.

Cuando x varía en un cierto entorno del punto a, x_1 también varía en un conjunto de valores de ese mismo entorno. Si existe el límite de $f'(x) / g'(x)$ cuando x ----- a, también existirá el límite $f'(x_1) / g'(x_1)$ cuando x_1 ----- a y, por consiguiente, también existirá el

$$\lim_{x \text{ ----- } a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

El límite del cociente de dos funciones que se anulan para x = a es igual al límite del cociente de sus derivadas cuando x ----- a.

Si ahora resulta que sus derivadas se anulan para $x = a$, por tratarse de dos funciones $f'(x)$ y $g'(x)$ que se anulan para $x = a$, puede aplicarse el mismo teorema de Cauchy, y el límite del cociente de estas derivadas será igual al límite del cociente de las derivadas segundas en $x = a$:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$$

siendo $f''(x_2)$ y $g''(x_2)$, las derivadas de las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$ consideradas, y x_2 un punto intermedio tal que $a < x_2 < x$.

Si también se anulan las segundas derivadas para $x = a$, se volverá a aplicar el teorema, y si esa anulación se continúa hasta la derivada de orden $(n - 1)$, se podrá escribir la generalización del teorema de Cauchy:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^n(\xi)}{g^n(\xi)} \quad (1)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones dadas, tal que ellas y sus $(n - 1)$ primeras derivadas se anulan para $x = a$, y $f^n(\xi)$, y $g^n(\xi)$ son sus enésimas derivadas (ya no son nulas), en el punto intermedio ξ, tal que $a < \xi < x$.

Una función que cumple las condiciones exigidas es:

$g(x) = (x - a)^n$, ya que sus $n - 1$ primeras derivadas son del tipo:

$g'(x) = n \,.\, (x - a)^{n-1}$

$g''(x) = n \,.\, (n - 1)(x - a)^{n-2}$

$g'''(x) = n \,.\, (n - 1).\,(n - 2)(x - a)^{n-3}$

……………………………………….

$g^{n-1}(x) = n!\,(x - a)$

Como vemos, en todas las $(n - 1)$ primeras derivadas, aparece el factor $(x - a)$, que es justamente el que las hace nulas para $x = a$, ya que entonces: $x - a = a - a = 0$

Solo recién la enésima derivada no se anula, por ser:

$g^n(x) = n!$

Luego reemplazando en la (1), a $g(x)$ por su igual: $(x - a)^n$, y a $g^n(\xi)$ por su igual: $n!$ resulta que:

$$\frac{f(x)}{(x - a)^n} = \frac{f^n(\xi)}{n!} \quad \text{con } a < \xi < x$$

que es la fórmula del **Teorema generalizado del valor medio**.

Fórmulas de Taylor y Maclaurin (o Mac – Laurin). Término Complementario

La fórmula de Taylor se emplea para poder transformar a una función dada, en un polinomio ordenado crecientemente en potencias de (x – a). O sea se trata de dada la función f(x) desarrollarla de modo que:
$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \ldots + a_{n-1} (x-a)^{n-1} + a_n (x-a)^n$

Si repasamos las funciones dadas en los primeros capítulos, observaremos que hay funciones, como los polinomios, que se calculan empleando operaciones aritméticas y, por consiguiente, se pueden tabular con tanta aproximación como se quiera. En cambio, hay funciones como el seno o el coseno de un ángulo, que se han definido geométricamente como el cociente de dos segmentos. ¿Tendremos que medir segmentos para hallar los valores de las funciones trigonométricas? Este procedimiento limitaría enormemente la exactitud de los cálculos. Precisamente el teorema de Maclaurin y más aún el de Taylor permiten expresar una función mediante un polinomio y un resto, que si bien generalmente no se puede calcular exactamente, se puede acotar, y con ello se puede saber cuántas cifras pueden considerarse exactamente dentro del valor aproximado que así se obtiene.

Esta es una de las razones para el estudio de Taylor y Maclaurin pero existe otra. Una función trascendente como los logaritmos, exponenciales y las citadas trigonométricas puede presentar alguna dificultad para su integración en cambio sabemos que los polinomios en general no ofrecen obstáculos para esas operaciones.

a) Fórmula de Taylor

El problema que se plantea, es conocer a los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de todos los términos. Para ello, hagamos x = a. Como es evidente, se anulan todos los términos menos el primero, con lo que queda:
$f(a) = a_0$ ya conocemos el valor del primer coeficiente.

Derivando en ambos miembros sucesivamente, se tiene:

$$f'(x) = a_1 + 2\, a_2 (x-a) + 3\, a_3 (x-a)^2 + \ldots + (n-1)\, a_{n-1} (x-a)^{n-2} + n\, a_n (x-a)^{n-1} \quad (1)$$

$$f''(x) = 2\, a_2 + 6\, a_3 (x-a) + \ldots + (n-1).(n-2)\, a_{n-1} (x-a)^{n-3} + n(n-1)\, a_n (x-a)^{n-2} \quad (2)$$

$$f'''(x) = 6\, a_3 + \ldots + (n-1).(n-2)\, a_{n-1} (x-a)^{n-3} + n(n-1)\, a_n (x-a)^{n-2} \quad (3)$$

…………………………………………
y así sucesivamente hasta la derivada enésima.

Si hacemos que en la (1) sea x = a se tiene que: $f'(a) = a_1$, ya que se anulan todos los demás términos. Si ahora hacemos en la (2) x = a, se anulan todos los términos menos el primero, y queda: $f''(a) = 2\, a_2 = 2!\, a_2$, y del mismo modo $f'''(a) = 6\, a_3, = 3!\, a_3$, de las expresiones anteriores se pueden obtener los valores o fórmulas que permiten calcular esos coeficientes: $\frac{f''(a)}{2!} = a_2$, $\frac{f''(a)}{3!} = a_3$, …etc. $\frac{f^n(a)}{n!} = a_n$
entonces podemos escribir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + Tn(x)$$

que es la expresión del desarrollo o Fórmula de Taylor.

Si ahora despejamos el término complementario $T_n(x)$, resulta que:

$$T_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Como se puede observar, $T_n(a) = 0$, ya que se anulan todos los términos, menos los dos primeros, pero ambos son: $f(a) - f(a) = 0$. Si derivamos sucesivamente a $T_n(x)$, resulta:

$$T_n'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}; \quad T_n'(x) = 0$$

$$T_n''(x) = f''(x) - f''(a) - f'''(a)(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-3)!}(x-a)^{n-3}; \qquad T_n''(a) = 0$$

……………………………………………………………………………………………..

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a); \qquad T_n^{(n-1)}(a) = 0$$

$$T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

Al término complementario $T_n(x)$ se le puede aplicar, por consiguiente, el teorema generalizado del valor medio, pues cumple con las hipótesis de ser una función continua y derivable que se anula así como sus $(n-1)$ derivadas en el punto $x = a$. Entonces se puede escribir el resto en la forma de Lagrange:

$$\frac{T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^n(\xi)}{n!}; \quad T_n(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Y la Fórmula de Taylor con el resto será:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

con $a < \xi < x$.

b) Fórmula de Maclaurin

La fórmula de Maclaurin, es empleada, igualmente que la de Taylor, para poder desarrollar a una función dada en un polinomio ordenado en forma creciente con respecto a x.

Como vemos se puede decir que la fórmula de Maclaurin es un caso particular de la fórmula de Taylor cuando $a = 0$.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

El problema que aquí se plantea, igual que con la fórmula de Taylor, es encontrar el valor de los coeficientes: a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n que serán, desde ya diferentes a los de la fórmula de Taylor, ya que esta última desarrollaba a la misma función en potencias de (x – a) y no de x. Luego, los coeficientes de una y de otra deben de ser forzosamente diferentes.

Análogamente cuando "con Taylor" hacíamos x = a, ahora hacemos x = 0, o sea:
$f(0) = a_0 + a_1\, 0 + a_2\, 0 + a_3\, 0 + \ldots + a_{n-1}\, 0 + a_n\, 0$, luego $a_0 = f(0)$

Si ahora realizamos las derivadas sucesivas tenemos y luego hacemos x = 0

$f'(0) = a_1 + a_2\, 0 + a_3\, 0 + \ldots + a_{n-1}\, 0 + a_n\, 0$, luego $a_1 = f'(0)$

$f''(0) = 2\, a_2 + a_3\, 0 + \ldots + a_{n-1}\, 0 + a_n\, 0$, luego $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$

$f'''(x) = 6 \,.\, a_3 + \ldots + (n-1)(n-2)(n-3)\, a_{n-1}\, x^{n-4} + n\,.\,(n-1)(n-2)\, a_n\, x^{n-3}$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{6} = \dfrac{f'''(0)}{3!}$

$a_3 = \dfrac{f^{IV}(0)}{4!}$

....

$a_{n-1} = \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$

Recordemos que habíamos demostrado que el término enésimo del desarrollo de Taylor era: $\dfrac{f^{(n)}(\xi)\ (x-a)^n}{n!}$, siendo con $a < \xi < x$.

Además dijimos que el desarrollo de Maclaurin era un caso especial con a = 0, luego el término enésimo será:

$\dfrac{f^{(n)}(\xi)\ x^n}{n!}$

Entonces la expresión de la fórmula de Maclaurin para una función f(x) es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)\ x^n}{n!}$$

Donde $0 < \xi < x$

Desarrollo de la función elemental y = sen x

- *Desarrollo de y = sen x*

Cálculo de a_0

$a_0 = f(0) = \text{sen } 0 = 0$ $\qquad f(x) = \text{sen } x$

$f'(x) = \cos x$

Cálculo de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $\qquad f''(x) = -\text{ sen } x$

$f^{III}(x) = - \cos x$

$a_1 = f'(0) = \cos 0 = 1$ $\qquad$ $f^{IV}(x) = \text{sen } x$

....

$a_2 = \dfrac{f''(0)}{2} = \dfrac{- \text{sen } 0}{2} = 0$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{- \cos 0}{3!} = -1 / 3!$

....

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} = \dfrac{\text{sen } (x + n\,\pi/2)}{n!}$

se observa que las derivadas siguen una periodicidad tal que el 1º fue 0, luego 1, después 0, -1, 0, luego $f^{(n)}(x) = \text{sen } (x + n\,\pi/2)$ (cuando n = 0 es sen x, si n = 1 o sea la 1ª derivada es sen (x + 90º) = cos x si consideramos la 2ª derivada es sen $(x + \pi)$ = = - sen x; con n = 3 es sen$(x + 3/2\,\pi)$ = - cos x[68].

Se sugiere al lector dibujar los cuatro cuadrantes y un ángulo en el primero, de aproximadamente 30º y luego estudiar qué ocurre cuando se le suma 90 º o sea π/2 radianes, y posteriormente con n = 2 se le suma 180 y más tarde con n =3 se agrega 3/2 π = 270º. Observar como los ángulos que se obtienen en los cuadrantes II, III, y IV permiten comprender la correspondencia entre las igualdades arriba planteadas.

Aplicando la fórmula de Maclaurin se tiene

$$\text{sen } x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + T_{2n+1}$$ [69]

$$\text{Con } T_{2n+1} = \frac{x^{2n+1} \cdot f^{2n+1}(\xi)}{(2n+1)!}$$

---

[68]Por ejemplo: cuando n = 1 se tiene la 1ª derivada o sea f´(x) = cos x según hemos calculado. Y la fórmula general dice sen (x + 90º). Si x = 30º es sen (30º + 90º) = 120 º = 0,866. Pero por la derivación habíamos obtenido cos x, en este ejemplo sería cos 30º = 0,866

[69] El término complementario lleva el subíndice 2n + 1 porque es el término siguiente en la sucesión al término 2n – 1. La sucesión es 1; 3; 5; … 2n – 1; 2n + 1

¿Cómo estudiar este capítulo?

Tomar papel en blanco y una birome.

Dibujar cada gráfico y "seguir" cada una de las demostraciones algebraicas y geométricas.

Analizar cada teorema comprendiendo cuál es la Hipótesis, es decir aquello que se supone en el teorema y luego la Tesis, lo que se quiere demostrar como válido cuando se cumple la Hipótesis. La demostración debe consistir en partir de la Hipótesis y arribar por medio de la lógica a la Tesis. Por ello un teorema se simboliza como H $\longrightarrow$ T, que significa que si la H se cumple, o si es verdad implica la verdad de la Tesis.

A lo largo de la vida profesional de un ingeniero difícilmente, o probablemente nunca, se utilice alguno de estos teoremas o los de los capítulos anteriores ni siquiera los "escolásticos" de Pitágoras o Thales. Sin embargo, en el ejercicio de la profesión es permanente el teorizar o construir teoremas, o sea un pensamiento que supone que ocurre tal cosa, hipotetiza y luego estima, colige que ocurrirá tal otra, sostiene una tesis. Entonces estudiar estos teoremas no es para aprenderlos y aplicarlos sino para educarse.

CAPÍTULO VIII: SUCESIONES Y SERIES

Resumen

Sucesiones: concepto, representaciones gráficas. Ley de formación. Límites de sucesiones: concepto, definición. Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Sucesiones acotadas. Sucesiones monótonas crecientes y decrecientes. Criterio General de convergencia de Cauchy. Ejercicios. Serie. Límite de una serie. Serie convergente, divergente y oscilante. Criterio General de Cauchy. Series Geométricas. Casos $q < 1$, $q > 1$, $q = 1$ y $q = -1$. Serie de Términos Positivos. Criterios de Comparación. Series mayorante y minorante. Serie armónica con potencia. Criterio de D´Alembert. Criterio de Cauchy. Criterio de Raabe. Series Alternadas. Criterio de Leibniz. Convergencia absoluta. Serie de números complejos. Serie funcional o serie de potencias. Intervalo (dominio o campo) de convergencia de la serie. Radio de convergencia. Ejemplos de cálculos de radios de convergencia.

Sucesiones: concepto, representaciones gráficas

Concepto de Sucesión[70]: es un conjunto infinito, cuyos elementos repetidos o no, están en correspondencia con los números naturales. Si llamamos a_n al elemento que corresponde al número natural n, tendremos:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & (1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n & (2) \end{array}$$

de modo que la sucesión puede indicarse en la forma (2). Los mismos números naturales forman la sucesión. El subíndice n, que indica el número de lugar del a_n, se llama orden del elemento.

Veremos primero qué se entiende por límite de una sucesión. Consideremos un conjunto de números ordenados que llamamos sucesión, los indicaremos genéricamente con una misma letra individualizada por un subíndice:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots a_n$

<u>Ejemplo</u>: 1, 2, 3, 4, 5,….n, n+1 sucesión de los números naturales.

Los términos de una sucesión son tales que siempre se puede saber el valor de un término que ocupa un determinado lugar, por ejemplo en la sucesión:

$1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, 1/2^5, 1/2^6, 1/2^7, \ldots\ldots. 1/2^n, 1/2^{n+1}$

¿Cuánto vale el término que ocupa el cuarto lugar?

$1/2^4 = 1/16$

[70] Rey Pastor, J.

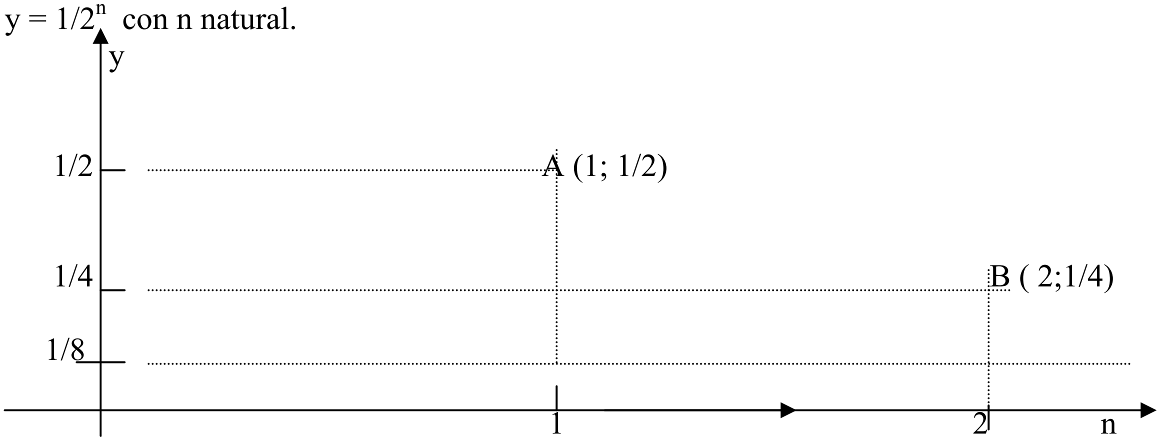
Las sucesiones son en general un tipo de función cuya variable independiente es un número natural. El primer término de la sucesión está caracterizado por el número natural 1. El segundo término de la sucesión está caracterizado por el número natural 2. El tercer término…por el número natural 3. El término de orden n está … por el número natural n.

