

RESISTENCIA DE MATERIALES

Apunte didáctico

Javier Alejandro Cequeira

Cátedra: Estática y Resistencia de Materiales

Colección: Cuadernos de Cátedra



Facultad de Ciencias Forestales
Universidad Nacional de Misiones

Cequeira, Javier Alejandro

Resistencia de materiales : apunte didáctico / Javier Alejandro
Cequeira. - 1a ed. - Posadas : Universidad Nacional de Misiones.
Facultad de Ciencias Forestales, 2025.

Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-766-260-7

1. Física Aplicada. 2. Educación Universitaria. 3. Universidades
Públicas. I. Título.

CDD 621

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	9
2. FUNDAMENTOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES.....	13
3. DEFORMACIÓN Y TENSIÓN EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES.....	17
3.1. Fuerzas Internas.....	17
3.2. Tensiones en Elementos Estructurales.....	28
3.2.1. Concepto de Tensión.....	28
3.2.2. Consideraciones de Diseño	37
3.3. Propiedades Mecánicas de los Materiales.....	43
3.3.1. Ensayo de Tracción Axial	45
3.3.2. Ensayo de Compresión Axial	70
3.3.3. Ensayo de Corte Directo	75
3.3.4. Ensayo de Torsión Circular Recta	78
3.3.5. Ensayo de Flexión Normal	85
3.3.6. Ensayo de Pandeo	94
4. ESTADOS DE SOLICITACIÓN.....	97
4.1. Tracción Axial y Compresión Axial, Simples	98
4.1.1. Introducción e Hipótesis	99
4.1.2. Principio de Saint-Venant	100
4.1.3. Deformación de un Elemento Cargado Axialmente	102
4.1.4. Diseño de Elementos.....	115
4.1.5. Problemas que Involucran Cambios de Temperatura	126
4.2. Corte Directo	136
4.2.1. Introducción e Hipótesis	136
4.2.2. Elementos de Tensión en Tensiones Cortantes	137
4.2.3. Deformación por Cortante: Deformación Unitaria Cortante.....	140
4.2.4. Deformación Unitaria Cortante en Corte Directo.....	143
4.2.5. Tensión de Apoyo o Aplastamiento.....	152
4.2.6. Diseño de Elementos.....	156
4.3. Torsión Circular Recta.....	179
4.3.1. Introducción e Hipótesis	179
4.3.2. Deformación por Torsión de un Eje Circular	180
4.3.3. Tensiones Debidas a la Torsión.....	186
4.3.4. Ángulo de Giro o de Torsión.....	194

4.3.5. Diseño de Elementos.....	209
4.4. Flexión Normal.....	223
4.4.1. Introducción e Hipótesis	223
4.4.2. Flexión Normal Simple y Pura	226
4.4.3. Fórmula de la Flexión	227
4.4.4. Perfiles Estructurales Normalizados	237
4.4.5. Fórmula de la Tensión Cortante	242
4.4.6. Diseño de Elementos.....	252
4.5. Pandeo	273
4.5.1. Introducción e Hipótesis	273
4.5.2. Relación de Esbeltez	274
4.5.3. Fórmula de Euler para Columnas Largas.....	282
4.5.4. Diseño de Elementos.....	288
5. BIBLIOGRAFÍA.....	300

PRÓLOGO

Esta publicación es el resultado de la ardua elaboración personal, durante varios años, de la redacción de un material que contenga nociones, conceptos, definiciones y ejemplificaciones, que contribuyan, enriquezcan, formalicen y/o amplíen el contenido que se aborda en los primeros cursos del fascinante mundo de la Resistencia de Materiales de las carreras de ingeniería.

De esta manera, el contenido desarrollado es pertinente y relevante, fundamentalmente, a la *Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales* de la Facultad de Ciencias Forestales – Universidad Nacional de Misiones, Argentina, y busca aportar un recurso didáctico complementario para los estudiantes de grado de la carrera Ingeniería en Industrias de la Madera e Ingeniería Forestal de dicha institución, siendo extensivo, también, a docentes que consideren oportuno incorporar este trabajo como un valioso complemento para el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Por lo tanto, en este documento se establecen aspectos teóricos, metodológicos y normativos para que los estudiantes puedan afrontar con éxito la ardua tarea que implica la resolución de los ejercicios. El trasfondo de todo esto, sin embargo, es desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos.

Finalmente, es importante acentuar que la delimitación del contenido de este material se basa en el dictado tradicional de la Cátedra antes mencionada, y se considera que es un punto de partida para que los estudiantes puedan comprender y acreditar la asignatura, para, posteriormente, aplicar con solvencia los conocimientos adquiridos.

LO QUE EL LECTOR DEBE SABER

Cambios/mejoras respecto del apunte didáctico de estática gráfica

Primeramente, y atendiendo al aspecto pedagógico, en cada problema resuelto presentado se ha consignado el *propósito formativo* para que el estudiante sepa de antemano que aspectos y/o conceptos se han de estar aplicando en dichas resoluciones, es decir, que el sujeto de aprendizaje identifique la intención del docente. En el mismo sentido, también se ha optado (en los casos en que ha sido posible) por incorporar *imágenes a color* a fin de mejorar la presentación visual.

Por otra parte, la mayoría de los problemas resueltos incorporados provienen directamente de la *resolución de alguno de los autores citados*. Este detalle no es menor ya que le permite a usted analizar de primera mano los comentarios sobre la solución, identificar los conceptos importantes implicados y juzgar si la solución se ajusta a los métodos de la cátedra. En este último sentido, en ocasiones los comentarios del autor presentan métodos alternativos o mejoras al elemento de máquina o miembro estructural que se esté analizando o diseñando, es más, usted mismo puede dar solución al problema siguiendo la técnica dada en clase y luego verificar los resultados.

Finalmente, aclarar que este documento *no contiene Anexos*. En cambio, la información complementaria pertinente, como lo son, por ejemplo, los sistemas de unidades, se referencia al Apunte Didáctico de Estática Gráfica.

Escritura basada en el sistema internacional de unidades

En el cuerpo principal del documento se utilizan preferentemente las unidades del sistema internacional, SI, con lo cual, no se especifican explícitamente las unidades de todas las magnitudes que aparecen en una ecuación, solo se consigna la unidad de la magnitud principal (la que se está calculando). En el Anexo del Apunte Didáctico de Estática Gráfica se listan las unidades fundamentales y derivadas del sistema métrico internacional.

Sin embargo, como un reconocimiento al hecho de que las *unidades inglesas*, así como algunas de otros sistemas de unidades; como el *técnico*, aún se usan ampliamente en la industria, también se incorporan ejemplos numéricos con unidades de estos últimos. Este enfoque es el que se adecua mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que conocer estos sistemas de unidades. Por lo dicho, este *apunte* no descuida las relaciones o equivalencias entre los sistemas mencionados, y por ello en el anexo antes mencionado se incorporan factores de conversión.

Nomenclatura que se debe conocer

Los símbolos de las unidades y de las magnitudes no son simples abreviaturas; son entidades algebraicas cuyo uso está normalizado. No seguir estas reglas puede provocar errores y malas interpretaciones. Las reglas facilitan la comprensión de las publicaciones científicas y técnicas. Las reglas obligatorias están incluidas en el SI, las voluntarias proceden del mundo de la normalización y están recomendadas por las normas internacionales ISO 31-0:1992 a ISO 31-13:1992. En este sentido, mientras que para los símbolos de las magnitudes sólo existen recomendaciones, es obligatorio emplear los símbolos correctos de las unidades (CEM, 2013).

En este documento, los símbolos de magnitudes físicas que se deben conocer son los que se listan a continuación:

[1]: Indica magnitud adimensional.

$\vec{F}$: El signo diacrítico indica *magnitud vectorial*. Para el ejemplo; Fuerza.

En este último caso pueden existir excepciones, por ejemplo, en la presentación de algún problema resuelto que pudiera provenir de la literatura consultada, la magnitud vectorial fuerza se puede presentar con negrita y en letra recta **F** o bien como *F*.

Ecuaciones de uso práctico

En *negrita se resalta la numeración* de las ecuaciones que revisten mayor importancia para el estudiante dada su aplicación práctica en la resolución de los problemas.

Para terminar: cualquier tema referente a esta documentación, como así también, los errores en que se pudiere haber incurrido, se solicita sea comunicado directamente a través del correo electrónico: javiercequeira@yahoo.com.ar

Se debe comprender al finalizar la lectura de este material, que no importa cuán bella sea, toda teoría necesita ser verificada en la práctica.

1. INTRODUCCIÓN

En la primera parte del curso (Estática) se ha desarrollado lo concerniente al cálculo de fuerzas que actúan en un cuerpo o sistemas de cuerpos ideales, es decir, aquellos que no se deforman (: cuerpos rígidos). En esta segunda mitad, en cambio, se ha de tratar con cuerpos que son susceptibles de sufrir deformaciones o roturas¹, y a la disciplina que los analiza se le conoce como Resistencia de Materiales, Mecánica de Materiales o Mecánica del Sólido Deformable. También se puede decir que, en Estática se **descubren las fuerzas** y en Resistencia de Materiales **se determina que materiales utilizar** para resistir dichas fuerzas.

En términos más precisos, BEER *et al.* (2009) exponen que, el *objetivo principal* del estudio de la *Mecánica de Materiales* es suministrar al futuro ingeniero los conocimientos para *analizar y diseñar* las diversas máquinas y estructuras portadoras de carga. Y, en este sentido, tanto el análisis como el diseño de una estructura dada involucran la determinación de *tensiones*² y *deformaciones*.

Es importante que el lector preste especial énfasis en comprender que, la solvencia en los problemas de esta parte del curso está muy ligada al manejo de los *métodos básicos de la Estática*. De la aplicación de esos métodos se llega a la *determinación de las fuerzas* en los elementos de una estructura sencilla dada, luego, puede *determinarse la tensión* que sufre el material a partir de la fuerza en el elemento, para, finalmente, *dimensionarlo* (BEER *et al.*, 2009).

El dimensionamiento de un elemento, tal como se ha mencionado en los párrafos precedentes, depende no sólo del valor encontrado para la fuerza, sino también del área transversal del elemento (piense, por ejemplo, en una varilla de acero) y del material con que éste haya sido elaborado. Justamente, los cuerpos están hechos de distintos *materiales*, siendo

¹ También llamadas fallas o fracturas.

² La definición de tensión se analiza en la Sección 3.2.

una posible clasificación la siguiente: de *origen mineral* como los metales y el hormigón, y de *origen orgánico* como la madera y los plásticos.

Por otra parte, respecto a las fuerzas que se pueden aplicar a estos materiales para obtener luego sus propiedades, se puede realizar una primera clasificación en función a la forma de aplicación de estas, **Figura 1**.

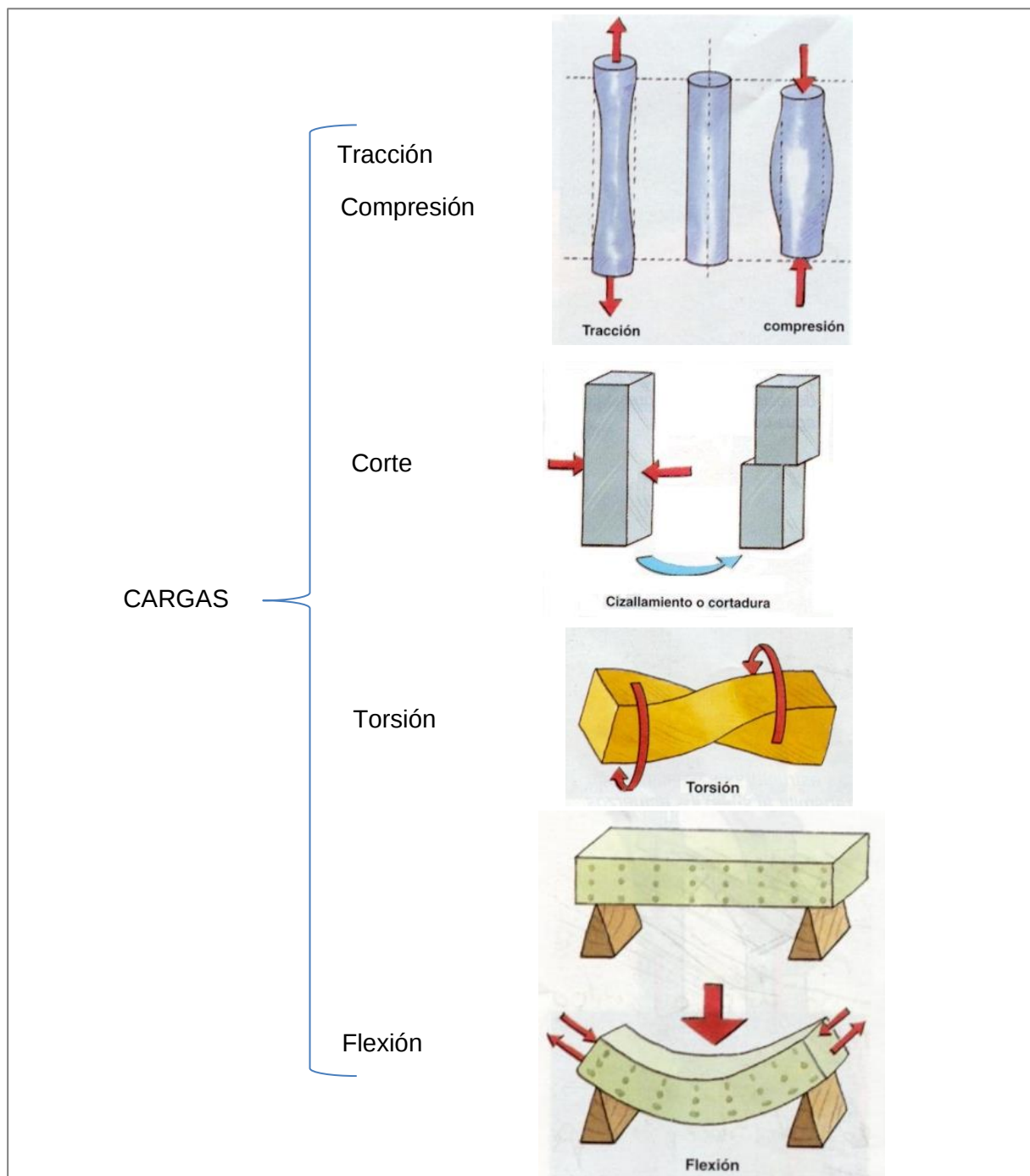


Figura 1. Clasificación de Cargas (o Fuerzas) Según su Forma de Aplicación: Cargas de Tracción, Compresión, Corte, Flexión y Torsión (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

Además, como consecuencia de la acción de estas fuerzas externas sobre la estructura, se dice que sus elementos componentes se ven solicitados de diferente manera, dando lugar a los distintos estados de sollicitación como se ha de estudiar en el Capítulo 4.

Brevemente, sin embargo, se puede decir que las cargas de *tracción* o *compresión* son cargas axiales que actúan normales a una superficie³ y tienden, respectivamente, a alargar o comprimir/aplastar la pieza. Las de *corte*, por su parte, son cargas paralelas a la superficie y las de *flexión* son cargas aplicadas perpendicularmente al elemento estructural (típicamente, vigas) que tienden a deflexionarlo o curvarlo. Finalmente, las cargas de *torsión* consisten en la aplicación de dos pares de fuerzas que provocan la rotación relativa de las secciones transversales de la pieza⁴ (típicamente, ejes circulares).

Otro nivel de clasificación de cargas, es considerar la rapidez de aplicación de estas, se tienen, así, cargas estáticas, cargas de impacto y cargas de fatiga, **Figura 2**. Las primeras son aquellas que se aplican muy lentamente y en forma gradual, y muchos ensayos⁵ consisten en la aplicación de este tipo de cargas. Las segundas, por su parte, están asociadas a un breve tiempo de aplicación;⁶ mientras que las terceras consisten en una aplicación repetitiva de la carga, por ejemplo, cuando con las manos se dobla sucesivas veces un alambre, en cuyo caso, al observar en detalle la zona de aplicación de la carga de fatiga, se puede apreciar que el material se estira y se comprime hasta fallar.

³ En el Capítulo 3 se ha de denominar a esta superficie “sección resistente”.

⁴ La “tuercen”.

⁵ La Sección 3.3 está destinada a la exposición básica de los ensayos de interés.

⁶ Solo como referencia, consisten en transmitir la carga al elemento mediante un dispositivo que impacta contra este en un lapso de tiempo muy breve y en ese tiempo le transmite toda la energía mecánica que trae esa masa en movimiento.

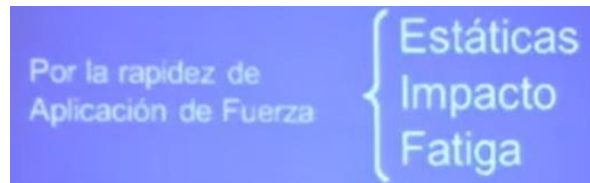


Figura 2. Clasificación de Cargas (o Fuerzas) Según su Velocidad de Aplicación (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

En forma ampliada, las cargas estáticas y de impacto son, muchas veces, aplicadas en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando en la canasta de un supermercado se cargan uno tras otro los productos hasta llenarlo; se está en presencia de una carga estática, pero, si esa canasta cargada (de por ejemplo, de 20 kg), se arroja desde un tercer piso, se transforma en una carga de impacto cuando llega al suelo, ya que toda la energía mecánica que trae se transmite en un tiempo muy pequeño, con lo cual, también se evidencia que estas últimas son potencialmente más dañinas.

Considerando lo expresado en párrafos anteriores en relación a las fuerzas aplicadas, conviene aclarar, sin embargo, que la mayoría de los cuerpos están sometidos a la acción simultánea de varios tipos de fuerzas, así, solo en algunos casos puntuales se tienen objetos sometidos a un tipo carga. Sin embargo, analizar los tipos de carga por separado constituye una estrategia apropiada para comprender los fundamentos; y abordar posteriormente, casos más complejos que impliquen combinación de estas.

Por otra parte, y como nota de cierre, conviene aclarar que el análisis y, por tanto, los problemas de ejemplo en los diferentes capítulos están redactados y ordenados de manera que sea posible comprender los contenidos abordados mediante la lectura continua del material. Naturalmente, en esta progresión de temas se ha de hacer referencia, en algunos casos específicos, a cierta definición, concepto o aspecto consignado en algún capítulo posterior, sin embargo, el estudiante puede adelantar y retrotraer la lectura sin afectar la pérdida de dicha continuidad.

2. FUNDAMENTOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

El tema central de este curso es el estudio de los diferentes estados de sollicitación⁷ a que puede estar sometida una pieza bajo la acción de las fuerzas exteriores, sin embargo, antes de abordar este “gran tema”, es necesario exponer los fundamentos generales en los que se apoya la Mecánica de Materiales, los cuales se han de presentar como hipótesis⁸ o principios⁹ experimentales, según lo titule el autor citado.

Es decir, y en palabras de BEER *et al.* (2009), las hipótesis y/o principios aludidos hace posible deducir todas las fórmulas necesarias de manera lógica y racional, e indicar claramente las condiciones bajo las que pueden aplicarse con seguridad al análisis y diseño de estructuras ingenieriles y componentes de máquinas reales.¹⁰

Hablando ya en términos concretos, y tal como lo señala RAFFO (2007), hay que mencionar, en primer lugar, que a partir del ensayo de tracción (Sección 3.3.1) se deducen importantes consecuencias de las cuales se determinan principios experimentales, que luego se generalizan (o se aplican en forma extendida) a los demás estados de sollicitación: considere, por ejemplo, el comportamiento elástico de un material.¹¹

Sin embargo, pese a lo mencionado en el párrafo anterior, dicho autor amplía, que, como tales principios se han revelado insuficientes para elaborar una Resistencia de Materiales sin grandes dificultades analíticas, fue necesario agregar otros principios suplementarios,

⁷ En Resistencia de Materiales el término sollicitación hace referencia a la acción que ejerce una carga sobre un elemento específico. Este concepto se formaliza en el Capítulo 4.

⁸ Entiéndase, aquí, este término, como sinónimo de suposición o supuesto de algo para sacar de ello una consecuencia, tal como lo define la Real Academia Española.

⁹ Un principio constituye una proposición evidente, no puede demostrarse pues ello equivale a fundamentarlo en otra verdad, la cual sería el verdadero principio. Por ello, los principios simplemente se enuncian.

¹⁰ En otras palabras, en este enfoque de la Resistencia de Materiales se utilizan modelos simplificados.

¹¹ La propiedad elástica de un material se define, de forma inicial, al final de este capítulo cuando se enuncian las hipótesis mecánicas. Posteriormente, en la Sección 3.3.1, se brinda un análisis más detallado. Otro ejemplo es la ley de Hooke. En efecto, es común en los libros de Mecánica utilizar el término ley de Hooke para hacer referencia al comportamiento elástico de un material, aunque este no estuviera sometido, necesariamente, a un esfuerzo de tracción.

destinados a simplificar los cálculos. Son éstos, el principio de las pequeñas deformaciones y el de superposición de los efectos, cuya legitimidad se comprueba al verificarse las consecuencias derivadas de ellos.

Finalmente, ROKO (1995), agrega, que, la diversidad de variables atinentes al estudio de la mecánica del sólido deformable (tipo de material y sus propiedades, forma y dimensiones, y tipo de carga exterior) obliga a circunscribirlos a un **material ideal** que debe satisfacer propiedades de elasticidad, homogeneidad e isotropía, constituyendo lo que en algunos textos se denomina hipótesis mecánicas del material resistente.

Los fundamentos a los que se ha hecho referencia en los párrafos precedentes, se listan y definen a continuación. Previamente, sin embargo, conviene recordar que cada uno de ellos es de aplicación general a todos los tipos de sollicitación. Luego, también existen hipótesis particulares que se han de mencionar oportunamente en las secciones correspondientes.

1) Ley de Hooke¹²

Esta ley expresa: en el período linealmente elástico las deformaciones son rigurosamente proporcionales a las cargas que las originan. Se deduce que la relación entre tensiones y deformaciones vienen expresadas por una ecuación de primer grado, y, además, al suprimirse las cargas, desaparecen dichas tensiones y deformaciones. Por consiguiente, quedan excluidas las deformaciones permanentes.

La experiencia comprueba que la ley de Hooke es válida, con suficiente aproximación práctica, en todos los metales empleados en la construcción, particularmente el acero. Por el contrario, en otros materiales como el hormigón o la piedra, la aproximación a la realidad es muy mediocre.

¹² Robert Hooke (1635-1703), científico inglés.

Finalmente, hay que hacer énfasis en que, cuando las tensiones internas superan las correspondientes a la zona elástica, la Resistencia de Materiales, no es aplicable.¹³

2) Principio de Bernoulli¹⁴ o de Navier¹⁵

En todo sólido prismático sometido a la acción de fuerzas exteriores, una sección recta, es decir, normal al eje geométrico, permanece plana, idéntica a sí misma y siempre normal a la fibra media deformada.

Por lo expuesto, este principio también es conocido como **principio de conservación de las superficies planas**. Conviene aclarar que para el caso particular de torsión circular recta (Sección 4.3), se habla, análogamente, de la **hipótesis de Coulomb**.¹⁶

3) Principio de las Pequeñas Deformaciones

Las deformaciones de un sólido deben considerarse infinitamente pequeñas; hipótesis que permite escribir, según se verá en capítulos sucesivos, las ecuaciones de equilibrio interno, como si el sólido no experimentase deformación alguna.

4) Principio de Superposición de los Efectos

Se enuncia en la siguiente forma: El efecto producido por dos o más acciones externas actuando contemporáneamente, es igual a la suma de los efectos producidos por cada acción actuando separadamente.

Este principio permite reducir el estudio de casos complejos a los casos simples resultantes de considerar separadamente cada acción externa: fuerzas concentradas y distribuidas, momentos y acciones térmicas, entre otros, que integran aquel. El resultado es independiente

¹³ Esta última afirmación es completamente cierta para los alcances de este curso, en el cual para el diseño de elementos se busca que el material del mismo se comporte elásticamente. Sin embargo, en ocasiones un elemento puede diseñarse de modo que la carga haga que el material ceda y por consiguiente se deforme de manera permanente (un material que presenta este comportamiento se denomina elastoplástico). Con frecuencia, estos elementos están hechos de un metal muy dúctil como el acero recocido de bajo carbono (HIBBELER, 2011).

¹⁴ Jacob Bernoulli (1654-1705), también conocido como Jakob, Jacques o James Bernoulli, fue un destacado matemático y científico suizo.

¹⁵ Louis-Marie Henry Navier (1785-1836). Ingeniero y físico francés.

¹⁶ Charles Augustín de Coulomb (1736-1806), matemático, físico e ingeniero francés.

del orden en que se hacen actuar dichas acciones individuales.¹⁷ Es un principio muy útil y de constante aplicación; se verifica experimentalmente en todos los casos que satisfacen la ley de Hooke.

5) Hipótesis Mecánicas del Material Resistente

5.1) Elasticidad: Es la propiedad que tienen los cuerpos de restituir su forma y dimensiones originales una vez que la carga ha dejado de actuar.

5.2) Homogeneidad: Cuando una pequeña porción de la materia del objeto, representa las propiedades físicas de la totalidad del mismo.

5.3) Isotropía: Cuando sus propiedades mecánicas (y en especial la elástica) se manifiesta de igual manera en cualquier dirección.¹⁸

En general estas tres propiedades del material ideal¹⁹ son satisfechas en forma aproximada por materiales reales que constituyen las estructuras resistentes; en mayor o menor grado según se trate. Por ejemplo, el acero, la madera y la piedra pueden considerarse perfectamente elásticos dentro de ciertos límites, pero estos son tan disímiles como lo es la naturaleza de cada uno de ellos.

En cuanto a la homogeneidad e isotropía, el acero cumple bastante bien con estas propiedades, en razón de un riguroso control de producción. No ocurre lo mismo con la madera, cuyo comportamiento en el sentido perpendicular a las fibras es sensiblemente diferente al del sentido paralelo. El hormigón, por su parte, se aproxima a estas propiedades según la calidad de su elaboración.

¹⁷ En este sentido, también se puede decir, que, las causas de tensiones o deformaciones pueden ser analizadas por separado, siendo el efecto final la suma de los efectos parciales.

¹⁸ Entiéndase también como: materiales cuyas características mecánicas son independientes de la dirección de análisis (BEER *et al.*, 2009).

¹⁹ Las propiedades opuestas son respectivamente, plasticidad, heterogeneidad y anisotropía.

3. DEFORMACIÓN Y TENSIÓN EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Tal como se ha mencionado, el objetivo principal del estudio de la Mecánica de Materiales es suministrar al futuro ingeniero los conocimientos para analizar y diseñar las diversas máquinas y estructuras portadoras de carga, lo cual involucra la determinación tensiones²⁰ y deformaciones.²¹

Estas tensiones representan la resistencia a la deformación que opone el material cuando se le aplica una determinada carga, de tracción, de compresión, etc. Es decir, la mayor o menor resistencia depende, naturalmente, de las fuerzas intermoleculares (: fuerzas internas) propias de cada material.

Según lo expuesto, el lector ha de notar que existen tres conceptos íntimamente ligados entre sí: **carga**, **deformación** y **tensión**. Al primero ya se le ha dedicado una sección en el Capítulo 5 del Apunte Didáctico de Estática Gráfica, y también un segmento en la introducción de este documento; el segundo y el tercero, por su parte, se han de tratar con mayor rigurosidad en la Sección 3.2 y 3.3, previo a ello, sin embargo, se ha de desarrollar el concepto de **fuerza interna**, también intrínsecamente ligado al de tensión.

3.1. Fuerzas Internas

El análisis, atención, o importancia que se le ha dado a las fuerzas internas en Estática²² ha carecido de cierto rigor, ya que se han considerado cuerpos rígidos ideales. En Resistencia de Materiales, en cambio, los cuerpos son susceptibles de fracturarse debido a las cargas aplicadas; y, por tanto, es condición necesaria que las fuerzas internas sean capaces de equilibrar a dichas

²⁰ Usualmente, la tensión también es denominada “esfuerzo”. En el desarrollo de este material siempre se ha de utilizar el primer término.

²¹ Las propiedades del material con el que se construye una estructura o una máquina afectan tanto a su elección como a su diseño, ya que deben satisfacer las condiciones de resistencia y rigidez (SINGER y PYTEL, 2008). La primera íntimamente ligada a la tensión y la segunda a la deformación.

²² Por ejemplo, cuando se ha tratado con la resolución de estructuras reticuladas.

cargas. Se puede formalizar, entonces, que *las fuerzas internas son aquellas que propician el equilibrio elástico del cuerpo*.²³

De esta manera, observe, por ejemplo, que el cuerpo genérico de la **Figura 3** permanece en reposo, sin fracturarse ni deformarse, aunque se le estén aplicando un sinnúmero de fuerzas, se dice, entonces, que el cuerpo está en equilibrio, tanto, entre las fuerzas externas (conformado por cargas y reacciones) a la que se denomina *equilibrio estático* (o externo), como entre las fuerzas externas e internas, que se llama *equilibrio elástico* (o interno).

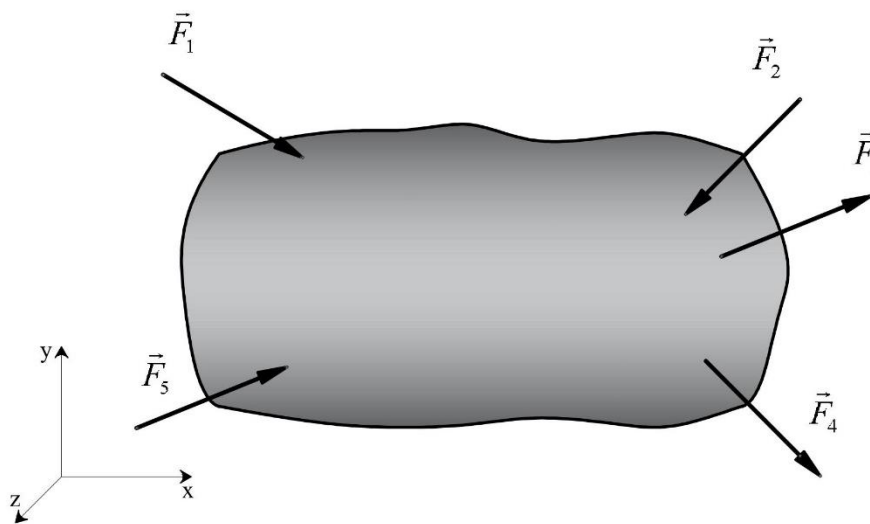


Figura 3. Cuerpo en Equilibrio Estático y Elástico (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Así, a las fuerzas que están actuando en el interior del material²⁴ se las denomina **fuerzas internas**, estas son, en esencia, las fuerzas de atracción entre moléculas (fuerzas intermoleculares o fuerzas de cohesión) que se oponen a la deformación como si fueran “resortes” buscando mantener el equilibrio, esta situación se ilustra en la **Figura 4**. Por ejemplo, si en dicha situación la fuerza de cohesión tiene un valor de 20 y se está aplicando una

²³ En su estudio de la Resistencia de Materiales, el lector ha de observar que esta afirmación acerca de las fuerzas internas es utilizada para la realización de deducciones y/o demostraciones, o bien, como parte implícita de algunos procedimientos. Por ejemplo, cuando se aísla el nudo de un reticulado para aplicar el método de los nudos, o cuando se secciona dicha estructura para aplicar el método de Ritter, entre otros casos.

²⁴ Materiales distintos presentan fuerzas internas distintas.

fuerza externa de 10, entonces, no ha de ser posible separar las moléculas. Sin embargo, sí lo harán, si se aplica una fuerza mayor a veinte.

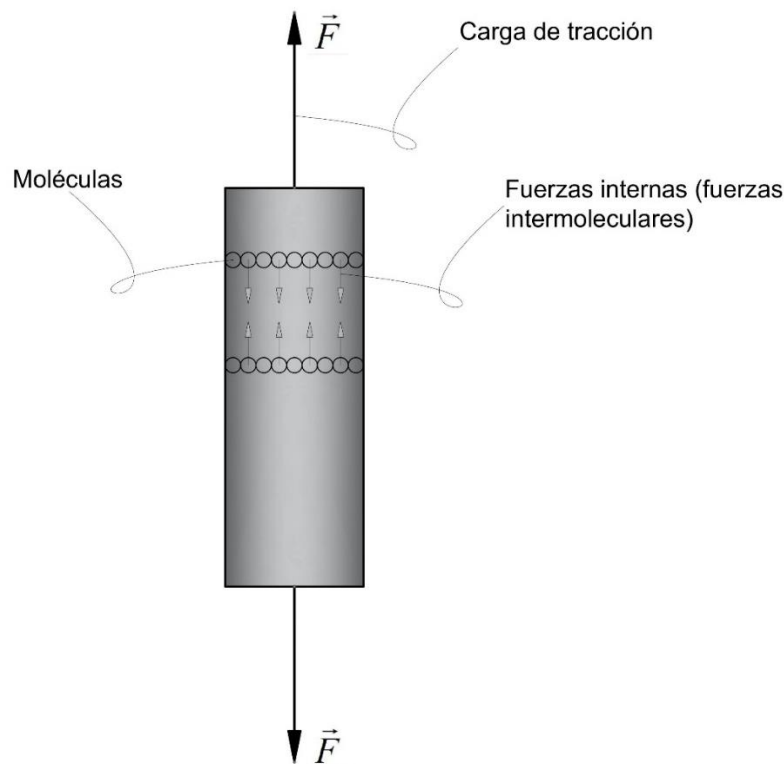


Figura 4. Fuerzas Internas o Fuerzas de Cohesión Desarrolladas en un Material Solicitado por una Carga de Tracción (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

Ahora bien, según lo señala HIBBELER (2010), en un cuerpo sometido a la aplicación de cargas se pueden producir distintos *tipos de fuerzas internas*. Para ilustrar esto considere el cuerpo genérico ya presentado con anterioridad, **Figura 5–a**), al cual se le ha practicado un seccionamiento imaginario según un plano de inspección S , y se ha aislado para el análisis su tramo izquierdo,²⁵ **Figura 5–b**).

Previo al seccionamiento “todo” el cuerpo se encuentra en equilibrio, por lo tanto, luego de él, debe estarlo también su tramo izquierdo (en este caso), siendo esto posible dada la existencia de fuerzas internas (equilibrio elástico). De esta manera, en el área transversal A (área de

²⁵ Definir qué tramo aislar (izquierdo o derecho) es arbitrario y puede escogerse el que se considere conveniente. Las connotaciones que se desprenden de esta cuestión, han de quedar claras con los problemas resueltos propuestos.

análisis)²⁶ determinada tras el seccionamiento, se evidencian las distintas fuerzas internas²⁷.

Cada una de ellas representa un efecto distinto de las fuerzas aplicadas sobre el sólido, y recibe un nombre especial que se indica a continuación:

$\vec{N}_x$ **Fuerza Axial** (en la dirección del eje x). Esta componente corresponde a la acción de traccionar o comprimir el cuerpo.

$\vec{V}_y$ y $\vec{V}_z$ **Fuerzas Cortantes** (en la dirección de y ; y z , respectivamente). Son las componentes que corresponden a la acción de cortar el sólido. Es decir, representan la resistencia al deslizamiento de la porción del sólido a un lado de la sección de exploración respecto de la otra porción.

$\vec{M}_x$ **Momento Torsionante**. Esta componente mide la resistencia a la torsión del sólido considerado.

$\vec{M}_y$ y $\vec{M}_z$ **Momentos Flexionantes**. Estas componentes miden la resistencia del cuerpo a curvarse o flexionarse respecto de los ejes y y z .

Todo el análisis anterior puede expresarse en términos analíticos al consignar las ecuaciones de equilibrio requeridas para un cuerpo en el espacio,²⁸ Ec (1). Es decir, para mantener el equilibrio elástico la suma de las fuerzas externas e internas ($\vec{F}$), y de los momentos externos e internos ($\vec{M}$) en la porción considerada (o aislada), deben ser cero.

²⁶ En la cual se consignan también los ejes ortogonales x , y y z , cuyo origen se considera siempre en el baricentro de la sección, que es el punto de referencia.

²⁷ En general, el sistema de fuerzas internas equivale a una fuerza y un par resultantes que, por conveniencia, se descomponen según la normal y la tangente a la sección. Además, en la Sección 3.2 se ha de mostrar que estas fuerzas internas son fuerzas distribuidas que actúan en toda el área de la sección del elemento bajo análisis.

²⁸ Recordar que un cuerpo en el espacio tiene seis grados de libertad, requiriendo, por tanto, seis ecuaciones de equilibrio.