$\left\{ 1/2^n \right\} = 1/2,\ 1/2^2,\ 1/2^3,\ 1/2^4,\ 1/2^5,\ 1/2^6,\ 1/2^7, \ldots\ldots.\ 1/2^n,\ 1/2^{n+1}$

Se observa que el valor de cada término está caracterizado por el del número natural.

La sucesión puedo considerarla como una función de este tipo:

$y = 1/2^n$ con n natural.



El conjunto de puntos representa los términos de la sucesión, aquí no se tiene una curva como en el caso de y = f(x), pues no tiene sentido unir los puntos A, B, C, … pues aquí la variable es un número natural que tenía valores 1, 2, 3, …. y nunca los comprendidos entre ellos. Algunos autores prefieren unir esos puntos, pero de todas maneras vale lo que se acaba de decir. Podemos señalar que estas sucesiones <u>son funciones no ya de x sino de los números naturales</u>.

Ley de formación.

La forma en que pueden obtenerse los términos de una sucesión es lo que se llama la ley de formación. En el caso de la sucesión $1/2,\ 1/2^2,\ 1/2^3, \ldots.$ su ley de formación era $\left\{ 1/2^n \right\}$, se observa que en esta expresión dando valores a n se obtienen todos los términos de la sucesión.

Otro ejemplo: -1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5, 1/6, … ¿cuál será la ley de formación de esta sucesión o sea cómo se obtienen esos valores? ¿Podría ser $\left\{ 1/n \right\}$?

En ese caso la sucesión sería: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, … nos faltaría agregar los signos menos en algunos términos, ¿en cuáles?, si observamos cuando n = 1 el término es negativo, y también ocurre lo mismo en el 3º y quinto término, no así en los otros. Es decir en aquellos que poseen el denominador impar el término es negativo, luego en la ley $\left\{ 1/n \right\}$ para obtener la sucesión que deseamos hay que agregar algo que haga que:

Para n par los términos de la sucesión sean positivos, y para n impar los términos de la sucesión sean negativos. Ese algo es $(-1)^n$ pues:

Cuando n es par $(-1)^n = 1$, nos da signo positivo. Cuando n es impar $(-1)^n = -1$, nos da signo negativo. Luego la ley de formación es:

$\left\{ (-1)^n \ 1/n \right\}$

Para verificar se puede dar valores a n y contrastar con la sucesión que se tiene como dato. El problema de encontrar la ley de formación de una sucesión requiere bastante experiencia, y según la sucesión de que se trate puede llegar a complicarse bastante.

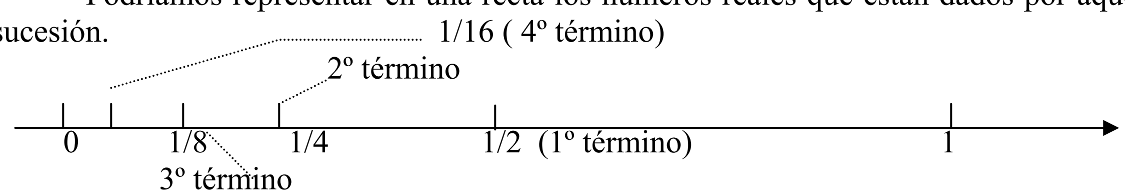
Consideremos nuevamente la sucesión:

$\left\{ 1/2^n \right\} = 1/2, 1/2^2, 1/2^3, \ldots$

A medida que n aumenta se observa que los términos de la sucesión se hacen cada vez menores, y que incluso se los puede hacer tan pequeños como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande. Por ejemplo: para n = 100 ---------------- $1/\ 2^{100}$ y para n = 10000 ------------- $1/\ 2^{10000}$ o sea que a medida que n crece los términos de la sucesión van decreciendo y acercándose.

Límites de sucesiones: concepto, definición

Podríamos representar en una recta los números reales que están dados por aquella sucesión.



Cada término cae en el punto medio del término anterior, (por ejemplo el 2º término en el punto medio del primer término, es decir en la mitad del segmento que tiene por extremos al 1º término y el cero), luego estos valores nunca pueden valer cero, o sea que por más que n crezca los términos de la sucesión nunca llegarán a anularse, pues siempre uno cae en la mitad del anterior, o sea que si un término sale 0,000000001 el siguiente valdrá 0,000000001 / 2.

Todo esto nos hace ver lo siguiente: por un lado los términos de la sucesión se acercan a cero tanto como yo quiera con tal de tomar n suficientemente grande, pero por otra parte es imposible hacer que los términos se anulen, o sea los términos de la sucesión se acercan a cero, tanto como yo quiera pero nunca pueden tomar ese valor, este número tan particular es lo que se llama límite de esta sucesión, el límite de una sucesión es único.

Claro que alguno podrá señalar, que a medida que n crece los términos de la sucesión no sólo se acercan a cero, sino que también, por ejemplo se acercan a -1, y que al igual que lo dicho para cero tampoco nunca los términos de la sucesión pueden llegar a valer (-1), quiere decir que aparentemente (-1) cumple con los mismos requisitos que cero, los términos de la sucesión a medida que n crece se acercan a (-1) y nunca pueden llegar a valer (-1).

Lo que ocurre y es fundamental es lo siguiente, los términos de la sucesión se acercan a cero tanto como yo quiero, cosa que no ocurre si considero (-1), ni con ningún otro número; por ejemplo fijado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario y pequeño cualquiera siempre existe un término de la sucesión, a partir del cual se cumple que:

$\left| 1/2^n - 0 \right| < \varepsilon$, por ejemplo si $\varepsilon = 0{,}001$ a partir de $n = 10$ en adelante comienza a cumplirse que: $\left| 1/2^n - 0 \right| < \varepsilon$, en efecto para $n = 10$ ---------- $1/ 2^{10} = 1/ 1024 < 0{,}001$ o sea $\left| 1/2^n - 0 \right| < 0{,}001$

Quiere decir que a partir de $n = 10$ en adelante se cumple la condición: $\left| 1/2^n - 0 \right| < \varepsilon$, esto que hicimos para $\varepsilon = 0{,}001$ podría hacerse para un ε cualquiera por más pequeño que este fuera, esta propiedad es sólo característica del límite de la sucesión y se indica como:

$\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ 1/2^n \right\} = 0$ que expresa que cuando n sea suficientemente grande los términos de la sucesión se acercan, tienden a cero. Y se expresa diciendo: el límite de la sucesión $\left\{ 1/2^n \right\}$ es cero cuando n tiende a infinito.

Definición de límite de una sucesión

Con carácter general, si tengo la sucesión:

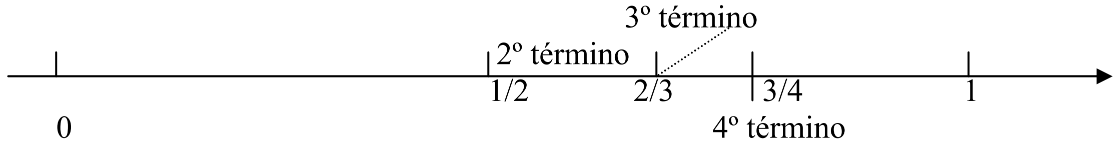
$\left\{ a_n \right\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

Se dice que l es el límite de la sucesión si se cumple la condición:

$\left| a_n - l \right| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ y arbitrario.

<u>Otro ejemplo</u>: $\left\{ 1 - 1/n \right\} = 0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots$

Si representamos algunos de sus valores:



Se observa que los términos de la sucesión a medida que n aumenta van creciendo y acercándose a uno, acercándose tanto como yo quiera, sin alcanzar nunca ese valor, luego $l = 1$

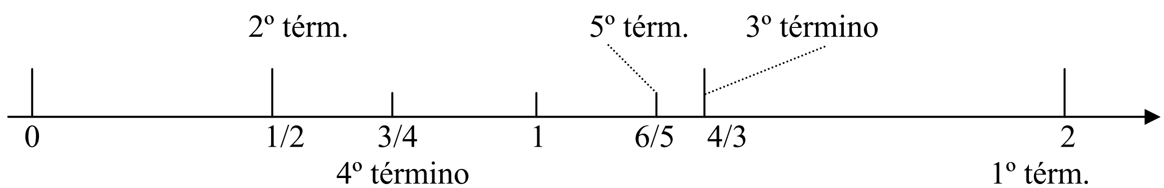
$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 1 - 1/n \right\} = 1$$

O sea se cumple que $\left| (1 - 1/n) - 1 \right| < \varepsilon$

<u>Otro ejemplo</u> sencillo:

$1 - (-1)^n / n = 2, 1/2, 4/3, 3/4, 6/5, 5/6, \ldots$ Es conveniente que el lector deduzca los elementos de la sucesión, por lo menos los cinco primeros con n = 1 hasta cinco.

Representando algunos valores:



En este caso también el límite es uno, pues si bien los términos oscilan alrededor de la unidad por ambos lados, me estoy acercando a uno.

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 1 - (-1)^n / n \right\} = 1$$

luego puedo escribir $\left| 1 - (-1)^n / n - 1 \right| < \varepsilon$

Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes

Las sucesiones que hemos visto hasta ahora reciben el nombre de convergentes pues justamente cuando n es suficientemente grande los términos de la misma convergen hacia un número l, su límite.

Existen otras sucesiones que no tienen límite: la sucesión de los números naturales: 1, 2, 3, 4, … n, n+1 en que sus términos son todos positivos, cuando n sea suficientemente grande, sus términos van a crecer por encima de cualquier valor y la sucesión se dice que es divergente pues los términos divergen de cualquier valor, esto hace que no tenga límite esta sucesión, pero por extensión con el caso anterior se conviene en decir que tiene límite infinito, en este caso + infinito, debiendo entender que con ello, sólo se quiere significar que en esta serie cuando n sea suficientemente grande sus términos crecen por encima de cualquier valor[71].

Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ n \right\} = +\infty$$

Otro ejemplo de este tipo de sucesión es:

$$\left\{ n^2 \right\} = 1, 4, 9, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ n^2 \right\} = +\infty$$

Otra sucesión divergente es ésta:
-1, -2, -3, -4, …, -n, -(n+1) …

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ -n \right\} = -\infty$$

Existen otras sucesiones que no son ni convergentes ni divergentes:
1; -1; 1; -1; 1; … esta sucesión no tiene límite y se llama oscilante.

Resumen:
Las sucesiones con límite finito se denominan convergentes.
Las sucesiones divergentes poseen límite infinito.
Las sucesiones oscilantes no tienen límite.

Sucesiones acotadas

Una sucesión está acotada si todos sus términos son menores, en valor absoluto, que un número fijo llamado cota C.

La sucesión $\left\{ 1/\ n \right\} = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots$ está acotada pues todos sus términos son menores que cualquier número positivo mayor que uno.

Sucesiones monótonas crecientes y decrecientes

Una sucesión es monótona creciente cuando se verifica que:

$a_{n+1} \geq a_n$

Ejemplo:

[71] No se trata sólo de decir: "el límite es infinito", sino de comprender el concepto y para ello hay que preguntarse: ¿qué quiere decir que el límite es infinito?

$\left\{ n \right\} = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Una sucesión es monótona decreciente cuando se verifica que:
$a_{n+1} \leq a_n$

Ejemplo:

$\left\{ -n \right\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$

Criterio General de Convergencia de Cauchy

Este criterio, debido a Cauchy, se expresa de la siguiente manera:

"La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots a_n$ de números reales sea convergente (tenga límite finito) es que para cada número positivo $\underline{\varepsilon}$, corresponda un valor de $\underline{n}$ igual a $\underline{t}$ tal que todas las diferencias $a_n - a_{n+q}$ a partir de t en adelante y con $q > 0$ se conserven en valor absoluto inferiores a ε".

La importancia de este criterio general de convergencia radica en el hecho de que nos permite asegurar el carácter convergente de una sucesión, aun sin conocer el valor del límite.

Ejercicios

Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es:

a) $a_n = \left\{ (n-2)^2 / n \right\}$

b) $a_n = \left\{ (-1)^n \; n^{n-1} \; / (n+1)^2 \right\}$

Encontrar el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:

a) -1, 3, -9, 27, -81, …
b) 1/3, -1/5, 1/7, -1/9 …
c) -2, 1/2, -1/8, 1/32, …

Hallar el límite de las sucesiones y escribir las mismas sabiendo que sus términos generales son:

a) $a_n = 1/n$

b) $a_n = (n-1)/n$

Serie. Límite de una serie.

Dada una sucesión indefinida de números reales o complejos cualesquiera:
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$

se llama serie al algoritmo siguiente: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_n$

Hasta ahora conocemos la suma de un número finito de sumandos entonces formaremos las sumas parciales para estudiar otro "tipo de suma":

$U_1 = u_1$

$U_2 = u_1 + u_2$

$U_3 = u_1 + u_2 + u_3$

$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

Y como a "n" podemos darle cualquier valor natural, obtenemos una sucesión indefinida de números:

$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

O sea que de la primera sucesión hemos pasado a una sucesión de sumas, esta nueva sucesión es lo que se llama serie. Es nada más que un mecanismo que permite pasar de una sucesión a otra sucesión. Todo este cálculo se representa por un símbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

Nosotros sabíamos sumar un nº finito de términos, ahora estamos planteando una suma infinita de sumandos.

Serie convergente, divergente y oscilante.

De esa suma nos interesa lo siguiente: ver lo que ocurre con el límite de esa suma, cuando el número de términos es infinito.

O sea:

$$\lim_{n \text{-----} \infty} S_n = S$$

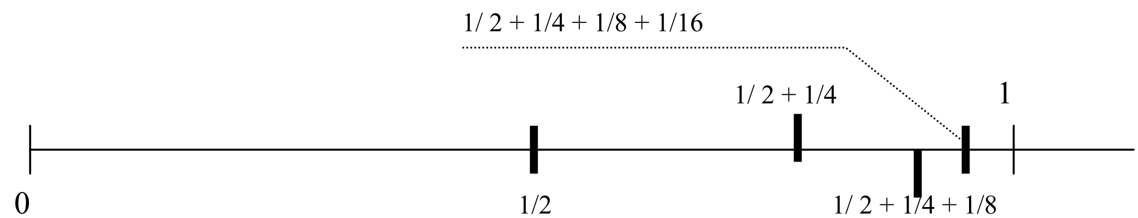
Si este límite S existe, y es un número finito, diremos que la serie es convergente y S es la suma de la serie.

Observemos como se construye el edificio de la matemática. Se presenta el concepto[72] *de serie a partir de una sucesión y luego se indica que lo interesante no es la serie propiamente dicha sino su suma que como se trata de infinitos términos es un límite.*

[72] Además ese concepto es elaborado teóricamente (Ver Los razonamientos de Aristóteles, Apéndice IV), ni técnica ni prácticamente. Surge de la especulación mental del matemático.

Podría ocurrir que el $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, no resulte un número finito, es decir es infinito, (más o menos), en ese caso se dice que la serie es divergente. Cuando la serie no posee límite ni finito ni infinito se dice que la serie es oscilante.

<u>Ejemplos</u>: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$



Esta serie es convergente pues tiende a la unidad. Intuitivamente se observa que nos estamos acercando a la unidad, pues a cada suma parcial le sumamos la mitad del término anterior, por lo tanto la serie es convergente.

$n = 1$ $\quad 1/2 = 0{,}5$
$n = 2$ $\quad 1/2 + 1/4 = 0{,}75$
$n = 3$ $\quad 1/2 + 1/4 + 1/8 = 0{,}875$
$n = 4$ $\quad 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 0{,}937$

¿Cómo se determina si una serie es convergente? Justamente, es lo que nos interesa estudiar.

Consideremos ahora esta otra sucesión:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Se ve que es divergente, pues $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$

También se nos puede presentar una serie de este tipo:
$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

En este caso la serie es oscilante pues según que tome un número par o impar de términos S_n es alternadamente igual a 0 o a 1, por consiguiente S_n cuando n tiende a infinito no tiene ningún límite.

En el estudio de las series se plantea un problema similar al de las sucesiones que es el de saber cuál es la ley de formación.

En general siempre nos van a dar una serie de términos

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots$ y supuesto que los demás siguen en ese orden,

nos pedirán escribir el término genérico (la ley de formación); en este caso particular el mismo vale: $\frac{1}{n!}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots. \infty$

Se observa que en este caso los valores que le asignamos a n son:

$n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, pero podría ocurrir que el desarrollo comience con $n = 1$, o sea

$n = 1, 2, \ldots \infty$, en general el desarrollo podrá comenzar con $n = 0$ o bien $n = 1$, lo cual no trae aparejado ningún inconveniente.

Otro ejemplo:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n+2}{n+1} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

en otros casos es más difícil de escribir el término general:

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{6} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n^2}{n+3} \quad \text{con } n = 1, 2, \ldots \infty,$$

Otros ejemplos:

$$1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \ldots\ldots\ldots + \frac{3^n}{n!} \quad \text{comenzando con } n = 0$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n^n} \quad \text{comenzando con } n = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n^2+1} \quad \text{comenzando con } n = 1$$

Si ahora analizamos los ejemplos que se expresaron anteriormente se puede indicar que dada una serie numérica cualquiera se tienen dos problemas:

1 – Estudiar la convergencia, es decir es convergente o no.

2 – Si es convergente calcular el valor al que tiende la serie. Las series divergentes no nos interesan.

Criterio General de Cauchy

Para saber si una serie es convergente vamos a estudiar lo siguiente: el teorema más general que hay sobre series se debe a Cauchy.

Supongamos la serie: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ el criterio de Cauchy que establece la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie se expresa así:

Una serie es convergente si fijado un ε arbitrario se puede encontrar un n tal que el módulo de la suma

$| u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots\ldots + u_{n+p} |$ con p arbitrario es menor que un ε prefijado.

Es decir una serie es convergente si se puede encontrar p términos desde u_n hasta u_{n+p} tal que esa suma es menor que un ε prefijado.

Veamos un ejemplo: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n^n}$

y consideremos un $\varepsilon = 0{,}000001$ y $p = 5$, o sea el término genérico y luego cinco más, entonces para probar que la serie es convergente habría que encontrar un n tal que:

$$\left| \frac{1}{n^n} + \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}} + \frac{1}{(n+2)^{(n+2)}} + \frac{1}{(n+3)^{(n+3)}} + \frac{1}{(n+4)^{(n+4)}} \right| < \varepsilon = 10^{-6}$$

Se observa entonces que el criterio de Cauchy que establece la condición necesaria y suficiente de convergencia se hace difícil de aplicar, de allí que en la práctica nunca se lo utiliza; pero aún nosotros podemos aprovecharlo para algo más.

Como hemos dicho al enunciar el criterio de Cauchy que p es arbitrario podemos tomar $p = 0$ por lo tanto resulta que debe verificarse que $| u_n | < \varepsilon$

Luego los términos de la serie deben ir decreciendo, pues ε siempre es arbitrario y pequeño.

Por lo tanto es condición necesaria, pero no suficiente, para que una serie numérica sea convergente que el término general tienda a cero.

Vamos a ver un ejemplo clásico que aclara esto:

Consideremos para ello la llamada serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

o sea el término general tiende a cero, sin embargo vamos a fundamentar que la serie es divergente. Vamos a demostrarlo de una manera elemental. Escribamos la serie armónica con algunos términos más pues nos serán útiles:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \ldots \quad \text{(I)}$$

y consideremos otra serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \quad \text{(II)}$$

En una mirada a esta última serie vemos que sus dos primeros términos son iguales que los de (I) pero los demás son inferiores o iguales. Por otra parte en la serie que hemos llamado (II) pueden sumarse todos los términos repetidos; sumas que por la ley de formación de las series (II) valen todas 1/2, luego tendremos:

$1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + \ldots$. y esta serie se ve que es divergente pues el límite de S_n para $n \to \infty$ es un número S, que crece por encima de cualquier valor, por lo tanto si la serie (II) es divergente, la (I) que tiene sus términos mayores o iguales que la (II) con más razón será divergente.

Con esto se ve entonces cómo la condición de que el término general tienda a cero si bien es necesario no es suficiente en lo que a la convergencia se refiere.

Por qué estudiamos un criterio que se hace difícil de aplicar y que en la práctica nunca se lo utiliza. Esto nos lleva a preguntarnos ¿cómo es esta materia? Es decir, cómo es su estructura sintáctica. Ya dijimos que sus objetos cognitivos son vacíos o también que no poseen significado pero necesitamos saber más para comprender y poder responder el interrogante. Es una disciplina que se sustenta, se apoya en el rigor lógico. No le interesa si se utiliza o no, no se preocupa de los para qué sino prioriza los por qué. Entonces el Criterio General de Cauchy se constituye en el fundamento para indicar la convergencia, se asemeja al espíritu de un legislador que escribe una norma o ley y luego falta reglamentarla, adaptarla a la práctica. Luego, cuando surgen algunas condiciones como las que vimos que son necesarias pero no suficientes, nos permiten indicar si una serie no las cumple: es divergente.

Series Geométricas

Son aquellas en que sus términos no son sino los sumandos de una progresión[73] geométrica, pero una suma de infinitos elementos. O sea dada la progresión geométrica:

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots\ldots + u_1 q^{n-1} \quad \text{(III)}$$

de razón q, para pasar a la serie geométrica debe aumentar indefinidamente el número de términos

$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots\ldots + u_1 q^n + u_1 q^{n+1}$ (IV) que es una serie geométrica.

Ejemplo: $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^n + 1/2^{n+1} \ldots$

Considerando la (III) que es una progresión geométrica, se puede deducir su suma:

$$S_n = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots\ldots + u_1 q^{n-1}$$

$$\underline{q \cdot S_n = q \cdot u_1 + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \ldots\ldots + u_1 q^n}$$

$S_n - q \cdot S_n = u_1 - u_1 q^n = u_1 (1 - q^n)$, entonces en una serie geométrica de infinitos términos, la suma es:

$$S_n = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

Ahora vamos a organizar una clasificación, sencilla pero necesaria para el estudio de las series geométricas. El criterio es la razón q. Nos interesa investigar cómo son las series geométricas y una forma de agruparlas es por el valor de su razón q. Entonces consideramos respecto a 1 que sea q menor, mayor o igual. Las clasificaciones son útiles para ordenar el conocimiento.

[73] *Es posible que resulte un buen ejercicio buscar qué son: sucesión, progresión y serie. ¿Guardan entre sí una sinonimia o son conceptos distintos? En matemática y a veces en otras ciencias es adecuado definir correctamente para luego avanzar en el estudio.*

a) <u>Caso q < 1</u>

<u>Por ejemplo</u>: $q = 1/3$. Vamos a analizar primero el límite de q^n y de ese modo tendremos el de $(1 - q^n)$, y luego el de $u_1 / (1- q)$.

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} (1/3)^n = 0$$

Si $q = - 1/3$ será $q^n = (-1/3)^n$, al crecer esta última toma valores positivos y negativos, pero esos valores ya sean positivos o negativos se acercan a cero, por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} (- 1/3)^n = 0$$

Entonces cuando $| q | < 1$, y teniendo en cuenta el límite anterior que es cero la suma de la serie cuando n tiende a infinito será:

$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{u_1}{1- q} =$ constante[74], o sea igual a un número, por lo tanto una progresión geométrica de razón $| q | < 1$, tiene **la serie geométrica correspondiente convergente**.

<u>Por ejemplo</u> en el caso de la serie:

$1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \dots + 1/2^n + 1/2^{n+1} \dots$ donde $q = 1/2$ y $u_1 = 1/2$ será:

$S = (1/2) / (1 - 1/2) = 1$ (convergente)[75]

Si la razón q hubiese sido $q = - 1/2$ tendríamos

$1/2 - 1/2^2 + 1/2^3 - 1/2^4 + \dots$

$S = (1/2) / (1 + 1/2) = 1/3$ (convergente)

b) <u>Caso q > 1</u>

Si $| q | > 1$, entonces q^n se hará infinito cuando n aumenta indefinidamente luego S igual al límite de S_n cuando n crece por encima de cualquier valor se hace infinito. En este caso la serie se dice que es divergente. Por lo tanto una progresión geométrica de razón $| q | > 1$, tiene la serie geométrica correspondiente divergente.

c) <u>Caso q = 1</u>

Si $q = 1$ la serie es divergente, podemos verlo con un ejemplo en que $u_1 = 2$

---

[74] ¿Por qué es constante?¿Por qué es un número?¿No considera u_1 y q?

[75] ¿No hay un error?¿No debió usarse la fórmula: $S_n = u_1 (1- q^n) / (1- q)$?

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + ….. + 2 + se ve que la serie es divergente pues el valor de una suma crece por encima de cualquier valor. En este caso por ser $u_1 > 0$ el límite es $+ \infty$, si hubiese sido $u_1 < 0$ el límite sería $- \infty$.

d) <u>Caso q = - 1</u>

Si q = -1 la serie es oscilante; por ejemplo si $u_1 = 2$ resultará:

2 - 2 + 2 - 2 + 2 ….. la suma va variando, toma los valores 2 y cero. Si u_1 fuera menor que cero también es oscilante la serie, por ejemplo: $u_1 = - 2$

- 2 + 2 - 2 + 2 …

Elaboremos una síntesis, para una progresión geométrica de razón q, la serie correspondiente será:

Convergente si $| q | < 1$
Divergente si $| q | > 1$ o bien $q = 1$
Oscilante si $q = - 1$

Serie de Términos Positivos

Son aquellas series en que todos sus términos son positivos, por lo tanto en este caso sólo se tendrán series convergentes y divergentes nunca oscilantes. Como el criterio de Cauchy no es aplicable utilizaremos otros criterios.

Criterios de Comparación

Supongamos una serie: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ (I)

y la serie: $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$ (II)

Si la (II) es convergente y se verifica que cada uno de los términos de la (I) son menores o iguales que los correspondientes de la (II) la serie (I) es convergente. Tengamos presente que siempre hablamos de series de términos positivos. La serie (II) en este caso recibe el nombre de **serie mayorante**.

<u>Ejemplo</u>: Dada la serie

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\frac{1}{n^n}$ averiguar si es convergente.

Si la comparamos con la serie geométrica de razón q = 1/2

$1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^n + 1/2^{n+1}$ …. como q es menor que 1 esta serie es convergente y además cada término es mayor que la serie en estudio. Podemos asegurar que la primera serie es convergente.

En efecto la serie geométrica es convergente pues $|q| < 1$, y cada uno de sus términos son mayores o iguales que los de la serie en estudio, por consiguiente de acuerdo con el criterio de comparación la serie dada es convergente.

Dada la serie: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$

y la serie: $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$

Si esta última es divergente y todos sus términos son menores o iguales que la primera, esta también es divergente.

En este caso la serie: $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$ se llama **minorante**.

Ejemplo:

Dada la serie

$1 + \frac{1}{(2)^{1/2}} + \frac{1}{(3)^{1/2}} + \frac{1}{(4)^{1/2}} + \ldots\ldots$ averiguar si es divergente. Si recordamos la serie armónica que es divergente:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ podemos asegurar que la primera es divergente pues todos sus términos son mayores o iguales que los de esta última.

Estos criterios de comparación tienen mucha utilidad pero en general requieren cierta habilidad para poder aplicarlos.

Existe una serie muy útil que es esta:

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots \frac{1}{n^p} + \ldots$ (I) que podríamos llamar **serie armónica con potencia**.

Vamos a demostrar que esta serie converge sólo cuando $p > 1$, escribimos (I) como se indica en (II), los corchetes los ponemos para comodidad de la demostración.

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots \frac{1}{n^p} + \ldots \quad \text{(II)}$$

escribiendo debajo de ella otra serie (III) que nos va a ser útil para demostrar lo que necesitamos.

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots \frac{1}{n^p} + \ldots \quad \text{(III)}$$

Observar que $p > 1$ si los términos de la (III) nunca son menores que los términos correspondientes de (II). Las sumas que se indican en (III) valen:

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = 2 / 2^p = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$\left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right) = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{2^{2\,(p-1)}}$

$\left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p} \right) = \frac{1}{2^{3\,(p-1)}}$

…………………………………………….. y así sucesivamente.

Criterio de D´Alembert (siempre para una serie de términos positivos)

Este criterio muy usado, es el más sencillo de todos y establece lo siguiente:

Supongamos una serie numérica (de términos positivos):

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ si se calcula el límite para n tendiendo a infinito:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = L$ si $L < 1$ la serie es convergente.

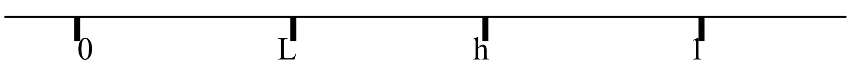
si $L > 1$ la serie es divergente

Si L = 1 con este método no puede determinarse que ocurre con la serie respecto a si es convergente o divergente.

Demostración:

a) $L < 1$

Siempre existirá un valor de h tal que: $\frac{u_n}{u_{n-1}} < h$



O sea $L < h < 1$

desde un valor de n en adelante, por ejemplo m + 1 [para algunos valores de n podría ser $\frac{u_n}{u_{n-1}} > h$] resultará entonces:

$u_{m+1} < h \,.\, u_m$
$u_{m+2} < h \,.\, u_{m+1} < h^2 \,.\, u_m$
$u_{m+3} < h \,.\, u_{m+2} < h^3 \,.\, u_m$
……………………………….

$u_n < h^{n-m}\, u_m$[76]

[76] ¿Cómo obtuvo n – m de exponente?

……………………………….
y así sucesivamente.

Por consiguiente los términos de la serie $u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n + \ldots$ es mayor que la serie $u_m + u_m + \ldots +$ siendo esta última divergente.

Ejemplos:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) / 3^n}{n / 3^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} (1/3)(n+1)/n = 1/3$$

luego la serie es convergente según el criterio de D´Alembert.

b) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} +$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \to \infty} 1/(n+1) = 0$$

la serie es convergente.

c) $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1} / (n+1)!}{n^n / n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \ (n+1)!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n \ (n+1) \ n!}{n^n \ (n+1) \cdot n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = e > 1$$

luego la serie es divergente[77].

Criterio de Cauchy

Consideremos una serie de términos positivos:

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$

Calculando el $\lim (u_n)^{1/n} = L$, si $L < 1$ la serie es convergente,

[77] Se sugiere revisar los tres ejemplos y muy particularmente el álgebra utilizada en cada uno.

$n \text{-----} \infty$ si $L > 1$ la serie es divergente y cuando $L = 1$ con este criterio no puede determinarse que ocurre con la serie, si es convergente o divergente.

Demostración

- Cuando $L < 1$, adoptando un valor h mayor que L pero menor que 1, será:

$(u_n)^{1/n} < h$

desde un n en adelante, por ejemplo a partir del m – simo término [podrá ser para algunos valores de n, $(u_n)^{1/n} < h$]

Será entonces:

$(u_m)^{1/m} < h$ luego $(u_m) < h^m$

$(u_{m+1})^{1/m+1} < h$ luego $(u_{m+1}) < h^{m+1}$

…………………………………………

$(u_n)^{1/n} < h$ luego $(u_n) < h^n$

…………………………………………

Sumando ordenadamente se observa que los términos de la serie:

$u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots + u_n + \ldots$ son respectivamente menores a los de la serie geométrica: $h^m + h^{m+1} + \ldots.. + h^n + \ldots$ Por lo tanto si esta serie geométrica es convergente la serie anterior será convergente de acuerdo con el criterio de comparación, y la serie geométrica es convergente pues su razón h, es menor que uno.

- Cuando $h > 1$

En este caso será a partir de un índice m,

$(u_m)^{1/m} > 1$, o sea:

$u_m > 1$; $u_{m+1} > 1$; ……….. y la serie

$u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots\ldots..$ tendrá sus términos mayores que los de la serie divergente

$1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ejemplos:

1) $1 + 1/4 + 1/27 + 1/256 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/n^n$

$\lim_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} (1/n^n)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} (1/n) = 0$ por lo tanto la serie es convergente.

2) $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + 1/5^4 + \ldots + 1/5^n + 1/5^{n+1} + \ldots.$

$\lim (u_n)^{1/n} = \lim (1/5^n)^{1/n} = \lim (1/5) = 1/5$ la serie es convergente.

$n \to \infty \qquad n \to \infty \qquad n \to \infty$

Criterio de Raabe[78]

Este criterio se utiliza cuando los criterios anteriores no son aplicables, o sea cuando para $n \to \infty$, el límite de $(u_n)^{1/n}$, o el de (u_n / u_{n-1}), resulta ser L = 1. El mismo dice lo siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} n.\left[1 - (u_n / u_{n-1})\right] = L, \quad \begin{array}{l} \text{si } L > 1 \text{ la serie es convergente} \\ \text{si } L < 1 \text{ la serie es divergente} \end{array}$$

Cuando L = 1 con este criterio tampoco puede decirse nada sobre la convergencia o divergencia.