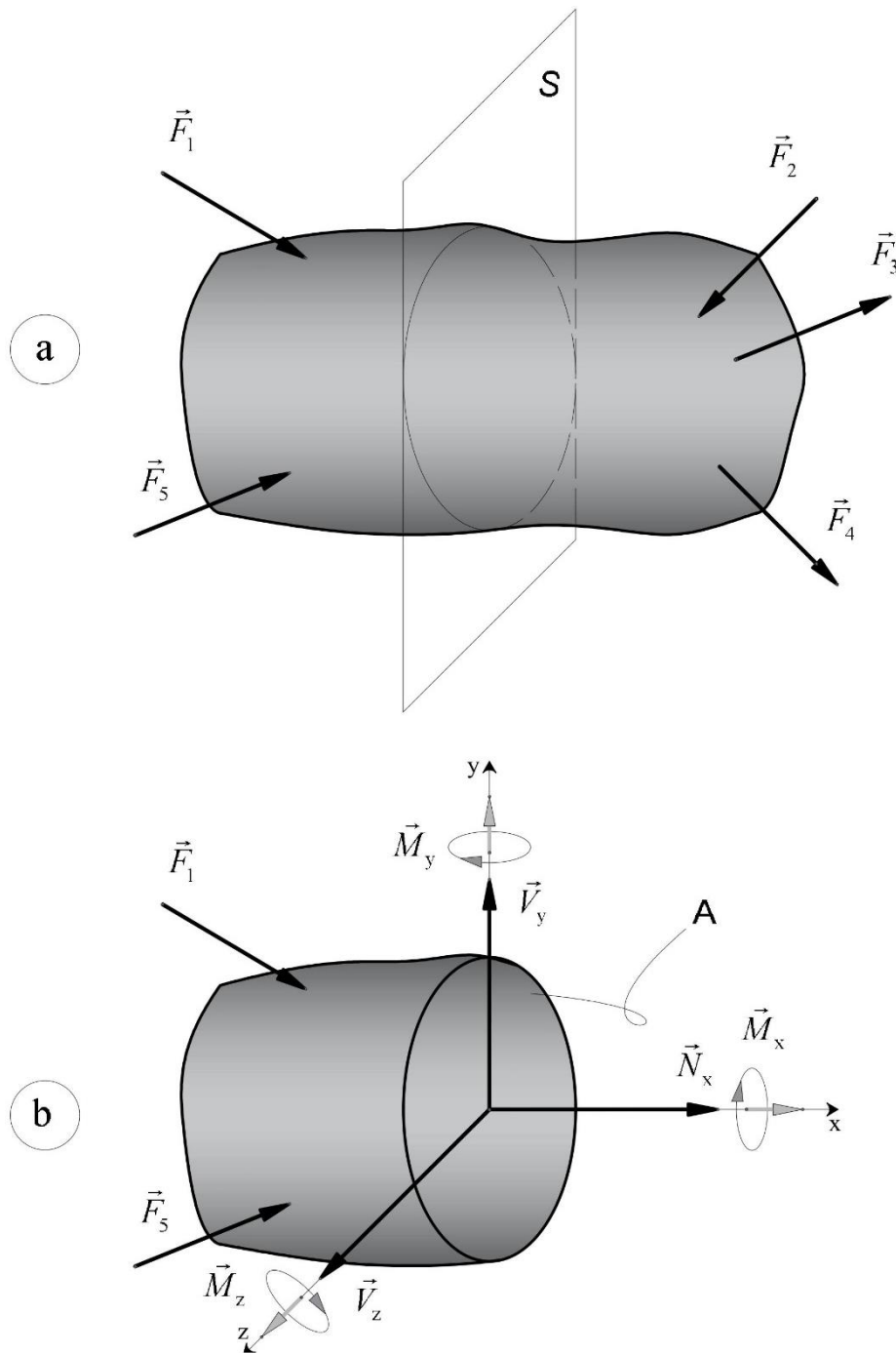


Figura 5. (a) Sección de Exploración S a través de un Sólido sometido a la Acción de Varias Fuerzas. (b) Tipos Fuerzas Internas Desarrolladas en la Sección Transversal A del Sólido para Mantener el Equilibrio Elástico (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x = 0; \quad \sum \vec{F}_y = 0; \quad \sum \vec{F}_z = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \text{ (en } x); \quad \sum \vec{M} = 0 \text{ (en } y); \quad \sum \vec{M} = 0 \text{ (en } z) \end{aligned} \quad (1)$$

La importancia de las ecuaciones anteriores es que posibilitan el cálculo de los valores de las fuerzas y momentos internos en un área determinada. Hay que aclarar, en este sentido, que

las fuerzas que se analizan en este curso están contenidas en un *plano bidimensional* (por ejemplo, en el x - y), quedando el análisis espacial (en 3 dimensiones) simplemente como tema de eventual comparación, ampliación o contraste con los primeros.

Hay que aclarar, también, que no necesariamente ha de existir una acción simultánea de todas estas fuerzas, algunas de ellas pueden ser nulas, generando, en consecuencia, la ausencia de corte o tracción, por ejemplo.

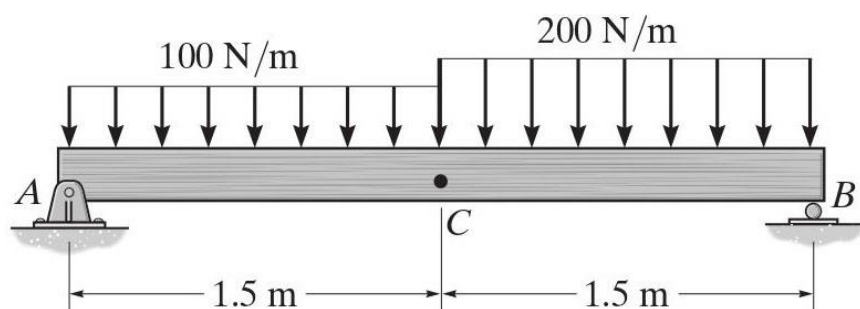
En este último sentido, los problemas que siguen atienden, particularmente, al procedimiento de cálculo de las distintas fuerzas internas en ciertos elementos estructurales o situaciones de interés, por ejemplo, en vigas o algún elemento de máquina, principalmente en las primeras.

Finalmente, es necesario volver a enfatizar que la importancia del estudio de las fuerzas internas radica en su estrecha relación con la definición de tensión, la cual, a su vez, posibilita el dimensionamiento de estructuras o elementos estructurales: objeto de la Resistencia de Materiales.

PROBLEMA RESUELTO 3.1

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas de determinación de fuerzas internas en un elemento estructural, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo.

Consigna. Determinar la fuerza normal $\vec{N}$, la fuerza cortante $\vec{V}$, y el momento flexionante $\vec{M}$ internos, que actúan en el punto C sobre la sección transversal de la viga de la **Figura 6**.



F1-2

Figura 6. Determinación de Fuerzas Internas en una Viga (Fuente: HIBBELER, 2011).

SOLUCIÓN

Antes de aplicar las ecuaciones (1) de equilibrio elástico, se deben hallar las reacciones de vínculo planteando las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\begin{cases} + \sum M_A = 0 & \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$R_B = 262,5 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = 187,5 \text{ N}$$

Hay que aclarar que, en este caso, al no existir cargas horizontales (o, en su defecto, componentes horizontales de cargas oblicuas): $R_{Ax} = 0,0 \text{ N}$, es decir, la reacción horizontal que generaría el vínculo es una precaución ante la aplicación eventual de una fuerza horizontal sobre la viga.

Ahora sí, ya estando definidas todas las fuerzas externas, se puede realizar el seccionamiento imaginario en C (que evidencia las fuerzas internas $\vec{N}_C$, $\vec{V}_C$ y $\vec{M}_C$) y plantear las ecuaciones del equilibrio elástico. En este caso se analiza el equilibrio del tramo izquierdo, **Figura 7**.²⁹

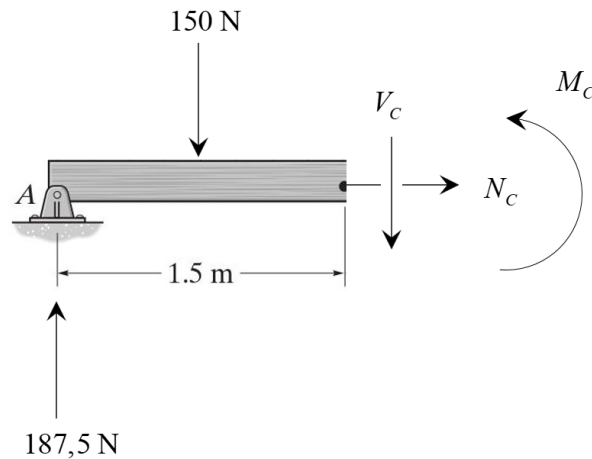


Figura 7. Diagrama de Cuerpo Libre del Tramo Izquierdo (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

$$\begin{cases} + \sum M_C = 0 & \text{(I)} \Rightarrow 187,5 \cdot (1,5) - 150 \cdot (0,75) - M_C = 0 \\ + \uparrow \vec{F}_y = 0 & \text{(II)} \Rightarrow 187,5 - 150 - V_C = 0 \\ + \rightarrow \vec{F}_x = 0 & \text{(III)} \Rightarrow N_C = 0 \end{cases}$$

De (I), (II) y (III) se obtienen las respectivas fuerzas internas, cuyos módulos se consignan a continuación:

Respuesta

$N_C = 0 \text{ N}$
$V_C = 37,5 \text{ N}$
$M_C = 168,75 \text{ Nm}$

²⁹ Para poder plantear las ecuaciones de equilibrio, deben suponerse los sentidos de las fuerzas internas (en el caso que estos no sean evidentes). Luego, si el resultado es negativo, significa que el sentido supuesto es contrario al sentido real.

Observaciones

- Observe que, para la determinación de las fuerzas internas se están utilizando los procedimientos de la Estática.
- En este caso las fuerzas intermoleculares no están trabajando ni a compresión ni a tracción, ya que no existe carga externa normal a la sección transversal.
- Como el análisis es el plano, el momento interno se corresponde con un giro en torno al eje z , $\vec{M}_z$. Del mismo modo, la fuerza interna cortante actúa según el eje y , $\vec{V}_y$.
- Advierta que el método para la determinación de las fuerzas internas es el expuesto en el desarrollo teórico.³⁰ Esto es, se suele hacer un corte ideal en el sólido por una sección de exploración buscando que fuerzas deben actuar en esa sección para mantener el equilibrio de la porción o tramo seleccionado para el análisis.

³⁰ HIBBELER (2011) denomina este método como “método de las secciones”.

PROBLEMA RESUELTO 3.2

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas de determinación de fuerzas internas en un elemento estructural, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo (Ver **Figura 8**).

EJEMPLO 1.2

Determine las cargas internas resultantes que actúan en C sobre la sección transversal de la flecha de la máquina mostrada en la figura 1-5a. La flecha está soportada por chumaceras en A y B , las cuales ejercen sólo fuerzas verticales sobre la flecha.

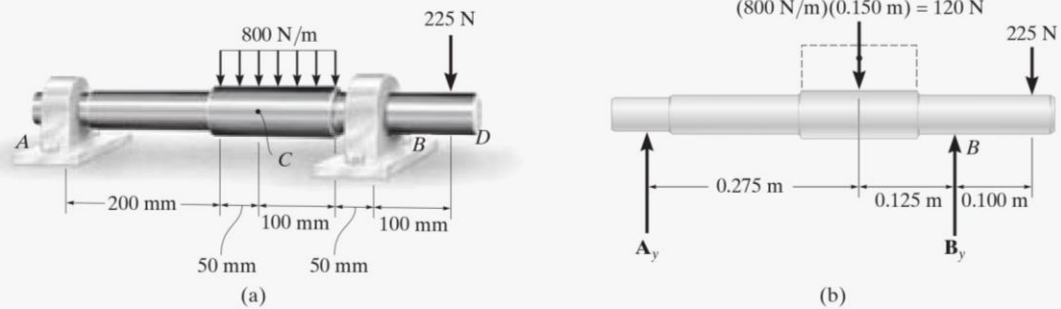


Figura 1-5

SOLUCIÓN

Este problema se resolverá usando el segmento AC de la flecha.

Reacciones en los soportes. En la figura 1-5b se muestra el diagrama de cuerpo libre de toda la flecha. Puesto que se considerará el segmento AC , sólo debe determinarse la reacción en A . ¿Por qué?

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & -A_y(0.400 \text{ m}) + 120 \text{ N}(0.125 \text{ m}) - 225 \text{ N}(0.100 \text{ m}) = 0 \\ & A_y = -18.75 \text{ N} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que A_y actúa en el *sentido opuesto* al mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 1-5c se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento AC .

Ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad N_C = 0 & \text{Resp.} \\ \sum F_y = 0; & -18.75 \text{ N} - 40 \text{ N} - V_C = 0 & \\ & V_C = -58.8 \text{ N} & \text{Resp.} \\ \sum M_C = 0; & M_C + 40 \text{ N}(0.025 \text{ m}) + 18.75 \text{ N}(0.250 \text{ m}) = 0 & \\ & M_C = -5.69 \text{ N} \cdot \text{m} & \text{Resp.} \end{aligned}$$

NOTA: Los signos negativos para V_C y M_C indican que actúan en las direcciones opuestas a las mostradas en el diagrama de cuerpo libre. A modo de ejercicio, calcule la reacción en B e intente obtener los mismos resultados usando el segmento CBD del eje.

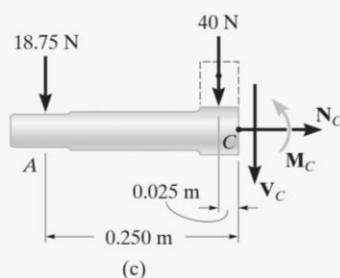


Figura 8. Determinación de Fuerzas Internas en una Flecha (Fuente: HIBBELER, 2011).

Observaciones

- Note que este es un caso en el cual los efectos externos producen flexión en la flecha, la cual se debe, en general, a la acción de una correa de transmisión. Este detalle es importante y ha de adquirir más relevancia cuando se trate el tema de torsión circular recta, al hacer la distinción entre árbol de transmisión y eje.

3.2. Tensiones en Elementos Estructurales

El objetivo de esta subsección y la siguiente, es introducir al estudiante al concepto de tensión y deformación (en especial las elásticas) en el contexto de Mecánica de Materiales. En este sentido, se desea que al finalizar la lectura se comprenda con precisión qué son y cómo se relacionan la tensión y la deformación en los elementos estructurales, cuando se los somete a la acción de una carga. Posteriormente, en el Capítulo 4, se han de definir las expresiones analíticas específicas para el cálculo de la tensión y la deformación en casos de aplicación de carga particulares.

3.2.1. Concepto de Tensión

A partir de lo mencionado en el párrafo anterior, hay que decir en primer lugar que, si bien los resultados obtenidos mediante los procedimientos de la Estática representan un primer paso necesario en el análisis de una estructura dada, ellos son insuficientes para determinar si la carga en cuestión puede ser soportada con seguridad. Por ejemplo, el que la varilla de la **Figura 9 – a)** pueda “romperse” o no hacerlo bajo la acción de la carga **P**, depende no sólo del valor encontrado para la fuerza interna **N**, sino también del área transversal **A** de la varilla y del material con que ésta haya sido elaborada. Así pues, y tal como se ha de explicar en breve, la tensión en el elemento se define a partir de estas variables.

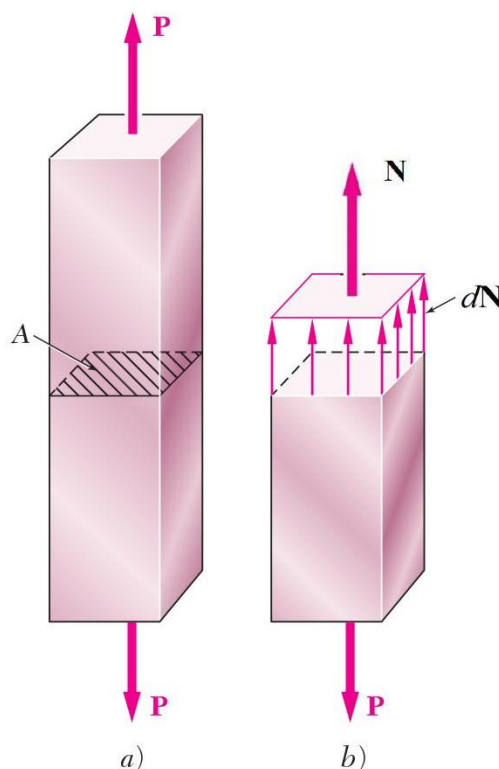


Figura 9. Elemento Estructural Sometido a Carga Axial, y Variables Atinentes a la Definición de Tensión Normal (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

La fuerza interna N mencionada, en realidad representa la resultante de las fuerzas elementales (dN) distribuidas a lo largo de toda el área A de la sección transversal, **Figura 9 – b)**, y la intensidad promedio de estas fuerzas distribuidas es igual a la fuerza por unidad de área, $|N|/A$. Y en este sentido, el hecho de que la varilla se “rompa” o no bajo la carga dada, depende claramente de dicha intensidad promedio. Por lo tanto, la resistencia a la fractura depende de la fuerza N , del área transversal A y del material de la varilla.

En este punto ya se tienen los elementos necesarios para definir tensión, previo a ello, sin embargo, se considera importante resaltar lo siguiente:

Note el lector, que la **Figura 9 – b)** representa la porción inferior de la barra que se ha obtenido mediante un seccionamiento de exploración que evidencia las fuerzas internas que actúan en la sección transversal de la varilla, tal como se ha analizado cuando se abordó el tema de fuerzas internas en el apartado precedente. En otras palabras, la resultante N de las fuerzas

internas distribuidas es la encargada de equilibrar a la carga externa aplicada **P** (equilibrio elástico).³¹

Por esta última razón, también es común calcular la tensión utilizando el valor de la carga, tal como se ha de mostrar enseguida. Sin embargo, hay que enfatizar que la tensión se produce dentro de la pieza, no se ve (es interna), la carga, en cambio, está fuera y puede verse (es externa). Entonces, también se puede decir que la carga aplicada a una estructura es resistida por la tensión,³² la cual transmite dicha carga desde su punto de aplicación hasta los lugares donde se producen las reacciones.

Definición de Tensión

En palabras de HIBBELER (2011), la fuerza interna por unidad de área, o la intensidad de las fuerzas internas distribuidas a través de una sección dada, se llama **esfuerzo** o **tensión** sobre esa sección y, tradicionalmente, se representa con letras del alfabeto griego según el tipo de tensión que se trate.

De esta manera, a partir del ejemplo ilustrativo de la varilla, puede calcularse la tensión (σ) en un elemento con área transversal A ³³ sometido a una carga axial **P** normal a dicha área, al dividir la magnitud $|\mathbf{N}|$ de la fuerza interna entre A , Ec. (2) – a). Sin embargo, al considerar que $|\mathbf{N}| = |\mathbf{P}|$ también es válida la Ec. (2) – b).

$$\begin{aligned} a) \quad \sigma &= \frac{|\mathbf{N}|}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]; \quad [\text{Pa}] \\ b) \quad \sigma &= \frac{|\mathbf{P}|}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]; \quad [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{2}$$

³¹ $|\mathbf{N}| = |\mathbf{P}|$.

³² En otros términos, quizás más intuitivo, “el material se esfuerza” para posibilitar la transmisión de la carga.

³³ También llamada sección resistente.

De la ecuación anterior, adviértase que la tensión es una presión, que en el sistema internacional de unidades se expresa en Pascal (Pa). Sin embargo, el Pascal es una unidad muy pequeña, por lo que en la práctica deben emplearse múltiplos de esta unidad, como el kilo Pascal (kPa), mega Pascal (MPa) o giga Pascal (GPa).

Tipos de Tensiones

Un primer criterio que permite distinguir entre tipos de tensiones, es el que considera la dirección de aplicación de la carga con respecto a la sección resistente A . Así pues, las tensiones pueden clasificarse, esencialmente, en dos tipos, a saber: tensiones normales y tensiones tangenciales.

Tensiones Normales. Es el caso de la varilla analizada en la Figura 9, en la cual la carga aplicada es normal³⁴ a la sección resistente A , generando, por tanto, una tensión también normal a dicha sección. Para este caso, como se ha expresado, se utiliza la letra griega *sigma* σ .

Tensiones Tangenciales. Es el caso en que la carga aplicada es paralela a la sección resistente A , generando, por lo tanto, tensiones tangenciales que se desarrollan en el plano de A , llamado plano de corte (o plano cortante). La tensión en estos casos se denomina **tensión cortante** y se representa con la letra griega *tau* τ .

Para mostrar cómo puede desarrollarse esta última tensión, considere el efecto de aplicar una fuerza F a la barra mostrada en la **Figura 10 – a)**. Si se considera que los soportes son rígidos, y que F es suficientemente grande, ésta ocasionará que el material de la barra se deforme y falle a lo largo de los planos identificados como AB y CD .

Un diagrama de cuerpo libre del segmento central de la barra que no tiene soporte, **Figura 10 – b)**, indica que la fuerza interna cortante $|V| = |F|/2$ debe aplicarse en cada una de las

³⁴ Perpendicular.

secciones a fin de mantener al segmento en equilibrio. En este caso, $\mathbf{V}$ representa la resultante de las fuerzas elementales ($d\mathbf{V}$) distribuidas a lo largo de toda el área A de la sección, sección que en este caso es tangente a $\mathbf{V}$, **Figura 10 – c**). Por lo tanto, es evidente que la tensión también es tangencial.

En este último sentido, conviene recalcar que dicha tensión tangencial debe actuar en la misma dirección que $\mathbf{V}$, ya que la tensión cortante debe crear fuerzas asociadas, todas las cuales contribuyen a la fuerza interna resultante $\mathbf{V}$ en la sección. El mismo razonamiento es válido para la tensión normal.

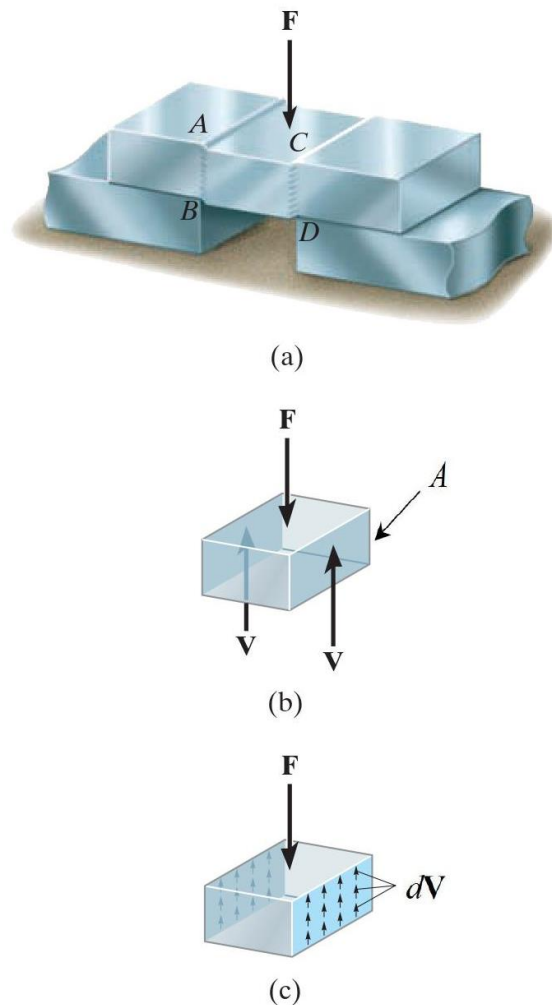


Figura 10. Elemento Estructural Sometido a Carga Transversal, y Variables Atinentes a la Definición de Tensión Tangencial (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

La Ec. (3) que a continuación se presenta, es formalmente análoga a la (2), y permite calcular la tensión tangencial que se produce en cada una de las dos secciones resistentes.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \tau &= \frac{|V|}{A} \left[\frac{N}{m^2} \right]; \quad [Pa] \\
 b) \quad \tau &= \frac{|F|}{2 \cdot A} \left[\frac{N}{m^2} \right]; \quad [Pa]
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Finalmente, y en lo que respecta a tipos de tensiones, también se puede decir que existe un segundo criterio importante de clasificación que se deriva del ensayo de tracción (Sección 3.3.1). Así pues, hay que reiterar que dicho ensayo suele ser tomado como referencia y representa una de las pruebas más importantes, tal como lo menciona HIBBELER (2011).³⁵

Dicha clasificación permite definir, entre otras, a un tipo primordialmente importante de tensión: la tensión admisible, la cual tiene implicancias directas en el diseño de elementos estructurales, tal como se ha de exponer sintéticamente en la sección siguiente. Pero, previamente, es necesario indicar un último aspecto (no por ello menos importante) respecto del concepto de tensión.

Tensión Promedio y Tensión en un Punto

Estos últimos párrafos, aunque breves, están destinados a conceptualizar la tensión normal y tangencial promedio, y la tensión normal y tangencial en un punto. Estos conceptos requieren del estudio de la distribución de la tensión que actúa sobre el área resistente de un determinado elemento. Tenga en cuenta que para este análisis se consideran los casos presentados en las Figuras 9 y 10 precedentes.

Tensión Normal Promedio y Tensión Normal en un Punto. El concepto de tensión se introdujo primeramente en el desarrollo precedente al considerar un elemento de dos fuerzas³⁶ bajo carga axial. La tensión normal en ese elemento se obtuvo dividiendo la magnitud de la

³⁵ Esto mismo también es destacado por RAFFO (2007) y ha sido indicado al inicio de la Sección 2.

³⁶ Elemento de dos fuerzas puesto que sólo dos fuerzas actúan sobre él (HIBBELER, 2011).

fuerza interna entre el área transversal del elemento (Véase ecuación 2). El valor de σ obtenido con dicha ecuación representa la tensión promedio a través de la sección más que la tensión en un punto específico Q de la misma. Sin embargo, una determinación más exacta de la tensión exige dividir la fuerza interna diferencial dN entre el elemento de área diferencial dA sobre el que actúa, Ec. (4 – b), expresión a la cual se arriba considerando un área pequeña ΔA que rodee al punto Q y la magnitud ΔN de la fuerza interna ejercida sobre ΔA , Ec. (4 – a).³⁷

$$a) \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad [\text{Pa}]$$

Es decir: (4)

$$b) \quad \sigma = \frac{dN}{dA} \quad [\text{Pa}]$$

Tensión Cortante Promedio y Tensión Cortante en un Punto. En forma análoga al caso anterior, la tensión cortante promedio a través de una sección se determina mediante la fórmula (3), mientras que la tensión en un punto se obtiene en el límite cuando ΔA tiende a cero.

Comparación de los Valores Promedio y en un Punto. En general, el valor de la **tensión normal** en un punto obtenida mediante la (4 – b), es diferente del valor de la tensión promedio dado por la fórmula (2), y puede verse que la tensión varía en los diferentes puntos a través de la sección. Sin embargo, al establecer ciertas hipótesis es posible lograr en la pieza una deformación axial uniforme que genere una distribución de tensiones normales también uniforme (o constante) en toda la sección transversal de esta.³⁸ En estas condiciones, la ecuación

³⁷ Al reducir ΔA a un tamaño cada vez más pequeño (Ec. 4), deben adoptarse dos suposiciones respecto a las propiedades del material: 1) Se considerará que el material es **continuo**, es decir, que consiste en una distribución uniforme o continua de materia que no contiene huecos; además, 2) El material debe ser **cohesivo**, lo que significa que todas sus partes están conectadas entre sí, sin fracturas, grietas o separaciones.

³⁸ Mediante un análisis más detallado en la Sección 4.1, se demuestra que la distribución de tensiones es uniforme en cualquier sección transversal que se encuentre lejos de los puntos de aplicación de las cargas. En este mismo apartado también se han de consignar las citadas hipótesis.

(2) arroja un valor de tensión promedio que se aproxima con bastante exactitud al valor en cada punto.

Para la **tensión cortante**, por su parte, hay que decir que el caso presentado se produce con frecuencia en diversos tipos de conexiones simples que usan pernos, pasadores y materiales soldados, entre otras, y en todos estos casos la aplicación de la ecuación (3) es sólo aproximada. Así pues, una investigación más precisa de la distribución de la tensión cortante sobre la sección revela que se producen tensiones cortantes muchos mayores en el material que los predichos por esta ecuación. Aunque esto sea el caso, la aplicación de la ecuación (3) es aceptable para muchos problemas de diseño y análisis en ingeniería. Por ejemplo, los códigos de ingeniería permiten su uso cuando se consideran las dimensiones de diseño para elementos de fijación como pernos y para obtener la fuerza de adhesión de juntas pegadas que están sometidas a cargas cortantes (HIBBELER, 2011).

Puntos Importantes:

- ✚ Debe quedar claro que existe “una” tensión promedio y “una” tensión en un punto, y que la tensión promedio es la que se determina y utiliza habitualmente en los cálculos. En algunos libros, la tensión promedio se denota como $\sigma_{\text{prom.}}$ o $\tau_{\text{prom.}}$, aunque en la mayor parte de la literatura se omite este subíndice asumiendo que el estudiante es consciente de lo que se está calculando.
- ✚ Este análisis elemental revela que, en general, la tensión en cada punto es diferente a la tensión promedio. En otras palabras, la distribución de tensiones no es uniforme en toda el área resistente, pero puede considerarse como tal bajo ciertas condiciones.
- ✚ El concepto de tensión promedio y en un punto, también se ha de evidenciar luego cuando se estudien otras configuraciones de carga en otros elementos estructurales, Por ejemplo, cuando en la Sección 4.4 se considere una tensión cortante promedio actuando en todo el ancho de una viga de área transversal rectangular.

Finalmente, hay que hacer mención que los análisis expuestos hasta aquí en la Sección 3.2, consideran casos particulares de aplicación de carga, ya que con ellos es suficiente para conceptualizar los dos tipos básicos de tensiones (normal y tangencial). En este sentido, un enfoque más general, tal como lo exponen HIBBELER (2011) y BEER *et al.* (2009), implicaría el estudio tensiones bajo condiciones generales de carga, en la cual las tensiones se analizan en el espacio,³⁹ sin embargo, siempre ha de ser posible reducir el estudio a casos simples de tensiones normales y tangenciales.

³⁹ En el análisis espacial bajo condiciones generales de carga, las tensiones normales y tangenciales se tratan como componentes.

3.2.2. Consideraciones de Diseño

Hasta este punto, en el desarrollo de la Sección 3.2 se han abordado aspectos importantes, todos ellos atinentes al concepto de tensión, en las aplicaciones de ingeniería, sin embargo, la determinación de tensiones rara vez es un fin en sí misma, al contrario, el conocimiento de las tensiones lo emplean los ingenieros como un apoyo a su tarea más importante: el diseño de estructuras y máquinas que puedan desempeñar una tarea específica en forma segura y económica (BEER *et al.*, 2009). Y, es justamente en este último sentido, que a continuación se describen y definen términos de suma importancia.

a) La Tensión Admisible

Para diseñar correctamente un elemento estructural o mecánico es necesario limitar la tensión en el material⁴⁰ hasta un nivel que sea seguro. Por lo tanto, para garantizar esta seguridad se requiere definir un tipo de tensión, denominada **tensión admisible** o **tensión permisible**: $\sigma_{adm.}$, o bien, $\tau_{adm.}$.⁴¹ Un método para especificarla consiste en usar un número llamado **factor** o **coeficiente de seguridad**, n , el cual debe ser seleccionado cuidadosamente con base en muchas consideraciones, tal como se expone en el ítem b siguiente.

En efecto, la tensión admisible se calcula **dividiendo una tensión de referencia entre dicho coeficiente de seguridad**. Esta tensión de referencia se obtiene mediante los ensayos de laboratorio; y, según el caso, puede utilizarse la tensión de rotura (o bien, la tensión máxima),⁴² la tensión en el punto de fluencia o la resistencia a la fluencia. Dichas tensiones se formalizan en la Sección 3.3, mientras que, su uso en situaciones prácticas concretas se presenta en el Capítulo 4 para cada estado de sollicitación particular. Esto último debe ser así ya que la tensión

⁴⁰ Tal como se ha analizado al comienzo de esta sección, un material de área resistente A que es sollicitado por una carga de trabajo P , genera una tensión en oposición a la deformación. Para que el elemento trabaje con seguridad dicha tensión debe ser menor (o a lo sumo, igual) a la tensión admisible.

⁴¹ En inglés suele utilizarse el subíndice “all.” que proviene de *allowable*, $\sigma_{all.}$.

⁴² En ciertos materiales, en los frágiles en particular, estos valores coinciden o están muy cercanos.

admisible admite variantes en su cálculo según el tipo de sollicitación. Por citar un ejemplo, para materiales dúctiles la tensión admisible en tracción o compresión se calcula utilizando la tensión en el punto de fluencia o la resistencia a la fluencia, en cambio en los frágiles, se utiliza la tensión de rotura o la tensión máxima.⁴³

En cualquiera de los casos que se trate, el factor de seguridad debe ser **mayor que 1** (uno) a fin de evitar la posibilidad de falla. Los valores específicos dependen de los tipos de materiales a utilizar y el propósito de la estructura o máquina. Por ejemplo, el factor de seguridad usado en el diseño de componentes de aviones o vehículos espaciales puede estar cerca de 1 para reducir el peso del vehículo. O en el caso de una planta de energía nuclear, el factor de seguridad para algunos de sus componentes puede ser de hasta 3 debido a las incertidumbres en la carga o el comportamiento del material. Muchas veces, el factor de seguridad para un caso específico puede encontrarse en los **códigos, estándares o reglamentos de diseño y manuales de ingeniería**. Estos valores están destinados a formar un balance para proteger la seguridad pública y ambiental y para proporcionar una solución económicamente razonable en el diseño.

Por último, es importante recalcar que es responsabilidad del diseñador establecer el factor de seguridad e investigar si el producto o sistema que está diseñando es controlado por dichos códigos y estándares. Por lo tanto, y dada la multiplicidad de factores que deben considerarse para una selección adecuada del factor de seguridad, en los ejercicios aplicativos de este material no se han de presentar criterios específicos para su elección, más bien, estos estarán implícitos en los problemas resueltos presentados.

⁴³ Es importante destacar que cualquiera sea el método por el cual se calcule la tensión admisible, ésta siempre ha de ser una tensión elástica. Recuerde el lector que, cuando las tensiones internas superan las correspondientes a la zona elástica, la Resistencia de Materiales no es aplicable (haga una revisión de los fundamentos del Capítulo 3).

b) Selección del Factor (o Coeficiente) de Seguridad Adecuado

La selección del factor de seguridad que debe usarse en distintas aplicaciones es una de las tareas más importantes de los ingenieros. Por una parte, si el factor de seguridad se elige demasiado pequeño, la posibilidad de falla se torna inaceptablemente grande; por otra, si se elige demasiado grande, el resultado es un diseño caro o no funcional.

La elección de un factor de seguridad apropiado para una determinada aplicación de diseño requiere de un acertado juicio por parte del ingeniero, basado en muchas **consideraciones** como las siguientes:

1. Variaciones que pueden ocurrir en las propiedades del elemento bajo consideración. La composición, resistencia y dimensiones del elemento están sujetas a pequeñas variaciones durante la manufactura. Además, las propiedades del material pueden alterarse y, con ello, introducir tensiones residuales debido al calentamiento o deformación que puedan ocurrir durante la manufactura, almacenamiento, transporte o construcción del material. En forma ampliada, también se puede mencionar que las medidas propuestas de una estructura o máquina pueden no ser exactas debido a errores en la fabricación o en el montaje de las piezas que lo componen. Por último, algunos materiales como la madera, el concreto o los compuestos reforzados con fibra, pueden tener una alta variabilidad en sus propiedades mecánicas.

2. Número de cargas que puedan esperarse durante la vida de la estructura o máquina. Para la mayoría de los materiales la tensión de rotura disminuye al aumentar el número de aplicaciones de carga, este fenómeno se conoce como **fatiga**;⁴⁴ y, si se ignora, puede provocar una falla repentina.

3. Tipo de cargas que se han planeado para el diseño, o que puedan ocurrir en el futuro. Muy pocas situaciones de carga se conocen con certeza, y la mayoría de las cargas de diseño

⁴⁴ Glosando a ROKO (1995): Es sabido que una pieza resistente sometida a cargas (o esfuerzos) variables y repetidas en el tiempo, falla con una tensión menor que la correspondiente a la carga estática.

son aproximaciones (la carga para la que se diseña el elemento puede ser diferente a las cargas reales que se colocan sobre él). Además, las alteraciones futuras o cambios en el uso pueden introducir cambios en la carga real. Para cargas dinámicas, cíclicas o de impulso, se requieren mayores factores de seguridad.

4. *Tipo de falla que pueda ocurrir.* Los materiales **frágiles** comúnmente fallan de manera repentina, sin indicación previa de que el colapso es inminente. Por otra parte, los materiales **dúctiles**, como el acero estructural, con frecuencia sufren una sustancial deformación, llamada cedencia (o fluencia) antes de fallar, dando así una advertencia de que existe la sobrecarga. Sin embargo, la mayoría de las **fallas de estabilidad** o por pandeo son repentinas, sea frágil el material o no. Cuando existe la posibilidad de falla repentina, debe emplearse un mayor factor de seguridad que cuando la falla es precedida por señales “obvias” de advertencia.

5. *Incertidumbre debida a los métodos de análisis.* Todos los métodos de diseño se basan en ciertas suposiciones simplificadoras que se traducen en que las tensiones calculadas sean sólo aproximaciones de las tensiones reales.

6. *Deterioro que pueda ocurrir en el futuro por mantenimiento incorrecto o por causas naturales inevitables.* Un factor de seguridad mayor es necesario en localidades donde las condiciones como la corrosión y la putrefacción son difíciles de controlar o hasta de descubrir. La corrosión atmosférica, el desgaste o la exposición a la intemperie tienden a causar que los materiales se deterioren durante su uso.

7. *Importancia de un elemento dado a la integridad de la estructura completa.* Los refuerzos y los elementos secundarios pueden diseñarse en muchos casos, con un factor de seguridad menor que el empleado para los elementos principales.

c) Métodos de Diseño

No se puede dejar de hacer mención de los métodos de diseño de elementos estructurales de uso actual, a saber: el ASD y el LRFD. El primero de ellos se basa en la tensión admisible y es el empleado en este documento.