- Cuando L > 1

Si desde n en adelante se cumple que:

$n.\left[1 - (u_n / u_{n-1})\right] > 1 + \varepsilon > 1$, multiplico por n el corchete y resto 1 en ambos

$\dfrac{n . u_{n-1} - n . u_n}{u_{n-1}} - 1 > \varepsilon$ miembros de la desigualdad y saco común denominador u_{n-1}:

$$\frac{n . u_{n-1} - n . u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}} > \varepsilon$$

paso u_{n-1} al 2º miembro y saco factor común u_{n-1} en el primer miembro, se deduce:

$$(n-1)\, u_{n-1} - n . u_n > \varepsilon . u_{n-1}$$

Prescindiendo, si es preciso, de un número finito de primeros términos puede suponerse que esta desigualdad se verifica desde el primero; dando a n los valores 2, 3,…. m, resulta:

Para n = 2 es: $\quad u_1 - 2 . u_2 > \varepsilon . u_1$

Para n = 3 es: $\quad 2 u_2 - 3 . u_3 > \varepsilon . u_2$

…………………………………

$$(m-1)\, u_{m-1} - m . u_m > \varepsilon . u_{m-1}$$

[78] Rey Pastor, J. y otros. (Pag.310)

Sumando todo nos queda: $u_1 - m \cdot u_m > \varepsilon \cdot U_{m-1}$

Siendo $U_{m-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{m-1}$ es decir la suma de los primeros (m – 1) términos.

De donde: $U_{m-1} \leq \dfrac{u_1 - m \cdot u_m}{\varepsilon} < \dfrac{u_1}{\varepsilon}$ es decir, las sumas parciales de la serie dada se conservan acotadas, y por lo tanto, la serie es convergente, con suma no superior a u_1/ε.

Entonces se puede enunciar: "Si desde un valor de n en adelante la expresión $n \cdot [1 - (u_n / u_{n-1})]$ se conserva superior a un número fijo, $1 + \varepsilon > 1$, la serie $\Sigma\, u_n$ de términos positivos es convergente. Si dicha expresión se conserva inferior o igual a 1, la serie es divergente."

Cuando $n. [1 - (u_n / u_{n-1})] \leq 1$ se deduce: $(u_n / u_{n-1}) \geq (n - 1) / n =$

$= (1/n) / (1 / n-1)$ con $u_n = 1/n$; $u_{n-1} = 1/n - 1$ que demuestra por el criterio de comparación respecto de la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$ que la serie $\Sigma\, u_n$ es divergente.

<u>Ejemplo</u>:

Dada la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots$$ estudiamos si es convergente.

- Aplicamos D´Alembert

$$\lim_{n \to \infty} (u_n / u_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n^2}{1/(n-1)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = 1$$

por lo tanto con el criterio de D´Alembert no puede afirmarse nada.

- Aplicamos entonces Raabe

$$\lim_{n \to \infty} [n(1 - u_n / u_{n-1})] = \lim_{n \to \infty} \left[n\left(1 - \frac{1/n^2}{1/(n-1)^2}\right]\right. = \lim_{n \to \infty} \left[n\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\right. =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[n\left(\frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{n^2}\right]\right. = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2n - 1}{n}\right] = 2$$

luego como L > 1 la serie es convergente.

Series Alternadas. Criterio de Leibniz[79]

Se da este nombre a las series cuyos términos son alternados positivos y negativos:
$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots + u_n$

Vamos a demostrar que si cada término es numéricamente menor que el que le precede, y si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, la serie es convergente; este es el criterio de Leibniz.

Escribamos para demostrar este criterio estas dos sumas:
$S' = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) \ldots +$ (I)
$S'' = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) \ldots$ (II) que son dos formas, convenientes para la demostración, de escribir la serie que nos han dado.

De acuerdo con lo que indica la (I) la suma es superior a cero pues estamos sumando paréntesis que son todos positivos, (tener bien presente que hemos dicho que cada término es menor que el anterior). Observando la (II) vemos que la serie es siempre inferior al primer término u_1, pues al mismo le estamos restando paréntesis positivos. Por lo tanto la suma de la serie está comprendida entre cero y u_1 es decir, la serie es convergente.

Ejemplo: La serie alternada:
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$ es convergente. Pues cada término es numéricamente menor que el anterior y además:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Con referencia a series alternadas también es importante decir lo siguiente: si al considerar la suma de una serie alternada se considera un número finito de términos, el error que se comete es menor que el valor del primero de los términos que se desechan.

Por ejemplo en la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots\ldots$$

La suma de los diez primeros términos vale 0,646, el primer término que se está desechando es 1 / 11, se demuestra que el error que se comete en la suma de la serie por el hecho de haber tomado 10 términos en lugar de los infinitos términos es menor que 1 / 11.

Convergencia absoluta

Se dice que una serie es absolutamente o incondicionalmente convergente, cuando sea convergente la serie formada por los valores absolutos de sus términos. Las otras series convergentes se llaman condicionalmente convergentes.

[79] Rey Pastor, J. y otros. (Pág. 312)

<u>Ejemplo</u>:

01. $1 - 1/2 + 1/2^2 - 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots$ es absolutamente convergente, puesto que la serie formada por los valores absolutos de sus términos

$1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots$ es convergente pues se trata de una serie geométrica de razón $q = 1/2$.

02. La serie

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ es condicionalmente convergente. Ello se debe a que la serie formada por los valores absolutos de sus términos es la serie armónica que es divergente.

Serie de números complejos (320)

La definición de serie se extiende también al caso en que sus términos sean números complejos, o sea tendremos

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \ldots.. + z_n$

donde el término general z_n de la serie es: $z_n = a_n + b_n\, i$,
la suma de los n primeros términos será un número $A_n + B_n\, i$ y el límite de $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \ldots.. + z_n$ para n tendiendo a infinito será $A + iB$, si se verifica que:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots.. + a_n = A_n \dashrightarrow A$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots.. + b_n = B_n \dashrightarrow B$

La condición necesaria y suficiente para que la serie sea convergente, es que lo sean las dos series de términos reales.

Serie funcional o serie de potencias

Supongamos tener esta expresión:

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$

esta es una suma de funciones en número limitado, o sea es un polinomio. Pero podríamos tener un número ilimitado de funciones.

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x + \ldots + \operatorname{sen}^{n-1} x + \operatorname{sen}^n x$ esto es una serie. Las que ya conocíamos eran series numéricas pues sus términos son números, estas son series de funciones. De las series de funciones nos interesa estudiar esta:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots.. + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots$ el exponente de x va creciendo sin limitación. Esto es una serie funcional, pero se llama además con el nombre particular de serie de potencias.

Los valores $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ a_{n-1}, a_n$, son números. Para cada valor que le demos a x tendremos una serie numérica; entonces aquí nos interesa lo siguiente:

Aquel conjunto de valores x para los cuales la serie es convergente, se llama <u>intervalo de convergencia</u> de la serie. (Algunos autores también lo llaman dominio o campo de convergencia). Vamos a ver entonces cuál es ese intervalo. Hay un teorema que asegura que el intervalo de convergencia es simétrico respecto del origen.

Esto se entiende así: si por ejemplo la serie converge para $x < 3$ podemos asegurar que converge para todo valor de $|\ x\ | < 3$. El problema de hallar el intervalo de convergencia se ha transformado entonces en el de encontrar el valor Ox llamado <u>radio de convergencia</u> (R). Vamos a aplicar para ello el criterio de D´Alembert. Formamos el cociente de un término con el anterior y calculamos el límite del mismo cuando n tiende a infinito: $n \longrightarrow \infty$.

Será:

$$\lim_{n \to \infty} (u_n / u_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{x\ a_n}{a_{n-1}}$$

de acuerdo con el criterio de D´Alembert, la serie es convergente si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x\ a_n}{a_{n-1}} < 1, \text{ luego}$$

$$x\ .\ \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \text{ haciendo pasaje de miembros:}$$

$$x < \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

Llamando radio de convergencia a 1 sobre el límite cuando n tiende a infinito del cociente de los dos coeficientes

$$\frac{1}{\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} = R,$$

luego $x < R$ por lo tanto de acuerdo con el teorema anterior la serie converge para:

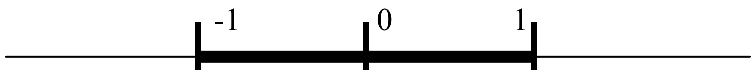
$|\ x\ | < R$, o sea la serie converge para todos los puntos interiores del intervalo (-R; R); para los extremos del intervalo no puede asegurarse nada.

<u>Ejemplos</u>:

1) Hallar el radio de convergencia de:

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.. + x^{n-1} + x^n + \ldots$ (I); $\qquad a_n = a_{n-1} = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} 1/1 = 1$$



Luego $R = 1$ y por lo tanto la serie converge cuando $|x| < 1$.

Converge para todos los puntos interiores del intervalo (-1; 1) para los extremos del intervalo, hay que reemplazar los valores de x en serie y ver que es lo que ocurre.

Para $x = 1$, reemplazando en (I) se tiene:
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ la serie es divergente.

Para $x = -1$ resulta:
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ la serie es oscilante.

Por lo tanto se ve que en este caso los extremos del intervalo están excluidos del intervalo de convergencia. O sea que converge para $-1 < x < 1$.

2) Hallar el radio de convergencia de:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n}$$

Calculamos el radio de convergencia:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1/(n-1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)}{n} = 1,$$

luego $R = 1$ reemplazando en los extremos, resulta: para $x = 1$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ que es la serie armónica que ya sabemos que es divergente.

para $x = -1$

$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$ serie que es condicionalmente convergente. Luego, la serie dada converge para: $-1 \le x < 1$.

3) Hallar el radio de convergencia de:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Calculamos el radio de convergencia:

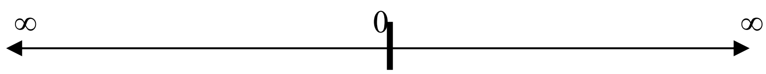
$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)!}{n!} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

como R es igual a:

$$R = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \infty$$ o sea el radio crece por encima de cualquier valor.

El radio de convergencia en este caso es infinito, por lo tanto el intervalo de convergencia es ($-\infty$; ∞) lo cual significa que la serie converge para cualquier valor de x, o sea: $-\infty \leq x \leq \infty$



4) Hallar el radio de convergencia de:

$1 + 1!x + 2!x^2 + 3!\,x^3 + 4!\,x^4 + \ldots + n!\,x^n$

Calculamos el radio de convergencia:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n \to \infty} n = \infty$$

luego R = 0, por lo tanto la serie converge sólo para x = 0.

¿Cómo estudiar las Sucesiones y Series?

Desarrollar una primera lectura siguiendo las recomendaciones, muy especialmente cuando se trate de escribir una sucesión o serie o en el caso opuesto para obtener el término general.

En una segunda lectura comenzar la clasificación o agrupamiento de los conceptos del capítulo. Por ejemplo, qué criterios se han visto. Quizás colocarlos en un cuadro con una breve síntesis acerca de qué trata.

Hacer alguna lista de las series más mencionadas como la serie armónica y otras.

Con una lectura más se puede diseñar algún mapa conceptual.

Preguntas para el final de la 2ª Parte (Cálculo Integral y Series)

¿Por qué se indica una C en la expresión final de las Integrales Indefinidas?

¿Posee un valor determinado C?

¿Qué es una Integral Indefinida?

¿Podrías graficar la solución de una integral indefinida cualquiera?

¿Qué es gráficamente C?

¿Se pueden resolver todas las integrales indefinidas?

¿Cómo se resuelve la integral de un producto de funciones?

¿Cuando se aplica el método de Resolución de Integrales Por Partes, qué criterio se adopta?

La Integral Definida ¿puede tomar valor negativo?¿Y valor cero?

¿Por qué no se indica el valor de la constante C en el resultado de las Integrales Definidas?

¿Existe sólo una forma de calcular el área de una figura irregular que es a partir de la Integral Definida?

Cuando se está resolviendo una Integral Indefinida y se ha aplicado el Método por Sustitución y un alumno ha obtenido el siguiente resultado: $\text{sen}^2(x/2) + C_1$, y el profesor para la misma integral obtiene: $\cos^2(x/2) + C_2$ ¿Es lo mismo? Justificá tu respuesta.

NOTAS

1) Clasificación de las funciones

Las funciones se nombran o clasifican según su forma, origen, método de formación, etc.

Así el seno, coseno, tangente, etc., reciben el nombre de *funciones trigonométricas o angulares*. Funciones como

x^2, $(x)^{1/2}$, + y, $3(x)^{1/2}$ - 2/y

formadas utilizando únicamente las operaciones algebraicas fundamentales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación) se llaman *funciones algebraicas*. Las funciones como b^x, en que b es constante y x variable, se llaman *funciones exponenciales* de x, y $\log_b$ x, es una *función logarítmica* de x(…)

Para distinguirlas de las funciones algebraicas se da a las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y a determinadas combinaciones de éstas, el nombre de *funciones trascendentes*.

Thompson, J.E. *Cálculo Infinitesimal*

.

2) El logaritmo, su historia

Cap. VII LA MATEMÁTICA RENACENTISTA

1.Los progresos de la aritmética

(…) Otra característica de la matemática renacentista (S. XVI) debe verse en la influencia que ejercieron en su desarrollo factores extrínsecos: así como las exigencias de los artistas dieron nacimiento a la perspectiva, que se convertirá en una nueva rama de la geometría, así las necesidades de los comerciantes, contadores y calculistas provocaron innovaciones aritméticas y las exigencias de los astrónomos condujeron a perfeccionamientos en la trigonometría. (…)

El concepto, aunque no el nombre, de logaritmo, ya como operación inversa de la potenciación, ya como correspondencia entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica, aparece en la *Arithmetica integra* de Michael Stifel aparecida en 1544 (…)

Babini, J. y Rey Pastor, J. *Historia de la Matemática.*

John Napier (1550-1617) nació en Merchiston, cerca de Edimburgo, Escocia, (…) en 1614 publica su célebre tratado Mirifici logarithmorum canonis descriptio, en el que expone su sistema de logaritmos y su modo de empleo. (…) Según Napier (el nombre de Napier se afrancesó, convirtiéndose en Néper, de donde procede el término "logaritmo neperiano".), las consideraciones que le condujeron a la invención de los logaritmos fueron: 1) el concepto geométrico – mecánico de los puntos en movimiento; 2) las relaciones existentes entre las progresiones aritméticas y geométricas.

Collette, J-P. *Historia de las Matemáticas.*

3) Límite

1ª Estrategia: Toma de notas o apuntes y breves comentarios "al pie".

01. El tema se presenta a partir del límite de sucesiones. Ayres, F., Cap 2, pág. 9 – 11. "Este capítulo trata el concepto de continuidad, una de las ideas más importantes (…)

comentaremos este concepto brevemente en forma intuitiva (…). Definición de límite de una función.

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p, si bien no debemos insistir en que f esté definida en p. Sea A un número real. La igualdad

Lím f(x) = A, para x ----- p (…) Este simbolismo implica la idea de que f(x) puede hacerse tan próximo a A como queramos, con que x se elija suficientemente próximo a p. (…) definimos los límites por medio de los entornos."

02. Apóstol, T. (Cap. 3, 155–157) Es un enfoque desde el concepto de continuidad que a su vez lo presenta intuitivamente y señala intervalo y entorno. Para comprender este autor habrá que buscar esas 2 ideas.

03. "La noción de límite (…) se encuentra frecuentemente en relación con una función f(x) que está definida para toda x en algún intervalo.

Se dice que el valor de la función f(x) tiende a un límite η cuando x tiende a ξ, o sea, en símbolos, lím f(x) = η cuando x tiende a ξ si f(x) difiere arbitrariamente poco de η para toda x para la cual f(x) está definida y que está situada suficientemente cerca de ξ. (Se supone que arbitrariamente cerca de ξ existen puntos donde f está definida).(…)

Existe una conexión muy estrecha entre los conceptos de límite de una función y continuidad(…)" Courant, R. y John, J. (105)

Hay nuevamente una referencia al concepto de continuidad.

04. "La noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra, en la Geometría elemental, al establecer o deducir la fórmula que da el área del círculo. Se considera el área de un polígono regular inscrito con un número n cualquiera de lados, y se supone, después, que n crece infinitamente (…) Granville, W.A. (16)

En esta obra el autor no agrega mucho más a lo ya enunciado. Es muy breve el tratamiento del tema y en cambio dedica "más espacio" al tema siguiente que es precisamente un tipo de límite: la derivada de una función. Además se observa que inicia el desarrollo recordando aspectos que supuestamente el lector ha visto o de alguna forma residen en su memoria. Es interesante utilizar los polígonos inscriptos (podrían ser también los circunscriptos) que al aumentar el nº de lados se aproximan a la circunferencia.

05. "Límites y continuidad. En el capítulo siguiente trataremos los dos siguientes problemas:

Considérese una curva *C* y un punto *P* sobre la misma. Sea *Q* otro punto de *C* y sea m la pendiente de la recta que une *P* y *Q*. ¿Qué ocurre con m cuando *Q* se aproxima cada vez más a *P*? Considérese un objeto móvil sobre una línea recta. Sea *T* un instante dado y *v* la velocidad media calculada para un intervalo de tiempo a partir de *T*. ¿Qué ocurre con *v* cuando el intervalo de tiempo se acorta tendiendo a cero?

Veremos que estos dos problemas se pueden plantear como casos especiales de la siguiente pregunta formulada en términos más abstractos.

Considerar una función *f* y un número *a* ¿Qué ocurre con *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a*? Nótese que esta pregunta se refiere a lo que ocurre con *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a*. No se refiere al valor de *f(x)* cuando *x* es igual a *a*. En realidad en la mayor parte de los casos que nos interesan, puede ocurrir que la función que consideramos ni siquiera esté definida para x = *a*." Leeuw, K. (29 – 32)

El autor plantea la necesidad del límite para situaciones de la geometría y la física donde los valores medios no ofrecen solución. Por ejemplo el cálculo de la pendiente en un punto de una curva, que está dado por la pendiente de la recta tangente, no puede resultar de un cociente porque el intervalo de variación de la variable que divide es cero, lo mismo cuando se desea calcular una velocidad instantánea, la variación de tiempo es cero. Entonces hay que crear un ente nuevo: el límite. Pero, también es interesante lo que Leeuw escribe a continuación cuando ofrece a la consideración tres formas de escribir el concepto de límite (30).

06. "Los conceptos de límite y continuidad están estrechamente relacionados. Realmente, uno puede ser reducido al otro. Tomamos la continuidad como el concepto *básico* porque la noción de una función como continua en un intervalo tiene un significado geométrico intuitivo(…) Lipman, B. y Karal, F. (61 -63)

En este texto se trata como en otros la continuidad vinculada al límite y también la necesidad manifestada ahora desde el propio cálculo no ya desde otras disciplinas. Por ejemplo en pag.62 se indica una función en un punto donde no está definida, es decir es discontinua. Pero, en ese punto posee límite porque la concepción de éste, como hemos visto, no refiere a *lo que ocurre precisamente en ese punto*. Además agrega que la discontinuidad se puede salvar definiendo f(c) = lím f(x) para x tendiendo a c, siendo c el valor de x donde existe la discontinuidad. El autor señala luego un ejemplo de discontinuidad donde no hay límite es análogo a nuestro "contraejemplo".

07. "Concepto de límite (…)" Phillips, H.B.

Indica la definición sin ninguna discusión, señala propiedades de los límites, algunas situaciones de cálculos en los límites y pasa a otro capítulo con derivadas. En su prólogo, hay expertos que denominan prefacio porque está escrito por el propio autor, señala Phillips que ha considerado "aquellos principios de mayor utilidad en las aplicaciones a la Ciencia y a la Ingeniería".

08. "Límite de la función. Examinemos algunos casos de variación de una función cuando el argumento x tiende a un límite *a* o al infinito." Piskunov, N. (30)

El autor presenta dos definiciones, una para límites finitos, como hemos visto hasta ahora y otro para límites también finitos pero donde la variable independiente tiende a infinito. En estos últimos casos se dice que la función posee una asíntota horizontal. (recordar el caso de las funciones exponenciales, en el gráfico de cuatro funciones todas tendían a cero cuando x tendía a - ∞ en algunos casos y en otros a + ∞). La 1ª definición que refiere al caso que vimos hasta ahora es muy breve y luego se agregan observaciones donde se señala: la idea de límites laterales, cómo es la función respecto al límite en aquellos puntos posteriores y cómo en los anteriores, considerando en estos últimos los valores de x mayor o menor respectivamente respecto al valor de x en estudio y finalmente una 3ª observación que refiere a la no necesidad de la definición en el punto en consideración. (31–34)

09. La autora Hebe Rabuffetti considera *la necesidad* de plantear el concepto de límite a partir de dos problemas uno de geometría y el otro de física. Es análogo a lo visto en Leeuw. Para la definición de límite indica una f(x) = 2x – 1 pero que en x = 3 no vale f(3) = 5 como se podría suponer sino f(3) = 4. Para el análisis del límite cuando x tiende a 3 que lo indica $\lim_3$ f(x) construye una tabla, que es un elemento muy muy útil cuando un estudiante está abordando por primera vez este ente matemático.

x	2,8	2,9	2,99	2,999	…	3	…
f(x)	4,6	4,8	4,98	4,998	…	límite	

x	3,001	3,01	3,1	3,2
f(x)	5,002	5,02	5,2	5,4

“Los valores de la función f se acercan al número 5 cuando los valores de x se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar x suficientemente próximo a 3.

Si se desea, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre 5 y f(x) sea menor que un diezmilésimo, podemos considerar las siguientes proposiciones: (…)”

A continuación deduce que cuando se fija previamente para la función en consideración que la diferencia con el límite_3 (o sea cuando x tiende a 3) resulta que basta que x se aproxime a 5 cienmilésimo del valor x = 3 o sea x tome los valores de 2,99995 o 3,00005 que indica como: “ (…) y para valores de x en el entorno reducido de 3 de radio 0,00005, los valores correspondientes de f se encuentran en el entorno de 5 de radio 0,0001.”

Se hace necesario buscar el concepto de entorno reducido. (91–94) Rabuffetti, H.

10. El tratamiento de la autora Repetto es un planteo de funciones del tipo x^2 + 1 primero y luego x^2 – 5 / 5x – 1 (esta 2ª función no está definida para x = 1). Agrega en su presentación, para cada función una tablita como en el autor anterior y un gráfico, además indica en el gráfico con un redondel que en la 2ª función hay un hueco. Seguidamente manifiesta elementos o características de un límite finito, continúa con contraejemplos y arriba a la definición de Repetto, C. (117-122).

11. El siguiente texto que se presenta es un texto difícil, por lo general para los estudiantes iniciales universitarios (no matemáticos). Pero, constituye un desafío muy

valioso cuando el alumno ha consultdo otros textos más accesibles o escuchado alguna clase en su curso. Ver Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (372–374)

12. La presentación del autor Rojo, A. en el cap. 2 de su texto (Límites. Continuidad) señala primeramente Entorno y luego Entorno reducido de un punto. Prosigue con Punto de acumulación y arriba a la idea de límite de una función lo define, indica una figura que señala e ilustra el concepto y a continuación presenta breves ideas señaladas específicamente como ítems:

"El concepto de límite de una función es *local*, ya que se refiere a un punto a.

El punto a, que figura en el símbolo lím f(x) cuando x tiende a, puede pertenecer o no al dominio de la función. En este caso, no existe f (a), pero puede existir el límite mencionado.

El punto a es de acumulación del dominio de la función.

El número l puede ser finito o infinito. En tales casos los límites se dicen finito e infinito, respectivamente (…)

La definición de límite no es *constructiva* ya que no da una metodología para determinar el límite, si es que existe. (…)" Rojo, A. (33–35)

13. Es un texto, el siguiente, que indica distintos ejemplos para la comprensión del límite de una función. Sadosky, M.; Guber, R. (97–99)

14. "(…) ¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias.

¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes. ¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de los caminos obligados. (…)

La idea de límite. Empezaremos con un número l y una función f definida cerca del número c aunque no necesariamente en el propio c.(…)" Salas, S.; Hille, E. (57–70). Es muy interesante que los autores inicien el tratamiento del tema con preguntas.

15. Hay un planteo, por los autores: Taylor, H., Wade, T (81) que indica primero el estudio de la pendiente de rectas en función de una variable h que tiende a cero y consecuentemente la necesidad de estudiar límite.

16. El autor que ahora nos ocupa con su texto indica en el capítulo 1 que va a presentar el concepto de límite "primero en forma intuitiva y después formalmente". Señala razones de cambio como primer subtítulo del capítulo e indica un ejemplo real de biología acerca del estudio de crecimiento de una población de insectos. En un párrafo más adelante intitula: "Definición informal de límite" y agrega gráficos y ejemplos.

Es interesante que en la definición señalada emplea la frase: "posiblemente excepto en x_0". Thomas, G., Finney, R. (51–55).

17. El siguiente autor no utiliza límites para su presentación del Cálculo. Opera con diferenciales. Thompson, J.E.

2ª Estrategia: Comentarios comparativos de los distintos autores

Cuando se pasa revista a la presentación de este concepto del análisis matemático a partir de distintas fuentes se encuentra que hay presentaciones que:

Señalan primero el concepto de continuidad. Quizás se considere mejor hacerlo así porque se encuentra mayor significado para el estudio. Esto permite una primera noción no tan abstracta. Continuidad en una función implica que para cada x existe un y o sea "hay un punto al lado del otro", o también no hay huecos o saltos.

Algo que se señala es que para hablar de límite no es necesario que la función esté definida (no posee imagen) en ese punto. Por tanto el límite se puede estudiar para un valor de x donde no existe y. Pero debe existir, estar definida, la función en los puntos inmediatamente próximos.

En algún autor la comprensión de límite requiere saber otros conceptos anteriores como intervalo y entorno. Esto nos hace reflexionar que algunas disciplinas como la matemática poseen una epistemología que requiere de la lógica. En realidad la lógica es quien legitima la matemática. Es la fundamentación o sustento para decir "esto es verdad".

Se encuentra en algún texto un lenguaje simbólico no frecuente. Por ejemplo la idea de límite se suele asociar a las letras "a" como valor al que tiende x; "l" como límite de la función y finalmente ε, δ. Otros autores indican η, ξ.

Hay una relación entre el análisis matemático y la geometría. Por ejemplo la idea de los valores que toma arbitrariamente la variable x se puede indicar por los distintos polígonos inscriptos en una circunferencia. También podrían ser los polígonos circunscriptos. Es decir los distintos valores que toma x vendrían a ser el número de lados que se considera en los polígonos.

En estrecha relación con lo anterior se señala como calcular el área de un círculo a partir de la subdivisión del mismo en sectores circulares, al aumentar el número de lados se obtiene un rectángulo (Esto se ve luego en integrales definidas).

Introducción del concepto de límite a partir de la física utilizando la velocidad. Se plantean **problemas** y **preguntas**[80]. Esto es clave para estudiar porque un problema define qué se quiere estudiar y un interrogante invita a una apertura, "abre" el pensamiento.

Se señala un contraejemplo, es decir una situación donde no existe límite, precisamente para comprender el concepto de límite porque aquél indica un conflicto cognitivo que invita a pensar y supera a la presentación de lo contrario o sea un ejemplo.

Se indica la idea de la no terminación del no fin es decir infinito.

[80] *Los problemas y las preguntas constituyen el inicio de un estudio. El investigador comienza a formular interrogantes cuando se le presenta algo que no comprende (problema) y esas cuestiones o preguntas se dirigen a la realidad, a la masa de datos de aquello que puede conocer para que le ayuden a dar respuesta, a resolver el problema.*

Hay un planteo de tablas que permite acceder a distintos valores de la función para diferentes valores de x.

Una entrada al concepto está dado a partir de una expresión analítica donde la f(x) no está definida para un valor de x. Otra vez un contraejemplo pero ahora está combinado con expresiones algebraicas.

Se encuentra un desarrollo de límite con una secuencia de distintos ítems o elementos que dan cuenta del concepto como ser: es local, finito o infinito, no es constructivo, etc.

Un texto con distintos ejemplos.

Otros tratamientos refieren a la presentación del concepto a partir de un conjunto de rectas (geometría), de las velocidades instantáneas (física), de una población de insectos (biología) o de un texto dirigido a estudiantes de economía.

Hay un desarrollo que no plantea el concepto de límite para el estudio del Cálculo Diferencial.

4) Continuidad

"En la definición de $\text{lím}_a f(x) = L$ se consideraban lo valores x de un entorno del punto a, con excepción del punto x = a, *(esto algunos autores lo denominan el entorno reducido de a)*, donde la función podía o no estar definida y podía o no coincidir con el valor f(a) de la función.

Si se verifican las tres condiciones:

I) Existe $\lim_a f(x)$;

II) Está definido f(a), y

III) Vale la igualdad $\lim_a f(x) = f(\lim_a x) = f(a)$,

se dice que la función es continua en el punto x = a." Sadosky, M; Guber, R. (115).

Apéndice

APÉNDICE I:
LA MATEMÁTICA Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

A menudo se escucha en los ámbitos escolares las preguntas y comentarios siguientes: ¿Por qué es tan aburrida la Matemática? A mí nunca me gustó. Me resultó muy difícil en la escuela, nunca la entendí. Es árida. ¿Para qué sirve?

Comencemos por señalar que las preocupaciones anteriores pertenecen a la enseñanza, es decir a docentes y estudiantes de la disciplina pero no a los matemáticos (Licenciados y Doctores en Matemática). También vale agregar que cuando decimos enseñanza nos referimos a aquellos programas de los niveles preuniversitarios (ex secundaria y primaria) y las carreras no matemáticas como ingeniería, medicina, ciencias económicas, arquitectura y otras que necesitan de la matemática aunque no es su "fin último". Se trata de analizar cuál es el "lugar" que ocupa la disciplina en cada uno de esos currículos. Para ello vamos a averiguar cómo es esta asignatura que preocupa tanto a docentes como a estudiantes de todas las épocas.

Señalemos algunas miradas acerca de la "ciencia más exacta".

LA EPISTEMOLOGÍA

La primera será desde **el lugar de la epistemología**, habremos de referirnos al carácter de los objetos con los que trata esta ciencia.

Los objetos cognitivos de la matemática no son orgánicos ni inorgánicos, no pertenecen ni al reino animal o vegetal, o en general de los seres vivos, ni son minerales.

¿Esta disciplina trata fenómenos sociales o humanísticos? No. Podemos indicar que la disciplina no pertenece ni a las ciencias fácticas, como la química y la física que estudian la materia, ni tampoco a las ciencias del hombre. En realidad podemos ya señalar que son objetos inmateriales.

¿Cómo son los entes matemáticos? Son vacíos[81]. No poseen sustancia alguna, de ninguna índole. Luego, son objetos que no poseen existencia, sólo se "encuentran" en la mente humana, son productos teóricos del hombre. Cuando se dice "el número tres", o "la raíz cúbica de veintiocho", o "el polinomio $2x^3 - 5x^2 - 1$", son frases que no tienen correspondencia con situaciones reales, tangibles.

La matemática es una **ciencia formal**, se ocupa de las formas. Cuando estudia el volumen de un vaso utilizado para beber y señala que posee la forma de un cilindro no refiere a si está hecho de plástico o de vidrio y tampoco le interesa. Y cuando señala que el conjunto de las estrellas del universo es infinito o finito está indicando que no existe una última estrella, o sí existe, sin interesarle cuál es la verdad astronómica. Por ejemplo si una persona asegurara que aunque es muy difícil, quizás imposible, contar todas las estrellas pero existe un número limitado de ellas, la matemática diría: "estamos en presencia de un conjunto finito" y si otra asegurara que nunca se podría llegar a contar todas porque son

[81] Diálogo de Socrátes con Hipocrátes.

como los números naturales entonces la matemática señalaría que "es un conjunto infinito"⁕.

La matemática es una **disciplina sintáctica** pura, es sólo eso. Es similar al análisis sintáctico que realiza la disciplina Lengua estudiando el lugar del sujeto y el predicado en la oración. Cuando decimos sintaxis estamos señalando que la matemática es sólo orden.

LA PEDAGOGÍA

Una segunda visión nos la proporciona la pedagogía. En términos educativos esta ciencia se compone de **contenidos operativos o formales**[82] y carece de contenidos sustanciales o figurativos. Los primeros son por ejemplo: deducir, inducir o abducir, los segundos se vinculan a aquellos temas de una asignatura que permiten construir algún croquis cuando se elabora el conocimiento en referencia a la realidad. Cuando uno señala el nombre de un animal o la parte de una planta, mentalmente se asocia con alguna figura. Usualmente se los conoce como los contenidos a secas del programa.