Según MOTT (2009), el método de diseño por tensión admisible (**ASD**, *allowable stress design*) ha sido el estándar por muchos años, y aun hoy es el más ampliamente utilizado. En años recientes, sin embargo, el AISC⁴⁵ completó la implementación de un método revisado para el diseño de miembros estructurales de puentes, edificios y otras estructuras, llamado diseño por factor de carga y resistencia (**LRFD**, *load and resistance factor design*). Al respecto, el autor arriba citado añade un comentario a tener en consideración: este libro continúa utilizando el ASD porque presenta los conceptos fundamentales de diseño sin la enorme cantidad de detalles requeridos para aplicar cabalmente el método LRFD.

La filosofía básica del LRFD incluye la aplicación de factores a los varios tipos de cargas que pueden ocurrir individualmente o en combinación en edificios, puentes y otras estructuras semejantes. Los factores se desarrollaron después de una extensa investigación sobre cómo interactúan las cargas muertas (D), las cargas vivas (L), las cargas de viento (W), las cargas sísmicas (E) y las cargas de techo, nieve o lluvia (L, S, R) con base en estadísticas a lo largo de una vida de 50 años. También se incluye un conjunto de factores de resistencia para diferentes tipos de cargas tales como cedencia a tracción, fractura a tracción, compresión, flexión y cedencia a cortante. Éstos se acumulan y consideran en la desigualdad matemática base de este método, que aquí se omite debido a que no es contenido de estudio.

⁴⁵ El Instituto Americano para la Construcción en Acero (*American Institute of Steel Construction*, AISC), es un organismo que se encarga de estudiar las normas para el diseño y construcción de estructuras de acero en diferentes países.

Por otra parte, tenga en cuenta que las consideraciones mencionados en este apartado se han de ilustrar en los ejercicios aplicativos de diseño y dimensionamiento (en su forma más elemental) de elementos presentados en el Capítulo 4, esto es, el lector ha de constatar cómo se determina la tensión admisible y cómo está relacionada con la sección resistente y la carga aplicada mediante las distintas fórmulas de dimensionamiento.⁴⁶

En este último sentido, es importante destacar que, es posible obtener una **fórmula de dimensionamiento** para cada estado de sollicitación. De esta manera, y en analogía con las ecuaciones (2) y (3), es importante que constate que dichas fórmulas llevan implícitas 3 variables generales, las cuales se pueden catalogar como: **1-Tensión admisible** (de tracción, de compresión, etc.); **2-Efecto o acción externa** (fuerza o torque); y, **3-Propiedad** o característica **geométrica** del elemento. Teniendo en cuenta esta analogía le resultará más simple retener y/o deducir las distintas expresiones analíticas.

Finalmente, tenga en cuenta que un problema de diseño común en ingeniería, es la determinación del tamaño requerido de un elemento para soportar ciertas cargas dadas, es decir: su **resistencia**.⁴⁷ Sin embargo, además de tomar en cuenta la resistencia, es probable que el diseño de una estructura también abarque la rigidez y la estabilidad.

Rigidez se refiere a la capacidad de la estructura para resistir cambios de forma (por ejemplo, para resistir alargamiento, flexión o torsión) y **estabilidad** se refiere a la capacidad de la estructura para resistir flexión ante tensiones de compresión. En ocasiones es necesario establecer límites a la rigidez para evitar deformaciones excesivas, como deflexiones grandes de una viga que podrían interferir con su desempeño. En este sentido, la flexión es la consideración principal en el diseño de columnas. Por lo tanto, en el contexto de este material

⁴⁶ El término “fórmula de dimensionamiento” no representa una designación formal, más bien, es una expresión utilizada en nuestro contexto académico. Los libros de ingeniería, en cambio, hablan de fórmula (o ecuación) de resistencia o de estabilidad, la cual es una relación general de tres variables, como se explica enseguida.

⁴⁷ Resistencia es la capacidad del objeto para soportar o transmitir cargas (GERE y GOODNO, 2013).

didáctico, la resistencia, rigidez y estabilidad⁴⁸ son los tres factores que se han de considerar para el diseño.

3.3. Propiedades Mecánicas de los Materiales

Después de haber estudiado los conceptos básicos de tensión, en este apartado se ha de mostrar cómo puede relacionarse con la deformación mediante el uso de métodos experimentales que determinan el **diagrama tensión-deformación** en un material específico. En este aspecto, y tal como lo menciona ROKO (1995), la información precisa referente a las propiedades mecánicas y características resistentes de cada material en particular, según las diversas condiciones de trabajo, se obtienen en los **laboratorios de ensayo** empleando **probetas normalizadas** sometidas a distintas acciones externas, de: tracción, compresión, corte directo, torsión, flexión y pandeo.

Los resultados empíricos obtenidos de cada uno de los ensayos mencionados, son de suma utilidad para proyectos futuros, y sirven de base a los cálculos estructurales en la práctica. En este sentido, hay que destacar ¡una vez más!, que uno de los más importantes para la Resistencia de Materiales es el ensayo de tracción, por esta razón se le dedica un desarrollo o análisis más extenso en la mayoría de los textos de Mecánica de Materiales, y esta obra no es la excepción.

Por lo tanto, para abordar lo indicado en los párrafos precedentes, es necesario, en primer lugar, precisar dos aspectos importantes: los tipos de ensayos de materiales; y, el concepto de deformación. Para el primero de ellos, hay que decir que los ensayos que se han de describir en las Secciones 3.3.1 a 3.3.6 corresponden a **ensayos estáticos**⁴⁹ y **destructivos**.⁵⁰ En este

⁴⁸ Otros factores a considerar pueden ser la apariencia, la economía y los efectos ambientales.

⁴⁹ En un ensayo estático, la carga se aplica lentamente, y no interesa la velocidad exacta de carga, debido a que no afecta el comportamiento de la muestra (GERE y GOODNO, 2013). Hay que aclarar, sin embargo, que la velocidad suele ser especificada en las normativas.

⁵⁰ Los ensayos destructivos se definen como aquellos que producen una alteración mecánica irreversible en la probeta que es sometida a la carga, es decir, la pieza se acaba destruyendo.

sentido, la mayoría de los laboratorios de pruebas de materiales están equipados con máquinas capaces de cargar las muestras de diversas maneras, incluyendo cargas estáticas y dinámicas (estas últimas no han de ser abordadas en este curso). En un ensayo estático, la carga se aplica lentamente a una velocidad específica de carga. Sin embargo, en un ensayo dinámico la carga se aplica rápidamente y, en algunas ocasiones, de manera cíclica. Como la naturaleza de una carga dinámica afecta las propiedades de los materiales, también en este caso se debe considerar la velocidad de carga (GERE y GOODNO, 2013).

Del segundo aspecto, por otra parte, se ofrece a continuación una aproximación al **concepto de deformación**:

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, ésta tiende a cambiar la forma y el tamaño del cuerpo. Estos cambios se conocen como deformación, la cual puede ser muy visible o casi imperceptible.⁵¹ Por ejemplo, una banda de goma (liga) experimentará una deformación muy grande al estirarse. En cambio, en un edificio sólo ocurren deformaciones ligeras en sus elementos estructurales cuando las personas caminan dentro de él. La deformación de un cuerpo también puede ocurrir cuando cambia su temperatura. Un ejemplo típico es la expansión o contracción térmica de un techo provocada por el clima. (HIBBELER, 2011, p.65).

Finalmente, destacar que, a partir del ensayo de tracción que a continuación se analiza, es posible, también, distinguir entre deformaciones elásticas y plásticas, siendo este nivel de clasificación de particular interés, dado que, en el diseño máquinas y estructuras se analizan las tensiones del material en la zona elástica. Además, las propiedades elásticas que se derivan de este análisis se generalizan luego a las otras sollicitaciones.

⁵¹ En muchos casos son imperceptibles al ojo humano, aun en el mismo instante de la rotura. Por otra parte, las características de cada material, sus propiedades, forma y dimensiones, influyen notoriamente en cada caso, a lo que obviamente, hay que agregar el tipo de fuerza exterior (carga).

3.3.1. Ensayo de Tracción Axial

Tal como lo destaca HIBBELER (2011), una de las pruebas más importantes es el ensayo de tracción en elementos sometidos a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales; y, aunque a partir de esta prueba se pueden establecer varias propiedades mecánicas importantes de un material, se utiliza principalmente para determinar la relación entre la tensión normal promedio y la deformación normal promedio en muchos materiales de ingeniería (como metales, cerámicas, polímeros y materiales compuestos), determinando los diagramas de tensión-deformación.

Específicamente, se ha de realizar un análisis elemental del comportamiento descrito por dicho diagrama para el caso del acero⁵² “típico” de construcción, y se lo ha de comparar con aquellos que corresponden a otros materiales que se usan con frecuencia en ingeniería. En este contexto, además, se hará una breve reseña de las propiedades mecánicas derivadas o asociadas a estos métodos experimentales.

Para realizar un ensayo de tracción, se fabrica una probeta del material con forma y tamaño estándar, la cual tiene una sección transversal circular constante⁵³ con extremos más grandes, de modo que la falla no se produzca en las empuñaduras, **Figura 11**.

⁵² Está claro que este material es esencial en la industria manufacturera, particularmente en el rubro de la construcción, sin embargo, la ventaja de analizar su diagrama es que este presenta con claridad todas sus fases o zonas. Esto es indiscutiblemente así para el caso de los aceros de bajo porcentaje de carbono (< 1% en masa de su composición), conocidos habitualmente como aceros al carbono o aceros al bajo carbono.

⁵³ En algunas circunstancias también se utilizan probetas con forma de tira plana de sección transversal rectangular (MOTT, 2009).

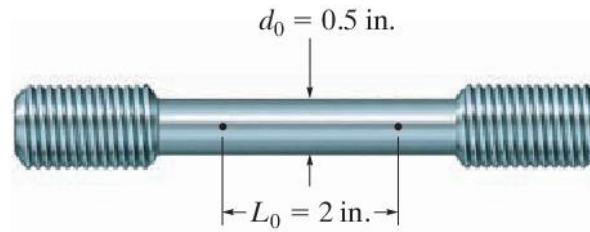


Fig. 3-1

Figura 11. Probeta Estandarizada para Ensayo de Tracción (Fuente: HIBBELER, 2011).

Antes de realizar el ensayo, con la ayuda de un punzón, se hacen dos pequeñas marcas sobre la longitud uniforme de la probeta, se hacen mediciones tanto del área de la sección transversal inicial de la probeta, A_0 , como de la **longitud calibrada** L_0 entre las marcas. Por ejemplo, cuando se utiliza una probeta de metal en un ensayo de tracción, por lo general ésta tiene un diámetro inicial $d_0 = 0.5$ pulg (13 mm) y una longitud calibrada $L_0 = 2$ pulg (50 mm).

A fin de aplicar una carga axial sin que la probeta se flexione, los extremos suelen asentarse en las juntas de rótula. Después se utiliza una máquina de ensayos como la que aparece en la **Figura 12** para estirar la probeta a una velocidad lenta y constante hasta que ésta falla. La máquina está diseñada para leer la carga que se requiere para mantener este estiramiento uniforme.

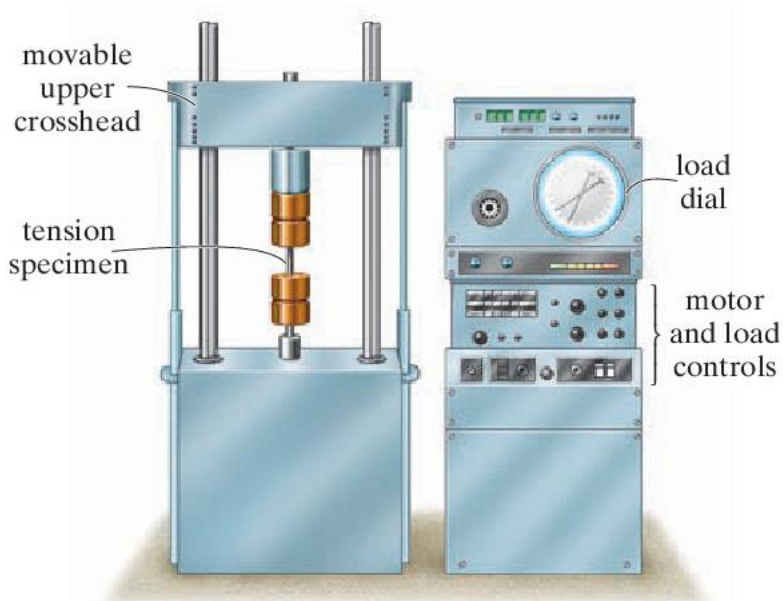


Fig. 3-2

Figura 12. Máquina para Ensayos de Tracción (Fuente: HIBBELER, 2011).

Durante la prueba se registran los datos de la carga aplicada P a intervalos frecuentes, la información se lee en la pantalla de la máquina o se toma de un lector digital. Además, se mide el alargamiento total δ (*delta*) entre las marcas hechas en la probeta utilizando un calibrador o bien un dispositivo óptico o mecánico llamado **extensómetro**. Este valor de δ se utiliza para calcular la deformación normal promedio en la probeta (Ec. 6). Sin embargo, en ocasiones esta medida no se toma porque también es posible leer la deformación de manera directa mediante un medidor de deformación de resistencia eléctrica.⁵⁴

Diagrama de Tensión-Deformación

Para la realización de los ensayos, no es posible, evidentemente, preparar una probeta que coincida con los tamaños A_0 y L_0 de cada elemento estructural. En su lugar, los resultados de los ensayos deben reportarse de manera que puedan aplicarse a un elemento de cualquier tamaño. Para lograr este objetivo, los datos de la carga⁵⁵ se dividen entre el área inicial de la probeta, mientras que la deformación total correspondiente, se divide entre su longitud inicial (estas magnitudes se definen en los dos párrafos siguientes). Finalmente, la representación gráfica de estos cocientes según dos ejes ortogonales,⁵⁶ produce una curva llamada diagrama tensión-deformación. Por lo general, hay dos maneras de describir dicho diagrama, como se expone a continuación.

Diagrama Tensión-Deformación Convencional.⁵⁷ Se puede determinar la **tensión nominal o de ingeniería** al dividir la carga aplicada P entre el área A_0 de la sección transversal

⁵⁴ La operación de este medidor se basa en el cambio en la resistencia eléctrica de un alambre u hoja de metal muy delgada que se encuentra bajo deformación. En esencia, el medidor se adhiere o cementa a lo largo de la probeta. Si el pegamento es muy fuerte en comparación con el medidor, entonces éste formará en efecto parte integral de la probeta, de modo que cuando la muestra se deforma en la dirección del medidor, el alambre y la probeta experimentarán la misma deformación. Al medir la resistencia eléctrica del alambre, el medidor puede calibrarse para leer los valores de deformación normal de manera directa.

⁵⁵ Obtenidos en cada punto del ensayo.

⁵⁶ Esta manera de definir las magnitudes de los ejes del diagrama, permite no solo generalizar o extrapolar los resultados de los ensayos, sino también comparar entre dos o más ensayos.

⁵⁷ También denominado: Diagrama de tensión-deformación ingenieril.

original de la probeta. En este cálculo se supone que la tensión es constante en cada punto la sección transversal⁵⁸ y en toda la longitud calibrada, Ec. (5).

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad [\text{Pa}] \quad (5)$$

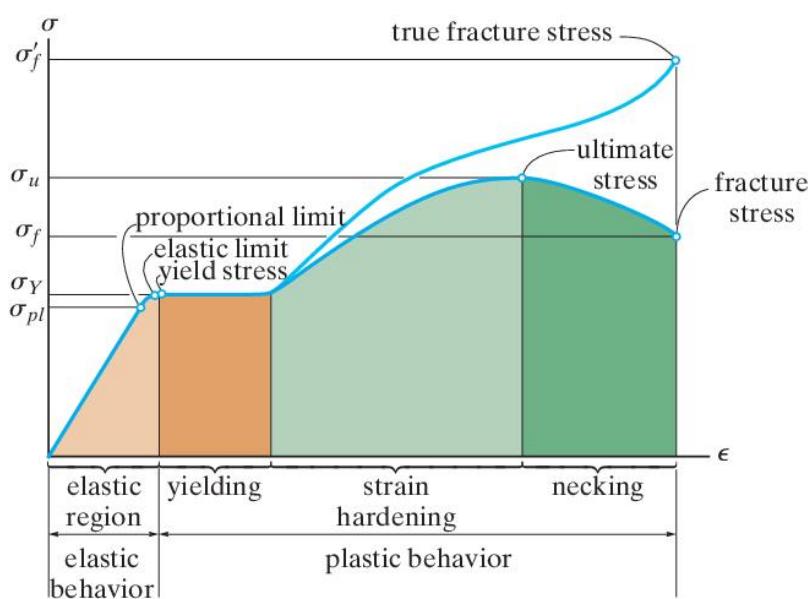
Del mismo modo, la **deformación nominal o de ingeniería** (también denominada **alargamiento específico** o deformación específica)⁵⁹ se determina de manera directa al leer el medidor de deformación, o al dividir el cambio δ en la longitud calibrada de la probeta entre la longitud calibrada original L_0 de la misma. Aquí se supone que la deformación es constante a lo largo de la región entre los puntos marcados, Ec. (6). Observe que según la (6), ϵ es adimensional puesto que se trata de un cociente de longitudes, sin embargo, es común referirla a la unidad pulg/pulg o mm/mm como se aprecia en la Figura 15.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad [1]; \quad [\text{pulg/pulg}]; \quad [\text{mm/mm}] \quad (6)$$

Si los valores correspondientes de σ y ϵ se trazan de manera que el eje vertical sea la tensión y el eje horizontal sea la deformación, la curva resultante se llama diagrama de tensión-deformación convencional, **Figura 13**.

⁵⁸ Como ya se ha explicado en la Sección 3.2.1.

⁵⁹ También es usual utilizar el término “unitario” en lugar de “específico”. Por otra parte, con la expresión dada por la (6) solo se obtiene el valor medio de la deformación, pero la expresión correcta de la deformación en cualquier punto es: $\frac{d\delta}{dL_0}$. La cual determina el valor de la deformación en una longitud tan pequeña (dL_0) que puede considerarse constante en dicha longitud.



Conventional and true stress-strain diagrams for ductile material (steel) (not to scale)

Fig. 3-4

Elastic behavior: comportamiento elástico.
Elastic limit: límite elástico.
Elastic region: región elástica.
Fracture stress: tensión de fractura (o rotura).
Necking: estricción.
Plastic behavior: comportamiento plástico.
Proportional limit: límite de proporcionalidad.
Strain hardening: endurecimiento por deformación.
True fracture stress: tensión de fractura verdadero.
Ultimate stress: tensión última (o máxima).
Yield stress: tensión de cedencia (o fluencia).
Yielding: cedencia (o fluencia).

Figura 13. Diagrama de Tensión-Deformación Convencional (o Ingenieril) y Verdadero para un Material Dúctil (acero) (no se presenta a escala) (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

Sin embargo, tenga en cuenta que dos diagramas de tensión-deformación para un material particular serán muy similares, pero nunca exactamente iguales. Esto se debe a que los resultados en realidad dependen de variables tales como la composición del material, imperfecciones microscópicas, la forma en que se fabrica, la rapidez con que se aplica la carga y la temperatura durante la realización del ensayo.

Análisis del Diagrama de Tensión-Deformación Convencional

A continuación, se analizarán las características de la curva de tensión-deformación convencional para el acero dúctil⁶⁰, un material que se usa de manera frecuente para fabricar elementos estructurales y mecánicos, como ya se ha dicho. A partir de esta curva se pueden identificar cuatro diferentes formas en que se comporta el material, en función de la deformación inducida en éste.

⁶⁰ Compare, en este sentido, con el diagrama presentado por RAFFO (2007) (p.94) para el “acero corriente” A 37.

Comportamiento Elástico. El comportamiento elástico del material se produce cuando las deformaciones en la probeta están dentro de la región triangular que se muestra en la Figura 13. Aquí la curva es en realidad una línea recta en la mayor parte de la región, de modo que la tensión es proporcional a la deformación. Se dice que el material contenido en esta región es elástico lineal. El límite superior de la tensión para esta relación lineal se denomina **límite de proporcionalidad**, σ_{pl} . Si la tensión excede ligeramente el límite de proporcionalidad, la curva tiende a “doblar y aplanarse” como se muestra en la figura. Esto continúa hasta que la tensión alcanza el **límite elástico**. En este punto, si se retira la carga, la probeta recuperará de nuevo su forma original. Hay que destacar que el límite elástico para el acero se determina en muy pocas ocasiones, debido que se encuentra muy próximo al límite de proporcionalidad y, por lo tanto, es muy difícil de detectar.⁶¹

Cedencia o Fluencia. Un ligero aumento en la tensión por encima del límite elástico generará un deslizamiento del material a lo largo de superficies oblicuas. Este deslizamiento se debe sobre todo a tensiones cortantes y ocasiona que el material se deforme de manera permanente. Este comportamiento se denomina cedencia, y está indicado por la región rectangular (adyacente a la región triangular) de la curva. La tensión que causa la cedencia se llama **tensión de cedencia o punto de cedencia**, σ_Y (donde el subíndice Y proviene de *yield*), y la deformación que se produce se denomina deformación plástica. Observe, además, que después de haber alcanzado el punto de cedencia, la probeta seguirá alargándose

⁶¹ Sin embargo, según RAFFO (2007), para precisar su valor se acepta como límite de elasticidad, la tensión que produce un alargamiento residual o remanente de 0,02 % de la longitud calibrada. Además, como nota ampliatoria, y en palabras de ROKO (1995), para el caso del acero estructural dulce (0,15%) ambas tensiones características tienen prácticamente el mismo valor (en torno a los 2000 kgf/cm²), por eso es que muchas veces se los confunde o se los alterna en alguna explicación, a pesar de ser conceptualmente diferentes.

(deformándose) sin ningún incremento en la carga.⁶² Con frecuencia, cuando el material se encuentra en este estado se dice que es **perfectamente plástico**.

Es conveniente aclarar que en el diagrama de la Figura 13 solo se indica un valor de cedencia (σ_Y), lo cual es común en algunos libros, ya que, como explica RAFFO (2007): superado el límite elástico la tensión oscila en torno a un valor que es justamente σ_Y . Sin embargo, y aunque no se muestra en la figura citada, para los aceros al bajo carbono o aceros laminados en caliente, el punto de cedencia suele caracterizarse mediante dos valores.⁶³ El **punto de cedencia superior** (o alto) ocurre primero, seguido de una disminución súbita de la capacidad de carga hasta el **punto de cedencia inferior** (o bajo).⁶⁴

Endurecimiento por Deformación. Cuando termina la cedencia, la probeta puede soportar un aumento de la carga, lo que resulta en una curva que asciende continuamente pero que se vuelve más plana hasta llegar a una **tensión máxima** conocida como **tensión última**, σ_u . Este incremento en la curva se llama endurecimiento por deformación y se identifica en la Figura 13 como la región curva más clara.

Estricción. Mientras la probeta se alarga hasta llegar a la tensión última, el área de su sección transversal se reduce. Esta reducción es bastante uniforme en toda la longitud calibrada de la probeta; sin embargo, justo después de la tensión última, el área de la sección transversal comenzará a disminuir en una región localizada de la probeta. En consecuencia, suele formarse una constricción o “cuello” en dicha región a medida que la probeta se alarga aún más, **Figura 14 – a**. En la Figura 13, esta región, debido a la estricción, se indica en un tono más oscuro al

⁶² En realidad, tal como se explica en el párrafo siguiente, la carga (y por tanto la tensión) oscila en torno a un valor.

⁶³ Apenas se supera el límite elástico, el material entra en fluencia hasta alcanzar un valor superior, descendiendo luego hasta un valor inferior, tal como se explica seguidamente.

⁶⁴ Esto puede observarse en el diagrama de la Figura 15.

final de la curva. En esta región el diagrama tensión-deformación tiende a curvarse hacia abajo hasta que la probeta se rompe a la **tensión de fractura**, σ_f , **Figura 14 – b**.

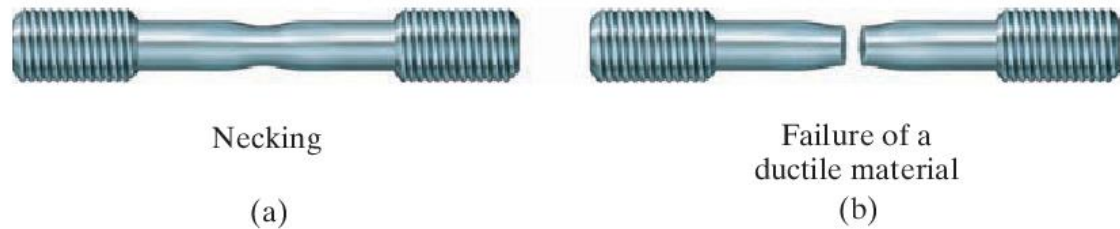


Fig. 3–5

Figura 14. Estricción y Falla de un Material Dúctil como el Acero al Bajo Carbono (Fuente: HIBBELER, 2011).

Como puede verse, la fractura ocurre a lo largo de una superficie con forma de cono que forma un ángulo de, aproximadamente, 45° con la superficie original de la probeta. Esto indica que el cortante es el principal responsable de la falla de los materiales dúctiles,⁶⁵ y confirma el hecho de que, bajo una carga axial, las tensiones cortantes son máximas en las superficies que forman un ángulo de 45° con la carga (BEER *et al.*, 2009).

Diagrama Tensión-Deformación Verdadera

En lugar de emplear siempre el área de la sección transversal y la longitud originales de la probeta para calcular la tensión y la deformación (de ingeniería), se podría utilizar el área de la sección transversal y la longitud reales de la probeta en el instante en que se mide la carga. Los valores de tensión y deformación encontrados en estas mediciones se denominan **tensión verdadera** y **deformación verdadera**, y una gráfica de sus valores se llama diagrama de tensión-deformación verdadera. Dicho diagrama tiene la forma mostrada por una línea ascendente en la Figura 13.

⁶⁵ Este hecho se confirmará nuevamente cuando se analicen los casos de falla por torsión de un material dúctil.

Observe que los diagramas $\sigma-\epsilon$ convencional y verdadero son prácticamente coincidentes cuando la deformación es pequeña. Las diferencias entre los diagramas comienzan a aparecer en el rango de endurecimiento por deformación, donde la magnitud de la deformación se vuelve más significativa. En particular, existe una amplia divergencia dentro de la región de estricción. Aquí puede verse en el diagrama $\sigma-\epsilon$ convencional que la probeta realmente soporta una carga decreciente, ya que A_0 es constante en el cálculo de la tensión de ingeniería, $\sigma = P/A_0$. Sin embargo, en el diagrama $\sigma-\epsilon$ verdadero, el área real A dentro de la región de estricción siempre es decreciente hasta la fractura, σ'_f , por lo que el material soporta en realidad una **tensión creciente**, ya que $\sigma = P/A$.

Aunque los diagramas de tensión-deformación verdadero y convencional son diferentes, la mayor parte del **diseño de ingeniería** se hace para que el material soporte una **tensión dentro del rango elástico**. Lo anterior es para que la deformación del material no sea muy severa y éste recupere su forma al retirarse la carga. La deformación verdadera hasta el límite elástico permanecerá lo suficientemente pequeña para que el error al usar valores de ingeniería de σ y ϵ sea pequeño (aproximadamente 0.1 por ciento) en comparación con sus valores verdaderos. Ésta es una de las principales razones por las que se usan diagramas de tensión-deformación convencionales.

Los conceptos anteriores se pueden resumir haciendo referencia a la **Figura 15**, donde se muestra un diagrama de tensión-deformación convencional real para una probeta de acero de bajo carbono. Con el fin de destacar los detalles, la región elástica de la curva se muestra en un tono celeste claro usando una escala de deformación exagerada, que se muestra en el mismo tono celeste claro.

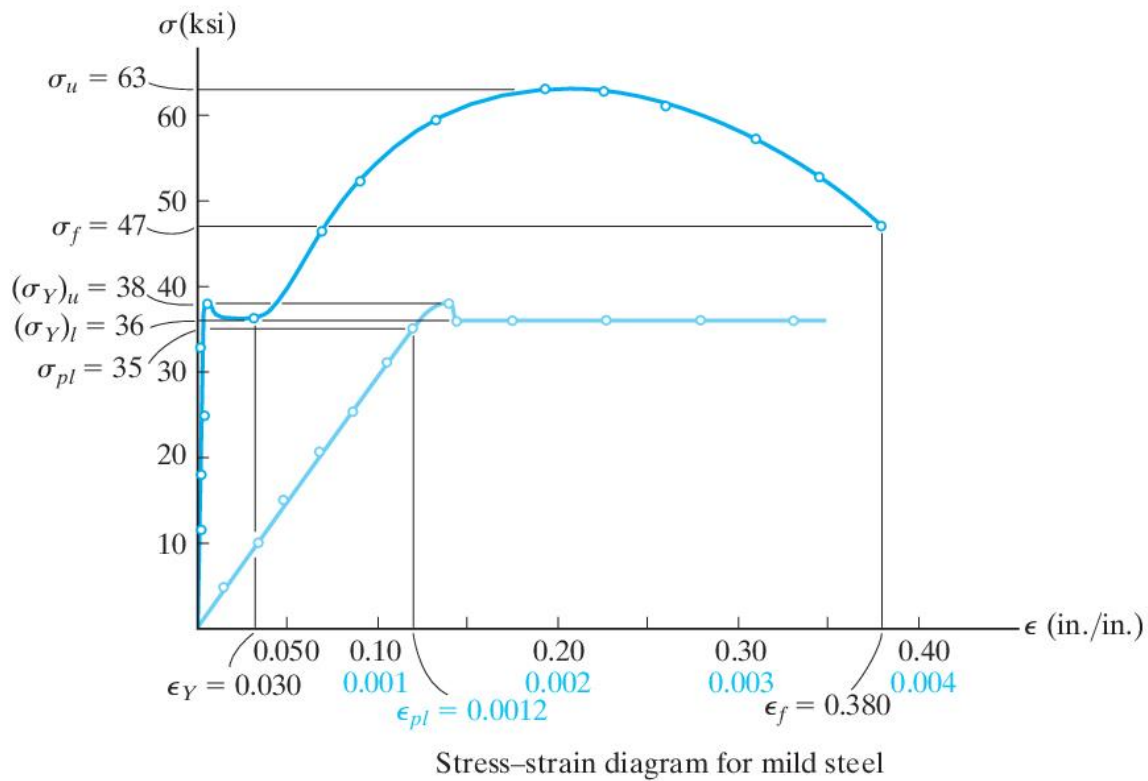


Fig. 3-6

Figura 15. Diagrama de Tensión-Deformación Convencional Real para una Probeta de Acero de Bajo Carbono (Fuente: HIBBELER, 2011).

Al evaluar el comportamiento, se observa que el límite de proporcionalidad se alcanza en $\sigma_{pl} = 35 \text{ ksi}$ (241 MPa), donde $\epsilon_{pl} = 0,0012 \text{ pulg/pulg}$, seguido de un punto de cedencia superior de $(\sigma_Y)_u = 38 \text{ ksi}$ (262 MPa), después se presenta el punto de cedencia inferior $(\sigma_Y)_l = 36 \text{ ksi}$ (248 MPa). El fin de la cedencia se produce con una deformación $\epsilon_Y = 0,030 \text{ pulg/pulg}$ ¡que es 25 veces mayor a la deformación en el límite de proporcionalidad!

A continuación, la probeta experimenta endurecimiento por deformación hasta llegar a la tensión última $\sigma_u = 63 \text{ ksi}$ (434 MPa), después comienza a presentarse la estricción hasta que se produce una fractura, $\sigma_f = 47 \text{ ksi}$ (324 MPa). Por comparación, la deformación a la falla, $\epsilon_f = 0,380 \text{ pulg/pulg}$, es ¡317 veces mayor que ϵ_{pl} !

Hay que hacer notar que, en el diagrama precedente, ¡el cual es real!, no se ha identificado la tensión en el límite elástico como tal, esto es así porque dicha tensión se encuentra muy próxima al límite de proporcionalidad, como ya se ha explicado anteriormente.

Comportamiento Tensión-Deformación en Materiales Dúctiles y Frágiles

Los materiales pueden clasificarse como dúctiles o frágiles en función de sus características tensión-deformación.

Materiales Dúctiles

Cualquier material que pueda someterse a grandes deformaciones antes de fracturarse se denomina material dúctil. El acero de bajo carbono, como se ha dicho anteriormente, es un ejemplo típico. Los ingenieros suelen elegir materiales dúctiles para el diseño porque son capaces de absorber los impactos o la energía, y si se sobrecargan, por lo general presentan grandes deformaciones antes de fallar.

Una manera de especificar la ductilidad de un material es registrar su porcentaje de elongación o porcentaje de reducción en área al momento de la fractura. El **porcentaje de elongación** es la deformación a la fractura expresada en porcentaje. Por lo tanto, si la longitud calibrada original de la probeta es L_0 y su longitud a la fractura es L_f , entonces se puede escribir la **Ec. (7)**. Además, como se observa en la Figura 15, dado que $\epsilon_f = 0,380$, este valor sería del 38 por ciento para una probeta de acero de bajo carbono.⁶⁶

$$\text{Porcentaje de elongación} = \frac{L_f - L_0}{L_0} \cdot 100 \quad [\%] \quad (7)$$

⁶⁶ En este mismo sentido, RAFFO (2007) señala que para un A 37 el alargamiento porcentual o porcentaje de elongación en la rotura debe ser por lo menos igual al 20 % de la longitud inicial.

Otra manera de especificar la ductilidad es el **porcentaje de reducción de área**. Está definida dentro de la región de estricción de la siguiente manera, **Ec. (8)**. Aquí A_0 es el área original de la sección transversal de la probeta y A_f es el área del cuello en el momento de la ruptura. El acero de bajo carbono tiene un valor típico de 60 por ciento.

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \cdot 100 \quad [\%] \quad (8)$$

Además del acero, otros metales como el **bronce**, el **molibdeno** y el **zinc** pueden presentar características dúctiles similares, puesto que también experimentan un comportamiento elástico tensión-deformación, es decir, ceden a una tensión constante, presentan endurecimiento por deformación y, finalmente, se produce en ellos una estricción hasta la fractura.

En contraposición a lo mencionado en el párrafo anterior, la mayoría de los metales no exhiben un punto de cedencia (σ_Y)⁶⁷ bien definido. Un metal en el que se presenta esta situación es el **aluminio** (otros ejemplos son los aceros aleados de alta resistencia o el titanio), por lo que la práctica aceptable consiste en definir una **resistencia a la cedencia** σ_{YS} ,⁶⁸ mediante un procedimiento gráfico llamado **método de corrimiento**, tal como se muestra en la **Figura 16**. Por lo tanto: se utiliza la resistencia a la cedencia⁶⁹ en lugar del punto de cedencia para los materiales que exhiben esta característica.

Por lo general, se elige una deformación de 0.2 por ciento (0.002 pulg/pulg) y desde este punto sobre el eje ϵ se dibuja una línea paralela a la porción inicial recta del diagrama tensión-

⁶⁷ Ver Figura 13.

⁶⁸ Donde el subíndice YS proviene de *yield stress*.

⁶⁹ Se trata, entonces, de una tensión convencional que interviene constantemente en Resistencia de Materiales para la determinación de la tensión admisible (como se ha de estudiar en el Capítulo 4).

deformación. El punto donde esta línea interseca a la curva define la resistencia a la cedencia.

Aquí puede observarse que la resistencia a la cedencia es $\sigma_{YS} = 51 \text{ ksi}$ (352 MPa).⁷⁰

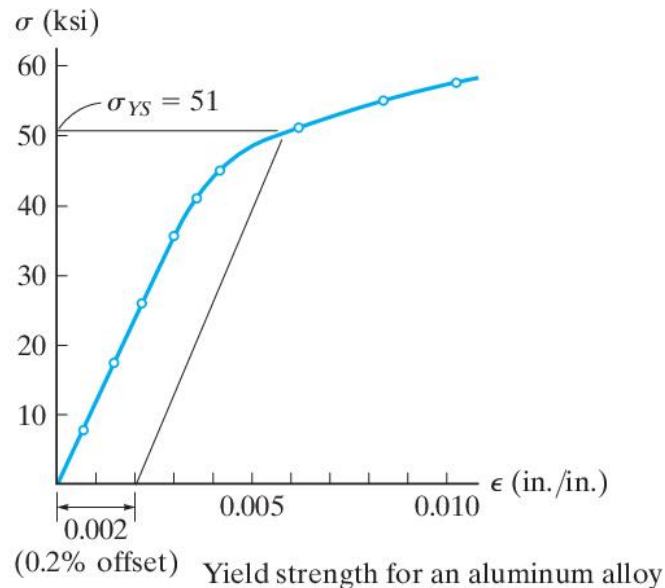


Fig. 3-7

Figura 16. Método de Corrimiento: Construcción Gráfica para la Determinación de la Resistencia a la Cedencia de una Aleación de Aluminio (Fuente: HIBBELER, 2011).

Finalmente, y como nota de cierre a los materiales dúctiles, considere el **caucho natural** y la madera. Como se muestra en la **Figura 17**, para el primer caso hay que destacar que no tiene un límite de proporcionalidad porque la tensión y la deformación no están linealmente relacionadas, en vez de eso este material, conocido como un polímero, presenta un comportamiento elástico no lineal.