La matemática es una ciencia eminentemente lógica, y es esta última materia la que sustenta las verdades matemáticas. Otras ciencias por ejemplo recurren a la experimentación para fundamentar sus conceptos o teorías pero esta ciencia exacta que tratamos no.

LA SEMÁNTICA

El tercer lugar para el análisis lo reservamos a la **Semántica**. Literalmente podríamos señalar que la matemática posee conceptos no – semánticos, es decir que carecen de significado, no posee vínculos con el exterior a su disciplina. Esto se corresponde con lo antedicho cuando señalábamos que decir hoja permite construir una figura pero el número tres no.

⁕ Durante la década del 80 enseñé Didáctica de la Matemática en los Cursos de Profesor Elemental (maestros). En una clase una de las alumnas preguntó si el conjunto de las estrellas era infinito, yo trasladé la cuestión al curso y uno de los pocos alumnos varones respondió que no y justificó porque consideraba que habría una última estrella y porque era un conjunto finito, sin embargo existió otra opinión que una alumna expuso diciendo que era imposible contar la última estrella, aunque no aclaró por qué, y por tanto era un conjunto infinito. Yo le dije muy bien al igual que a su compañero. Una 3ª alumna, que era una novicia religiosa, el establecimiento era confesional, se molestó muchísimo y me señaló que la matemática no era tan exacta como siempre se dice y que yo era un profesor que a todos los alumnos les decía que estaba bien. Cuando concluyó su discurso crítico le indiqué que a la ciencia de la matemática no le interesan los conjuntos reales o materiales, sólo trabaja, opera, considera conjuntos inmateriales y además su epistemología eminentemente lógica funciona según la información que recibe: si un alumno dice que puede contar la última estrella es un conjunto finito y si una alumna señala que no se puede contar la última estrella es infinito. El problema no es matemático, en todo caso es físico o de ingeniería espacial o astronómico pero no es matemático. Se había instalado la discusión, el conflicto cognitivo, había que pensar. Por entonces lo hacía intuitivamente pero observaba que funcionaba y habría de repetirse la situación escolar de instalar contradicciones de tesis vs antítesis en otras oportunidades, para arribar finalmente a una síntesis.

[82] ⁕ Piaget, J. en: Sacristán J.G. y Pérez Gómez, A. I. (1998)

Entonces cabe ahora preguntarse: ¿para qué se estudia? En realidad la pregunta estrictamente no posee respuesta. Debemos reformularla y decir ¿por qué se estudia? Y esta implica señalar las causas, la historia de la disciplina y del estudiante, la epistemología, la pedagogía y la semántica de la que ya hablamos. Pero, avancemos un poco más. La matemática es una ciencia formativa, forma, educa, enseña, ayuda a pensar, a crecer intelectualmente. Luego la respuesta que da esta ciencia se dirige a aquellos factores que condicionan a por qué estudiar antes que a los objetivos que persigue trabajar con la misma. Es una ciencia **no informativa** porque su misma esencia, su estructura y el carácter de sus objetos así nos lo dice como ya hemos señalado.

APÉNDICE II:
LAS CUATRO FORMAS DE PENSAR

Este trabajo surge de:

- una inquietud de esclarecer un tema relevante para la profesión docente,
- la inspiración en la conferencia de Juan Samaja[83] sobre las inferencias racionales,
- considerar la necesidad de contar con un documento no muy extenso para la consulta de los docentes de la cátedra a mi cargo y los colegas,
- el análisis de las clases en el proyecto de investigación "La construcción de un cambio educativo", lo que finalmente me animó a reflexionar y escribir.

LA ANALOGÍA

Aunque sin mucha conciencia, y mientras realizaba un curso de post-grado con un psicólogo observé que utilizaba los conceptos de *campo* y *fuerza* para fenómenos sociales y humanísticos. Creo que me asombró singularmente que un profesional de esa área utilizase ideas de las ciencias exactas. Años más tarde leería a Pierre Bourdieu y encontraría que el mundo sociológico se nutre de la física.

Hacia unos siete u ocho años atrás escribí acerca del *objeto de conocimiento*[84]*,* como la reflexión, pensado en distintos campos y las analogías geométricas. Entonces no la consideraba como inferencia sino como una estrategia docente. La experiencia me había permitido descubrirla así.

La reflexión, pensaba, consecuencia de una situación de aula, puede ser una propiedad de algunas relaciones matemáticas aplicadas a conjuntos, o el fenómeno luminoso al incidir en una superficie pulida, o los pronombres ingleses que se ocupan de señalar las acciones del sujeto que recaen sobre el mismo, o la actividad de pensar sobre acciones..., tiempo más tarde agregué una figura más: la geométrico-etimológica ('flexibilis' quiere decir doblar y el prefijo 're' es reiteración, luego reflexión es doblar y volver a doblar hasta retornar al punto de partida).

Las analogías geométricas surgieron por el impacto del mundo pedagógico al que accedí por aquellos años. Necesitaba comprender, entonces intuitivamente dibujaba una circunferencia para la idea de *grupo* con su *verdad* y el *poder* en el centro y los *consensos* o *conflictos* según la distancia que los separaba: cuerdas y diámetros. Aquel mundo geométrico donde me sentía seguro me iba a ayudar a ingresar en ese nuevo mundo. También recurrí a las rectas, planos y ángulos. Necesitaba ver para comprender y *ver* en esos momentos era graficar.

---

[83] Samaja, J. Elementos para una tópica de las inferencias racionales. (1996)

[84] Lorenzi, A. 1ª Edición. Serie Aprendés. (9 ensayos). (1994 y 1995). El primer artículo es: *Los objetos de conocimiento*. Trata de ver *la reflexión* desde distintas áreas del conocimiento.

Luego llegó Bachelard y su texto[85]. Lo leí varias veces pero hubo una vez que lo leí distinto a las otras. Siempre se lee en forma diferente, pero a veces ocurre, el asociar con vivencias singulares, otras lecturas o experiencias de vida 'fuertes'. Me pareció ver en el autor un creador de analogías, y singularmente de analogías químicas. A él le interesa destacar los obstáculos epistemológicos que se suceden en una investigación y entre otros capítulos aparecen las ideas de: la esponja, la sustancia, la digestión. Hay una variada cantidad de ejemplos de aspectos en la formación de un investigador asociada a fenómenos químicos.

La reflexión sobre las analogías químicas me llevó a pensar que la química se enseña como si todo estudiante, en cualquier ciclo del sistema educativo llegara a ser licenciado en química, ingeniero químico o técnico químico.

¿No será mejor enseñar química como una fuente de analogías? Es decir una ciencia para la comprensión y no con sentido utilitario o 'para la aplicación'.

Pero, ¿qué es analogía?, los profesores de matemática somos ontológicos y creo que no lo sabemos. A mí se me ocurrió...[86]

De su origen griego: 'αναλογια' significa proporción, semejante. Proviene de: 'ανα' conforme a, o sea de acuerdo a, y 'λογια' razón.

Se trata de una razón igual a otra razón. Por ejemplo la 1ª: ' a dividido b' es igual a la 2ª razón: ' c dividido d '. Esa igualdad es la proporción, la que da nombre a esta forma de pensar. E indica que el vínculo entre a y b *en un mundo*, *en una disciplina*, es igual a la relación entre c y d en *otro mundo*, *en otra disciplina*, es igual en el caso de la matemática y se escribe (a / b) = (c / d). Aquí es una proporción (matemática), pero sino en general se trata de relaciones no-matemáticas que guardan una similitud, una relación analógica.

Cuando nosotros estudiábamos a los ocho, nueve años los vínculos entre los obreros y los ladrillos, como ser: si un obrero levanta una pared de cinco hiladas de ladrillos, dos obreros levantan ... "La regla de tres", porque se conocen tres cantidades, es una proporción entre dos magnitudes: la cantidad de obreros y las hiladas de ladrillos. Es una analogía matemática llamada proporción entre esas dos magnitudes.

Sin embargo, la analogía se concibe, con cierta frecuencia, como una forma de pensar para vincular, estudiar un mundo desde otro más conocido. Más abajo se indican dos estructuras de la matemática o dos ramas como el lenguaje conjuntista (o los Conjuntos) y la geometría (euclidiana) frecuentemente utilizados para expresar gráficamente entes de las ciencias sociales.

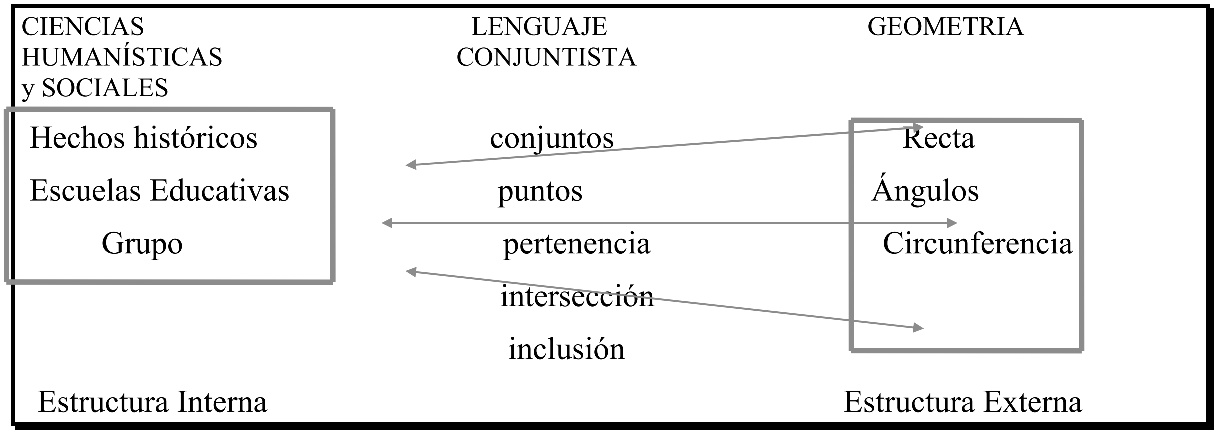
El docente crea analogías cuando la experticia del saber elaborado no puede alcanzarse por el novato o alumno. Es un puente que comunica dos mundos de saberes, que ayuda a compartir usufructuando alguna relación, generalmente no-matemática, alguna

---

[85] Bachelard, G . La formación del espíritu científico.

[86] Lorenzi, Andrés. *Analogías Geométricas 2ª Parte,* 1994. 1ª Edición. Serie Aprendés. La analogía es como una señora de nombre Ana y apellido Logía. Su apellido era Logos pero al llegar a América sus ancestros decidieron cambiarlo por razones políticas y de migración. Se la encuentra en horarios de clase en las escalinatas de ingreso a la Facultad. Se ocupa de vincular el mundo cotidiano -de la calle, de la vida que trae el alumno- con el mundo científico-académico del claustro universitario.

semejanza, entre los vínculos que guardan los elementos o entes de cada una de las dos disciplinas.



LA ABDUCCIÓN

Abducir es investigar. Es indagar.

Es *conectar la nariz con el cerebro*. Este guarda en su interior las abstracciones, leyes, teorías, el mundo del saber científico: las reglas. LO ABSTRACTO. ¿Y qué es una regla? Es la síntesis de haber observado muchas cosas y decir *que* las vincula. Luego sobreviene el enunciado, pero después... Puede ser una relación matemática o no. Todo eso custodia el cerebro celosamente.

La nariz o el sentido de oler, sabemos que husmea, curiosea, chismosea (*la* nariz), chusmea, 'anda a la pesca' de alguna *noticia de pueblo chico*. Busca indicios, rasgos, características.

Abducir es conectar los últimos: indicios, con las primeras: reglas. Es vincular el 'olfato del sabueso' con el cerebro de *Sherlock*.

Vincular la regla con el indicio es determinar el caso. O sea el objeto que se estudia. Pero es un estudio para identificar, para conocer y quizás también para aprender. Pero fundamentalmente conocer: descifrar, desarmar los nexos de la estructura, comprender la naturaleza del objeto de conocimiento.

El objetivo de abducir es identificar. No hay ninguna preocupación de incluir ese caso, ese elemento en tal o cual colección o conjunto de elementos o casos. La regla se la usa para individualizar no para decir este caso cumple con esta ley.

Formulísticamente se escribe así:

Regla + Indicio = Caso IDENTIFICA o EXPLICA

Se suele señalar resultado en lugar de Indicio, pero se torna difícil de entender. Dado que aquél posee una fuerte acepción de finalización, de alcanzar algo. Y aquí lo que se alcanza o sea la conclusión es el caso por eso se prefirió este término (indicio).

Las 3ª y 4ª formas de pensar son tristemente célebres. Tanto se 'han enseñado' o como se llame, que se las señala como únicas.

La INDUCCIÓN y La DEDUCCIÓN

Para comprender y diferenciar de la abducción es clave lo siguiente: la deducción y la inducción se refieren a conjuntos matemáticos. Luego sus reglas dan cuenta de una pertenencia de generalización.

Samaja pone énfasis en esto: destacar que estas dos inferencias se refieren a una pertenencia de generalización, luego interesa decir, como dice la matemática: estos elementos pertenecen o no pertenecen a este conjunto. Y aquí hacemos la salvedad: pero es una ley la de ese conjunto de tipo generalización. Interesa que todos los elementos cumplan con esa regla o ley.

La identificación no es el **móvil** que lleva a pensar con estas dos inferencias. Está bastante aceptado, aunque no muy lógico, que la preocupación de la inducción es encontrar la regla con el conocimiento de casos e indicios; y el interés de la deducción es encontrar o reconocer el indicio en un caso que pertenece a un conjunto de regla dada.[87]

Tanto la abducción, la deducción y la inducción hablan de reglas y por tanto de conjuntos y de pertenencia.

La primera (la abducción) indica una pertenencia, y por ende una regla y un conjunto, pero una pertenencia de identificación. Señala Samaja que el investigador cuando utiliza una regla, proveniente de la anatomía comparada, como por ejemplo acerca de las distintas especies que poseen colmillos, para estudiar un caso, el típico ejemplo del colmillo hallado, el indicio, y con la regla que el profesional posee entre sus saberes, le permite determinar el caso y decir: aquí hubo un Tyranosaurio Rex, identificó el caso. Pero no le interesa la regla en sí para señalar una generalización si todos los T.R. estuvieron ahí, o cualquier otra generalización de los individuos de esa especie. El paleontólogo dice este colmillo como parte del todo (el animal) o sea va de la parte al todo. Hay un conjunto de tipo biológico en la abducción.

La abducción va de una parte-órgano a un todo-conjunto, y en la deducción y la inducción se va del todo-conjunto a la parte-subconjunto la 1ª e inversamente la 2ª.

En estas últimas dos hay conjuntos matemáticos se va del elemento al todo, en la inducción, que se suele confundir con la abducción y en la deducción va del todo al elemento siempre con referencia a un conjunto matemático. Ambas trabajan con la pertenencia a la generalización.

[87] Se podría plantear que estas son otros dos tipos de investigación. Quizás convenga, hasta tener seguro o mejor el concepto de abducir, hacer una simplificación transitoria y decir: la deducción y la inducción son inferencias para la generalización. En otro momento del estudio de estos temas se puede conjeturar que la investigación pasa por distintas instancias y posiblemente la abducción se da en una etapa de investigación exploratoria y las dos *célebres* en la validación o justificación.

El cuadro general sería:

			Conclusión	
ABDUCCIÓN	Regla + Indicio	=	Caso	IDENTIFICA o EXPLICA
DEDUCCIÓN	Regla + Caso	=	Indicio	PREDICCIÓN
INDUCCIÓN	Caso + Indicio	=	Regla	GENERALIZA
ANALOGÍA				ANÁLISIS COMPARADO

Aquí continuaría la reflexión acerca de: ¿qué inferencias son más usuales en diferentes momentos, disciplinas, profesiones,...? Incluso cuando se piensa ¿cómo se piensa ? Samaja dice: 1º analogía, 2º abducción, 3º el proceso deducción-inducción.

Es interesante para plantearse otras formas de pensar, e investigar con la hipótesis que cada inferencia puede ocupar un lugar en el pensamiento y contribuir al todo.

APÉNDICE III: LA DERIVADA Y SUS SIGNIFICADOS

La noción de derivada se dirige a distinguir una nueva variable: **una variación respecto a otra variación**, o sea un cociente de variaciones. Sabemos que dividir es comparar, es medir. Si bien la derivada de una función conceptualmente es una variación respecto a otra que tiende a cero, vamos a ver primero dos variaciones o incrementos finitos distintos de cero. Lo que sigue son ejemplos de distintos fenómenos.