⁷⁰ Esta manera de definir la tensión σ_{YS} , es indicado por las normas. Según el país se toma un valor comprendido entre 0,2 y 0,5 % de la longitud inicial de la probeta.

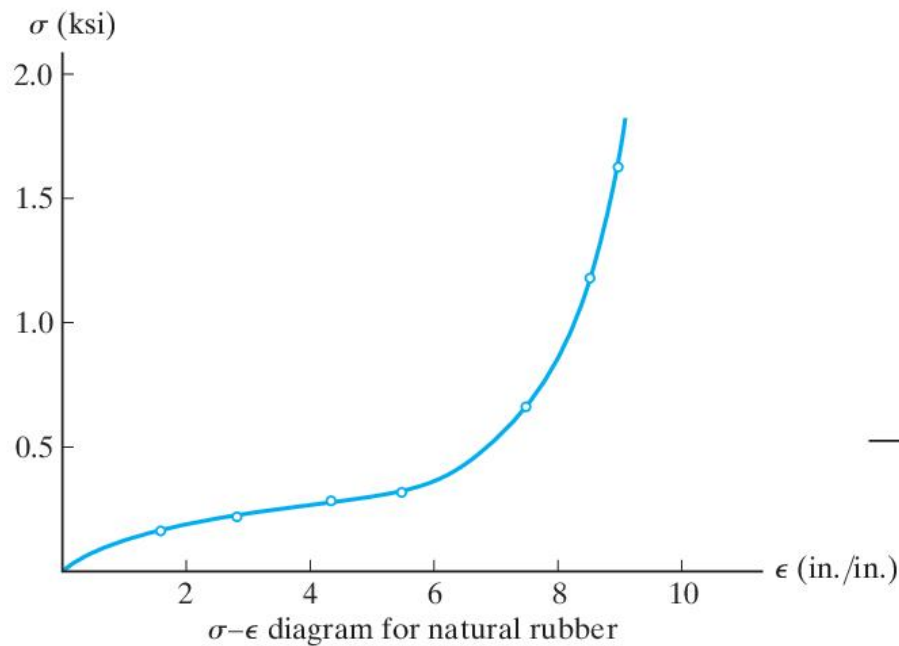


Fig. 3-8

Figura 17. Comportamiento Elástico No Lineal del Caucho Natural (Polímero) (Fuente: HIBBELER, 2011).

La **madera**, por su parte, suele ser un material **moderadamente dúctil**, por ello se encuentra en diseños que responden sólo a cargas elásticas. Las características de resistencia de la madera varían mucho de una especie a otra, y en cada una de ellas la resistencia depende del contenido de humedad, de la edad y del tamaño, y de la disposición de los nudos, entre otros factores. Como éste es un material fibroso, sus características de tracción o compresión son muy diferentes cuando está cargado en forma paralela o perpendicular a la fibra. De manera específica, la madera se parte con mayor facilidad cuando está cargada en tracción perpendicular a su fibra y, por consiguiente, las cargas de tracción están casi siempre destinadas a aplicarse paralelas a la fibra de los elementos de madera.

Materiales Frágiles

Los materiales que no presentan cedencia, o que exhiben una muy pequeña antes de la falla, se conocen como materiales frágiles. El **hierro fundido gris** es un ejemplo, tiene un diagrama de tensión-deformación en tracción como el mostrado en la porción *AB* de la curva de la **Figura 18**. Aquí, la fractura en $\sigma_f = 22 \text{ ksi}$ (152 MPa) tuvo lugar inicialmente en una imperfección

o grieta microscópica y luego se propagó con rapidez a través de la probeta, lo que causó una fractura completa.

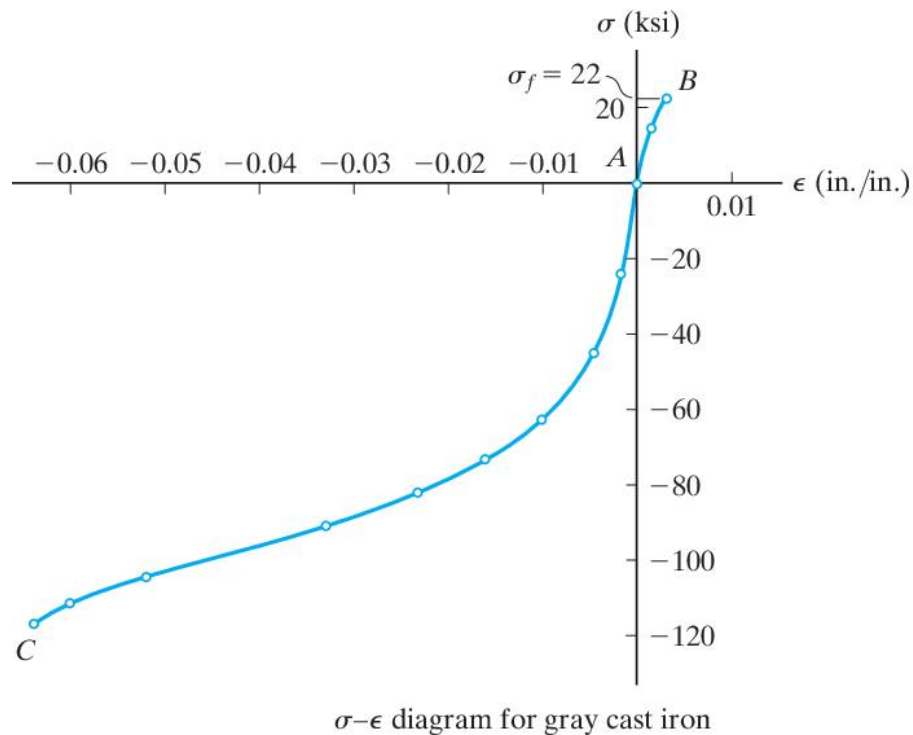


Fig. 3-9

Figura 18. Diagrama de Tensión-Deformación en Tracción (Porción AB de la Curva) y Compresión (Porción AC de la Curva) para un Material Frágil como el Hierro Fundido Gris (Fuente: HIBBELER, 2011).

Como la aparición de grietas iniciales en una probeta es bastante aleatoria, los materiales frágiles no tienen una tensión de fractura a la tracción bien definido. En cambio, generalmente se reporta la tensión de fractura a la tracción promedio de un conjunto de ensayos observados.

En la **Figura 19** se muestra la imagen típica de una probeta que falló.



Tension failure of
a brittle material

Figura 19. Falla en Tracción de un Material Frágil como el Hierro Fundido Gris (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

Finalmente, puede establecerse de manera general que la mayoría de los materiales presentan comportamiento dúctil y frágil. Por ejemplo, el acero tiene un comportamiento frágil cuando tiene un alto contenido de carbono y dúctil cuando el contenido de carbono es reducido. Asimismo, a bajas temperaturas los materiales se vuelven más duros y frágiles, mientras que cuando la temperatura se eleva se vuelven más blandos y dúctiles.⁷¹

Ley de Hooke

Como se ha señalado en la sección anterior, los diagramas de tensión-deformación para la mayoría de los materiales de ingeniería presentan una relación lineal entre la tensión y la deformación dentro de la región elástica. En consecuencia, un incremento en la tensión ocasiona un aumento proporcional en la deformación. Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 mediante el uso de resortes, y se conoce como la ley de Hooke. En el contexto de nuestro análisis puede expresarse en forma matemática como se indica en la **Ec. (9)**,⁷² la cual representa la ecuación de la porción recta inicial del diagrama de tensión-deformación hasta el límite de proporcionalidad.

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad [\text{Pa}] \quad (9)$$

En la anterior, E representa la constante de proporcionalidad que se denomina **módulo de elasticidad o módulo de Young**,⁷³ es decir, E es la pendiente de la recta antes mencionada. Por consiguiente, un material que tiene una pendiente más pronunciada en su curva de tensión-

⁷¹ El acero pierde rápidamente su resistencia cuando se calienta. Por esa razón los ingenieros suelen exigir que los principales elementos estructurales se aíslan en caso de incendio.

⁷² La ecuación (9) es válida únicamente donde la deformación ocurre en sólo una dirección (por ejemplo, el eje x). Esto se llama **deformación uniaxial** y se aplica a miembros sometidos a tracción o compresión axial y vigas sometidas a flexión pura. Sin embargo, las deformaciones y las tensiones pueden analizarse en las tres direcciones x, y, z , constituyendo la ley de Hooke generalizada para la carga multiaxial de un material isotrópico homogéneo.

⁷³ Llamado así por Thomas Young quien publicó un estudio sobre él en 1807. Thomas Young (1773-1829). Científico y lingüista inglés.

deformación será más rígido y se deformará menos bajo carga que uno de pendiente menos pronunciada. La **Figura 20** ilustra este concepto al mostrar las partes de línea recta de las curvas de tensión-deformación del acero, titanio, aluminio y magnesio. Es posible apreciar que, en el caso de dos partes idénticas, pero una hecha de acero y la otra de aluminio, la parte de aluminio se deformaría aproximadamente tres veces más cuando se sometiera a la misma carga.

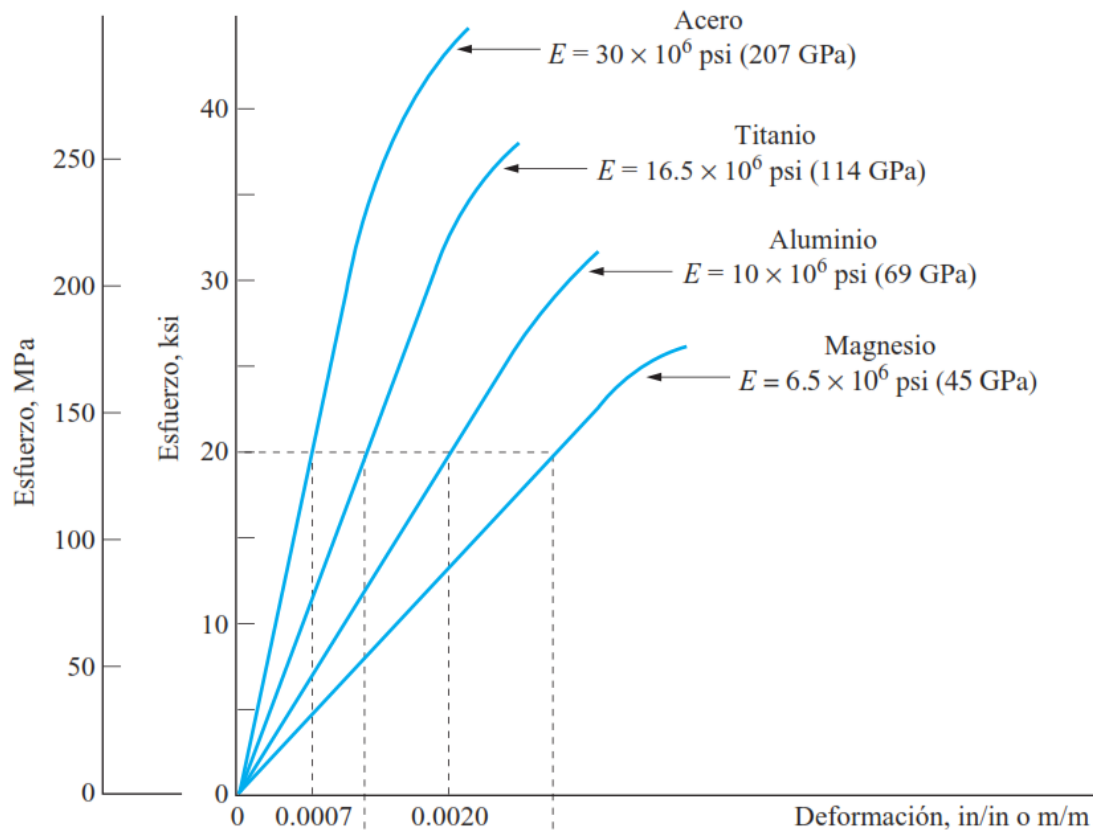


Figura 20. Módulo de Elasticidad de Diferentes Metales (Fuente: MOTT, 2009).

Además, como la deformación es adimensional, a partir de la ecuación (9) se deduce que E tendrá las mismas unidades que la tensión: psi, ksi o pascales. Como ejemplo de su **cálculo**, considere el diagrama de tensión-deformación para el acero que se muestra en la Figura 15, en el cual, $\sigma_{pl} = 35 \text{ ksi}$ (241 MPa) y $\epsilon_{pl} = 0,0012 \text{ pulg/pulg}$, por lo tanto, al plantear la Ec. (10).

$$E = \frac{\sigma_{pl}}{\epsilon_{pl}} = \frac{35 \text{ ksi}}{0,0012 \frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}} = 29 \times 10^3 \text{ ksi} \cong 200 \text{ GPa} \quad (10)$$

En virtud de la ecuación (10), se deduce que al cambiar el límite de proporcionalidad también cambia E . Para el caso particular de las aleaciones de acero, dicho límite depende de su contenido de carbono; sin embargo, la mayor parte de los grados de acero, desde el acero laminado más blando hasta el acero más duro para herramientas, tienen casi el mismo módulo de elasticidad, en general aceptado como $E = 29 \times 10^3$ ksi o bien **200 GPa**.

Los valores de E para otros materiales de ingeniería comúnmente usados se tabulan con frecuencia en los códigos de ingeniería y libros de referencia. Vale la pena destacar que el módulo de elasticidad es una propiedad mecánica que indica la **rigidez de un material**. Los materiales que son muy rígidos, como el acero, tienen grandes valores de E (200 GPa), mientras que los materiales esponjosos, como el caucho vulcanizado, pueden tener valores bajos ($E = 0.70$ MPa).

El módulo de elasticidad es una de las propiedades mecánicas más importantes que se utilizan en el desarrollo de las ecuaciones que se presentan en este material. Sin embargo, siempre se debe recordar que E puede utilizarse sólo si el material tiene un comportamiento elástico lineal. Además, si la tensión en el material es mayor que el límite de proporcionalidad, el diagrama de tensión-deformación deja de ser una línea recta y la ecuación (9) ya no es válida.

Energía de Deformación

Finalmente, a medida que un material se deforma debido a una carga, tiende a almacenar energía internamente en todo su volumen. Como esta energía se relaciona con las deformaciones del material, se denomina **energía de deformación**. La obtención de esta energía de deformación requiere de un análisis que se omite en este material didáctico. En cambio, a continuación, solamente se exponen dos definiciones de interés que se derivan de dicho análisis, a saber: el módulo de resiliencia y el módulo de tenacidad.

Módulo de Resiliencia: Es la energía almacenada por el material cuando la tensión σ alcanza el límite de proporcionalidad. A partir de la región elástica del diagrama de tensión-deformación, observe que este módulo es equivalente al área triangular sombreada bajo el diagrama. Físicamente, la resiliencia de un material representa su capacidad de absorber la energía sin experimentar ningún tipo de daño permanente.

Módulo de Tenacidad: Esta es otra propiedad importante de un material y representa toda el área bajo el diagrama de tensión-deformación, y, por lo tanto, indica la energía de deformación del material justo antes de fracturarse. Esta propiedad se vuelve importante en el diseño de elementos que se pueden sobrecargar de manera accidental.

Hay que aclarar, por otra parte, que la aleación de metales, como así también el tratamiento térmico y hasta el proceso de manufactura empleado, pueden cambiar su resiliencia y tenacidad. Por ejemplo, al modificar el porcentaje de carbono en el acero o al someterlo a algún tratamiento térmico, los diagramas de tensión-deformación resultantes de la **Figura 21** muestran cómo pueden cambiarse los grados de resiliencia y tenacidad.

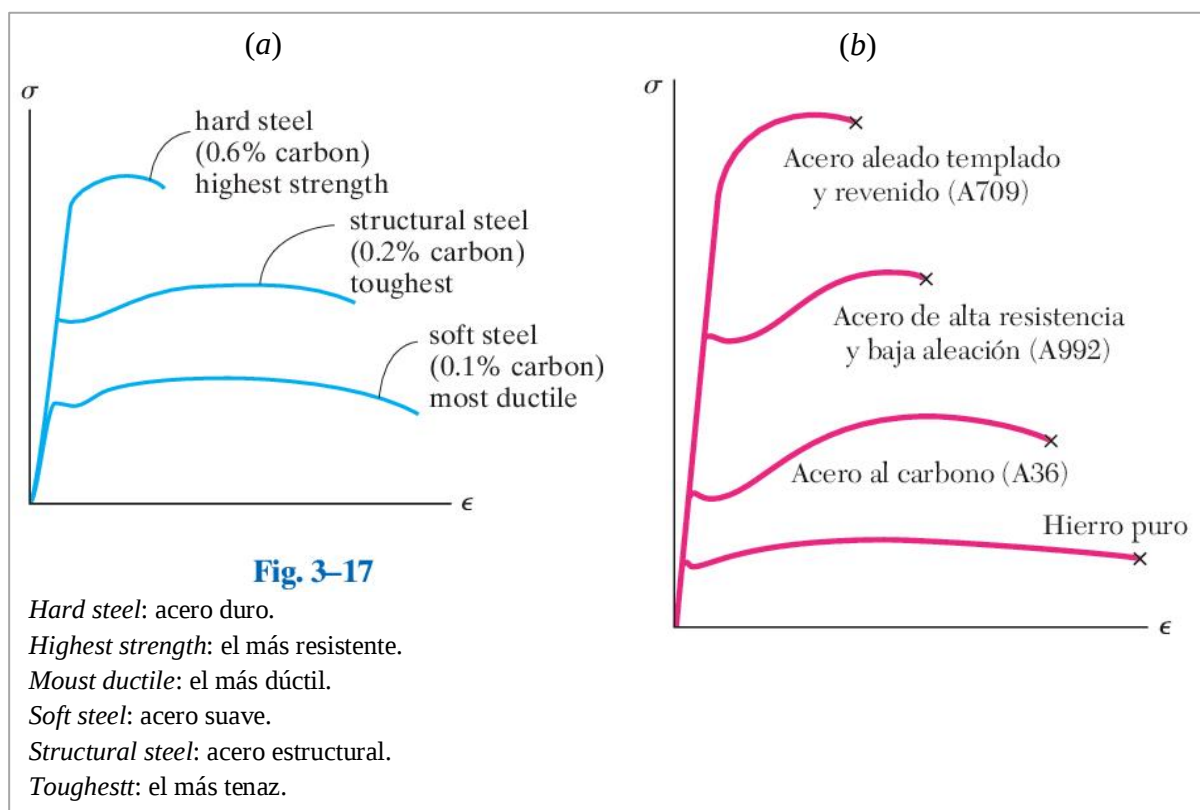


Figura 21. Cambio en los Grados de Resiliencia y Tenacidad del Acero: (a) Según el Contenido de Carbono (Fuente: HIBBELER, 2011); (b) Según Ciertas Aleaciones o Tratamientos Térmicos (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Finalmente, y para cerrar esta sección, se han de listar los puntos analizados más importantes, representando todos ellos los conceptos básicos que el lector debe conocer. Pero previamente, y a fines comparativos, se presenta la **Figura 22** que intenta condensar algunos de los conceptos o propiedades estudiados, reflejados en el diagrama tensión-deformación de distintos materiales. Luego de la inspección cuestionese: ¿Qué material es más tenaz? ¿Cuál es el más resiliente? ¿y el más dúctil? ¿Cuántos de ellos son frágiles? ¿Cuál presenta mayor módulo de elasticidad? ¿Cuál es el más resistente?

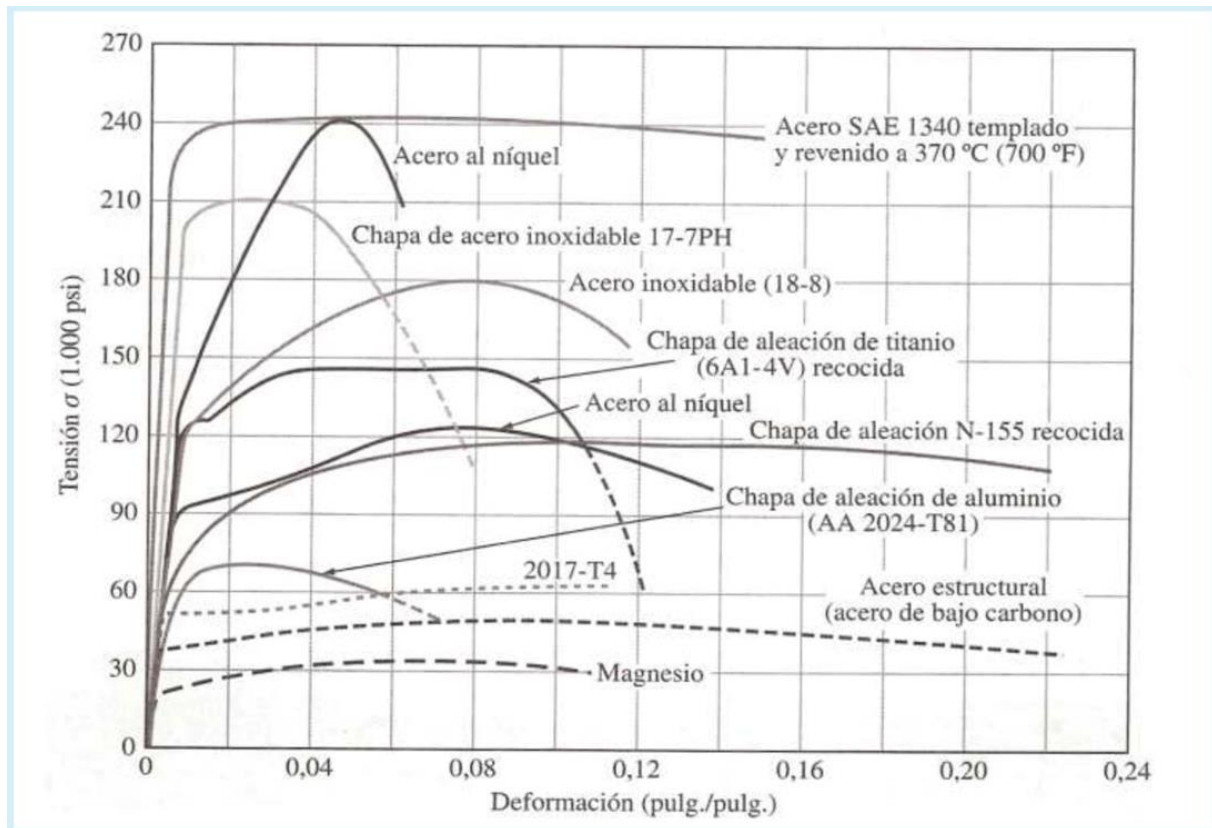


Figura 22. Diagrama Tensión-Deformación de Algunos Metales y Aleaciones (Fuente: UDA, 2024).

Puntos Importantes:

- ✚ Un **diagrama de tensión-deformación convencional** es importante en ingeniería porque proporciona un medio para obtener datos acerca de la resistencia a la tracción de un material independientemente de su tamaño físico o forma.
- ✚ La **tensión y la deformación de ingeniería** se calculan usando el área de la sección transversal y la longitud calibrada originales de la probeta.
- ✚ Un **material dúctil**, como el acero de bajo carbono, tiene **cuatro distintos comportamientos** cuando se somete a una carga. Éstos son el comportamiento **elástico**, la **cedencia**, el **endurecimiento por deformación** y la **estricción**.
- ✚ Un material es **elástico lineal** si la tensión es proporcional a la deformación dentro de la región elástica. Este comportamiento está descrito por la ley de Hooke, $\sigma = E \cdot \epsilon$, donde el módulo de elasticidad E es la pendiente de la línea.
- ✚ Los puntos más importantes en el diagrama de tensión-deformación son el **límite de proporcionalidad**, el **límite elástico**, la **tensión de cedencia o fluencia**, la **tensión última o máxima** y la **tensión de fractura o rotura**.
- ✚ La **ductilidad** de un material puede especificarse mediante el **porcentaje de elongación** o el **porcentaje de reducción de área** de la probeta.
- ✚ Si un material no tiene un punto de cedencia definido, se puede especificar una **resistencia a la cedencia** mediante un procedimiento gráfico como el **método de corrimiento**.
- ✚ Los **materiales frágiles**, como el hierro fundido gris, no tienen una cedencia o es muy pequeña por lo que pueden fracturarse de manera súbita.
- ✚ La **energía de deformación** es la energía almacenada en un material debido a su deformación. Esta energía por unidad de volumen se denomina densidad de la energía de deformación. Si se mide hasta el límite de proporcionalidad, se conoce como el

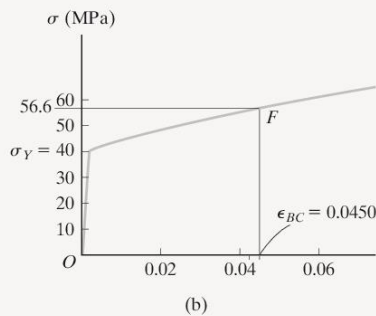
módulo de resiliencia, y si se mide hasta el punto de fractura, se llama **módulo de tenacidad**. Puede determinarse a partir del área bajo el diagrama $\sigma - \epsilon$.

PROBLEMA RESUELTO 3.4

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen diagramas de tensión-deformación, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo (Ver **Figura 24**).

Nota. Para este autor “tensión es tracción”, y “esfuerzo es tensión”.

EJEMPLO 3.3



La barra de aluminio que se muestra en la figura 3-20a tiene una sección transversal circular y está sometida a una carga axial de 10 kN. Según la porción del diagrama de esfuerzo-deformación que se muestra en la figura 3-20b, determine la elongación aproximada de la barra cuando se aplica la carga. Considere que $E_{al} = 70$ GPa.

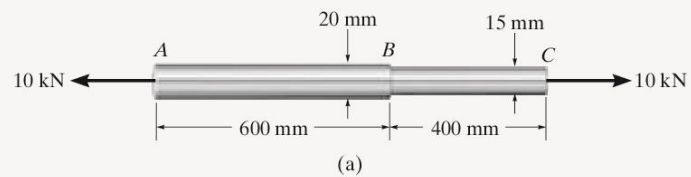


Figura 3-20

SOLUCIÓN

Para el análisis no se tomarán en cuenta las *deformaciones localizadas* en el punto de aplicación de la carga y donde la sección transversal de la barra cambia de manera repentina. (Estos efectos se analizarán en las secciones 4.1 y 4.7.) El esfuerzo normal y la deformación son uniformes a través de la sección media de cada segmento.

Para encontrar la elongación de la barra, primero se debe obtener la deformación. Esto se realiza mediante el cálculo del esfuerzo, para después usar el diagrama de esfuerzo-deformación. El esfuerzo normal dentro de cada segmento es

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.01 \text{ m})^2} = 31.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.0075 \text{ m})^2} = 56.59 \text{ MPa}$$

Con base en el diagrama de esfuerzo-deformación, el material en el segmento *AB* se deforma *elásticamente* puesto que $\sigma_{AB} < \sigma_Y = 40$ MPa. Mediante la ley de Hooke,

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31.83(10^6) \text{ Pa}}{70(10^9) \text{ Pa}} = 0.0004547 \text{ mm/mm}$$

El material dentro del segmento *BC* se deforma *plásticamente*, puesto que $\sigma_{BC} > \sigma_Y = 40$ MPa. A partir de la gráfica, para $\sigma_{BC} = 56.59$ MPa, $\epsilon_{BC} \approx 0.045$ mm/mm. Por lo tanto, la elongación aproximada de la barra es

$$\begin{aligned} \delta &= \Sigma \epsilon L = 0.0004547(600 \text{ mm}) + 0.0450(400 \text{ mm}) \\ &= 18.3 \text{ mm} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Figura 24. Problema Resuelto 3.4 (Fuente: HIBBELER, 2011).

3.3.2. Ensayo de Compresión Axial

En primer lugar, recuerde que uno de los ensayos más importantes para la Resistencia de Materiales es el ensayo de tracción, por esta razón se le ha dedicado un desarrollo más extenso en comparación con los que siguen. En efecto, mediante la experiencia de tracción se han conceptualizado propiedades mecánicas como el módulo de elasticidad, el comportamiento plástico y elástico, y las energías de deformación, entre otras. Así pues, en las secciones siguientes, iniciando en esta, se han de obtener estos conceptos derivados del ensayo tracción, pero, ahora, correspondientes al ensayo bajo estudio.

Hablando concretamente de la compresión axial,⁷⁴ y en palabras de MOTT (2009), hay que decir en primera instancia, que cuando el material tiene una estructura casi uniforme y homogénea en su totalidad, el comportamiento tensión-deformación es casi el mismo a compresión que a tracción. De esta manera, cuando un material se comporta de forma similar pese a la dirección de las cargas, se conoce como material **isotrópico**. Para materiales isotrópicos, entonces, en general no se realizan pruebas de compresión distintas y no se reportan datos distintos para resistencia a la compresión.

Sin embargo, muchos materiales exhiben diferente comportamiento y resistencia a compresión que, a tracción, esto se llama comportamiento **anisotrópico**. Algunos ejemplos son muchos metales, algunos plásticos, concreto, madera y compuestos. En estos casos, es recomendable que se busque datos tanto de resistencia a la compresión como de resistencia a la tracción de dichos materiales.

Por otra parte, tal como lo exponen GERE y GOODNO (2013), los ensayos de compresión de **metales** suelen realizarse en **muestras** (probetas) pequeñas con forma de **cubos** o **cilindros circulares**. Por ejemplo, los cubos pueden tener 2.0 in. por lado y los cilindros diámetros de 1

⁷⁴ Compresión en elementos sometidos a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales, tal como ocurre en tracción.

in., y longitudes de 1 a 12 in., y se puede medir tanto la carga aplicada por la máquina como el acortamiento de la muestra. El acortamiento se debe medir sobre una **longitud calibrada** que sea menor que la longitud total de la muestra, con la finalidad de eliminar los efectos de borde. Hay que decir, en este sentido, que las máquinas de ensayo suelen ser, en general, las mismas que para tracción, cambiando simplemente los aditamentos de sujeción de la pieza.

Como dato particular y dada su relativa importancia, considere que, para garantizar que se haya obtenido la resistencia requerida, dentro de proyectos de construcción importantes el **concreto** se prueba en compresión. Una muestra tipo de concreto para ensayo tiene 6 in. de diámetro, 12 in. de longitud y una edad de 28 días (la edad del concreto es importante, debido a que adquiere más resistencia a medida que seca).⁷⁵ También, al realizar ensayos de compresión en roca, se emplean muestras similares, pero un tanto menores, **Figura 25**.

⁷⁵ El concreto se clasifica como un material frágil y también tiene una capacidad baja de resistencia a la tracción. Las características de su diagrama tensión-deformación dependen en gran medida de la mezcla del concreto (agua, arena, grava y cemento) y el tiempo y temperatura de “curado”.

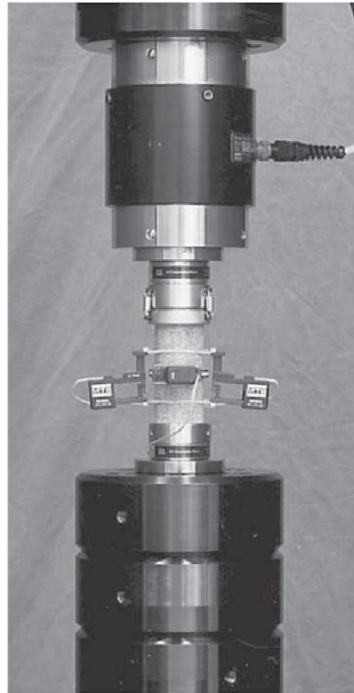


Figura 25. Muestra de Roca Ensayada en Compresión para Obtener la Resistencia a la Compresión, el Módulo de Elasticidad y la Relación de Poisson (Cortesía de MTS Systems Corporation) (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

Por su parte, las **curvas tensión-deformación** para materiales en compresión difieren de las curvas de tracción, así, para **metales dúctiles** como el acero, aluminio y cobre, tienen límites de proporcionalidad en compresión muy cercanos a los de tracción, y las regiones iniciales de sus diagramas en compresión y tracción son casi iguales. Sin embargo, después que inicia la fluencia, el comportamiento es muy distinto. Así pues, en un ensayo de tracción, la muestra se estira, puede ocurrir estricción, y finalmente sucede la fractura. En cambio, cuando el material se comprime, se abulta hacia afuera en los lados, y adopta una forma como de barril, debido a que la fricción entre la muestra y las placas extremas evita la expansión lateral, **Figura 26-b**. Al aumentar la carga, la muestra se aplanan y presenta una resistencia mucho mayor a un acortamiento adicional (lo que significa que la curva tensión-deformación se vuelve muy

empinada). Estas características se ilustran en la **Figura 26-a**, donde se muestra el diagrama tensión-deformación en compresión para el cobre.⁷⁶

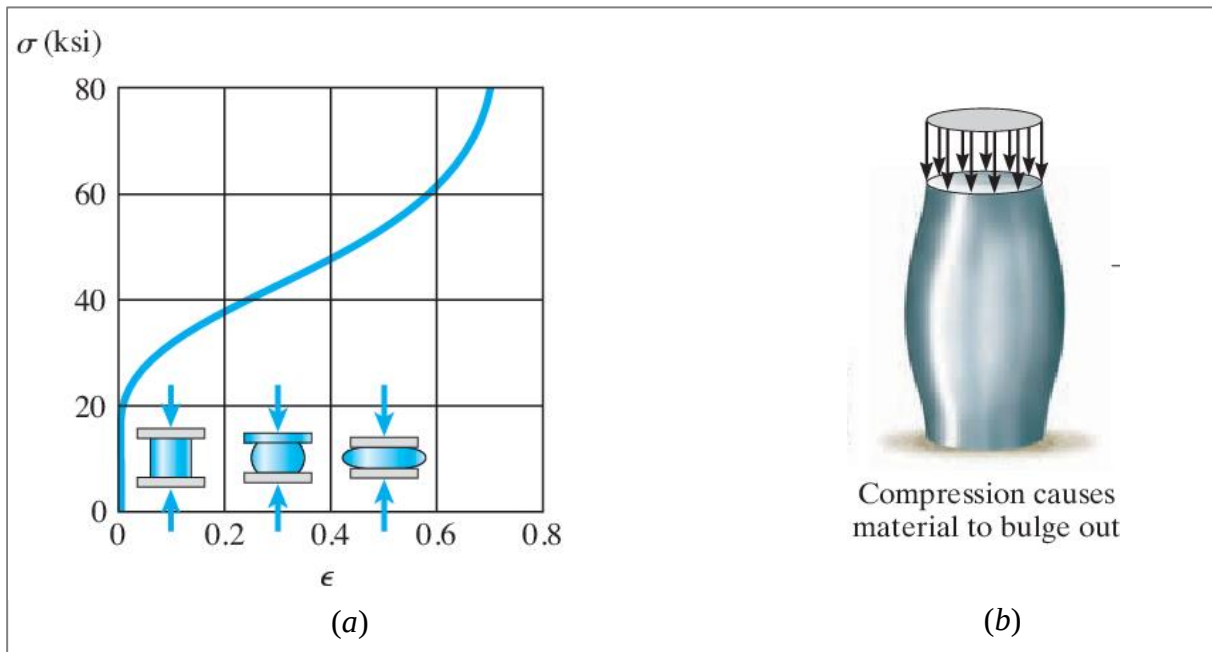


Figura 26. (a) Diagrama Tensión-Deformación Ingenieril en Compresión para el Cobre (Fuente: GERE y GOODNO, 2013). (b) Expansión de un Material Dúctil Sometido a Una Carga de Compresión Axial (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

Por otra parte, los **materiales frágiles** cargados en compresión, por lo general tienen una región lineal inicial, seguida de una región en la que el acortamiento aumenta a una velocidad ligeramente mayor que la carga. Para estos materiales, las curvas tensión-deformación para compresión y tracción a menudo tienen formas similares, pero las tensiones últimas en compresión son mucho mayores que las de tracción, así lo evidencia la porción AC de la curva de la Figura 18 de la sección anterior, que corresponde al **hierro fundido gris**.⁷⁷ Otro caso es el **concreto** que también se clasifica como un material frágil, y también tiene una capacidad baja de resistencia a la tracción. Así pues, para una mezcla típica de concreto, la tensión máxima

⁷⁶ Observe que, como el área de la sección transversal **real** de una muestra ensayada en compresión es mayor que el área inicial, la tensión verdadera en un ensayo de compresión sería menor que la tensión nominal.

⁷⁷ Note el lector que la curva de compresión del cobre de la Figura 26-a está representada en el primer cuadrante, sin embargo, la porción AC de la curva de compresión del hierro fundido gris de la Figura 18 se muestra en el tercer cuadrante. Así pues, hay que decir que en sentido estricto esta representación última es la correcta, ya que se tienen deformaciones y tensiones negativas. Sin embargo, es usual encontrar las curvas en el primer cuadrante.

a la compresión es casi 12.5 veces superior a su resistencia a la tracción (34.5 MPa contra 2.76 MPa).

Un último aspecto comparativo a destacar, es que, a diferencia de los materiales dúctiles que se “abarrilan” (toma forma de barril) cuando se comprimen, los materiales frágiles en realidad se fracturan con la carga máxima, y estas fracturas se suelen dar en diferentes planos en ángulos de 45°. En este sentido, dicha característica mencionada de los materiales dúctiles, hace que en la práctica el ensayo deba detenerse cuando la reducción de la longitud inicial alcanza un 30%,⁷⁸ esto debe ser así para que las propiedades mecánicas obtenidas sean puramente a la compresión. Es decir, una vez que las “fibras”⁷⁹ del material se curvan (se abarrilan) aparecerían también tensiones de flexión.

Finalmente, en virtud de todo lo expuesto, es conveniente mencionar (aunque ello implique una obviedad o una redundancia) que las propiedades obtenidas de este ensayo son la tensión de cedencia o la resistencia a la cedencia, el módulo de resiliencia y el módulo de elasticidad como las más importantes, tal como se ha estudiado para el ensayo de tracción.

⁷⁸ O bien, cuando la longitud final de ensayo es del 70% de la longitud inicial. Este dato numérico es solo una referencia, algunas veces el “abarrilamiento” se produce antes.

⁷⁹ El término “fibras” se emplea con un significado meramente figurado.

3.3.3. Ensayo de Corte Directo

En el desarrollo del concepto de tensión tangencial del Apartado 3.2.1, se ha presentado la situación de una barra rectangular sometida a una carga transversal que tendía a cizallar dicha barra (Ver Figura 10). Esa configuración de carga descrita, es un ejemplo de **cortante o corte directo**, en el cual las tensiones cortantes se originan por la acción directa de las fuerzas al tratar de cortar a través del material. Este cortante directo se origina en el diseño de pernos, pasadores, remaches, cuñas, soldaduras y juntas pegadas (GERE y GOODNO, 2013), y, en este sentido, irán los ejercicios aplicativos que se han de desarrollar en la Sección 4.2.

En este punto, también conviene aclarar (tal como lo expone el autor arriba citado) que se pueden producir **cortes de manera indirecta** cuando los elementos se someten a tracción, torsión y flexión. Sintéticamente se puede decir al respecto, que, para el caso de tracción, esto se da cuando se analiza el desarrollo de tensiones en un plano oblicuo bajo carga axial, tal como lo denominan BEER *et al.* (2009), sin embargo, este tema está exceptuado del contenido de la asignatura. En torsión, por su parte, sí se ha de analizar el corte indirecto en ejes circulares rectos. Cabe mencionar que en este caso se trata de **cortante puro**, tal como se menciona más adelante en esta sección. Por último, también se ha de estudiar el cortante indirecto originado en la flexión de vigas con forma de prismas paralelepípedos. Todas estas situaciones se han de analizar más adelante en las secciones correspondientes del Capítulo 4.

Ensayo de Corte Directo

En el ensayo de cortante directo las pruebas se realizan únicamente para la determinación de la tensión máxima de corte. Se trata de uno de los ensayos más directos, aunque menos exacto,⁸⁰

⁸⁰ Tal como se ha mencionado en la Sección 3.2.1, una investigación más precisa de la distribución de la tensión cortante sobre la sección revela que se producen tensiones cortantes muchos mayores en el material que los predichos por esta ecuación, para este caso: $\tau_{\text{máx.}} = \mathbf{P}_{\text{máx.}}/A$.

y consiste en sujetar una barra rectangular o redonda en una herramienta de corte y aplicarle una carga P que va siempre en aumento hasta obtener la carga máxima.

Si la disposición de la pieza ensayada es la que se muestra en la **Figura 27-a)**, se está en el caso de corte simple (o cortante simple) ya que interviene una única sección resistente.⁸¹ Si, en cambio, el extremo libre de la probeta descansa sobre ambos dados endurecidos, **Figura 27-b)**, se obtiene la carga máxima para cortante doble.⁸²

En cualquier caso, la **tensión cortante máxima** se obtiene al dividir la carga máxima entre el área total sobre la que ha ocurrido el corte. No está demás aclarar, por otra parte, que para la aplicación de la carga P se dispone esta herramienta y su probeta en la máquina de ensayos, la cual va reportando los datos de carga en una computadora.

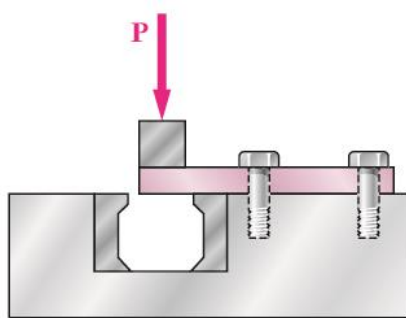


Figura 1.41

(a)

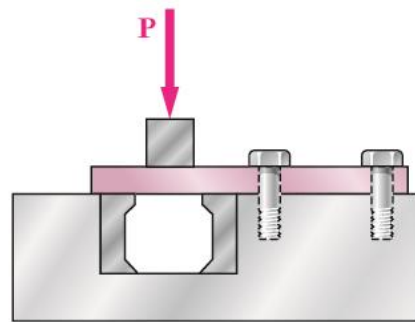


Figura 1.42

(b)

Figura 27. Herramienta para Ensayo de Corte Directo: (a) Configuración para Cortante Simple; (b) Configuración para Cortante Doble (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Otro procedimiento de ensayo, el más común, para determinar la tensión cortante máxima, consiste en el torcimiento de un tubo circular de eje recto, el cual se conoce como **ensayo de torsión** o **ensayo de corte puro**. Con dicho ensayo, que se aborda en la sección siguiente, es posible obtener las propiedades mecánicas, tal como se ha visto en los apartados precedentes.

⁸¹ En otras palabras, una sola sección transversal resiste la fuerza cortante aplicada.

⁸² Dos secciones transversales resisten la fuerza aplicada.

En este último sentido, mediante el ensayo de corte directo descrito, no es posible obtener las propiedades mecánicas en cortante mediante un **diagrama tensión-deformación**. Esto se debe a que mediante dicho procedimiento también se generan en la probeta otras tensiones de flexión y tracción. Por lo tanto, no es posible trazar una curva que describa la relación entre la tensión cortante pura y la deformación cortante pura.

Es conveniente aclarar que, el término tensión cortante pura o cortante puro, indican que el único efecto que se origina es el debido a una fuerza actuante paralela a una sección resistente, es decir, la única tensión que interviene es la tensión cortante. Por este motivo, un diagrama de tensión-deformación en cortante válido, ha de ser aquel que se obtiene mediante el mencionado ensayo de torsión.

3.3.4. Ensayo de Torsión Circular Recta

Tal como se ha señalado, las propiedades mecánicas de un material en cortante se pueden determinar de manera experimental a partir de ensayos de torsión, los cuales se realizan torciendo tubos circulares de eje recto, huecos o macizos (Ver **Figura 28**), lo que produce un estado de cortante puro⁸³ (GERE y GOODNO, 2013). Por este último motivo, este ensayo también es denominado **ensayo de corte puro**, en contraposición al ensayo de corte directo.

Para tal fin, se coloca la probeta del material en la forma de una varilla cilíndrica, de longitud calibrada L y diámetro conocidos en una máquina para ensayos de torsión, como la que se muestra en la **Figura 29**. Mediante un cabezal se mantiene fijo un extremo de la probeta, mientras que otro cabezal giratorio aplica un par de torsión T gradualmente creciente al otro extremo, en estas condiciones la probeta se irá torciendo en un ángulo ϕ (conocido como ángulo de torsión) entre los dos extremos. El cabezal giratorio seguirá aplicado el par hasta que se produzca la rotura de la misma.

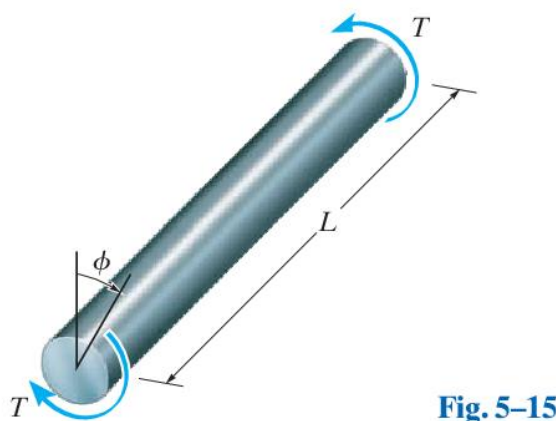


Fig. 5-15

Figura 28. Esquema de una Probeta para Ensayos de Torsión (Fuente: HIBBELER, 2011).

⁸³ El **estado de cortante puro** es un **estado de tensiones** particular, y un estado de tensiones está relacionado con el análisis de las tensiones que actúan en las caras de un elemento diferencial de volumen del material, cuando se lo aísla para su estudio. De esta manera, si todas estas tensiones son cortantes, entonces, se dice que el estado de tensión es de corte puro o cortante puro. Esta idea se amplía más adelante en esta sección cuando se tratan los tipos de falla de un material sometido a torsión.

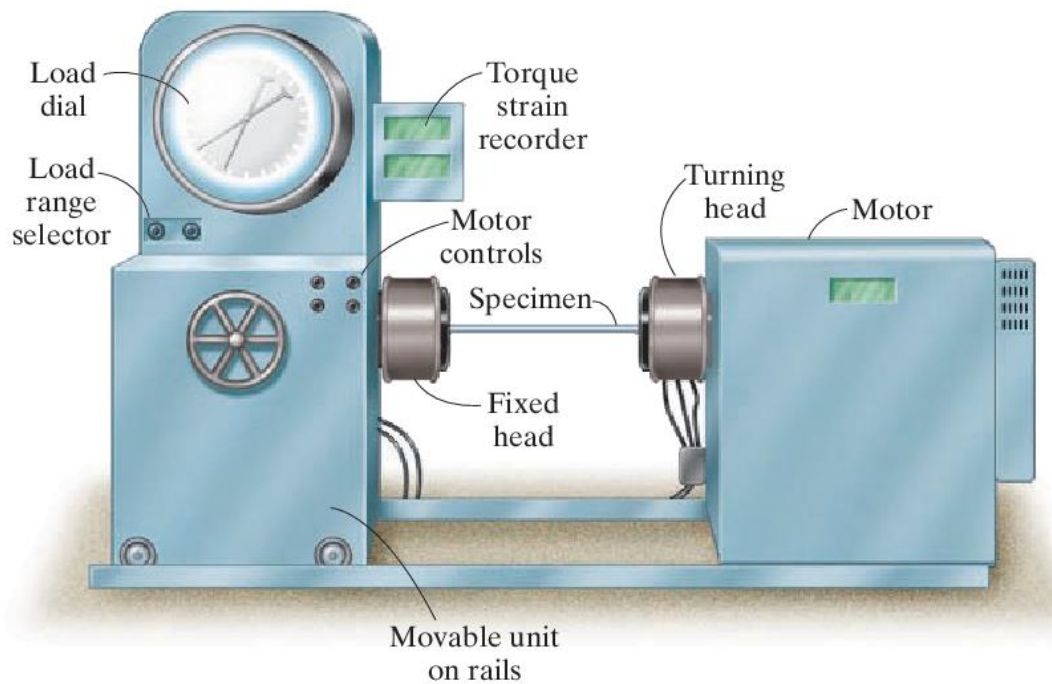


Fig. 5-16

Figura 29. Máquina para Ensayos de Torsión (Fuente: HIBBELER, 2011).

A partir de los resultados de estos ensayos, se pueden trazar **diagramas de tensión-deformación unitaria cortante** (es decir, diagramas de tensión cortante τ en función de la deformación unitaria cortante γ). Estos diagramas son similares en forma a los diagramas de ensayos de tracción (σ en función de ϵ) para los mismos materiales, aunque difieren en las magnitudes. En general, la mayoría de los materiales de ingeniería tendrá un diagrama de tensión-deformación cortante como el mostrado en la **Figura 30**.

Cabe aclarar, que, para este caso, lo que se registra durante el ensayo son los pares T aplicados y los correspondientes ángulos de torsión ϕ , luego, mediante la Ec. (11) se obtienen la tensión cortante τ y la deformación unitaria cortante γ , respectivamente, las cuales definen la curva señalada. Las deducciones de las fórmulas indicadas se desarrollan en la Sección 4.3.

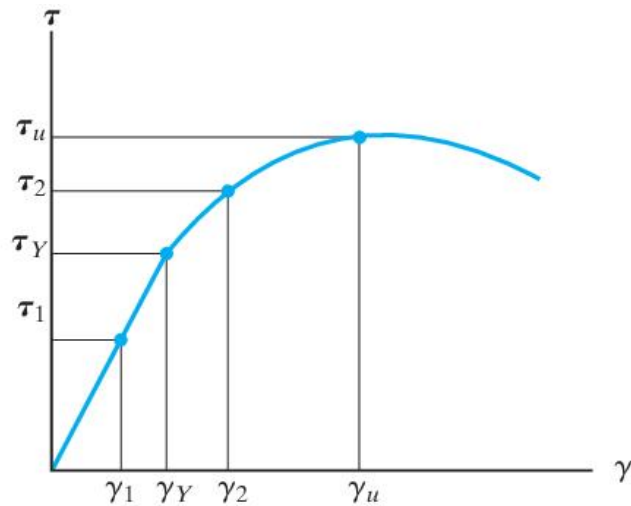


Figura 30. Diagrama Tensión-Deformación Cortante Genérico para Materiales de Ingeniería (Fuente: HIBBELER, 2011)

$$\begin{aligned}
 a) \quad \tau &= \frac{T}{J_o} \cdot R \text{ [Pa]} \\
 b) \quad \gamma &= \frac{\phi \cdot R}{L} \text{ [rad]}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

En la anterior, T es el par torsor aplicado a la probeta, R y J_o , el radio de la probeta y el momento polar de inercia de su sección transversal, respectivamente. ϕ , por su parte, es el ángulo de giro de la sección transversal de la probeta medido en radianes (o ángulo de torsión, ya mencionado con anterioridad) y L su longitud calibrada.

Concretamente, del diagrama de la Figura 30 se pueden obtener el límite de proporcionalidad τ_{pl} , el módulo de elasticidad G , la tensión de fluencia τ_Y , la tensión máxima τ_u y las energías asociadas a la deformación. Estas propiedades en cortante por lo general son casi de la mitad de magnitud que las correspondientes en tracción para el mismo material. Por ejemplo, la tensión de fluencia para el acero estructural en cortante es de 0.5 a 0.6 veces la tensión de fluencia en tracción.

Ley de Hooke en Cortante

Para muchos materiales, la parte inicial del diagrama de tensión-deformación unitaria en cortante es una recta que pasa por el origen, al igual que en tracción. Para esta región linealmente elástica, la tensión cortante y la deformación unitaria en cortante son proporcionales y, por lo tanto, se tiene la ecuación siguiente para la ley de Hooke en cortante, **Ec. (12)**. Donde G es el **módulo de elasticidad en cortante**, módulo de elasticidad transversal o también módulo de rigidez.

$$\tau = G \cdot \gamma \quad [\text{Pa}] \quad (12)$$

La ley de Hooke para cortante⁸⁴ establece, por tanto, que las tensiones cortantes, τ , son proporcionales a las deformaciones unitarias por cortante, γ , con G como la constante de proporcionalidad. El módulo de corte G , por otra parte, tiene las mismas unidades que el módulo longitudinal E , que son psi o ksi en unidades inglesas, y pascales (o sus múltiplos) en unidades SI. Para el acero dulce, los valores comunes de G son 11 ksi o 75 GPa; para aleaciones de aluminio los valores comunes son 4 ksi o 28 GPa.

De la forma de cálculo de G , hay que decir que, con frecuencia, se determina a partir de la ecuación del ángulo de torsión,⁸⁵ esto es: $\phi = T \cdot L / G \cdot J_o$, de donde: $G = T \cdot L / \phi \cdot J_o$. No está demás aclarar que, el par T aplicado y el ángulo ϕ correspondiente, surgen del ensayo por medición en la zona lineal, mientras que L y J_o son constantes. Por lo general, para obtener un valor más confiable de G , se realizan varias de estas pruebas y se emplea el valor promedio.

⁸⁴ Un aspecto de suma importancia a tener presente, es que, si bien la ley de Hooke en cortante (y, por tanto, también G y γ) se ha determinado mediante el ensayo de torsión, esta es igualmente aplicable a situaciones que impliquen cortante directo. Pero, hay que tener presente que, para este último caso, la deformación unitaria cortante se determina de manera distinta a la presentada en esta sección, tal como se desarrolla en la Sección 4.2.3.

⁸⁵ Ecuación que también se deduce en Sección 4.3.

Tipos de Fallas en Torsión

Como se ha de analizar en la Sección 4.3, cuando una barra circular, sea sólida o hueca, se somete a torsión, actúan tensiones cortantes sobre las secciones transversales (tensiones transversales) y los planos longitudinales (tensiones longitudinales) de la barra.⁸⁶ La manera más simple de analizar estas tensiones es aislar un elemento pequeño de material y luego mostrar las tensiones que actúan sobre todas sus caras. Un elemento de este tipo se denomina **elemento de tensión**⁸⁷ (GERE y GOODNO, 2013), y esta forma de analizar las tensiones se conoce como estado de tensiones, tal como se ha mencionado al inicio de esta sección. Así pues, el **estado de cortante puro** es un estado de tensión particular, en el que las tensiones en todas las caras del elemento pequeño de material son cortantes.

De esta manera, para poder entender por qué se dan los tipos de falla en torsión, es necesario la determinación de las tensiones que actúan sobre el elemento de tensión en cortante puro, cuando se lo secciona con sendos planos inclinados. Dicho estudio, que implica un desarrollo analítico del equilibrio estático del elemento de tensión (básicamente: sumatoria de fuerzas), evidencia la existencia de tensiones de tracción y compresión, las cuales, resultan ser iguales a las tensiones cortantes transversal y longitudinal.⁸⁸

Por lo tanto, si todas estas tensiones (de corte transversal, de corte longitudinal, de tracción y de compresión) que actúan sobre el elemento de tensión son iguales: **¿cómo fallará la probeta sometida a torsión?** Pues, ha de fallar por la tensión más débil que oponga el material.

⁸⁶ Un análisis análogo se ha de hacer también en la Sección 4.4, cuando se estudien las tensiones cortantes en una viga.

⁸⁷ O también, elemento de esfuerzo. Cabe aclarar, que el elemento de tensión es un bloque rectangular pequeño (no importa si es un cubo o un paralelepípedo rectangular), sus dimensiones se suponen infinitesimalmente pequeñas, pero para mayor claridad se lo dibuja a una escala grande. Debido a que es más conveniente, con frecuencia se dibuja una vista bidimensional del elemento en lugar de una vista tridimensional (cf. GERE y GOODNO, 2013, p.283). En la Sección 4.2.1 se realiza un análisis más minucioso de un elemento de tensión.

⁸⁸ Todo el desarrollo analítico mencionado se analiza en la mayoría de los libros de Mecánica de Materiales. En particular, puede indagar en la demostración de la Sección 3.5 de GERE y GOODNO (2013) p.283.

En la **Figura 31** se muestran las fallas más comunes según el tipo de material, inmediatamente se realiza una breve descripción.

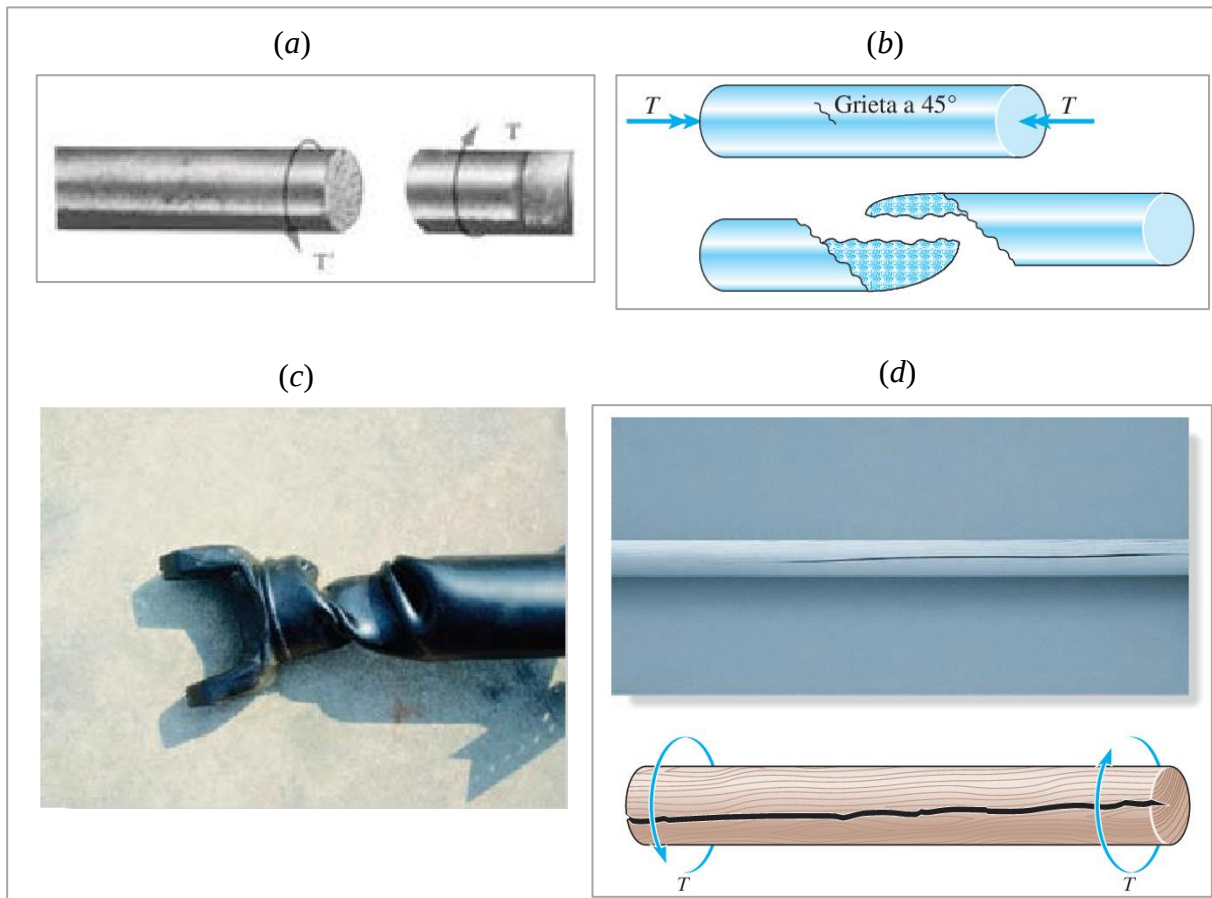


Figura 31. Fallas por Torsión Según el Tipo de Material (Fuente: HIBBELER, 2011, GERE y GOODNO, 2013 y BEER *et al.*, 2009).

Fallas por torsión: (a) En **materiales dúctiles** la falla se produce debido a la tensión cortante transversal (su tensión más débil). (b) Las barras en torsión que están hechas de **materiales frágiles** y débiles en tracción, fallan agrietándose a lo largo de una superficie helicoidal a 45° . Es decir, este tipo de materiales falla debido a la tensión de tracción (su tensión más débil). Este tipo de falla se demuestra con facilidad torciendo una pieza de tiza para pizarrón. (c) Si se tiene un **material dúctil hueco** (un eje tubular) y se lo somete a torsión, la tensión corte transversal hará que el tubo se deforme adoptando una forma de bucle, se dice que la probeta falla por “bucleo”. En este caso, la tensión de compresión es la más débil y la que permite dicha deformación. (d) Finalmente, los **materiales anisotrópicos** como la madera, al

someterlos a torsión fallan por corte longitudinal, su tensión más débil. En este sentido, es interesante destacar que, debido a esta distribución axial de tensión cortante, los ejes hechos de madera tienden a “partirse” a lo largo del plano axial cuando se someten a un par de torsión excesivo. Esto se debe a que la madera es un material anisotrópico (como se ha dicho), y su resistencia al corte paralelo a sus granos o fibras, y dirigida a lo largo de la línea central del eje, es mucho menor que su resistencia perpendicular a las fibras, dirigida a lo largo del plano de la sección transversal.

3.3.5. Ensayo de Flexión Normal

Existen numerosas normas de ensayo de flexión según el tipo de material (plásticos, metales, hormigón, madera, o bien, materiales compuestos), las cuales especifican tanto, el procedimiento del método, como así también la preparación de las muestras y la determinación de los resultados. ¡Nuevamente!, es importante enfatizar que estos estándares abarcan el estudio de una amplia gama materiales y productos, por lo tanto, cada uno de ellos ha de tener, naturalmente, su norma específica.

En este último sentido, el desarrollo de esta sección se centra únicamente en una descripción sintética de los aspectos generales más relevantes de las dos configuraciones más usuales para este ensayo: la **flexión en 3 puntos** y la **flexión en 4 puntos**, sin puntualizar en un material determinado, salvo, como ejemplificación.

De esta manera, en el contexto de interés, vale decir, el de Mecánica de Materiales, el ensayo de flexión se realiza en elementos estructurales denominados vigas, las cuales, representan las probetas del ensayo y suelen ser piezas prismáticas⁸⁹ o cilíndricas. Así pues, el ensayo propiamente dicho tiene lugar en una máquina universal de ensayos,⁹⁰ y puede realizarse en 3 o 4 puntos según se establece en las normativas, tal como se ha mencionado.

En la **Figura 32** se muestran los esquemas para las dos configuraciones citadas, en las cuales se observa la carga externa (*external load*) F , y su punto de aplicación (*loading pin*) en la viga (*sample*), como así también los soportes o apoyos de la misma (*supporting pins*). Cabe destacar que la carga externa es aplicada mediante aditamentos denominados cabezales o punzones, además, note que los puntos de aplicación de la carga y los soportes definen cada uno de los dos tipos de configuración.

⁸⁹ En general, paralelepípedos rectos (: paralelepípedos rectangulares).

⁹⁰ Cabe destacar que, en general, se trata de la misma máquina utilizada para los ensayos de tracción, compresión y corte directo, simplemente cambiando los aditamentos.

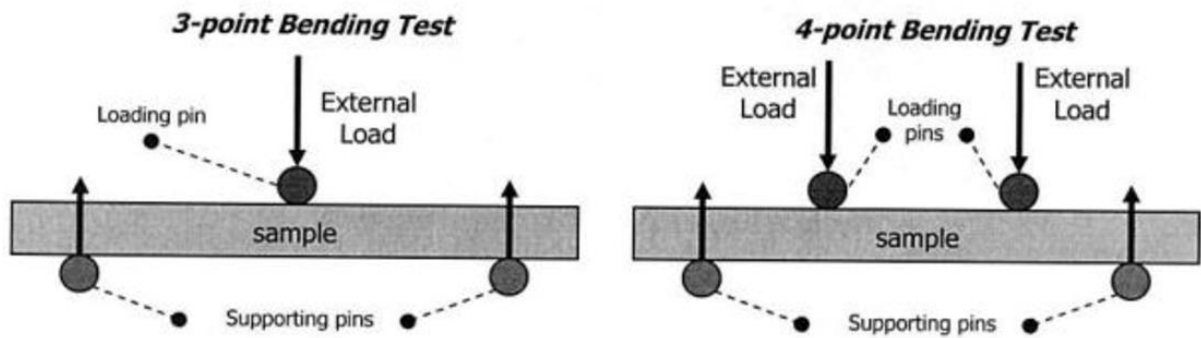


Fig.2. Schematic of flexure tests (3-point and 4-point bending test) [36].

Figura 32. Configuraciones Más Usuales de un Ensayo de Flexión: En 3 Puntos (Izquierda); En 4 Puntos (Derecha) (Fuente: NAGLER, 2019).

En cualquiera de las configuraciones mencionadas (3 o 4 puntos), conforme la carga F es aplicada por el cabezal, se van generando tensiones en la probeta (recuerde que las tensiones son internas), las cuales se han de analizar en la Sección 4.5. Sin embargo, es necesario especificar aquí, que la distribución de tensiones en la zona elástica está regida por la ley de Navier, Ec. (13). En la cual, σ es la tensión normal de tracción o compresión debida a la flexión que se genera en la viga, M_f el momento flector que actúa sobre la misma, J el momento de inercia axial de su sección transversal, c , la distancia desde el eje neutro de la viga a la fibra más alejada; y, W , el módulo resistente de la sección.

$$\sigma = \frac{M_f}{J} \cdot c = \frac{M_f}{\frac{J}{c}} = \frac{M_f}{W} \quad [\text{Pa}] \quad (13)$$

En este punto es necesario aclarar que no es el fin de este apartado exponer las deducciones teóricas de las fórmulas, con lo cual, se sugiere al lector que adelante la lectura de la Sección 4.4 para comprender los fundamentos de la fórmula presentada e interpretar de manera correcta las variables que en ella aparecen. Posteriormente, regrese y complete esta lectura.

Concretamente, y como parte del análisis del procedimiento y los resultados de este **ensayo para probetas prismáticas**, considere la **Figura 33** en la cual se representa la situación de

carga y estructura para 3 y 4 puntos.⁹¹ De esta manera, tal como lo exponen GONZÁLEZ ARIAS y PALAZON (1955), el ensayo se realiza de modo que la probeta se comporte como una viga simplemente apoyada con simple o doble carga concentrada, lo que ofrece una mayor comodidad, efectuándose el cálculo de la resistencia a la flexión con la ley de Navier. Además, esta modelización debe ser así para que la viga trabaje correctamente durante la prueba, es decir, es necesario que uno de los vínculos sea simple para permitir el desplazamiento de esta durante su deformación.

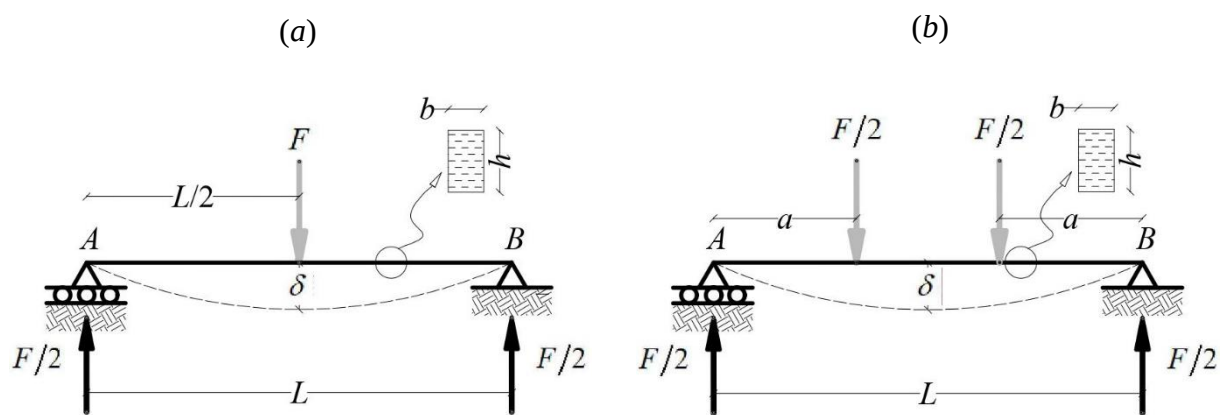


Figura 33. Representación de las Configuraciones del Ensayo de Flexión en un Esquema Posicional: (a) En 3 Puntos; (b) En 4 Puntos (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

Durante el ensayo, en efecto, la máquina registra la fuerza F aplicada por el cabezal o los cabezales, así como el descenso o recorrido de la cara superior o inferior de la viga,⁹² el cual representa la deformación, δ . Dicha deformación se conoce como **flecha** y es una característica de la **deflexión de la viga**.⁹³ Para materiales **dúctiles**, la relación entre estas dos variables produce un diagrama como el de la **Figura 34-a)**, para los **frágiles**, en cambio, la curva tiene las características de la **Figura 34-b)**. Al igual que en los ensayos analizados con anterioridad,

⁹¹ Esta situación de carga y estructura es lo que en estática se ha denominado como esquema posicional, la cual representa las posiciones relativas de las fuerzas actuantes y la estructura.

⁹² Para tal fin, se dispone de algún tipo de sensor colocado conveniente en la viga, para el registro de los valores de deformación.

⁹³ Usualmente, el término flecha y deflexión se utilizan como sinónimos.

se distingue en el diagrama una región lineal seguida de la aparición del régimen o comportamiento plástico.

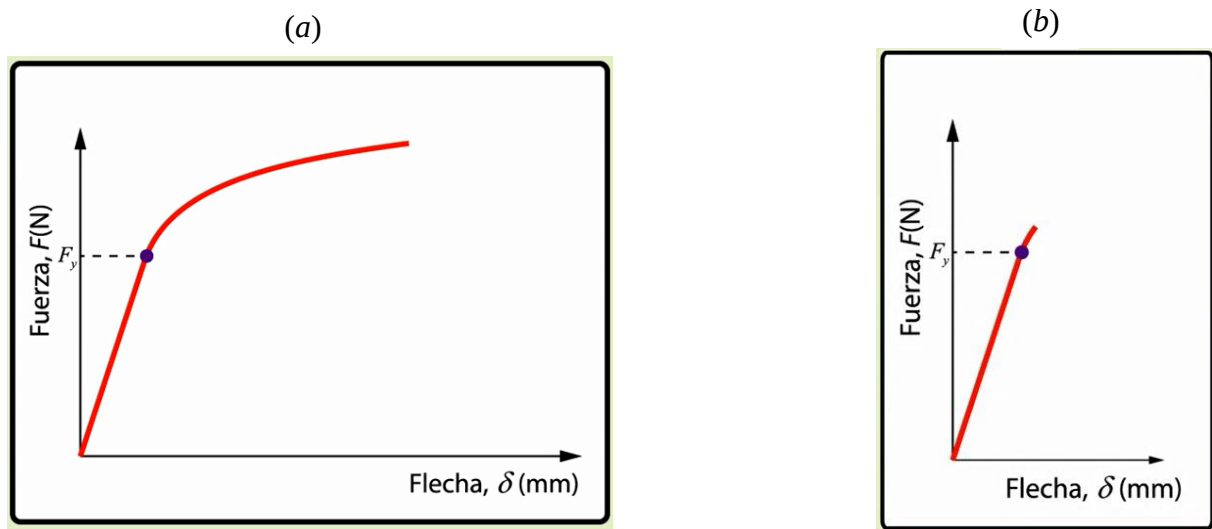


Figura 34. Diagramas Genéricos de Fuerza Aplicada en Función de la Deformación (Flecha), para Materiales Dúctiles y Frágiles (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

En las figuras precedentes se indica la carga F_y correspondiente al punto de fluencia, del conocimiento del comportamiento elástico y plástico de los materiales se sabe que este valor de fuerza representa la máxima carga en régimen elástico, por lo que se lo utiliza para calcular el límite elástico a flexión del material, a través de la ley de Navier. De esta manera, y a modo de ejemplo, para el caso del ensayo en 3 puntos (refiérase a la Figura 33-a), el momento flector máximo está dado por $M_{f\text{máx}} = F \cdot L/4 = M_y$, por lo tanto, el cálculo de la tensión elástica σ_E , se obtiene con : $\sigma_E = M_y/W = F_y \cdot L/4 \cdot W$ (M_y es el momento flector que genera F_y).

Por otra parte, y tal como lo exponen ASKELAND y WRIGHT (2016), es posible obtener el **módulo de elasticidad a flexión**, o módulo de flexión (E) para el **ensayo en 3 puntos** (Ver Figura 33-a) a partir de la Ec. (14 – a), en la cual J es el momento de inercia axial de la sección transversal de la viga y δ la deformación. Es importante volver a destacar (tal como se hizo en

torsión) que el par de valores ($F; \delta$) a utilizarse en dicha ecuación debe tomarse dentro de la región elástica lineal.⁹⁴

Cabe destacar que la (14 – a) se deriva de la **ecuación de la flecha máxima** o deflexión máxima de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada aplicada en la mitad de su longitud (GERE y GOODNO, 2013).⁹⁵ Sin embargo, como en este curso no se aborda el tema de “deflexión de vigas”, no se presentan las deducciones pertinentes de esta ecuación.

$$a) \quad E = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot \delta \cdot J} \quad [\text{Pa}]$$

A partir de la cual, y para el caso particular de una viga se sección rectangular de base b y altura h , se obtiene: (14)

$$b) \quad E = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot \delta \cdot b \cdot h^3} \quad [\text{Pa}]$$

Para el **ensayo en 4 puntos**, el cálculo del **módulo de elasticidad** requiere de fórmulas que difieren del caso anterior, por tal motivo, se sugiere recurrir a la norma correspondiente si se quiere profundizar en las deducciones de las expresiones analíticas. Además, para ambas configuraciones, el **cálculo de la tensión** en cada punto del ensayo, vale decir, la tensión para cada valor de fuerza registrado, se obtiene a través de la ley de Navier presentada en la (13).

A partir de los resultados de la prueba de flexión se pueden trazar diagramas similares a las **curvas tensión-deformación** antes estudiadas, sin embargo, para este caso, la tensión se suele graficar en función de la deflexión en lugar de hacerlo en función de alguna deformación unitaria. Esto se presenta a modo ilustrativo en la **Figura 35**.

⁹⁴ Como nota distintiva, para el caso particular del ensayo en vigas de madera, CORONEL (1995) utiliza como par de valores, la carga y la flecha correspondientes al límite de proporcionalidad.

⁹⁵ Refiérase, nuevamente, a la Figura 33-a).