La variación de temperatura respecto al tiempo. Los vegetales sufren esos cambios bruscos de T. No sólo las bajas y altas temperaturas pueden resultar destructivas sino también las variaciones de temperatura y especialmente cuando se realizan en tiempos pequeños. Matemáticamente: $\Delta T / \Delta t$, con T: temperatura y t: tiempo.

Los resfríos son provocados por bajas temperaturas pero, fundamentalmente por bajas violentas o bruscas de temperaturas.

Las caídas de una persona son variaciones repentinas de altura. $\Delta h / \Delta x$. Con h: altura y x: avance o espacio.

Las erosiones del suelo se producen por variaciones "fuertes" de altura.

Las variaciones de la moneda patrón respecto al tiempo provocan zozobras en la economía.

La adolescencia para el ser humano significa una etapa de su vida de fuertes cambios, psicológicos, sociales y biológicos en corto tiempo.

En Física, en el Movimiento Uniformemente Acelerado se estudian e, v y a *vs.* el tiempo. Constituyen una parábola, una recta de pendiente igual a la aceleración y una recta paralela al eje de abscisas.

La pendiente de un río como el Paraná constituye un ejemplo para este tema. Cuando las aguas llegan a cotas altas como 43 mts. en Iguazú y 6 mts. en Posadas se producen los siguientes incrementos: $\Delta h = 43 \text{ m} – 6 \text{ m} = 37 \text{ m}$; $\Delta x = 300$ Km. luego

$\Delta h / \Delta x = 12{,}3$ m / 100 Km.

Otros ejemplos:

Crecimiento de la masa volumétrica de un bosque $\Delta V / \Delta t$

Variación del costo de transporte: $\Delta C_t / \Delta t$.

Variación del costo de transporte respecto a la distancia: $\Delta C_t / \Delta x$.

Variación del costo de transporte respecto al peso transportado: $\Delta C_t / \Delta p$.

APÉNDICE IV:
LOS RAZONAMIENTOS DE ARISTÓTELES[88]

En *La Ética a Nicómaco,* Aristóteles distingue el razonamiento técnico, el razonamiento práctico y el (que podríamos llamar) científico. El razonamiento técnico (instrumental, medios-fines) presupone unos fines determinados y, cumpliendo unas reglas conocidas, utiliza unos materiales y medios dados para conseguir aquellos fines. Ejemplos de esta acción "de manufactura" son la confección de una olla o de un poema; en educación, los ejemplos serían el uso de los descubrimientos de las investigaciones sobre los efectos de las cuestiones que se incluyen en el escrito al preparar un libro de texto o cumplir las reglas del reforzamiento para determinar las premisas de los premios y los castigos en clase. En el nivel de un sistema educativo, el uso de planificación y de presupuestos de programas y el de sistemas de indicadores del rendimiento como instrumentos de evaluación son ejemplos de utilización de la razón técnica.

Por el contrario, el razonamiento práctico no supone la existencia de fines conocidos ni de medios determinados ni sigue reglas metodológicas impuestas; en cambio, es la forma de razonamiento apropiada en situaciones sociales, políticas y otras en las que las personas sensatas razonan, basándose en la experiencia, acerca de cómo actuar de manera leal y correcta en determinadas circunstancias históricas (en las que tanto los medios como los fines son problemáticos).

Mientras que la razón técnica se expresa en la "ejecución material" de la acción, la razón práctica se expresa en el "desarrollo global" de la acción.

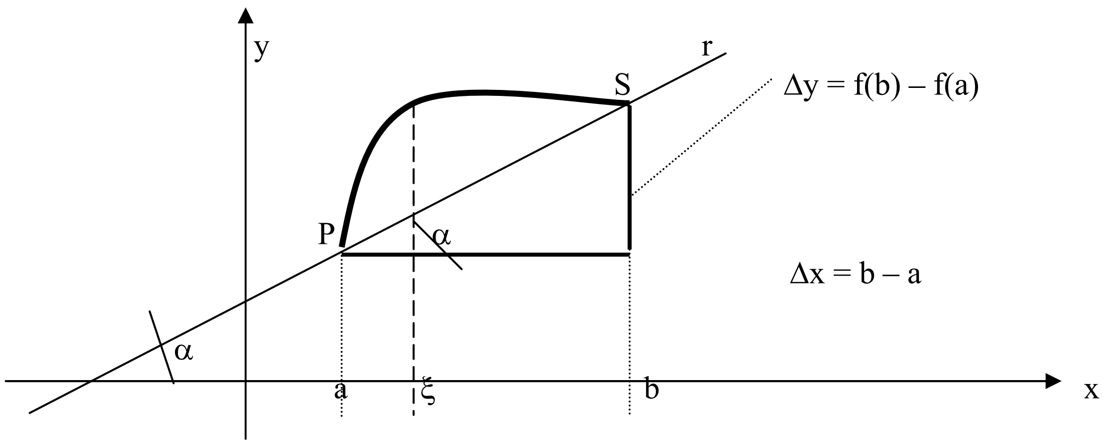
Los ejemplos clásicos del razonamiento práctico son los de la decisión del político sobre el curso de la acción adecuado ante determinadas exigencias y circunstancias sociales y políticas o la del comandante militar obligado a decidir si hay que luchar o conviene retirarse ante una posible derrota. En el campo de la educación, un ejemplo sería el de un profesor que tuviera que decidir si castigar a un alumno que se comporta mal o aprovechar la ocasión de la mala conducta como oportunidad educativa para dialogar sobre el carácter y las consecuencias de ese tipo de mal comportamiento. En el nivel del sistema educativo, la decisión de los responsables políticos acerca de la introducción de un sistema de evaluación basado en indicadores de rendimiento podría lograrse sobre la base del razonamiento práctico (sopesando los medios y los fines y decidiendo si merece la pena).

Según Aristóteles, el razonamiento "científico" (*theoria*) se ocupa en exclusiva de cuestiones intelectuales -entre los ejemplos puede ponerse la filosofía analítica y la matemática pura-, constituyendo una forma de razonamiento que informa la idea contemporánea de ciencia "pura" (frente a la "aplicada").

[88] Carr, Wilfred (29)

APÉNDICE V:
DEMOSTRACIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Demostración



Nos interesa encontrar la ecuación de la recta r. Teníamos que la ecuación del haz de rectas de un punto $P_1(x_1 ; y_1)$ era:
$y - y_1 = m (x - x_1)$

Si consideramos a r como una recta del haz que tiene centro en P [a; f(a)] resultará
$y – f(a) = m (x – a)$

$m = tg\ \alpha = [f(b) – f(a)] / (b – a)$

$y – f(a) = [f(b) – f(a)] . (x – a) / (b – a)$

Despejando y (para la recta):

$y = f(a) + [f(b) – f(a)] . (x – a) / (b – a)$ (1)

Para la curva: $y = f(x)$ (2)
Restando las dos funciones (1) y (2) resulta otra función $\phi (x)$

$\phi (x) = f(x) – f(a) – [f(b) – f(a)] . (x – a) / (b – a)$ (3)

Esta función es continua y derivable, continua por ser la diferencia de dos funciones continuas, pues la (2) por hipótesis es continua y la (1) es continua pues es una recta, además la (3) es derivable en [a ; b] pues tiene derivada única, la cual se obtiene haciendo la diferencia de las derivadas de la (1) y la (2).

En la (3) para

$x = a$ corresponde $\phi(a) = f(a) - f(a) - [f(b) - f(a)] \cdot (a - a) / (b - a) = 0$

$x = b$ corresponde $\phi(b) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] \cdot (b - a) / (b - a) = 0$

Luego la función (3) cumple en el intervalo [a ; b] las condiciones establecidas por el teorema de Rolle, pues es continua y derivable y $\phi(a) = \phi(b)$ por lo tanto estoy seguro que hay un punto intermedio del intervalo en el cual la derivada de la función (3) se anula. Habrá un valor de $x = \xi$ tal que

$\phi'(\xi) = 0$ siendo $a < \xi < b$
Haciendo en (3) la derivada de la función $\phi(x)$ se tiene

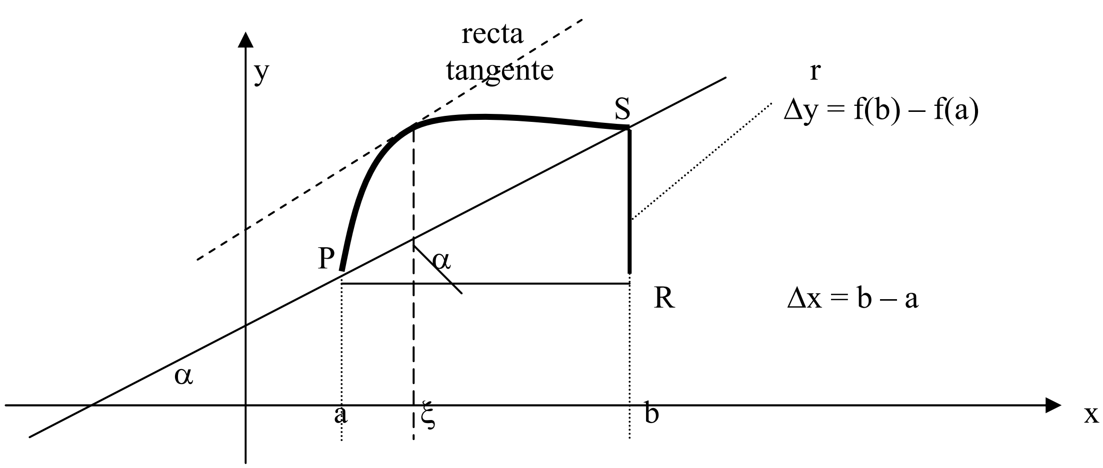
$D_x \phi(x) = f'(x) - f'(a) - [f(b) - f(a)] \cdot / (b - a)$, dado que $D_x (x - a) = 1$,
y como $f'(a) = 0$ resulta:

$\phi'(x) = f'(x) - [f(b) - f(a)] \cdot / (b - a)$ y como existe, por lo que ya dijimos, un punto interior ($x = \xi$) al intervalo donde la derivada primera se anula:

$\phi'(\xi) = f'(\xi) - [f(b) - f(a)] / (b - a) = 0$; por lo tanto

$f'(\xi) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$ o también $f'(\xi) \cdot (b - a) = [f(b) - f(a)]$

Interpretación geométrica



Si recordamos la figura de la cual hemos partido.
Considerando el triángulo PRS podemos escribir:

$tg\ \alpha = SR / PR = [f(b) - f(a)] / (b - a)$, observando la tesis del teorema del Valor Medio:

$f'(\xi) = tg\ \alpha$ ¿Y qué significa?

El punto donde $x = \xi$, interior al intervalo [a ; b] es tal que la derivada de la función f(x) para ese punto vale tg α, es decir que *las pendientes* de la recta tangente geométrica a la curva en $x = \xi$ y de la cuerda SP son iguales. Lo que a su vez significa que ambas son paralelas.
Dicho de otro modo el punto $x = \xi$ es aquel en donde la tangente a la curva es paralela a la cuerda SP.

Anexo

ANEXO I:
TABLA DE DERIVADAS

FUNCIONES

1- $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ siendo "n" una constante, que puede tomar valores naturales, negativos o fraccionarios.

2- $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

3- $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

4- $D(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

5- $D(\log_b x) = (\log_b e) \cdot (1/x)$ siendo "b" una constante

6- $D(\ln x) = (1/x)$

7- $D(a^x) = (\ln a) \cdot a^x$ siendo "a" una constante

8- $D(e^x) = e^x$

OPERACIONES

Las letras u , v , w indican funciones igual que como suele hacerlo la letra y. Además todas son funciones de x.

9- $D(u + v + w) = u' + v' + w'$ (suma o resta)

10- $D(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u$ (producto)

11- $D(K \cdot u) = K \cdot u'$ (es un caso particular del item 10 donde una de las funciones es una constante)

12- $D(u / v) = (u' \cdot v - v' \cdot u) / v^2$ (cociente)

Función de función

13- $D\{ f[w\{v(x)\}]\} = f'[w\{v(x)\}] \cdot w'\{v(x)\} \cdot v'(x)$

ANEXO II:
EJERCICIOS

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Función Lineal

1. Dada la recta $y = 3x + 2$, escribe la expresión anterior en forma segmentaria, implícita y representa gráficamente en un diagrama cartesiano.
2. Dado el punto A(3 ; 2) y la pendiente de una recta $m = 2$ escribe la función en forma analítica y representa gráficamente.
3. Dada la recta $y = 2x - 1$; escribe la función de la recta perpendicular que pasa por el punto B(1;1) y representa gráficamente en un mismo gráfico las dos rectas.
4. Dados los puntos C(1; –1) y D(0 ; 2) escribe la recta que pasa por ambos y dibuja en un gráfico cartesiano.
5. Escribe la recta que pasa por C y es paralela a $y = -x + 1$, representa gráficamente las dos rectas.

Función Homográfica

Representa la siguiente función: $y = (3x - 2) / (-x + 1)$ teniendo en cuenta: las asíntotas horizontal y vertical, y la raíz o raíces

Función Valor Absoluto

Aplica la definición de valor absoluto para representar gráficamente las siguientes funciones. Indica en cada caso dominio e imagen.

a) $f(x) = |x - 2|$
b) $f(x) = -|x|$
c) $f(x) = |x| + 1$
d) $f(x) = 2 - |x|$

Función de 2º grado

1. Representa gráficamente las siguientes parábolas indicando las raíces y el vértice, para el caso de raíces imaginarias considerar dos puntos cualesquiera (x;y) de la expresión analítica para la representación:

   a) $y = (x - 2)(x + 3)$
   b) $y = 2x^2 - 3x + 1$
   c) $y = -x^2 + x - 1$
   d) $y = -2x^2 + 4x - 2$
   e) $y = x^2 + 3x - 1$

2. Observando las expresiones analíticas de las parábolas anteriores, cuál posee la concavidad para arriba y cuál para abajo (teniendo en cuenta el signo de las ordenadas *y*). ¿Cómo se sabe a priori mirando las expresiones analíticas de las parábolas anteriores cuáles poseen raíces reales simples o dobles, y cuáles imaginarias?

3. Expresa las parábolas anteriores (dadas en forma polinómica) en la forma normal o canónica. Compara en una de las cinco cómo es la representación gráfica en una y en otra forma.

FUNCIONES TRASCENDENTES

Función logarítmica y exponencial

Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3^x$; $y = 3^{-x}$ en un mismo gráfico.
b) $y = (1/2)^x$
c) $y = 3^x$; $y = \log_3 x$; $y = x$, en un mismo gráfico.
d) $y = \log_{1/2} x$; $y = (1/2)^x$

Función Trigonométrica

Representa gráficamente en un mismo gráfico las siguientes funciones, (para el intervalo $-2\pi < \alpha < 2\pi$) ; sen α ; cos α ; tg α ; y coloca arriba de todo la función seno debajo coseno y debajo de todo la tangente. Observa cómo son los valores de la tangente respecto de los dos anteriores para algunos puntos notables teniendo en cueta que tg α = sen α / cos α

LÍMITES

Concepto de Límite Finito

1-

a)Dibuja la gráfica de una función f(x) tal que:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) < 0 \text{ si } x < 2 \\ f(x) > 0 \text{ si } x > 2 \\ \text{existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x) \end{cases}$$

b)Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

c)Justifica tu respuesta

2- a)Calcula $\lim\limits_{x\to 2} x^2$

b)A partir de un valor de x se verifica que $|f(x) - L| < 1$. Interpreta gráficamente y analíticamente.