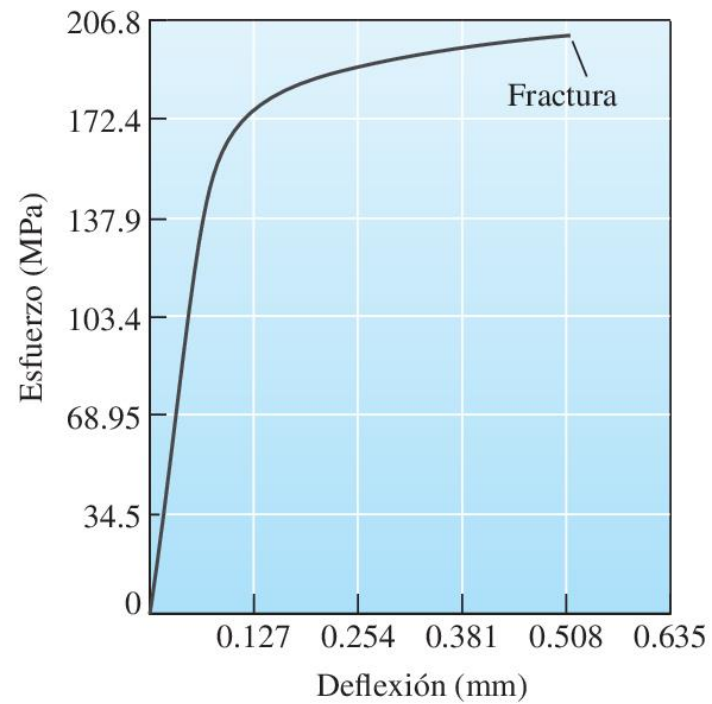


Figura 35. Diagrama de Tensión Normal (Debida a la Flexión) en Función de la Deflexión, correspondiente al Óxido de Magnesio (MgO) cerámico (Fuente: ASKELAND y WRIGHT, 2016).

Puntos Importantes:

- ✚ La principal **ventaja** de una prueba de **flexión en 3 puntos** es la facilidad de preparación y ensayo de la muestra. Sin embargo, este método también tiene algunas **desventajas**; ya que los resultados son sensibles a la muestra, la geometría de la carga y la velocidad de deformación. Por ejemplo, para un material frágil la probeta se “romperá” normalmente en la zona de tracción, debido, generalmente, a la presencia de grietas.⁹⁶ Además, en esta comparación de métodos, CORONEL (1995) explica para el caso de la madera: los ensayos tipo estructural, o sea sobre las vigas de grandes dimensiones, son ejecutadas en todos los casos con dos cargas (en 4 puntos), ya que si se aplicara una única carga se tendría una sola sección de apoyo, y además porque la determinación de la resistencia a la flexión presenta dudas. Además, agrega: se utilizan dos cargas por la razón de que la madera entre los dos puntos de aplicación estará expuesta a igual momento flector (como se explica en el ítem siguiente), por lo tanto, en esta zona se encuentra la rotura en la posición más débil.
- ✚ En comparación con la prueba de flexión en 3 puntos, en el **ensayo de 4 puntos no hay fuerzas cortantes** en el tramo entre los dos cabezales de carga, **Figura 36-b**). Esta situación se acerca más a lo deseable ya que lo que se está ensayando es el comportamiento de la viga a flexión, por lo cual, se debe evitar la influencia de la fuerza cortante (o tensión cortante). En este sentido, además, note que en la región central C–D de la viga, el momento flexionante es constante, a esto se denomina **flexión pura**. En otras palabras, la flexión pura tiene lugar únicamente en tramos de

⁹⁶ En cambio, si las grietas se encuentran en la zona de compresión no revisten peligro, ya que estas se cierran durante el ensayo. Es por este motivo que los materiales frágiles resisten mejor las compresiones que las tracciones.

viga donde la fuerza cortante es cero (ya que $Q = dM_f/dx$; vea la ecuación 54 del Apunte Didáctico de Estática Gráfica)⁹⁷ (GERE y GOODNO, 2013).

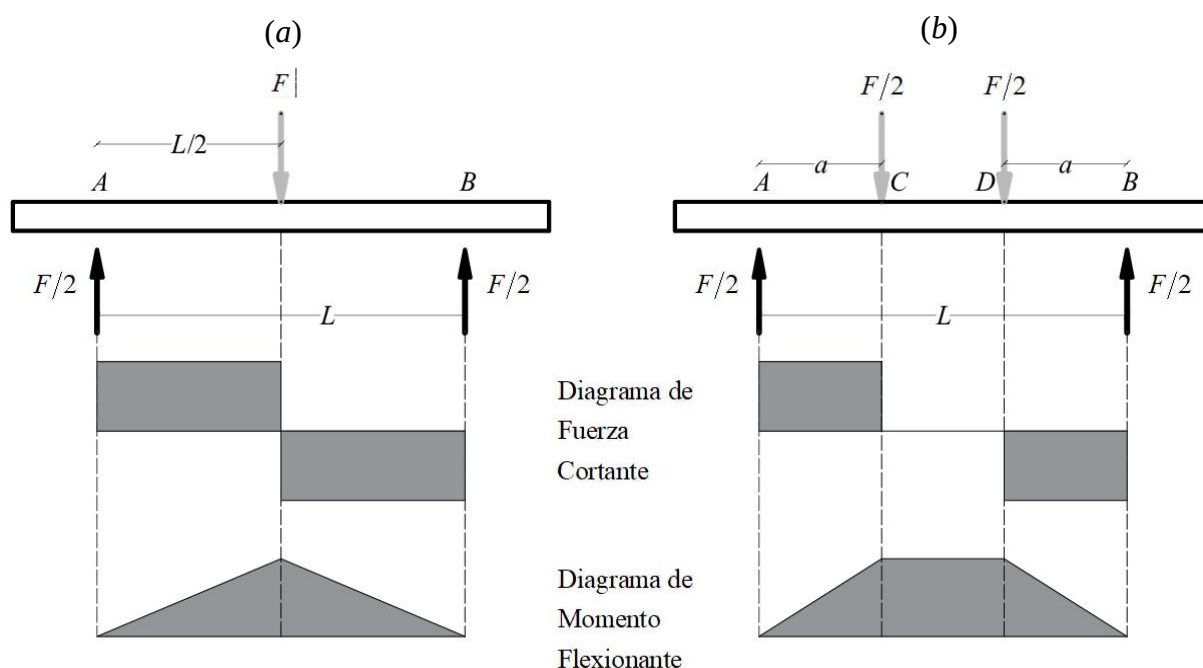


Figura 36. Distribución de la Fuerza Cortante y Momento Flexionante en la Longitud L de una Viga Sometida a un Ensayo de Flexión: (a) En 3 Puntos; y, (b) En 4 Puntos (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2024).

Tal como lo describen ASKELAND y WRIGHT (2016), el ensayo de flexión es utilizado frecuentemente para la **determinación del módulo de elasticidad longitudinal en materiales frágiles**. En efecto, en muchos materiales quebradizos la prueba de tracción convencional⁹⁸ no puede llevarse a cabo con facilidad, debido a la presencia de fisuras en la superficie. Con frecuencia, sólo colocar un material quebradizo en las mordazas de la máquina para la prueba de tracción provoca que se agriete, de igual manera, cualquier leve desalineación de aplicación de la carga provocaría la rotura anticipada de la probeta. Por tanto, estos materiales quebradizos

⁹⁷ En este apunte se ha optado por modificar el símbolo de la magnitud “momento flector” (de M a M_f), respecto del apunte de Estática Gráfica.

⁹⁸ La analizada en la Sección 3.3.1.

pueden probarse utilizando la prueba de flexión en 3 puntos. Cuando se aplica la carga en tres puntos y se provoca una flexión, una fuerza de tracción actúa sobre el material opuesta al punto medio.



Al superarse el límite elástico durante un ensayo de flexión para un **material dúctil**, la distribución de tensiones **pierde la relación lineal** dada por la ley de Navier, las fibras extremas comienzan a plastificar mientras que las centrales aún están en régimen elástico, por este motivo la ecuación de la ley de Navier ya no es aplicable.⁹⁹ Así pues, no tiene utilidad realizar un **diagrama tensión-deformación** más allá del límite elástico, considerando que dicha tensión en cada punto del ensayo se debería calcular con la citada ley, lo cual, arrojaría resultados disímiles con lo que está sucediendo realmente en el material.

⁹⁹ La ley de Navier solo es aplicable en la zona elástica.

3.3.6. Ensayo de Pandeo

Tal como lo exponen ZALDIVAR y CUENCA (2017), un cálculo que se realiza a los elementos de máquinas y estructuras solicitadas a compresión axial es la comprobación a pandeo. Las partes de las estructuras que tienen gran **esbeltez**, pueden sufrir la **pérdida de su estabilidad**. Por lo tanto, conocer la carga que provoca este fenómeno, o sea, la carga crítica; es muy importante para los ingenieros estructurales.

De esta manera, es relevante destacar, en primer lugar, que uno de los fines de este ensayo es la **determinación** experimental del valor de la **carga crítica**, luego, el interés radica en contrastar esta carga crítica experimental con la teórica obtenida mediante la fórmula de Euler¹⁰⁰ (Ec. 15)¹⁰¹ si el pandeo es en régimen elástico, o alguna ecuación empírica como la de Johnson¹⁰² en caso de pandeo inelástico.¹⁰³ En nuestro curso, en particular, el estudio está contextualizado a columnas largas o esbeltas que se corresponde con la teoría de Euler, tal como se ha de estudiar en la Sección 4.5. Nuevamente, se sugiere adelantar la lectura de dicha sección y retomar esta con posterioridad.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(K \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{L_e^2} \quad [N] \quad (15)$$

También, mediante estos ensayos de laboratorio es posible obtener el **factor de longitud efectiva**, K , que aparece en la (15). En la práctica, en efecto, tanto este factor como la carga crítica, se determinan en general mediante una máquina universal de ensayos. En este último

¹⁰⁰ Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático y físico suizo.

¹⁰¹ Hay que destacar que, a diferencia de los ensayos anteriores, no es el fin de esta prueba la determinación del módulo de elasticidad E . En cambio, el valor de esta propiedad se corresponde a la ya obtenida con anterioridad mediante otras pruebas (por ejemplo, tracción o flexión).

¹⁰² Para el caso de pandeo inelástico, existen también otras formulaciones aportadas por diversos investigadores.

¹⁰³ Un punto importante de la experimentación radica en la validación de los resultados obtenidos mediante métodos analíticos.

sentido, se sabe que las **condiciones de apoyo** de una columna influyen de gran manera en el valor de la carga crítica, y para evaluar esta influencia es necesario contar en el laboratorio con aditamentos necesarios que simulen las diferentes maneras en que se apoya la barra comprimida. Un posible diseño de estos aditamentos propuesto por ZALDIVAR y CUENCA (2017) se muestra en la **Figura 37**, mientras que en la **Figura 38** se presentan cuatro maneras fundamentales en que pueden estar apoyadas las probetas.¹⁰⁴ En esta última imagen también se destaca la longitud L a considerar.

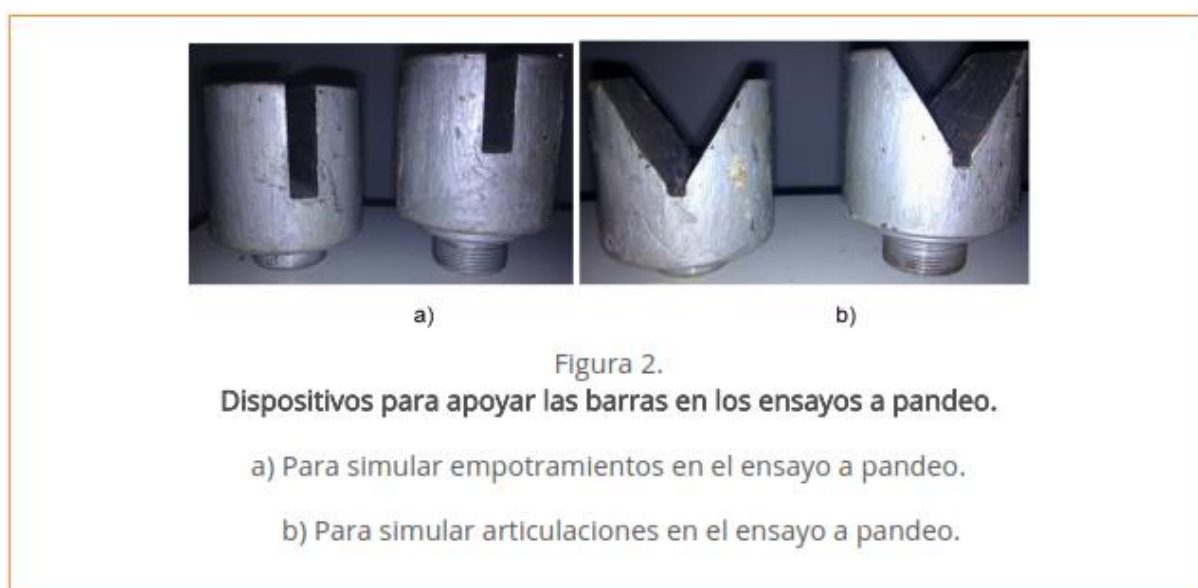


Figura 37. Aditamentos para Ensayos de Laboratorio que permiten Simular las Condiciones de Apoyo de una Columna Real (Fuente: ZALDIVAR y CUENCA, 2017).

¹⁰⁴ Estos cuatro casos de análisis son los que habitualmente aparecen en los textos, y en algunas ocasiones son denominados como los cuatro casos de pandeo de Euler o los cuatro casos fundamentales, tal como se han de estudiar en la Sección 4.5.

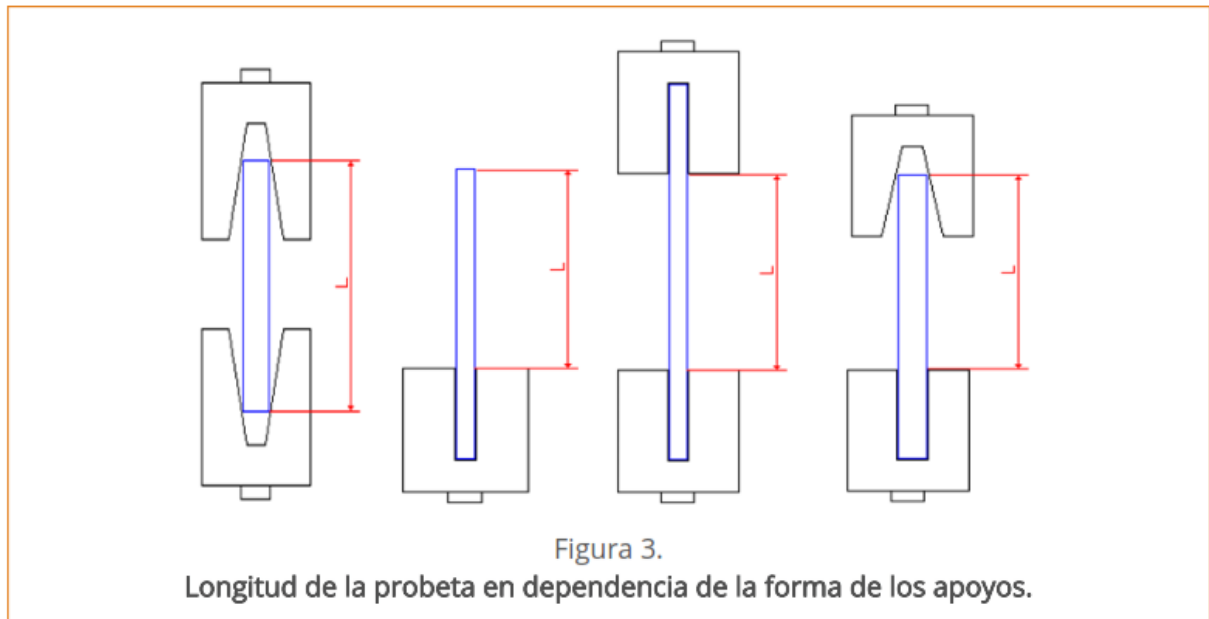


Figura 38. Cuatro Posibles Condiciones de Apoyo de las Probetas Ensayadas; de Izquierda a Derecha: Bi-Articulada; Empotrada en un Apoyo y Libre en el Otro Extremo; Empotrada en Ambos Extremos; y, Empotrada en un Extremo y Articulada en el Otro (Fuente: ZALDIVAR y CUENCA, 2017).

Finalmente, cabe destacar que lo expuesto hasta aquí referente al pandeo, solo busca aproximar al lector a algunos aspectos de interés atinentes al procedimiento experimental, en coherencia con los alcances de este documento. En este sentido, una lectura completa del artículo de los autores precedentemente citados; ha de propiciar una visión más amplia del estudio del pandeo en elementos de construcción.

4. ESTADOS DE SOLICITACIÓN

Según lo analizado en la Sección 3.3, las fuerzas exteriores (cargas) que inciden en un elemento estructural (o cuerpo, en un sentido más amplio)¹⁰⁵ provocan, en general, un estado de tensión-deformación que es preciso clasificar y encuadrar en casos sencillos. Ello ha de posibilitar, tanto, el análisis de las deformaciones como la distribución de tensiones.

De esta manera, según la forma de actuar de las cargas se producen diferentes casos de solicitación. Vale aclarar desde un principio que el término **solicitar** al que hace alusión el título, no tiene el significado que en el lenguaje común se le atribuye como sinónimo de pedir, en cambio, en Resistencia de Materiales este término denota **acción**; es decir, de aquí en adelante entiéndase a la **solicitación** como: la acción que ejerce la carga sobre la pieza (ROKO, 1995).

Todo lo antes expresado conduce a la clasificación de los llamados **estados de solicitación**, en los siguientes: **tracción y compresión axial simples**, **corte** (específicamente, **corte directo**), **torsión simple** (específicamente, **torsión circular recta**), **flexión normal** (flexión simple y flexión pura) y **pandeo**.¹⁰⁶ Esta clasificación responde a una catalogación habitual en los libros de Mecánica de Materiales; con excepción, quizás, del corte, el cual suele ser estudiado en combinación con otras solicitaciones, en especial con flexión o torsión. Aquí también se sigue esta línea, sin embargo, se abre una sección especial para tratar el tema de corte directo.

Por otra parte, es importante destacar que, el calificativo **simple** utilizado en el párrafo precedente, hace referencia a estados básicos de tensión elástica (o sencillos, como se ha

¹⁰⁵ En este sentido, y en cuanto a la forma del elemento, hay que aclarar que nuestro estudio se circunscribe a piezas prismáticas o cilíndricas.

¹⁰⁶ Observe que los mismos son los homólogos de los ensayos descritos en la Sección 3.3.

mencionado en el primer párrafo),¹⁰⁷ que han de ser perfectamente definidos en las Secciones 4.1 a 4.5.

Por otra parte, recuerde que en la Sección 3.2 se ha dicho que deben definirse expresiones analíticas específicas para el cálculo de la tensión y la deformación en casos particulares de aplicación de carga, así pues, este apartado también está dedicado a ello. De esta manera, la deducción de todas las fórmulas que se han de estudiar en este capítulo,¹⁰⁸ se apoyan en los fundamentos generales de Resistencia de Materiales enunciados en el Capítulo 2 y también en hipótesis particulares a cada sollicitación, las cuales pueden demostrarse matemáticamente, y alguna de ellas comprobarse experimentalmente.

Por último, es importante remarcar que, atendiendo a un sentido más bien práctico y en coherencia con los contenidos del dictado de la catedra, este último capítulo se ha de desarrollar de la manera más sintética, estructurada y objetiva posible, intentando seguir un orden estricto en la presentación de los aspectos que hacen al análisis y diseño de los elementos estructurales.

En efecto, se ha de iniciar listando las hipótesis particulares (y en algunas ocasiones también las generales, aunque se caiga en redundancia), exponiendo, seguidamente, los desarrollos teóricos y deducciones de las expresiones analíticas, acompañadas de problemas resueltos de aplicación.

4.1. Tracción Axial y Compresión Axial, Simples

En lo que sigue, se ha de limitar el estudio a la tracción y compresión axial simples, es decir, cuando el elemento es sometido únicamente a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales.

¹⁰⁷ En contraposición, la combinación de estados de sollicitación simples, por ejemplo, flexión y torsión (: flexo-torsión) conduce a un estado de tensión no simple, llamada sollicitación compuesta. También hay que decir que algunos autores también hablan de **resistencias simples** (en lugar de sollicitaciones simples), enfocando el estudio del tema desde las tensiones que se generan en el material resistente.

¹⁰⁸ Fórmulas que han de aplicarse, principalmente, en el análisis y diseño de elementos estructurales.

4.1.1. Introducción e Hipótesis

Para establecer la validez de las relaciones (fórmulas) de tracción y compresión se deben establecer las hipótesis¹⁰⁹ siguientes:

1. El miembro cargado debe ser de eje recto.
2. La sección transversal del miembro cargado debe ser uniforme (constante) a todo lo largo del tramo considerado.
3. El material del cual está hecho el miembro debe ser homogéneo e isotrópico (hipótesis mecánicas del material).¹¹⁰
4. Una sección normal se mantiene plana y paralela a sí misma luego de la deformación experimentada por la pieza (verificación del principio de Bernoulli o de Navier).¹¹¹
5. La tensión no debe sobrepasar el límite de proporcionalidad del material (verificación de la ley de Hooke).
6. La carga debe aplicarse a lo largo del eje centroidal del miembro de modo que no haya tendencia a flexionarlo.¹¹²
7. Los miembros sujetos a compresión deben ser cortos para que no haya tendencia al pandeo (consulte en la Sección 4.5 el análisis especial requerido para miembros largos y esbeltos sometidos a tensión de compresión, y por el método para decidir cuándo un miembro debe ser considerado largo o corto).

¹⁰⁹ En otras palabras, se deben satisfacer condiciones.

¹¹⁰ Tenga en cuenta que los materiales anisotrópicos como la madera tienen propiedades distintas en diferentes direcciones, y aunque este sea el caso, si la anisotropía de la madera está orientada a lo largo del eje de la barra, está también se deformará de manera uniforme cuando se someta a la carga axial P.

¹¹¹ Lo que ha sido verificado experimentalmente en elementos solicitados por tracción o compresión simple, para secciones alejadas de los extremos, de acuerdo con el principio de Saint Venant.

¹¹² La dirección de la carga es paralela y coincidente con el eje de la pieza, lo cual conduce a una distribución uniforme de tensiones en su sección transversal, lo que no ocurriría si la aplicación fuera excéntrica. Esto último también se puede explicar diciendo que la carga debe aplicarse en el centro geométrico de la sección transversal, o bien, en el baricentro, dado que en este caso coinciden ya que el material es homogéneo.

Es importante volver a destacar (tal cómo se hizo en la Sección 3.2.1), que la validez de la aplicación de las fórmulas de tracción o compresión axial implica que la **tensión** sea **uniforme** a través de toda el área de su sección transversal, y para ello es requisito principal que la **deformación** en la barra sea también **uniforme**. Todo esto es posible si se cumplen las condiciones arriba consignadas. En muchas aplicaciones prácticas las variaciones menores que pudieran ocurrir en los niveles de tensión local son tomadas en cuenta mediante una cuidadosa selección de la tensión admisible.

4.1.2. Principio de Saint-Venant

Considere la manera en que una barra rectangular se deformará elásticamente cuando la misma se someta a una fuerza **P** aplicada a lo largo de su eje geométrico, **Figura 39-a**. Aquí, la barra está fija en uno de sus extremos y la fuerza se aplica a través de un orificio en su otro extremo. Debido a la carga, la barra se deforma como lo indican las líneas dibujadas sobre ella y que una vez fueron horizontales o verticales. Observe cómo la deformación localizada que ocurre en cada extremo tiende a disminuir y las líneas se vuelven uniformes en toda la sección media de la barra.

Si el material se conserva elástico, entonces las deformaciones unitarias causadas por esta deformación están directamente relacionadas con la tensión en la barra. Como resultado, la tensión se distribuirá de manera más uniforme en toda el área de la sección transversal cuando ésta sea tomada cada vez más lejos del punto donde se aplica alguna carga externa. Por ejemplo, considere un perfil de la variación de la distribución de tensiones que actúa sobre las secciones *a-a*, *b-b* y *c-c*, cada uno de ellos se muestra en la **Figura 39-b**.

Por comparación, la tensión tiende a alcanzar un valor uniforme en la sección *c-c*, que está lo suficientemente lejos del extremo para que la deformación localizada causada por **P** se desvanezca. La distancia mínima desde el extremo de la barra hasta el punto donde ocurre esto, puede determinarse mediante un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad.

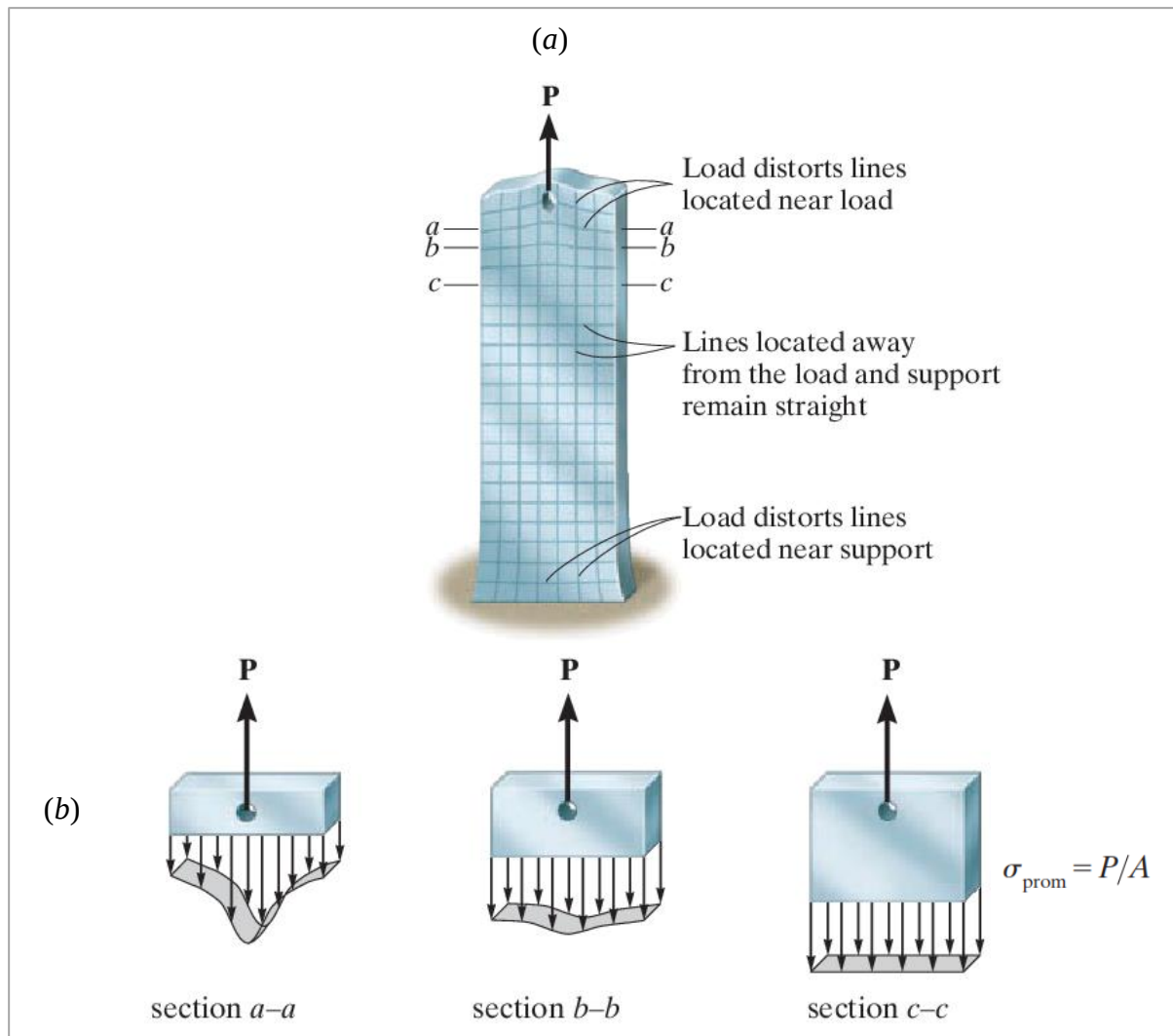


Figura 39. Ilustración del Principio de Saint-Venant (Fuente: HIBBELER, 2011).

El hecho de que la tensión y la deformación se comporten de esta manera se conoce como **principio de Saint-Venant**, ya que fue observado por primera vez por el científico francés Barré de Saint-Venant (1797-1886) en 1855. En esencia, establece que *la tensión y la deformación que se producen en los puntos de un cuerpo lo suficientemente alejados de la región donde se aplica la carga serán iguales a la tensión y la deformación producidos por cualesquiera cargas aplicadas que tengan la misma resultante estáticamente equivalente, y que se apliquen al cuerpo dentro de la misma región.*

4.1.3. Deformación de un Elemento Cargado Axialmente

En esta sección se usará la ley de Hooke y las definiciones de tensión y deformación a fin de desarrollar una ecuación que pueda utilizarse para determinar el desplazamiento elástico de un elemento sometido a cargas axiales. Para generalizar el desarrollo, considere la barra mostrada en la **Figura 40-a**, la cual tiene un área transversal que varía gradualmente en toda su longitud L . La barra está sometida a cargas concentradas en sus extremos y a una carga variable externa distribuida en toda su longitud. Esta distribución de carga podría, por ejemplo, representar el peso de la barra si ésta no se conserva en posición horizontal, o las fuerzas de fricción que actúan sobre la superficie de la barra.

Aquí se desea encontrar el desplazamiento relativo δ (*delta*) provocado por esta carga en un extremo de la barra con respecto al otro extremo. No se tomarán en cuenta las deformaciones localizadas que se producen en los puntos de carga concentrada y donde la sección transversal cambia de manera súbita. Con base en el principio de Saint-Venant, estos efectos se producen en pequeñas regiones de la longitud de la barra y por lo tanto tendrán sólo un ligero efecto sobre el resultado final. En su mayor parte, la barra se deforma de manera uniforme, por lo que la tensión normal se distribuye de la misma forma sobre la sección transversal.

Mediante el método de las secciones, un elemento diferencial (o rodaja) con longitud dx y sección transversal de área $A(x)$ se aísla de la barra en la posición arbitraria x . El diagrama de cuerpo libre de este elemento se muestra en la **Figura 40-b**. La fuerza axial interna resultante será una función de x puesto que la carga externa distribuida hará que varíe a lo largo de la barra. Esta carga, $P(x)$, deformará al elemento según lo indica la línea discontinua y, por consiguiente, el desplazamiento de un extremo del elemento con respecto al otro extremo es $d\delta$.

Recordando que la tensión y la deformación en el elemento son, respectivamente, $\sigma = P(x)/A(x)$, $\epsilon = d\delta/dx$, y siempre que la tensión no exceda el límite proporcional, es posible aplicar la ley de Hooke, la cual también se indica en la Figura 40.

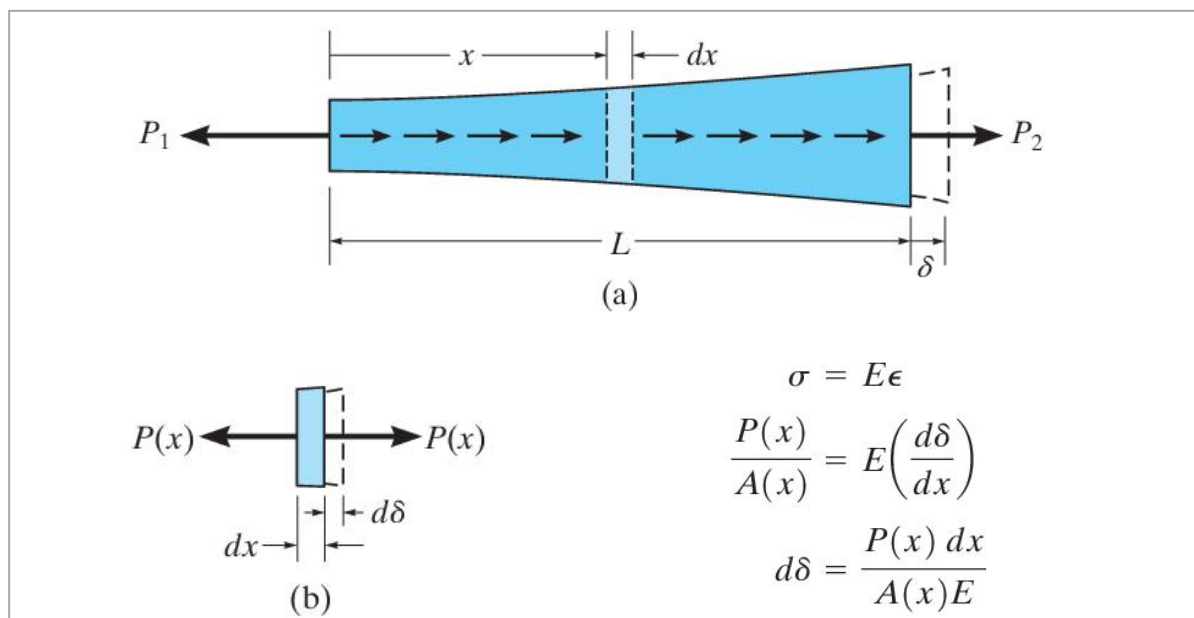


Figura 40. Deducción de la Ecuación de la Deformación Elástica de un Elemento Cargado Axialmente (Fuente: HIBBELER, 2011).

Esta expresión de la ley de Hooke debe integrarse para toda la longitud L de la barra a fin de encontrar δ . Por tanto, del análisis anterior se obtiene la Ec. (16).

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{A(x) \cdot E} \text{ [m]} \quad (16)$$

Donde δ = desplazamiento de un punto de la barra en relación con el otro punto; L = longitud original de la barra; $P(x)$ = fuerza axial interna en la sección, que se ubica a una distancia x de un extremo; $A(x)$ = área de la sección transversal de la barra, expresada como una función de x ; y, E = módulo de elasticidad para el material.

Carga y Área de la Sección Transversal Constantes

En muchos casos, la barra tendrá una sección transversal constante con área A ; y el material será homogéneo, por lo que E será constante. Además, si se aplica una fuerza externa constante

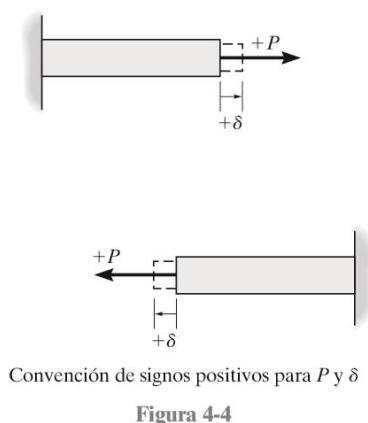
en cada extremo de la barra, entonces la fuerza interna P^{113} a lo largo de la barra también será constante. En consecuencia, la (16) se puede integrar para obtener la **Ec. (17)**.

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} [\text{m}] \quad (17)$$

Si la barra está sometida a varias fuerzas axiales diferentes en toda su longitud, o si el área de la sección o el módulo de elasticidad cambian en forma abrupta de una región de la barra a otra, la ecuación anterior puede aplicarse a cada segmento de la barra donde estas cantidades permanecen constantes. En tal caso, el desplazamiento de un extremo de la barra con respecto al otro se encuentra a partir de la **suma algebraica** de los desplazamientos relativos de los extremos de cada segmento, para este caso general se aplica la **Ec. (18)**. En la **Figura 41** se presenta un ejemplo conceptual de aplicación.

$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{A \cdot E} [\text{m}] \quad (18)$$

¹¹³ Tal cómo se ha analizado en el Capítulo 3, recuerde que luego del seccionamiento de exploración realizado al elemento, debe verificarse una igualdad entre la magnitud de la fuerza externa y la magnitud de la fuerza interna en el tramo aislado para el estudio. Por este motivo, en aquellos casos simples en los que se tiene una barra de una única sección sometida a dos fuerzas externas en sus extremos, en la (17) se suele utilizar directamente el valor de esta carga externa. Sin embargo, en el caso de una barra compuesta de varios tramos de diferentes secciones, o el de una barra de una única sección, pero con más de dos cargas aplicadas, debe necesariamente realizarse el seccionamiento.



Convención de signos. Con el fin de aplicar la ecuación(18), debe desarrollarse una convención de signos para la fuerza axial interna y el desplazamiento de un extremo de la barra con respecto al otro. Para ello, se considerará que tanto la fuerza como el desplazamiento son *positivos* si causan *tensión* y *elongación*, respectivamente, figura 4-4; mientras que una fuerza y desplazamiento *negativos* causarían *compresión* y *contracción*, respectivamente.

Por ejemplo, considere la barra de la figura 4-5a. Las *fuerzas internas axiales* “*P*” se determinan mediante el método de las secciones para cada segmento, figura 4-5b. Son $P_{AB} = +5 \text{ kN}$, $P_{BC} = -3 \text{ kN}$, $P_{CD} = -7 \text{ kN}$. Esta variación de la carga axial se muestra en el *diagrama de fuerza axial* o *normal* para la barra, figura 4-5c. Como ahora se conoce la forma en que varía la fuerza *interna* a lo largo de la barra, el desplazamiento del extremo A con respecto al extremo D se determina a partir de

$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(5 \text{ kN})L_{AB}}{AE} + \frac{(-3 \text{ kN})L_{BC}}{AE} + \frac{(-7 \text{ kN})L_{CD}}{AE}$$

Si se sustituyen los otros datos y se calcula una respuesta positiva, significa que el extremo A se alejará del extremo D (la barra se alarga), mientras que un resultado negativo indicaría que el extremo A se desplaza hacia el extremo D (la barra se acorta). La notación con doble subíndice se utiliza para hacer referencia a este desplazamiento relativo ($\delta_{A/D}$); sin embargo, si el desplazamiento debe determinarse en relación a un *punto fijo*, entonces se utilizará sólo un subíndice. Por ejemplo, si D se encuentra en un soporte *fijo*, entonces el desplazamiento se denominaría simplemente δ_A .

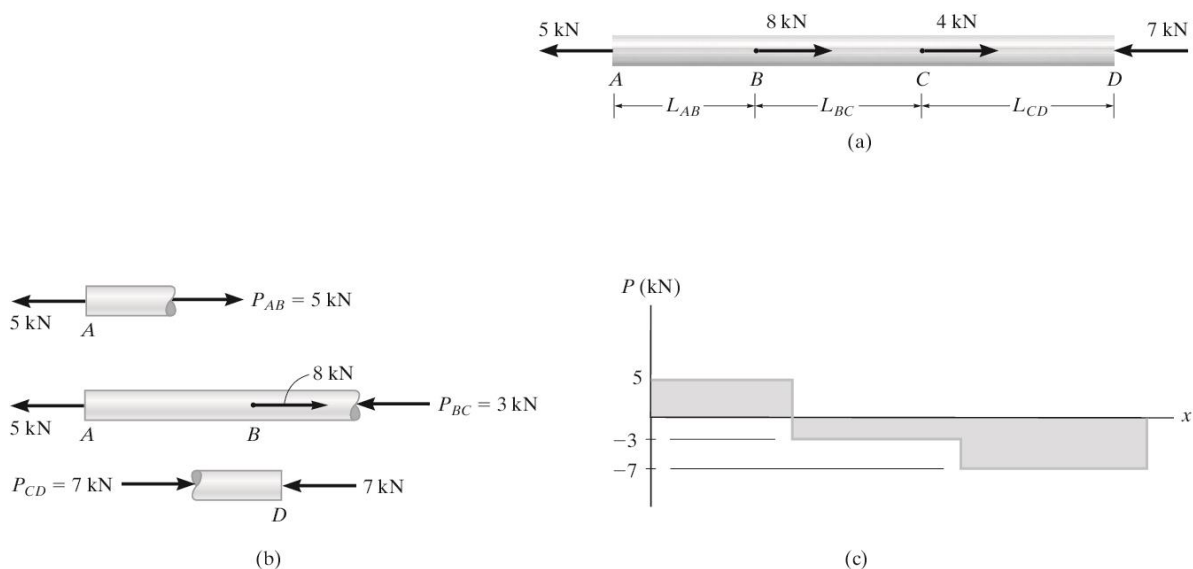


Figura 4-5

Figura 41. Ejemplo Conceptual del Cálculo de la Deformación Elástica de un Elemento Sometido a Varias Fuerzas Externas (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

PROBLEMA RESUELTO 4.1

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo (Ver **Figura 42**). **Nota.** Para este autor tensión = tracción, y esfuerzo = tensión.

EJEMPLO 4.1

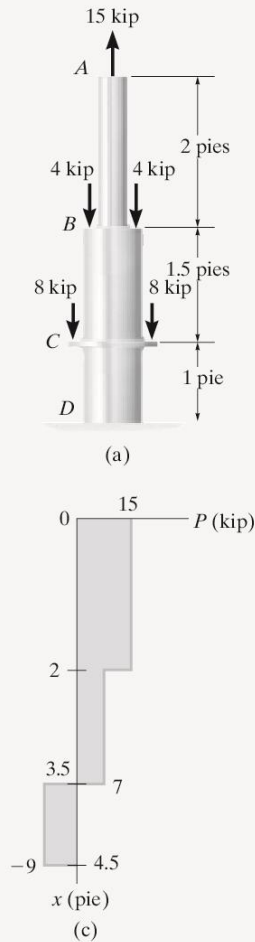
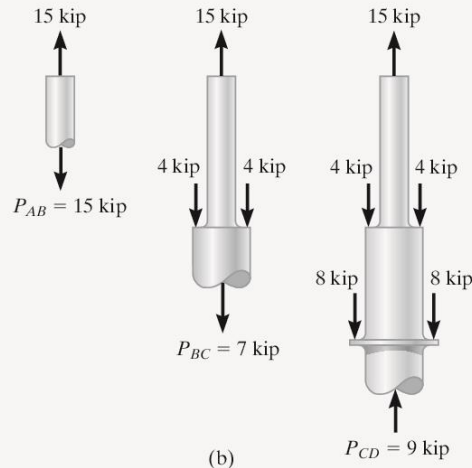


Figura 4-6

La barra de acero A-36 que se muestra en la figura 4-6a consta de dos segmentos con áreas de sección transversal $A_{AB} = 1 \text{ pulg}^2$ y $A_{BD} = 2 \text{ pulg}^2$. Determine el desplazamiento vertical del extremo A y el desplazamiento de B respecto a C.



SOLUCIÓN

Fuerzas internas. Debido a la aplicación de cargas externas, las fuerzas axiales internas en las regiones AB, BC y CD serán diferentes entre sí. Estas fuerzas se obtienen al aplicar el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales como se muestra en la figura 4-6b. Esta variación se grafica en la figura 4-6c.

Desplazamiento. Como indica la página final de este libro (al reverso de la contraportada), $E_{ac} = 29(10^3) \text{ ksi}$. Si se usa la convención de signos, es decir, las fuerzas internas de tensión son positivas y las fuerzas de compresión son negativas, el desplazamiento vertical de A respecto al soporte fijo D es

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sum \frac{PL}{AE} = \frac{[+15 \text{ kip}](2 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(1 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} + \frac{[+7 \text{ kip}](1.5 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} \\ &\quad + \frac{[-9 \text{ kip}](1 \text{ pie})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} \\ &= +0.0127 \text{ pulg} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como el resultado es *positivo*, la barra *se alarga* y por consiguiente el desplazamiento de A es hacia arriba.

Al aplicar la ecuación 4-2 entre los puntos B y C, se obtiene,

$$\delta_{B/C} = \frac{P_{BC}L_{BC}}{A_{BC}E} = \frac{[+7 \text{ kip}](1.5 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} = +0.00217 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$

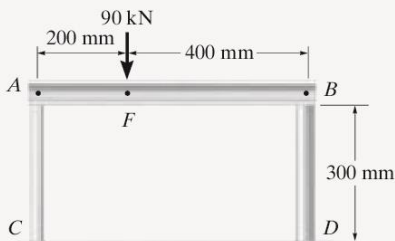
Aquí B se aleja de C, puesto que el segmento se alarga.

Figura 42. Problema Resuelto 4.1 (Fuente: HIBBELER, 2011).

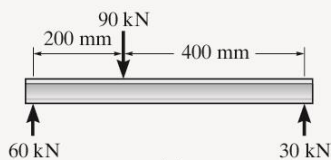
PROBLEMA RESUELTO 4.2

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo (Ver **Figura 43**). **Nota.** Para este autor tensión = tracción, y esfuerzo = tensión.

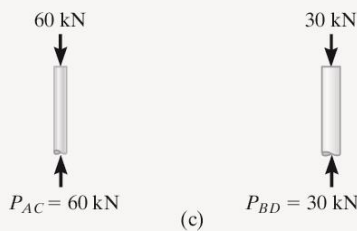
EJEMPLO 4.3



(a)



(b)



(c)

La viga rígida AB descansa sobre dos postes cortos como se muestra en la figura. 4-8a. AC es de acero y tiene un diámetro de 20 mm, y BD es de aluminio y tiene un diámetro de 40 mm. Determine el desplazamiento del punto F en AB si se aplica una carga vertical de 90 kN sobre ese punto. Considere $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$, $E_{al} = 70 \text{ GPa}$.

SOLUCIÓN

Fuerzas internas. Las fuerzas de compresión que actúan en la parte superior de cada poste se determinan a partir del equilibrio del elemento AB , figura. 4-8b. Estas fuerzas son iguales a las fuerzas internas en cada poste, figura 4-8c.

Desplazamiento. El desplazamiento de la parte superior de cada poste es

Poste AC :

$$\delta_A = \frac{P_{AC} L_{AC}}{A_{AC} E_{ac}} = \frac{[-60(10^3) \text{ N}](0.300 \text{ m})}{\pi(0.010 \text{ m})^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2]} = -286(10^{-6}) \text{ m}$$

$$= 0.286 \text{ mm} \downarrow$$

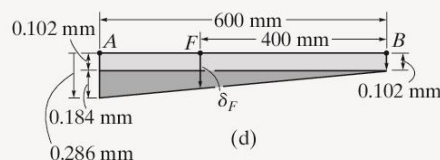
Poste BD :

$$\delta_B = \frac{P_{BD} L_{BD}}{A_{BD} E_{al}} = \frac{[-30(10^3) \text{ N}](0.300 \text{ m})}{\pi(0.020 \text{ m})^2 [70(10^9) \text{ N/m}^2]} = -102(10^{-6}) \text{ m}$$

$$= 0.102 \text{ mm} \downarrow$$

En la figura 4-8d se muestra un diagrama que indica los desplazamientos de la línea central de la viga en A , B y F . Entonces, por proporción del triángulo gris oscuro, el desplazamiento del punto F es

$$\delta_F = 0.102 \text{ mm} + (0.184 \text{ mm}) \left(\frac{400 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \right) = 0.225 \text{ mm} \downarrow \text{ Resp.}$$



(d)

Figura 4-8

Figura 43. Problema Resuelto 4.2 (Fuente: HIBBELER, 2011).

PROBLEMA RESUELTO 4.3

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase las consignas en las **Figura 44** y **45** y las soluciones en las **Figuras 46 a 49**.

Notas. ^(a) Este problema incluye varios ítems. ^(b) Para este autor tensión = tracción, y esfuerzo = tensión.

2.2 Una varilla de poliestireno de 12 in. de longitud y 0.5 in. de diámetro se somete a una carga de tensión de 800 lb. Si se sabe que $E = 0.45 \times 10^6$ psi, determine *a*) la elongación de la varilla, *b*) el esfuerzo normal en la varilla.

2.3 Un alambre de acero de 60 m de largo se sujeta a una carga de tensión de 6 kN. Si se sabe que $E = 200$ GPa y que la longitud del alambre aumenta 48 mm, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para el alambre, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

2.4 Un alambre de acero de 28 ft de longitud y 0.25 in. de diámetro será empleado en un gancho. Se observa que el alambre se estira 0.45 in. cuando se le aplica una fuerza **P** de tensión. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) el esfuerzo normal correspondiente en el alambre.

2.5 Un tubo de hierro fundido se usa para soportar una carga de compresión. Si se sabe que $E = 69$ GPa y que el cambio permisible máximo en longitud es de 0.025%, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el tubo, *b*) el grosor de pared mínimo para una carga de 7.2 kN si el diámetro exterior del tubo es de 50 mm.

2.6 Una varilla de control de latón amarillo no debe estirarse más de 3 mm cuando la tensión en el alambre es de 4 kN. Si se sabe que $E = 105$ GPa y que el máximo esfuerzo normal permisible es de 180 MPa, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para la varilla, *b*) la longitud máxima correspondiente para la varilla.

2.9 Un bloque de 250 mm de longitud y de 50×40 mm de sección transversal debe soportar una carga centrada a compresión **P**. El material que se empleará es un bronce para el que $E = 95$ GPa. Determine la carga máxima que puede aplicarse, si se sabe que el esfuerzo normal no debe exceder 80 MPa y que el decremento en longitud del bloque debe ser, cuanto mucho, de 0.12% de su longitud original.

Figura 44. Consignas Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER et al., 2009).

2.10 Una varilla de aluminio de 1.5 m de largo no debe estirarse más de 1 mm y el esfuerzo normal no debe exceder los 40 MPa cuando la varilla está sujeta a una carga axial de 3 kN. Si se sabe que $E = 70$ GPa, determine el diámetro requerido para la varilla.

2.21 Para la armadura de acero ($E = 200$ GPa) y la carga mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos AB y AD , si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de $2\,400\text{ mm}^2$ y $1\,800\text{ mm}^2$.

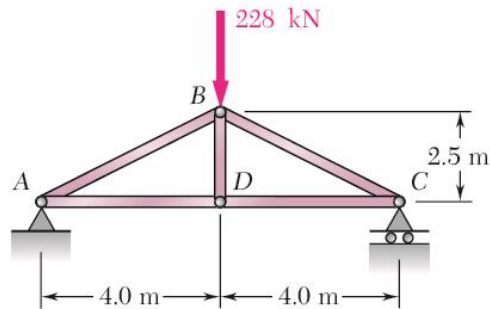


Figura P2.21

Figura 45. Consignas Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

SOLUCIÓN

Problem 2.2

2.2 A polystyrene rod of length 300 mm and diameter 12 mm is subjected to a 3-kN tensile load. Knowing that $E = 3.1$ GPa, determine (a) the elongation of the rod, (b) the normal stress in the rod.

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (0.012)^2 = 113.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$(a) \quad \delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(3000)(0.3)}{(113.1 \times 10^{-6})(3.1 \times 10^9)} = 0.002567 \text{ m} \quad \delta = 2.6 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{3000}{113.1 \times 10^{-6}} = 26.525 \text{ Pa} \quad \sigma = 26.5 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Problem 2.3

2.3 A 60-m-long steel wire is subjected to 6 kN tensile force. Knowing that $E = 200$ GPa and that the length of the rod increases by 48 mm, determine (a) the smallest diameter that may be selected for the wire, (b) the corresponding normal stress.

$$P = 6 \times 10^3 \text{ N}, \quad \delta = 48 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad E = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$A = \frac{PL}{E\delta} = \frac{(6 \times 10^3)(60)}{(200 \times 10^9)(48 \times 10^{-3})} = 37.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$(a) \quad A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(37.5 \times 10^{-6})}{\pi}} = 6.91 \times 10^{-3} \text{ m} \quad d = 6.91 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{6 \times 10^3}{37.5 \times 10^{-6}} = 160 \times 10^6 \text{ Pa} \quad \sigma = 160.0 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Problem 2.4

2.4 A 9-m length of 6 mm-diameter steel wire is to be used in a hanger. It is noted that the wire stretches 11 mm when a tensile force P is applied. Knowing that $E = 200$ GPa, determine (a) the magnitude of the force P , (b) the corresponding normal stress in the wire.

$$L = 9 \text{ m}$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (0.006)^2 = 28.27 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$(a) \quad \delta = \frac{PL}{AE} \quad P = \frac{AES}{L} = \frac{(28.27 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)(0.011)}{9} = 6.91 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

$$(b) \quad \sigma = E\epsilon = \frac{ES}{L} = \frac{(200 \times 10^9)(0.011)}{9} = 244.4 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

Figura 46. Soluciones del Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER et al., 2009).

Problem 2.5

2.5 A cast-iron tube is used to support a compressive load. Knowing that $E = 69$ GPa and that the maximum allowable change in length is 0.025 %, determine (a) the maximum normal stress in the tube, (b) the minimum wall thickness for a load of 7.2 kN if the outside diameter of the tube is 50 mm.

$$E = 69 \text{ GPa} = 69 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.00025 L}{L} = 0.00025$$

$$(a) \sigma = E\epsilon = (69 \times 10^9)(0.00025) = 17.25 \times 10^6 \text{ Pa} \quad \sigma = 17.25 \text{ MPa}$$

$$(b) \sigma = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{7.2 \times 10^3}{17.25 \times 10^6} = 417.39 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 417.39 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2) \quad d_i^2 = d_o^2 - \frac{4A}{\pi} = 50^2 - \frac{(4)(417.39)}{\pi} = 1968.56 \text{ mm}^2$$

$$d_i = 44.368 \text{ mm} \quad t = \frac{1}{2}(d_o - d_i) = \frac{1}{2}(50 - 44.368)$$

$$t = 2.82 \text{ mm}$$

Problem 2.6

2.6 A control rod made of yellow brass must not stretch more than 3 mm when the tension in the wire is 4 kN. Knowing that $E = 105$ GPa and that the maximum allowable normal stress is 180 MPa, determine (a) the smallest diameter that can be selected for the rod, (b) the corresponding maximum length of the rod.

$$(a) \sigma = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{4 \times 10^3}{180 \times 10^6} = 22.222 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(22.222 \times 10^{-6})}{\pi}} = 5.32 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 5.32 \text{ mm}$$

$$(b) \delta = \frac{PL}{AE} \quad L = \frac{AES}{P} = \frac{(22.222 \times 10^{-6})(105 \times 10^9)(3 \times 10^{-3})}{4 \times 10^3}$$

$$L = 1.750 \text{ m}$$

Figura 47. Soluciones del Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER et al., 2009).

Problem 2.9

2.9 A block of 250-mm length and 50×40 mm cross section is to support a centric compressive load P . The material to be used is a bronze for which $E = 95$ GPa. Determine the largest load which can be applied, knowing that the normal stress must not exceed 80 MPa and that the decrease in length of the block should be at most 0.12% of its original length.

$$A = (50)(40) = 2000 \text{ mm}^2 \\ = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_0 = 80 \text{ MPa} = 80 \times 10^6 \text{ Pa} \quad E = 95 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Considering allowable stress:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad P = A\sigma = (2 \times 10^{-3})(80 \times 10^6) = 160 \times 10^3 \text{ N}$$

Considering allowable deformation:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad P = AE\left(\frac{\delta}{L}\right) = (2 \times 10^{-3})(95 \times 10^9)(0.0012) = 228 \times 10^3 \text{ N}$$

The smaller value governs. $P = 160 \times 10^3 \text{ N}$ $P = 160.0 \text{ kN}$ 

Problem 2.10

2.10 A 1.5-m-long aluminum rod must not stretch more than 1 mm and the normal stress must not exceed 40 MPa when the rod is subjected to a 3-kN axial load. Knowing that $E = 70$ GPa, determine the required diameter of the rod.

$$L = 1.5 \text{ m}$$

$$\delta = 1 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad \sigma = 40 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad P = 3 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\text{Stress: } \sigma = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{3 \times 10^3}{40 \times 10^6} = 75 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 75 \text{ mm}^2$$

$$\text{Deformation: } \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$A = \frac{PL}{E\delta} = \frac{(3 \times 10^3)(1.5)}{(70 \times 10^9)(1 \times 10^{-3})} = 64.29 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 64.29 \text{ mm}^2$$

Larger value of A governs.

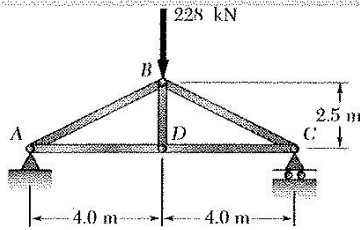
$$A = 75 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(75)}{\pi}} \quad d = 9.77 \text{ mm} \quad \text{---}$$

Figura 48. Soluciones del Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER et al., 2009).

Problem 2.21

2.21 For the steel truss ($E = 200 \text{ GPa}$) and loading shown, determine the deformations of the members AB and AD , knowing that their cross-sectional areas are 2400 mm^2 and 1800 mm^2 , respectively.



Statics: Reactions are 114 kN upward at A & C.

Member BD is a zero force member.

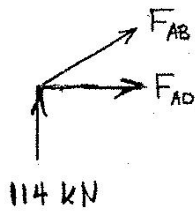
$$L_{AB} = \sqrt{4.0^2 + 2.5^2} = 4.717 \text{ m}$$

Use joint A as a free body. $\uparrow \sum F_y = 0$: $114 + \frac{2.5}{4.717} F_{AB} = 0$

$$F_{AB} = -215.10 \text{ kN}$$

$$\pm \sum F_x = 0: F_{AD} + \frac{4}{4.717} F_{AB} = 0$$

$$F_{AD} = \frac{(4)(215.10)}{4.717} = 182.4 \text{ kN}$$



Member AB:
$$S_{AB} = \frac{F_{AB} L_{AB}}{E A_{AB}} = \frac{(-215.10 \times 10^3)(4.717)}{(200 \times 10^9)(2400 \times 10^{-6})} = -2.11 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$S_{AB} = -2.11 \text{ mm} \leftarrow$$

$$S_{AD} = \frac{F_{AD} L_{AD}}{E A_{AD}} = \frac{(182.4 \times 10^3)(4.0)}{(200 \times 10^9)(1800 \times 10^{-6})} = 2.03 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$S_{AC} = 2.03 \text{ mm} \rightarrow$$

Figura 49. Soluciones del Problema Resuelto 4.3 (Fuente: BEER et al., 2009).

Observaciones

- Note que, a diferencia del 4.1, en la mayoría de estos problemas se tiene **un solo tramo con una única carga aplicada**, por lo cual, es evidente que luego del seccionamiento de exploración la fuerza interna de tracción o compresión en la sección transversal ha de ser “igual” a dicha carga aplicada. Por lo tanto, en este tipo de situaciones se suele utilizar directamente el valor de la carga en la ecuación de deformación elástica (Véase ecuación 17), en lugar de la fuerza interna.¹¹⁴
- En muchas situaciones problemáticas (como algunas de las presentadas en este problema resuelto) es habitual considerar también el **peso propio** del elemento (cable, barra, etc.). Si ese fuera el caso, este debe sumarse al valor de la carga antes de realizar los cálculos.

¹¹⁴ Tal cómo se ha analizado en el Capítulo 3, recuerde que luego del seccionamiento de exploración realizado al elemento, se verifica una igualdad entre la magnitud de la fuerza externa y la magnitud de la fuerza interna en el tramo aislado para el estudio. Por este motivo, en aquellos casos simples en los que se tiene una barra sometida únicamente a dos fuerzas externas, en la (17) se suele utilizar directamente el valor de esta carga externa.

4.1.4. Diseño de Elementos

Solo se analizan las clases más elementales de estructuras, es decir, cables o barras de diferente geometría transversal (generalmente, elementos de dos fuerzas). En estos casos el proceso de diseño es muy directo y la **fórmula de dimensionamiento** adopta la forma de la **Ec. (19)**. Donde la tensión admisible, $\sigma_{adm.}$, es de tracción o compresión según el caso, P y A son, respectivamente, la carga aplicada y la sección resistente del elemento.

$$\sigma_{adm.} \geq \frac{P}{A} [\text{Pa}]$$

Donde $\frac{P}{A}$ es la tensión real o tensión de trabajo del elemento, $\sigma_{trab.}$. $\therefore$

$$\sigma_{adm.} \geq \sigma_{trab.} [\text{Pa}] \quad (19)$$

La tensión en el punto de cedencia (σ_Y) o la resistencia a la cedencia (σ_{YS}),¹¹⁵ se utilizan para determinar la **tensión admisible en materiales dúctiles**, **Ec. (20-a)**.¹¹⁶ Mientras que para los **materiales frágiles** se utiliza la tensión máxima (σ_u)¹¹⁷ o la tensión de rotura (σ_f),¹¹⁸ **Ec. (20-b)**. Es importante destacar que estas fórmulas aplican, en general, a los materiales de ingeniería tradicionales como la madera, acero, aluminio, concreto y otros, ya que es este el contexto de nuestro estudio (sin embargo, esta condición no es taxativa). Tenga en cuenta que esta circunstancia también ha de aplicarse a las solicitaciones subsecuentes.

¹¹⁵ Tenga presente que determinados autores utilizan el término tensión de cedencia, haciendo caso omiso de si el valor se obtuvo observando el punto de cedencia o utilizando la técnica de corrimiento descrita en la Sección 3.3.

¹¹⁶ Es importante hacer notar que el punto de inicio de la fluencia es, al mismo tiempo, el punto de finalización de la zona elástica a la cual le corresponde una tensión σ_E . Por este motivo, algunos autores señalan que la tensión admisible es $\sigma_{adm.} = \sigma_E / n$. Sin embargo, generalmente se utilizan las tensiones de fluencia, y en algunos casos muy particulares como para el acero de bajo carbono, a veces, se utiliza la tensión del punto de cedencia superior o la inferior.

¹¹⁷ También denominada tensión última.

¹¹⁸ También denominada tensión de fractura o de falla.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \sigma_{\text{adm.}} &= \frac{\sigma_Y}{n} [\text{Pa}]; \text{ o bien: } \sigma_{\text{adm.}} = \frac{\sigma_{YS}}{n} [\text{Pa}] \\
 b) \quad \sigma_{\text{adm.}} &= \frac{\sigma_f}{n} [\text{Pa}]; \text{ o bien: } \sigma_{\text{adm.}} = \frac{\sigma_u}{n} [\text{Pa}]
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Los factores de seguridad respecto a la resistencia última de un material, en general, son mayores que los que se basan en la resistencia a la fluencia. En el caso del acero dulce, un factor de seguridad de 1,67 respecto a la fluencia corresponde a un factor de aproximadamente 2,8 respecto a la resistencia última (GERE y GOODNO, 2013). Y, como datos de referencia, según expone ROKO (1995), reglamentariamente, para el acero dulce se calcula $\sigma_{\text{adm.}} = \sigma_Y / 1,71$ (tracción y compresión), mientras que para el hormigón $\sigma_{\text{adm.}} = \sigma_f / 3$ (solo a compresión, ya que no se admite su trabajo a tracción).

PROBLEMA RESUELTO 4.4

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase las consignas en la **Figura 50** y las soluciones en la **Figuras 51**. **Notas.** ^(a) Este problema incluye varios ítems. ^(b) Para este autor tensión = tracción y esfuerzo = tensión.

2.11 Una varilla de control de aluminio debe estirarse 0.08 in. cuando se le aplique una carga de tensión de 500 lb. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 22 \text{ ksi}$ y $E = 10.1 \times 10^6 \text{ psi}$, determine el menor diámetro y la longitud más corta que puede seleccionarse para la varilla.

2.12 Una barra cuadrada de aluminio no debe estirarse más de 1.4 mm cuando se someta a una carga de tensión. Si se sabe que $E = 70 \text{ GPa}$ y que el esfuerzo permisible a tensión es de 120 MPa, determine a) la longitud máxima permisible de la barra, b) las dimensiones requeridas para la sección transversal si la carga de tensión es de 28 kN.

Figura 50. Consignas Problema Resuelto 4.4 (Fuente: BEER et al., 2009).

SOLUCIÓN

Problem 2.11	2.11 An aluminum control rod must stretch 2 mm when a 2-kN tensile load is applied to it. Knowing that $\sigma_{\text{all}} = 154 \text{ MPa}$ and $E = 70 \text{ GPa}$, determine the smallest diameter and shortest length which may be selected for the rod. $P = 2 \text{ kN}$, $\delta = 2 \text{ mm}$ $\sigma_{\text{all}} = 154 \text{ MPa}$ $\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{\text{all}} \quad A \geq \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{2000}{154} = 12.987 \text{ mm}^2$ $A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(12.987)}{\pi}} \quad d_{\text{min}} = 4.07 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$ $\sigma = E \epsilon = \frac{E \delta}{L} \leq \sigma_{\text{all}} \quad L \geq \frac{E \delta}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{(70 \times 10^9)(0.002)}{154 \times 10^6} = 0.909 \text{ m} \quad L_{\text{min}} = 0.91 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$
Problem 2.12	2.12 A square aluminum bar should not stretch more than 1.4 mm when it is subjected to a tensile load. Knowing that $E = 70 \text{ GPa}$ and that the allowable tensile strength is 120 MPa, determine (a) the maximum allowable length of the pipe, (b) the required dimensions of the cross-section if the tensile load is 28 kN. $\sigma = 120 \times 10^6 \text{ Pa}$ $E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}$ $\delta = 1.4 \times 10^{-3} \text{ m}$ (a) $\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E} \quad L = \frac{E \delta}{\sigma} = \frac{(70 \times 10^9)(1.4 \times 10^{-3})}{120 \times 10^6} = 0.817 \text{ m}$ $L = 817 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$ (b) $\sigma = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{28 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 233.333 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 233.333 \text{ mm}^2$ $A = a^2 \quad a = \sqrt{A} = \sqrt{233.333} \quad a = 15.28 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$

Figura 51. Soluciones Problema Resuelto 4.4 (Fuente: BEER et al., 2009).

PROBLEMA RESUELTO 4.5

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase la consigna y solución en la **Figura 52**. **Notas.** ^(a) Ver referencias abajo consignadas.

Problema de ejemplo 3-1

El soporte estructural de una máquina se someterá a una carga de tensión estática de 16.0 kN. Se planea fabricar el soporte con una varilla cuadrada de acero AISI 1020 laminado en caliente. Especifique dimensiones apropiadas para la sección transversal de la varilla.

Solución

Objetivo	Especificar las dimensiones de la sección transversal de la varilla
Datos	$F = 16.0 \text{ kN} = 16\,000 \text{ N}$ de carga estática. Material: AISI 1020 HR; $s_y = 331 \text{ Mpa}$; 36% de alargamiento (dúctil). (Datos tomados del apéndice A-14)
Análisis	Utilizar el caso C de la sección 3-5. Sea $\sigma = \sigma_d = s_y/2$ (tabla 3-2, material dúctil, carga estática). Análisis de esfuerzo: $\sigma = F/A$; entonces el área requerida $= A = F/\sigma_d$. Pero $A = a^2$ (a = dimensión del lado del cuadrado). Dimensión mínima permisible $a = \sqrt{A}$.
Resultados	$\sigma_d = s_y/2 = 331 \text{ MPa}/2 = 165.5 \text{ MPa} = 165.5 \text{ N/mm}^2$ Área requerida: $A = F/\sigma_d = (16\,000 \text{ N})/(165.5 \text{ N/mm}^2) = 96.7 \text{ mm}^2$. Dimensión mínima $a: a = \sqrt{A} = \sqrt{96.7 \text{ mm}^2} = 9.83 \text{ mm}$. Especifique: $a = 10 \text{ mm}$ (apéndice A-2; tamaño preferido).

Figura 52. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.5 (Fuente: MOTT, 2009).

Referencias

- Tensión = tracción.
- Esfuerzo = tensión.
- Tensión admisible = esfuerzo de diseño (σ_d).
- N : Factor de seguridad = factor de diseño. La tabla con valores recomendados que se utiliza aquí, se presenta en la **Figura 55**.
- *American Iron and Steel Institute* (AISI) = Asociación industrial responsable de establecer estándares para la clasificación de metales y aleaciones.
- $S_y = \sigma_Y$: Resistencia a la cedencia en tracción.¹¹⁹ Su valor para este problema resuelto se toma del Apéndice A-14, cuyo extracto se presenta en la **Figura 53**.

¹¹⁹ Nuevamente, recuerde que, σ_Y puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia.

A-14 Propiedades típicas de aceros al carbón y de aleación

Material AISI núm.	Condición [†]	Resistencia máxima, s_u		Resistencia a la cedencia, s_y		Porcentaje de alargamiento
		ksi	MPa	ksi	MPa	
1020	Recocido	57	393	43	296	36
1020	Laminado en caliente	65	448	48	331	36
1020	Estirado en frío	75	517	64	441	20
1040	Recocido	75	517	51	352	30

*Otras propiedades aproximadamente iguales para todos los aceros aleados y al carbón.

Módulo de elasticidad a tensión = 30 000 000 lb/in² (207 GPa)

Módulo de elasticidad a cortante = 11 500 000 lb/in² (80 GPa)

Densidad = 0.283 lb_m/in³ (7680 kg/m³)

[†]OQT significa templado y enfriado en aceite. WQT significa templado y enfriado en agua.

Figura 53. Extracto del Apéndice A-14: Propiedades Típicas de Aceros al Carbón y de Aleación (Fuente: MOTT, 2009).

Caso C Determinar la forma y dimensiones del componente.

- Datos
- La magnitud y tipo de carga aplicada al componente de interés.
 - El material, incluida su condición, del cual se tiene que hacer el componente.

Determine La forma y dimensiones de la geometría crítica del componente.

- Método
- Determinar la resistencia a la cedencia, resistencia máxima y porcentaje de alargamiento del material seleccionado. Decidir si el material es dúctil (porcentaje de alargamiento > 5%) o frágil (porcentaje de alargamiento < 5%).
 - Especificar un factor de diseño apropiado considerando el tipo de carga, las condiciones dadas en la sección precedente y las guías recomendadas. En el caso de esfuerzos normales directos, utilizar la tabla 3-2.
 - Calcular el esfuerzo de diseño con la ecuación (3-2) o (3-3).

$$\sigma_d = s_y/N \text{ basado en la resistencia a la cedencia}$$

$$\sigma_d = s_u/N \text{ basado en la resistencia máxima a la tensión}$$

- Escribir la ecuación del esfuerzo máximo esperado en el componente. Para esfuerzos normales directos,

$$\sigma_{\text{máx}} = F/A$$

- Hacer $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_d$ y resolver para el área de sección transversal requerida,

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_d = F/A$$

$$A \text{ requerida} = F/\sigma_d$$

- Determinar las dimensiones mínimas requeridas del área de sección transversal para lograr el área total necesaria. Esto depende de la forma que elija para hacer el componente. Puede ser sólida circular, cuadrada o rectangular; un tubo hueco, un perfil estructural estándar tal como un ángulo o algún perfil especial de su propio diseño.
- Especificar dimensiones convenientes de la lista de tamaños básicos preferidos que aparece en el apéndice A-2.

Figura 54. Esquema de Método Típico de Diseño Aplicado a este Problema de Ejemplo: Caso C (Fuente: MOTT, 2009).

TABLA 3–2 Criterios para esfuerzo de diseño—Esfuerzos normales directos.

Forma de la carga	Material dúctil	Material frágil
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

Figura 55. Tabla para Selección del Factor de Seguridad en Tracción o Compresión (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Este problema resuelto ejemplifica satisfactoriamente las diversas consideraciones que debe tener en cuenta el diseñador para una adecuada selección del **factor de seguridad**, en un caso particular de diseño.
- Advierta que también se especifica las dimensiones apropiadas, esto es: la **medida comercial** del miembro. En este sentido, una de las responsabilidades de un diseñador es especificar las dimensiones finales de los miembros que soportan carga, es decir, una vez que se completan los análisis en cuanto a tensión y deformación, se obtienen valores mínimos aceptables para las dimensiones, que garantizarán que el miembro cumplirá con los requerimientos de diseño. Generalmente, el diseñador especifica entonces las dimensiones finales como estándar o valores convenientes que facilitarán la adquisición de materiales y la fabricación de las piezas. Por tanto, no olvide este último paso al resolver los problemas.
- También, deja plasmado uno de los **esquemas de método típico de diseño**, el caso C, según lo designa el autor citado. El caso C está asociado al objetivo del problema, esto es: determinar la forma y dimensiones requeridas del componente cuando se conoce la carga, y el material ha sido especificado. En general, este ha de ser el enfoque adoptado en el curso. En contraposición, otros casos han de estar relacionados con otros objetivos, a saber: Caso A: Evaluar la seguridad de un diseño dado; Caso B: Especificar un material adecuado del

cual se tendrá que hacer un componente; y, Caso D: Determinar la carga permisible en un componente.

PROBLEMA RESUELTO 4.6

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase la consigna en la **Figura 56** y la solución en la **Figura 57**. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión.

A-1.7: Un cable de acero cuelga de un globo estratosférico. El acero tiene peso unitario de 77 kN/m^3 y esfuerzo de fluencia de 280 MPa . El factor requerido de seguridad contra la fluencia es 2.0 . La longitud máxima permisible del cable es aproximadamente:

- A) 1800 m
- B) 2200 m
- C) 2600 m
- D) 3000 m

Figura 56. Consigna Problema Resuelto 4.6 (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

SOLUCIÓN

$$\gamma = 77 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \quad \sigma_Y = 280 \text{ MPa} \quad FS_Y = 2$$

$$\text{Allowable stress:} \quad \sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_Y}{FS_Y} = 140.0 \text{ MPa}$$

$$\text{Weight of wire of length } L: \quad W = \gamma AL$$

$$\text{Max. axial stress in wire of length } L: \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{W}{A} \quad \sigma_{\text{max}} = \gamma L$$

$$\text{Max. length of wire:} \quad L_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{allow}}}{\gamma} = 1818 \text{ m} \quad \leftarrow$$

Figura 57. Solución Problema Resuelto 4.6 (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

Observaciones

- Note que al plantear la desigualdad tal como se indica en la (19) $\sigma_{\text{allow}} \geq W/A$, queda explícita que la longitud calculada del cable debe ser la máxima permisible.

PROBLEMA RESUELTO 4.7

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos cargados axialmente, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase las consignas en la **Figura 58** y las soluciones en la **Figura 59**. **Notas.** ^(a) Este problema incluye varios ítems. ^(b) Ver referencias abajo consignadas.

- 3-7.E** El cable tensor de una torre de antena tiene que ser de aluminio con un esfuerzo permisible de 12000 psi. Si la carga máxima esperada en el tensor es de 6400 lb, determine el diámetro del cable requerido.
- 3-11.E** Tres bloques cortos de madera hechos de postes estándar de 4×4 soportan una máquina que pesa 29 500 lb y comparten la carga por igual. Especifique un tipo conveniente de madera para los bloques.
- 3-12.M** Una pila circular para soportar una columna tiene que ser de concreto con resistencia nominal de 3000 psi (20.7 MPa). Especifique un diámetro adecuado para la pila si tiene que soportar una carga de compresión directa de 1.50 MN.

Figura 58. Consignas Problema Resuelto 4.7 (Fuente: MOTT, 2009).