3-a)Calcula el valor de la función f(x) = (x + 1) / x , para x = 100;1000;10000.

b)Calcula lim f(x) para $x \to \infty$

c)Verifica a partir de que valor de x se cumple $|f(x) - L| < 0,01$

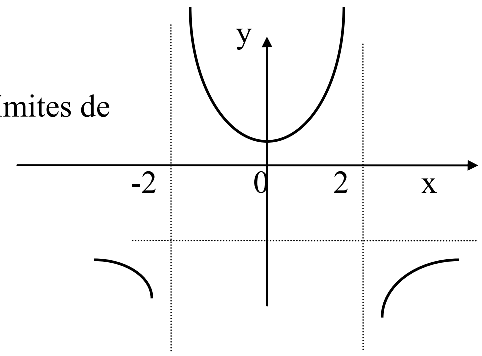
4-Aplica propiedades de límites y calcula $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ de las siguientes f(x):

a) $x^2 -2x + 3$; b) $(x - 3)^{-1}$; c) $(x)^{x-1}$; d) $(x - 3)^{½}$

5-a)Dibuja la gráfica de una función f(x) tal que verifique las siguientes cuatro condiciones:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 4$

6-Dada la gráfica de la función f(x), calcula los sgtes. límites de f(x) cuando x tiende a :
a) $-\infty$; b) -2 ; c) 0 ; d) 2 ; e) ∞



7-Calcular los límites para x tendiendo a $+ \infty$ y $- \infty$ respectivamente. Observa que ocurre con las funciones para valores de x muy positivos y muy negativos.
a) $x^3 - x^2$; b) $(x + 5)^{½}$; c) x^{-1} ; d) 2^x

Cálculos de límites para x "tendiendo a ∞" de las siguientes funciones:

8- $\dfrac{3x^7 + 8x^3 - 2}{2x^2 - 3x + 1}$;

9- $\dfrac{4x^3 + 6x^2 - 2x + 18}{x^2 + x + 15}$;

10- $\dfrac{8x^3 - 9x^2 + 3x - 1}{3x^4 + x^3 + x^2 + x + 15}$;

11- $\dfrac{(x^2 - 1)^2.(4x^3 - 1)}{(3x^4 - 1).(2x^3 - 7)}$

12- $\dfrac{-2x^2 + 3x + 6}{x^2 - 9x + 8}$

Indeterminación de Límites. Cálculos de límites para x "tendiendo a un valor finito" de las siguientes funciones:

13-
$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 1}{(x+6)^{1/2} - (9+2x)^{1/2}} \;;$$

14-
$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+6)^{1/2}}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

15-
$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x - 3) \cdot \frac{(x+3)^{1/4}}{(x-3)^{1/4}} \;;$$

16-
$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{(x-3)^2} - \frac{1}{(x^4 - 81)^{1/2}}$$

17-
$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) \cdot \frac{(x^2)^{1/3}}{(x^4 - 1)^{1/3}}$$

Asíntotas y Continuidad

18- Hallar el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

$$\frac{2x^2 - x}{x^2 - 1} \;;\quad \frac{(x-1)^2}{x^2 + 4} \;;\quad \frac{2x - 1}{x^2 - 4} \;;\quad (x^2 - 3x - 2)^{1/2}$$

19- Analizar en las siguientes funciones la existencia de discontinuidad:

senx ; $-4/x$; $x^2 - 2x + 3$; $4/(x^2 - 4)$

DERIVADAS

Calcular las siguientes derivadas por definición:

1- $y = -4x^2$;

2- $y = (x + 2)^{1/2}$;

3- $y = \cos x$

4- $y = (x)^{1/3}$;

5- $y = 8 / x^3$;

6- $y = tgx$

Aplicando las reglas de derivación, calcular las derivadas de las siguientes funciones:

7- $5x - 2x$;

8- $\frac{x - 5}{x}$;

9-
$(5x + 1) . (2x - 1)$;

10-
$\frac{(x + 2)}{x - 1}$

11-
$\text{sen} (5x + 3x)$;

12-
$\cos^2 (3x - \ln 5x)$; Aclaración: $\cos^2 f(x) \neq \cos [f(x)]^2$

13-
$\ln [\sec 3x]^3$;

14-
$\frac{e^x + e^x}{e^x}$

15- $\text{arcsen}\, x . (\text{arctg}x)$;

16- $\text{sen}\{ \ln (x^3 - 2)^{1/2} \}$

Derivar las funciones y = f(x) definidas implícitamente:

17- $2x - 3xy + y^2 = 5$;

18- $x - xy + y = 2$;

19- $\ln \text{sen} (x + 2) = (2x + 5)$

Derivadas sucesivas, func. inversa, deriv. paramétricas.

20- Hallar la 2ª y 3ª derivada de las funciones del ejercicio nº1.

21- Sea *f(x)* una función biyectiva y *h(x)* su función inversa, dados los siguientes valores:
$f(1) = -4$; $f(0) = 9$; $h(6) = 10$; $h'(-4) = 2$; $h'(6) = 4$; $f'(0) = 3$
hallar $f'(1)$; $f'(10)$; $h'(9)$

Hallar $y'(x)$; $y''(x)$ de las siguientes funciones definidas paramétricamente:

22- $x = \text{arcsen } t$; $y = t$

23- $x = 3 \text{ sen}2t$; $y = t + 5$

APLICACIÓN de la DERIVADA

Parte A: Estudio de una Función

1. Indicar en que subconjuntos del dominio las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, de acuerdo con el signo de su primera derivada.
   a)$f(x)= 3x^2 - 2x + 5$; b)$f(x)=4x - x^3$; c)$f(x)=(3x - 2)/(1 - x)$; d)$f(x)=(x^3 - 12x)^{1/2}$; e)$f(x)= (x - 3)^{-2}$

2. Hallar, si existen, extremos locales de las siguientes funciones:

   a)utilizando el criterio que estudia los valores de la función:
   $f(x) = 5.(1 + x^4)^{-1}$ $\qquad$ $f(x)= x^2 - 3x - 10$;

   b)utilizando el criterio que estudia el signo de la derivada primera en un entorno:
   $f(x) = x^3 -3x^2 + 6$; $\qquad$ $f(x)=3/(x^2 + 1)$

   c)utilizando el criterio que estudia la derivada segunda
   $f(x)= x^{1/3} (x - 1)$ $\qquad$ $f(x)=3/(x^{1/2} + 1)$

3. Hallar los puntos críticos de cada una de las funciones siguientes y clasificarlas de acuerdo a las condiciones:
   a) $| x + 4|$ en $\{-6 ; -1 \}$; b) $x^3 + 2x$ en $\{-3; 4\}$;c) $x^{1/3} - 3x +5$

4. Hallar si existen extremos absolutos:
   a) $f(x)=3/(1 - x^2)$ en $(-1;1)$;b) $x^{-1} - x^{1/2}$ en $(1;9)$;c) $(x^2 - 2x + 3)/(x - 1)$ en $(-1;4)$; d) $x^3 -2x^2$ en $(-1;3)$

5. Estudiar las siguientes funciones determinando
   Dominio de f(x); Raíces; asíntotas; Máximos y Mínimos; Ptos. de Inflexión; Graficar la función

   a) Función de 3º grado (Cúbica)

$y = (x - 2) . (x + 3) (x - 1)$

b) Función homográfica
$y = (x + 1) / (x -2)$

c) Función racional
$y = (x - 2) . (x - 1) / (x + 1) (x +2)$

d) Función Polinómica
$y = 1/5 \ x^5 - 1/3 \ x^3$

e) Funciones no-algebraicas
$y = 2^x / x^2$; $y = (5/2) \ x^{2/3} - x^{5/3}$

INTEGRALES INDEFINIDAS

INTEGRALES INMEDIATAS

$\int (3 x^5) dx$ $\int (1/ x^7) dx$ $\int (1/x-a) dx$ $\int (2x^{3/5} - x^{5/2} + \text{sen } x) dx$

$\int(\ln 2 + 1/x) dx$ $\int (3x^4 + 5x^9) dx$

INTEGRALES POR SUSTITUCION

$\int (x^5 + 7)^8 . 3x^4 dx$ $\int (3x^2 + 5x)^6. (6x + 5) dx$ $\int (3x^2 +5) / (x^3 + 5x) dx$

$\int (\text{sen}^3 x . (-\cos x) dx$ $\int((\text{sen}2x) / (1+ \text{sen}^2 x))dx$ $\int(\cos^6 3x. \text{sen}3x) dx$

$\int ((x + 1) / (x^2 + 2x) dx$ $\int(x . (x^2 + 3)^{1/2}) dx$

INTEGRALES POR PARTES

$\int(x . \ln x)dx$ $\int(e^x . x^2)dx$ $\int (\cos(\ln x))dx$ $\int (x^2 . 5^x) dx$ $\int (3^{2x} \ \cos(x/2)) dx$

$\int (\ln(x^2 + 1)) dx$ $\int (\text{sen}^3(7x))dx$ $\int(\text{sen}^2(4x) . \cos^2(4x)) dx$

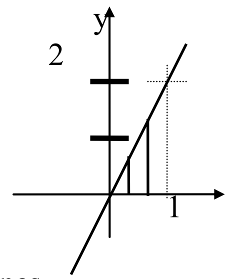
INTEGRALES POR DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

$\int((2x^2 - 3) / (x^2 + 5x))dx$ $\int((x^4 - 3x^3 + 5) / (x^2 + 3x +2))dx$

$\int(1/(x - 2)^2.(x + 3)) dx$ $\int((x^4 - 9x^2 + 2) / (x^3 - 3x^2) dx$

INTEGRALES DEFINIDAS
y APLICACION de las INTEGRALES

Serie A



l-Hallar el área de la figura sombreada
a)Utilizando el método de la secundaria.
b)utilizando el Camino de Arquímedes,

- dividir el intervalo(0;1) en cuatro subintervalos iguales.
- dividir el (0;1) en ocho subintervalos iguales.
- dividir el(0;1)en n subintervalos iguales .

c)Comparar los resultados obtenidos en los ítems a) y b).Sacar conclusiones.

2-Calcular las siguientes integrales aplicando la fórmula de Barrow.
a) $\int (x^2 + 1)\, dx$; b) $\int (6 + 2t - 0{,}5\, t^2)\, dt$; c) $\int (x^2 - 7x + 2)dx$; d) $\int \text{sen } x\, dx$

Serie B

3-Calcular el área limitada por :(Es conveniente realizar las gráficas)
a) $y = 3x^2$; el eje x ; y las rectas x= 1 y x = 3.
b) $y = 1/2\, x^2 + 4$; el eje x y las rectas x = -3 y x= 3
c) $y = x^3$,el eje x y la recta x = 4 .
e) y = sen 2x,el eje x, (0;π)
f) $y = - x^2 - 2x + 15$; y el eje x
g) $y = 5x^2$ e $y = x^2 + 1$
h) $y = x^2$ e $y =-x^2 + 2$

4-Hallar la longitud de cada uno de los siguientes arcos:
a) y = ln x en($\sqrt{3}$;$\sqrt{8}$)
b) $y = 1/2\, x^{3/2}$ en (0;1)

5-Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura que se indica en cada caso al girar alrededor del eje x.
a) y = 2/3 x ;eje x , en (2;9
b) $y = x^2$; eje x , entre (3;-3)
c) $y = x^2 + 3$; eje x ;x = -2; x = 2

6-Calcular el área de la superficie de revolución engendrada en cada caso por el arco que se indica, al girar alrededor del eje x.
a) y = 1/2 x entre 2 y 8
b) $y = x^3$ entre 0 y 2.

1. Hallar la longitud de cada uno de los siguientes arcos:
   a) $y = \ln x$ en(√ 3 ;√8)
   b) $y = 1/2\, x^{3/2}$ en (0;1)

2. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura que se indica en cada caso al girar alrededor del eje x.
   a) $y = 2/3\, x$;eje x , en (2;9
   b) $y = x^2$; eje x , entre (3;-3)
   c) $y = x^2 + 3$; eje x ;x = -2; x = 2

3. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada en cada caso por el arco que se indica, al girar alrededor del eje x.
   a) $y = 1/2\, x$ entre 2 y 8
   b) $y = x^3$ entre 0 y 2.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía Matemática

APÓSTOL, T. *Calculus*. Massachusetts. (EEUU). Ed. Blaisdell Publishing. Co. (Ingl. 1967). 813 pp.

AYRES, F. *Teoría y Problemas de Cálculo Diferencial e Integral.* Bogotá, Colombia. Mc Graw Hill. (1976). 346 pp.

COURANT, R. y JOHN, J. *Introducción al cálculo y el análisis matemático.* Vol. I. Ed. (Ingl.) John Wiley and sons. (1965). 678 pp.

GRANVILLE, W.A. *Cálculo Diferencial e Integral.* Boston (USA). Ed. Ginn and Co. (1ª impresión: 1980). 686 pp.

LEEUW, K. *Calculus*. Nueva York (USA). Ed. Harcourt. (1966). 277 pp.

LIPMAN, B. y KARAL, F.: *Cálculo*. Ed. Holt, Rinehart and Winston. (1976). 746 pp.

PHILLIPS, H.B. *Elementos de Cálculo Infinitesimal*. Nueva York (USA). Ed. John Wiley and sons. (1956) 398 pp.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Tomo I. Moscú. (URSS). Ed. MIR. (1969). 519 pp.

RABUFFETTI, H. *Introducción al análisis matemático*. Vol I y II. Bs. As. Ed. Ateneo. (1970). 408 pp.

REPETTO, C. *Manual de Análisis Matemático.* Bs. As. Ed. Macchi. (1987) 1ª Parte: 478pp. y 2ª Parte: 362 pp.

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P. y TREJO, C. *Análisis matemático* Vol I. Bs. As. Ed. Kapelusz. (1952). 836 pp.

ROJO, A. *Análisis Matemático I*. Bs. As. Ed. Tesis. (1980). 250 pp.

SADOSKY, M., GUBER. R. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Bs. As. Librería y Editorial Alsina. (1956). 269 p.

SALAS, S., HILLE, E. *Calculus*. Nueva York (USA). 1ª edición en Inglés: Ed. Wiley and sons, inc... Ed. Reverté (Español) (1995) 861 pp.

TAPIA, N. VÁZQUEZ de, y otros. *Matemática 1*. Bs. As. Ed. Ángel Estrada. (1993). 490 pp.

TAPIA, N. VÁZQUEZ de, y otros. *Matemática 2*. Bs. As. Ed. Ángel Estrada. (1993). 502 pp.

TAPIA, N. VÁZQUEZ de, y otros. *Matemática 3*. Bs. As. Ed. Ángel Estrada. (1993). 528 pp.

TAPIA, N. VÁZQUEZ de, y otros. *Matemática 4*. Bs. As. Ed. Ángel Estrada. (1993). 809 pp.

TAYLOR, H., WADE, T. *Cálculo diferencial e integral*. Ed. Wiley and sons, inc. (1962) 867 pp.

THOMAS, G., FINNEY, R. *Cálculo, una variable*. Ed. Addison Wesley, Longman. (USA) 1996. 707 pp.

THOMPSON, J.E. *Cálculo Infinitesimal*. Nueva York (USA). Ed. D. Van Nostrand Co, Inc. (1950). 383 pp.

Otra Bibliografía

BABINI, J. y REY PASTOR J. *Historia de la Matemática.* Barcelona, España. 1985. Vol I y II. 445 pp.

BACHELARD, G . *La formación del espíritu científico*. Bs. As. Siglo XXI . 1997. 21ª Edición . 1ª Ed. cast.1948 . 302 Pp.

CARR, W. *Una teoría para la educación. Hacia una investigación educativa crítica*. Madrid: Morata / Paideia, (1996). (Versión original en inglés: 1995). 173 pp.

COLLETTE, J-P. *Historia de las Matemáticas.* México, D.F. (1ª edición en francés: 1979). Vol I y II.

CONICET *Programa de Perfeccionamiento Docente*. Análisis Matemático: su enseñanza. Bs. As. Conicet/Pro Ciencia (1987). 2 Volúmenes.

CONICET. *Programa de Perfeccionamiento Docente*. Bs. As. Conicet/Pro Ciencia(1986) . 4 Volúmenes. Vol.1. Matemática: Metodología de la Enseñanza (Estr. Mod.1); Vol. 2 Geometría: su enseñanza. Vol. 3 Álgebra: su enseñanza. Vol. 4 Álgebra Lineal: su enseñanza.

KLIMOVSKY, G. *Las desventuras del conocimiento científico*. AZ Editora. 2ª Ed. 1995 418 pp.

LORENZI, A. *Mi Aula.* Posadas. Editorial Universitaria de Misiones. (2004). 144 pp.

SACRISTÁN, Gimeno y PÉREZ GÓMEZ. *Comprender y Transformar la enseñanza*. Madrid. Morata. 1998. 1ª Ed. 1992. (Bibliografía 430- 411). 445 pp.

VYGOTSKY, Lev Semianov. *Pensamiento y Lenguaje*. Bs. As., Fausto. (1995). 219 pp.

YVYRARETÁ: Revista de Difusión Científica y Tecnológica de la Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Nacional de Misiones. Eldorado. Año 2 – Nº 2. Septiembre de 1991. 127 pp.

YVYRARETÁ: Revista de Difusión Científica y Tecnológica de la Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Nacional de Misiones. Eldorado. Año 6 – Nº 6. Octubre de 1995. 102 pp.

EdUNaM
Centro Gráfico de la
Editorial Universitaria
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Impreso en el mes de abril de 2008
San Luis 1870
Posadas, Misiones