SOLUCIÓN

$$\underline{3-7} \quad \sigma = P/A; A = \frac{P}{\sigma} = \frac{6400 \text{ LB}}{12000 \text{ LB/IN}^2} = 0.533 \text{ IN}^2 = \pi D^2/4$$

$$\text{REQD } D = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4(0.533 \text{ IN}^2)/\pi} = 0.824 \text{ IN}$$

$$\text{SPECIFY } 7/8 \text{ IN (0.875 IN) OR } 1.00 \text{ IN. DIA.}$$

$$\underline{3-11} \quad \text{LOAD ON EACH BLOCK} = 29500 \text{ LB}/3 = 9833 \text{ LB}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{9833 \text{ LB}}{12.25 \text{ IN}^2} = 803 \text{ PSI}$$

IF COMPRESSION IS PERPENDICULAR TO GRAIN, NO SUITABLE WOOD LISTED.
 IF PARALLEL TO GRAIN: NO. 1 SOUTH. PINE - $\sigma_{ALL} = 850 \text{ PSI}$ (A-19)
 NO. 2 HEMLOCK - $\sigma_{ALL} = 800 \text{ PSI}$
 NO. 2 DOUGLAS FIR - $\sigma_{ALL} = 1000 \text{ PSI}$

$$\underline{3-12} \quad \sigma_{ALLOW.} = \frac{\text{RATED STRENGTH}}{4} = \frac{20.7 \text{ MPa}}{4} = 5.18 \text{ MPa (SEC. 2-10)}$$

$$\text{REQD } A = \frac{P}{\sigma} = \frac{1.50 \times 10^6 \text{ N}}{5.18 \text{ N/mm}^2} = 2.90 \times 10^5 \text{ mm}^2 = \pi D^2/4$$

$$\text{REQD } D = \sqrt{4A/\pi} = 607 \text{ mm}; \text{ SPECIFY } 700 \text{ mm DIA.}$$

Figura 59. Soluciones Problema Resuelto 4.7 (Fuente: MOTT, 2009).

Referencias

- Tensión = tracción.
- Esfuerzo = tensión.
- Resistencia nominal (o tensión nominal) = resistencia máxima o resistencia última.
- *Hemlock* = Voz inglesa para el Abeto.

A-19 Propiedades típicas de la madera.

Tipo y grado	Esfuerzo permisible											
	Flexión		Tensión paralela a la veta		Cortante horizontal		Compresión				Módulo de elasticidad	
							Perpendicular a la veta		Paralela a la veta			
	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	ksi	GPa
Pino Douglas—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1750	12.1	1050	7.2	95	0.66	385	2.65	1250	8.62	1800	12.4
Núm. 2	1450	10.0	850	5.9	95	0.66	385	2.65	1000	6.90	1700	11.7
Núm. 3	800	5.5	475	3.3	95	0.66	385	2.65	600	4.14	1500	10.3
Abeto—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	75	0.52	245	1.69	1000	6.90	1500	10.3
Núm. 2	1150	7.9	675	4.7	75	0.52	245	1.69	800	5.52	1400	9.7
Núm. 3	625	4.3	375	2.6	75	0.52	245	1.69	500	3.45	1200	8.3
Pino del sur—2½ a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	80	0.55	270	1.86	850	5.86	1600	11.0
Núm. 2	1000	6.9	575	4.0	70	0.48	230	1.59	550	3.79	1300	9.0
Núm. 3	650	4.5	375	2.6	70	0.48	230	1.59	400	2.76	1300	9.0

Figura 60. Valores de Tensión Permisibles de Tres Clases de Madera de acuerdo con los Grados que aparecen en la Tabla, para usarse en Estructuras de Edificios y en Usos Similares que implican Cargas Estáticas (Fuente: MOTT, 2009).

TABLA 2-11 Módulo de elasticidad de concreto.

Resistencia nominal, f'_c		Módulo de elasticidad	
psi	MPa	psi	GPa
2000	13.8	2.7×10^6	18.6
3000	20.7	2.7×10^6	22.7
4000	27.6	2.7×10^6	26.2
5000	34.5	2.7×10^6	29.6
6000	41.4	2.7×10^6	32.4
7000	48.3	2.7×10^6	35.2

Figura 61. Valores de Tensión Máxima y Módulo de Elasticidad del Concreto (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- En el problema 3–7. E., se habla de **tensor**, básicamente, este es un elemento de dos fuerzas sometido a tracción. En contraposición, si un elemento se encuentra en compresión, se denomina **puntal**. Estos elementos son encontrados frecuentemente en las estructuras (mecánicas o civiles); y, tal como en este problema, habitualmente se requiere su dimensionamiento.
- El problema 3–11. E. trata de la verificación de la aptitud de un **material anisotrópico**: la madera. Observe como las propiedades mecánicas de esta (en particular, la tensión admisible) varían según la especie y según la dirección de análisis. Por tanto, para estos casos se debe tener información precisa de la especie y el producto a utilizar, tanto para una verificación como para un dimensionamiento.

4.1.5. Problemas que Involucran Cambios de Temperatura

Las cargas externas no son las únicas fuentes de tensiones y deformaciones en una estructura, así pues, otras fuentes incluyen los **efectos térmicos**¹²⁰ que se originan por los cambios de temperatura. Dichos efectos, por lo general se encuentran tanto en sistemas mecánicos como civiles, y en esta sección en particular, el enfoque está puesto en elementos simples como puede ser el caso de un **sólido prismático sujeto en ambos extremos** (típicamente, viga o columna o algún elemento de máquina). En este sentido, como regla general, las tensiones y deformaciones provocadas por este tipo de fuente, es mucho más importante en el diseño de **estructuras estáticamente indeterminadas** que en las estáticamente determinadas (GERE y GOODNO, 2013).

Otro aspecto a considerar, es el hecho de que se han de analizar **tensiones térmicas normales promedio**.¹²¹ Como justificación de ello, considere que, ante la variación de temperatura de un sólido prismático fijo en sus extremos, las tensiones se producirán únicamente en el sentido longitudinal, siendo esta la dimensión más relevante en la dilatación o contracción del elemento. De esto último también se desprende que la deformación ha de ser una **deformación térmica lineal**.¹²²

Deformación Térmica Lineal

Un cambio en la temperatura puede causar que un cuerpo cambie sus dimensiones.¹²³ Por lo general, si la temperatura aumenta, el cuerpo se expande, mientras que, si la temperatura

¹²⁰ Otras fuentes a considerar pero que no se tratan en este material, son: los desajustes que resultan de imperfecciones en la construcción y deformaciones previas que se producen por deformaciones iniciales (GERE y GOODNO, 2013).

¹²¹ Esta característica sería la justificación de que este tema se desarrolle en la Sección 4.1 (lo cual es usual en los libros de Mecánica de Materiales).

¹²² En contraposición a la deformación térmica volumétrica. Hay que enfatizar que esto debe ser así, ya que la ley de Hooke presentada (que luego ha de ser utilizada) en capítulos anteriores es aplicable cuando la deformación es uniaxial.

¹²³ La mayoría de los puentes vehiculares, por ejemplo, se diseñan con juntas de dilatación para permitir los movimientos térmicos de la carpeta y así evitar cualquier tensión térmica. En este sentido, constructivamente tienen un extremo fijo y el otro descansa sobre rodillos, con el fin de que la dilatación se efectúe libremente.

disminuye, éste se contraerá, lo que implica una relación directamente proporcional,¹²⁴ esto es así para los materiales estructurales ordinarios. Si este es el caso, y el **material** es **homogéneo** e **isotrópico**, se ha comprobado experimentalmente que el desplazamiento de un elemento con una longitud L puede calcularse mediante la Ec. (21). Dónde: α = propiedad del material, conocida como **coeficiente lineal de expansión (o dilatación) térmica**. Cuyas unidades son: $1/^\circ\text{F}$ (Fahrenheit) o bien, $1/^\circ\text{C}$ (grados Celsius) o $1/\text{K}$ (Kelvin), según el sistema, y mide la deformación por cada grado de temperatura. Los valores típicos pueden ser encontrados en la mayoría de los libros de ingeniería. ΔT = cambio algebraico en la temperatura del elemento. L = longitud original del elemento. δ_T = cambio algebraico en la longitud del elemento (deformación térmica lineal o desplazamiento térmico lineal).

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L [\text{m}] \quad (21)$$

Tensión Térmica Normal

El cambio en la longitud de un elemento estáticamente determinado (por ejemplo, una viga empotrada) puede calcularse con facilidad mediante la ecuación 21, puesto que el elemento es libre de expandirse o contraerse cuando se somete a un cambio de temperatura. Sin embargo, en un **elemento estáticamente indeterminado**, estos desplazamientos térmicos se verán limitados por soportes, lo que produce tensiones térmicas que deben considerarse durante el diseño.

De esta manera, para elementos estáticamente indeterminados cargados axialmente (: foco de estudio), dichas tensiones térmicas pueden determinarse mediante el uso de distintos

¹²⁴ Sin embargo, recientemente se han desarrollado algunas aleaciones metálicas especiales que no se comportan de la manera acostumbrada. En cambio, dentro de ciertos valores de temperatura sus dimensiones disminuyen al calentarse y aumentan al enfriarse.

métodos. A fin de verter algo de luz al respecto, considere el caso de una barra que está empotrada en sus dos extremos, **Figura 62–a**. A partir del diagrama de cuerpo libre para la barra,¹²⁵ **Figura 62–b**, el equilibrio requiere: $+\uparrow \sum \vec{F}_y = 0$, es decir: $F_B + F_A - P = 0$. Como se observa, este tipo de problema es estáticamente indeterminado, ya que las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las dos reacciones (F_A y F_B) en la barra.¹²⁶

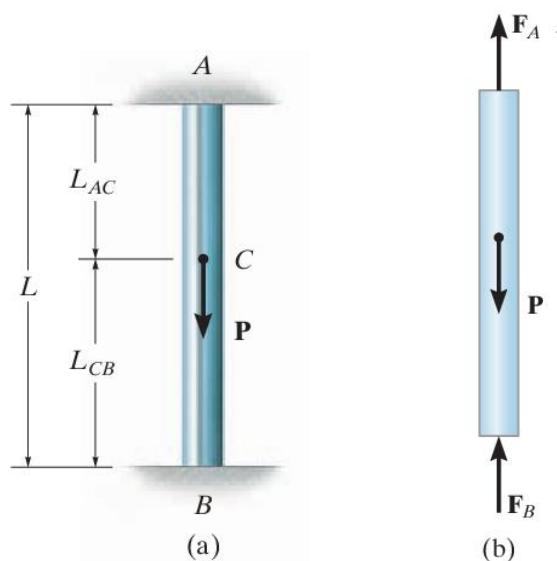


Figura 62. Problema Estáticamente Indeterminado para el caso de una Barra Doblemente Empotrada (Fuente: HIBBELER, 2011).

Por lo tanto, a fin de establecer una **ecuación adicional** necesaria para la solución,¹²⁷ se requiere considerar cómo se desplazan los puntos en la barra. En particular, una ecuación que especifique las condiciones para el desplazamiento se conoce como una **condición de compatibilidad** o **condición cinemática**. En este caso, una condición de compatibilidad adecuada requiere que el desplazamiento de un extremo de la barra en relación con el otro sea igual a cero, ya que dichos extremos están empotrados. Por lo tanto, la condición de

¹²⁵ En la cual se suponen los sentidos para las reacciones.

¹²⁶ No tiene sentido el planteo del equilibrio en x , ni el de momentos.

¹²⁷ Recuerde: La Estática da un número de ecuaciones limitado para resolver sus problemas de equilibrio; y en este caso las incógnitas sobrepasan ese número de ecuaciones, por lo tanto, se debe apelar a la Resistencia de Materiales, la cual introduce la ecuación faltante.

compatibilidad se convierte en: $\delta_{A/B} = 0$, es decir: $\delta_{AC} - \delta_{CB} = 0$. Donde δ_{AC} y δ_{CB} representan las deformaciones del tramo superior e inferior de la barra, respectivamente.

Además, si el material tiene un comportamiento elástico lineal, esta última ecuación también puede expresarse en términos de la relación carga-deformación, mediante la ley de Hooke ($\delta = P \cdot L / A \cdot E$) aplicada a cada tramo. Finalmente, al considerar la ecuación de equilibrio, es posible hallar las reacciones.¹²⁸

Por lo tanto, y teniendo en cuenta lo expuesto, el lector ha de comprobar que en los problemas que involucran cambios de temperatura el **quid de la cuestión** es la identificación de la condición de compatibilidad y su correspondiente ecuación para el caso planteado, lo que permitirá determinar la tensión térmica y demás variables inherentes. En los siguientes problemas resueltos se ilustran algunas aplicaciones.

Como nota de cierre, considere nuevamente que la tensión térmica ocurre sin la adición de fuerzas externas; y, en este sentido, debe asegurarse de que el nivel de tensión resultante no provocará **cedencia** o **fractura del material**. También, en el caso de miembros relativamente largos y esbeltos sometidos a compresión, la restricción de la dilatación puede hacer que los miembros se **pandeen** debido a la acción de columna (consulte la Sección 4.5).

¹²⁸ Para el interesado en la demostración, consultar el Apartado 4.4 de HIBBELER (2011).

PROBLEMA RESUELTO 4.8

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos bajo efectos térmicos originados por cambios de temperatura, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo (Ver **Figura 63**). **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

EJEMPLO 4.10

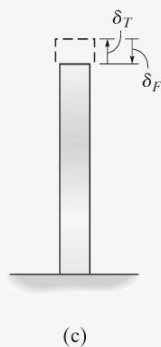
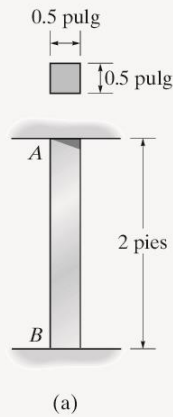


Figura 4-18

La barra de acero A-36 que se muestra en la figura 4-18a cabe justamente entre dos soportes fijos cuando $T_1 = 60^\circ\text{F}$. Si la temperatura se eleva a $T_2 = 120^\circ\text{F}$, determine el esfuerzo térmico normal promedio desarrollado en la barra.

SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 4-18b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra. Como no hay carga externa, la fuerza en A es igual pero opuesta a la fuerza en B, es decir,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_A = F_B = F$$

El problema es estáticamente indeterminado porque esta fuerza no puede determinarse a partir del equilibrio.

Compatibilidad. Como $\delta_{A/B} = 0$, el desplazamiento térmico δ_T que se produce en A, figura 4-18c, está contrarrestado por la fuerza **F** que se requiere para empujar la barra δ_F de regreso a su posición original. La condición de compatibilidad en A se convierte en

$$(+\uparrow) \quad \delta_{A/B} = 0 = \delta_T - \delta_F$$

Al aplicar las relaciones térmica y de carga-desplazamiento, se tiene

$$0 = \alpha \Delta T L - \frac{FL}{AE}$$

Así, con base en los datos de la página final de este libro,

$$\begin{aligned} F &= \alpha \Delta T A E \\ &= [6.60(10^{-6})/^{\circ}\text{F}](120^{\circ}\text{F} - 60^{\circ}\text{F})(0.5 \text{ pulg})^2 [29(10^3) \text{ kip/pulg}^2] \\ &= 2.871 \text{ kip} \end{aligned}$$

Como **F** también representa la fuerza axial interna dentro de la barra, el esfuerzo de compresión normal promedio es

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2.871 \text{ kip}}{(0.5 \text{ pulg})^2} = 11.5 \text{ ksi} \quad \text{Resp.}$$

NOTA: A partir de la magnitud de **F**, resulta evidente que los cambios en la temperatura pueden causar grandes fuerzas de reacción en los elementos estáticamente indeterminados.

Figura 63. Problema Resuelto 4.8 (Fuente: HIBBELER, 2011).

Observaciones

- Note que el autor vuelve a remarcar el término **promedio**, cuando menciona: esfuerzo térmico normal promedio.

PROBLEMA RESUELTO 4.9

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos bajo efectos térmicos originados por cambios de temperatura, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase la consigna en la **Figura 64** y la solución en las **Figuras 65** y **66**. **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

258. Una varilla de acero de 2.50 m de longitud está firmemente sujeta entre dos muros. Si el esfuerzo en la varilla es nulo a 20°C, determinar el esfuerzo que aparecerá al descender la temperatura hasta -20°C. La sección es de 1200 mm², $\alpha = 11.7 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$, y $E = 200 \text{ GN/m}^2$. Resolver el problema en los dos casos siguientes: (a) Muros completamente rígidos e indeformables, y (b) muros que ceden ligeramente, acortándose su distancia en 0.5 mm al descender la temperatura de la barra.

Figura 64. Consigna Problema Resuelto 4.9 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

SOLUCIÓN

Caso a) Imaginemos que se suelta la varilla del muro derecho. En estas condiciones puede producirse libremente la deformación térmica. El descenso de temperatura origina



Figura 2-12. Muros rígidos.

una contracción, representada por δ_t en la figura 2-12. Para volver a unir la varilla al muro, se necesitará aplicar a la varilla una fuerza de tensión P que produzca una deformación por carga δ . Del esquema de deformaciones se deduce en este caso que $\delta_t = \delta$, o bien,

$$\alpha(\Delta T)L = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

de donde

$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha L(\Delta T) = (200 \times 10^9)(11.7 \times 10^{-6})(40) = 93.6 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \\ &= 93.6 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

Resp.

Obsérvese que la longitud L no interviene en la ecuación. Quiere esto decir que el esfuerzo es independiente de la longitud y sólo depende de las características físicas de la barra y de la variación de la temperatura, y no de sus características geométricas.

Figura 65. Solución Problema Resuelto 4.9 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008). **Nota.** Existe un error tipográfico: en la ecuación presentada en la solución debe figurar E en lugar de L .

Caso b) Si el muro cede acercándose al otro, en la figura 2-13 se observa que la contracción térmica libre es igual a la suma de la deformación debida a la carga y del acercamiento de los muros. Es decir,

$$\delta_T = \delta_P + \text{acercamiento}$$

Sustituyendo los valores de las deformaciones resulta:

$$\alpha L(\Delta T) = \frac{\sigma L}{E} + \text{acercamiento}$$

o bien

$$(11.7 \times 10^{-6})(2.5)(40) = \frac{\sigma(2.5)}{200 \times 10^9} + (0.5 \times 10^{-3})$$

de donde

$$\sigma = 53.6 \text{ MN/m}^2$$

Resp.

Obsérvese que en este caso, al ceder ligeramente los muros en una cantidad fija, el esfuerzo se reduce considerablemente y la longitud de la barra ya no desaparece de la ecuación, como ocurría en el caso *a*).

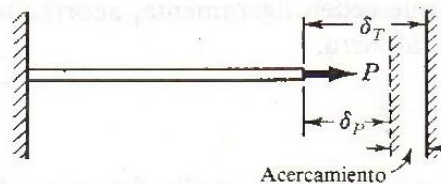


Figura 2-13. Muros no rígidos.

Figura 66. Solución Problema Resuelto 4.9 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

Observaciones

- Note que las **unidades para α** se presentan de otra manera, sin embargo, es equivalente, a $^{\circ}\text{C}^{-1}$ o K^{-1} , por ejemplo.
- Advierta que las **condiciones de compatibilidad** difieren para ambos ítems.
- ¿La **solicitación de la varilla de acero** es de tracción o compresión?

PROBLEMA RESUELTO 4.10

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos bajo efectos térmicos originados por cambios de temperatura, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase las consignas y soluciones en las **Figuras 67 y 68**. **Nota.** Para ambos ítems, consulte las referencias del Problema Resuelto 4.5.

**Problema de ejemplo
3-12**

El miembro estructural de acero AISI 1020 de un horno se somete a un incremento de temperatura de 95°F mientras se mantiene rígido en sus extremos. Calcule el esfuerzo resultante en el acero.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo térmico en el acero.

Datos El acero es AISI 1020; en la tabla 3-4, $\alpha = 6.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$.
 $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$; $\Delta t = 95^\circ\text{F}$.

Análisis Utilizar la ecuación (3-12); $\sigma = E\alpha(\Delta t)$.

Resultados $\sigma = (30 \times 10^6 \text{ psi})(6.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1})(95^\circ\text{F}) = 18\,500 \text{ psi}$.

Comentario El apéndice A-14 muestra que la resistencia a la cedencia del acero 1020 recocido, su forma más débil, es de 43 000 psi. Por consiguiente, el miembro estructural sería seguro en cuanto a cedencia. Pero el pandeo de columna también tiene que ser verificado porque el esfuerzo es de compresión.

Figura 67. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.10 – a (Fuente: MOTT, 2009).

**Problema de ejemplo
3-13**

Una barra de aleación de aluminio 2014-T6 de una máquina se mantiene sujeta por sus extremos mientras se enfría desde 95°C. ¿A qué temperatura el esfuerzo de tensión en la barra sería igual a la mitad de la resistencia a la cedencia del aluminio si originalmente se encontraba a cero esfuerzo?

Solución

Objetivo Calcular la temperatura cuando $\sigma = s_y/2$.

Datos El aluminio es de aleación 2014-T6; en la tabla 3-4, $\alpha = 23.0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
En el apéndice A-18, $s_y = 414 \text{ MPa}$; $E = 73 \text{ GPa}$; $t_1 = 95^\circ\text{C}$.

Análisis Utilizar la ecuación (3-12) y resolver para Δt .

$$\sigma = E\alpha(\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha}$$

Sea el esfuerzo

$$\sigma = \frac{s_y}{2} = \frac{414 \text{ MPa}}{2} = 207 \text{ MPa}$$

Resultados

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha} = \frac{207 \text{ MPa}}{(73 \text{ GPa})(23.0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})}$$

$$\Delta t = \frac{207 \times 10^6 \text{ Pa}}{(73 \times 10^9 \text{ Pa})(23.0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})} = 123^\circ\text{C}$$

Como el esfuerzo en la barra era cero cuando su temperatura era de 95°C, la temperatura a la cual el esfuerzo sería de 207 MPa sería

$$t = 95^\circ\text{C} - 123^\circ\text{C} = -28^\circ\text{C}$$

Comentario El nivel de esfuerzo de la mitad de la resistencia a la cedencia es un esfuerzo de diseño razonable para un miembro estáticamente cargado. Por lo tanto, si la temperatura fuera a ser de -28°C , la seguridad de la barra se pondría en riesgo.

Figura 68. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.10 – b (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Advierta que ambos ejemplos utilizan la misma fórmula: $\sigma = E\alpha(\Delta t)$, que se deriva de la **ecuación de compatibilidad**. Analice como se utiliza esta expresión en los Problemas Resueltos 4.8 y 4.9 caso (a).

4.2. Corte Directo

4.2.1. Introducción e Hipótesis

No existen hipótesis particulares a consignar en esta sollicitación en especial. De todas maneras, recuerde que las deducciones están sustentadas en los fundamentos generales del Capítulo 2, algunos de los cuales son evidentes (como la ley de Hooke). Por tanto, el “punta pie” inicial consiste en proporcionar la definición de la sollicitación en cuestión.

En la Sección 3.3.3 se ha dicho que la acción directa de las fuerzas al tratar de cortar a través de un material es un caso de cortante directo. A fin de dar una explicación más completa de esta sollicitación, es necesario, en primer lugar, brindar al lector una **definición** más precisa, a saber:

Cuando en todo el espesor de un cuerpo, dos fuerzas Q paralelas y de sentido contrario ubicadas perpendicularmente al eje longitudinal de la pieza, actúan en dos secciones e y f infinitamente próximas, el material trabaja a **corte directo** o **cizallamiento**, **Figura 69**. De esta forma resultan en la sección S , las tensiones tangenciales, $\tau_{\text{prom.}} = Q/S$,¹²⁹ ya estudiadas (Véase ecuación 3).

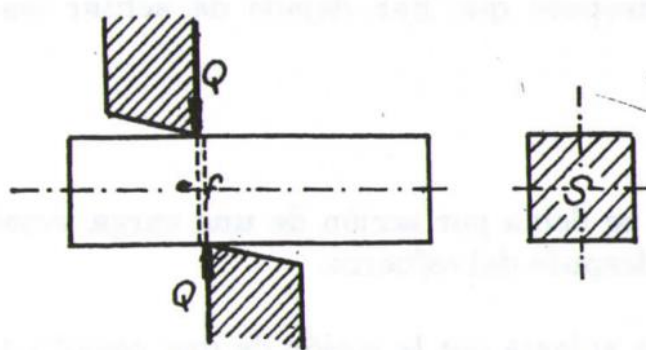


Figura 69. Elemento Trabajando a Corte Directo (Fuente: CORONEL, 1995).

Este tipo de sollicitación se presenta con frecuencia en muchos casos en la técnica de la construcción y debe ser analizado en profundidad en el diseño y cálculo de estructuras. Así, por

¹²⁹ El subíndice prom. es solo un recordatorio que la tensión así calculada es un valor promedio. En adelante, ya no se ha de consignar dicho subíndice.

ejemplo, considere una pieza de sección transversal cualquiera empotrada en uno de sus extremos, con una carga P aplicada en el otro, **Figura 70**.

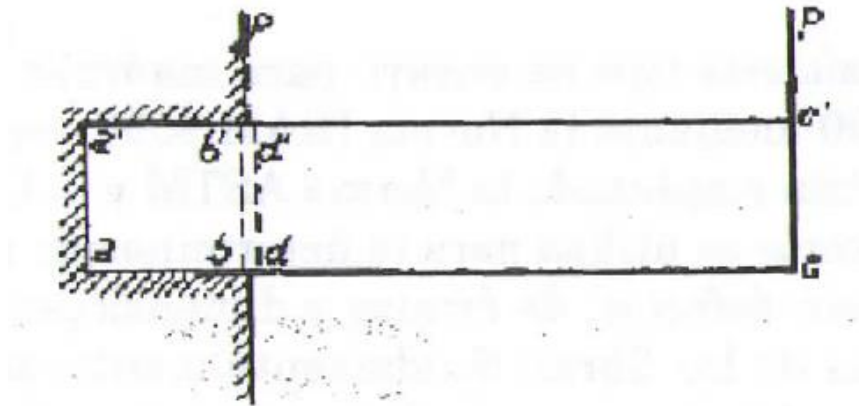


Figura 70. Esquema de un Elemento Constructivo Empotrado que Muestra la Acción de Corte Característica del Cortante Directo (Fuente: CORONEL, 1995).

Si se considera que el soporte y la pieza son rígidos, y que P es suficientemente grande, el tramo libre bc tenderá a seguir la dirección de la fuerza resultante de la carga y el peso propio de miembro, mientras que la parte de pieza asentada sobre ab ha de recibir la reacción del apoyo, produciéndose dos efectos contrarios: la sección transversal bb' ha de experimentar una fuerza vertical ascendente, mientras que la sección dd' , una vertical descendente. Ambas fuerzas de sentidos opuestos y aplicadas a secciones distintas e infinitamente próximas, tenderán al deslizamiento de una sección sobre la otra, motivando el corte del miembro.

4.2.2. Elementos de Tensión en Tensiones Cortantes

En la Sección 3.3.4 se introdujo el concepto de elemento de tensión,¹³⁰ como conocimiento previo para comprender los tipos de falla en torsión. A continuación, ahondaremos con más detalle este tema a fin conceptualizar la deformación unitaria cortante (cabe destacar que, este concepto también debe ser tenido en cuenta al estudiar las tensiones cortantes en torsión circular

¹³⁰ Es decir, en este apartado se define con mayor precisión el concepto de elemento de tensión.

recta, Sección 4.3, y flexión simple normal, Sección 4.4). Para ello considere, en primer lugar, la **Figura 71**.

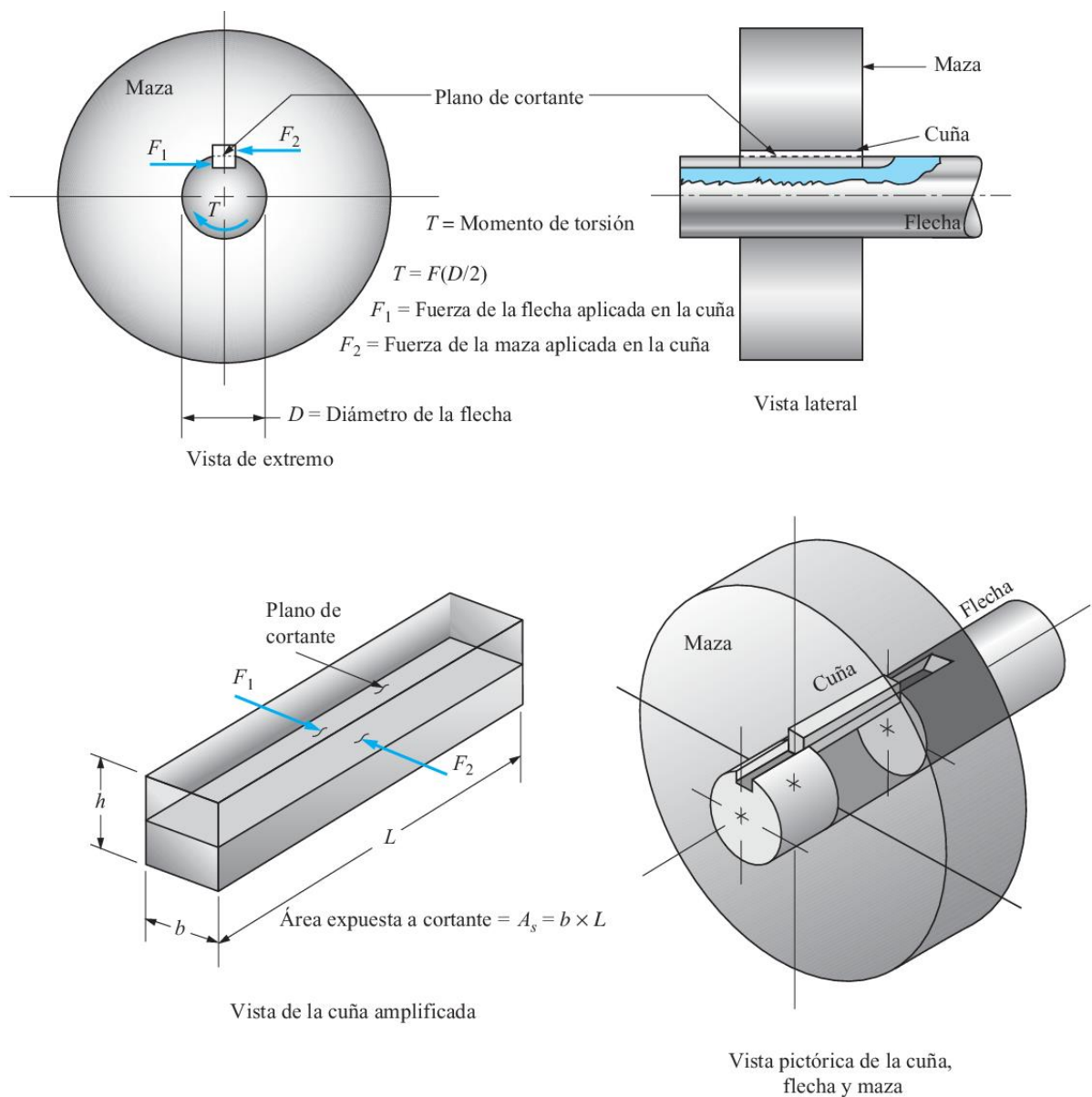


Figura 71. Acción de Cortante Directo en una Cuña (Chaveta) entre una Flecha y la Maza de un Engranaje, Polea o Rueda Dentada de un Sistema de Transmisión Mecánica (Fuente: MOTT, 2009).

La figura anterior muestra una aplicación importante del cortante en transmisiones mecánicas. Cuando un elemento que transmite potencia, tal como un engranaje, una rueda dentada propulsada por una cadena o una polea propulsada por una banda se monta en una flecha, a menudo se utiliza una cuña (o chaveta) para conectarla y permitir la transmisión del momento de torsión de una a la otra.

El momento de torsión produce una fuerza tangencial en la cara de contacto entre la flecha y el interior de la maza del elemento de ensamble. El torque es resistido por el momento de la fuerza en la cuña por el radio de la flecha. Es decir, $T = F \cdot (D/2)$. Entonces la fuerza es $F = 2T/D$. Además, en la figura se muestra la fuerza F_1 ejercida por la flecha en el lado izquierdo de la cuña, mientras que, en el lado derecho, una fuerza F_2 es la reacción ejercida por la maza sobre la cuña. Este par de fuerzas tiende a **cortar la cuña**, por lo que se produce una tensión cortante. Observe que el área expuesta a cortante, A_s , es un rectángulo con dimensiones $b \times L$.

Elemento de Tensión en Cortante¹³¹

Un elemento cúbico infinitesimalmente pequeño del material del plano de cortante¹³² (es decir, un elemento de tensión) de cualquier miembro sometido a cortante directo, aparecería como se muestra en la **Figura 72**–(a), con las tensiones cortantes actuando paralelas a las superficies del cubo.

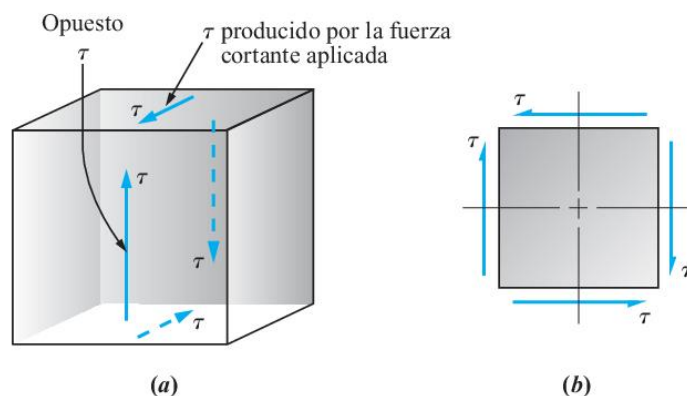


Figura 72. Elemento de Tensión que Muestra las Tensiones Cortantes. (a) Elemento de Tensión Tridimensional. (b) Elemento de Tensión Bidimensional (Fuente: MOTT, 2009).

Por ejemplo, un elemento tomado del plano de cortante de la cuña de la Figura 71, tendría una tensión cortante dirigida a la izquierda sobre su superficie superior. Para que este elemento

¹³¹ Como observación, considere que también es posible definir elementos de tensión para otras situaciones, por ejemplo, para tensiones normales.

¹³² El plano cortante es el plano donde se desarrollan las tensiones tangenciales, se indica en la Figura 69.

esté en equilibrio con respecto a fuerzas horizontales, debe haber una tensión igual dirigida a la derecha sobre la superficie inferior. Ésta es la acción de corte característica del cortante.

Pero, los dos vectores de tensión en las superficies superior e inferior no pueden existir solos, porque el elemento tendería a girar por la influencia del par formado por las dos fuerzas cortantes que actúan en direcciones opuestas. Por lo tanto, para equilibrar dicho par, se desarrolla un par de tensiones cortantes iguales en las caras verticales del elemento de tensión, como se muestra en la mencionada figura. Esta característica de las fuerzas o tensiones cortantes se conoce como **propiedad complementaria del cortante**.¹³³

Por otra parte, y como ya se ha mencionado, con frecuencia se dibuja una vista bidimensional del elemento en lugar de una vista tridimensional, **Figura 72–(b)** (observe que los vectores de tensión en caras adyacentes tienden a encontrarse en las esquinas).

Como nota ampliatoria, se considera importante destacar que, los elementos de tensión son útiles para visualizar la naturaleza de la resistencia interna a la fuerza externamente aplicada,¹³⁴ en los casos en que las tensiones no están distribuidas de manera uniforme sobre una sección, como se ha supuesto en tracción y compresión.

4.2.3. Deformación por Cortante: Deformación Unitaria Cortante

Los primeros análisis de deformación del Capítulo 4, describieron la deformación normal por estar asociada a una tensión de tracción o compresión normal desarrollado en un miembro que soporta carga. De la misma manera, toda tensión cortante tiene asociada una deformación por cortante, comúnmente llamada deformación unitaria cortante.

¹³³ Básicamente, dicha propiedad establece que existe una igualdad de las tensiones cortantes en planos perpendiculares.

¹³⁴ Más específicamente, son útiles para visualizar las tensiones que actúan en un punto dentro de un material sometido a tensión.

Cabe destacar que la deformación unitaria cortante es un único concepto que se puede producir en diferentes sollicitaciones, considere de manera particular el **corte directo**, la **torsión circular recta** y la **flexión simple normal**. De esta manera, la deformación unitaria cortante para el primer caso se analiza en esta sección, mientras que para los otros dos se realiza lo propio en las Secciones 4.3 y 4.4.

En este último sentido, las tensiones cortantes que actúan sobre un elemento de tensión como el de la Figura 72, van acompañados de deformaciones unitarias cortantes. Como ayuda para visualizar esas deformaciones, se observa que las tensiones cortantes no tienen una tendencia a alargar o acortar el elemento en las direcciones x , y , z (como ocurre en tracción o compresión), en otras palabras, las longitudes de los lados del elemento no cambian.¹³⁵ Más bien, las tensiones cortantes producen un cambio en la forma del elemento, **Figura 73-a**). El elemento original, que es un paralelogramo recto se deforma en un paralelogramo oblicuo.¹³⁶

Debido a dicha deformación, cambian los ángulos interiores entre las caras laterales. En efecto, en el elemento bidimensional de la Figura 73-a), puede observarse que el vértice ubicado en el origen de coordenadas, y su vértice opuesto, que eran $\pi/2$ antes de la deformación, se reducen a $\pi/2 - \gamma$. Al mismo tiempo, los dos ángulos interiores restantes aumentan en $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ ¹³⁷ es una medida de la **distorsión** o cambio en la forma del elemento, se denomina **deformación unitaria cortante** y se mide en **radianes**.¹³⁸

¹³⁵ Esta es la diferencia fundamental entre estas tensiones, esto es: las fuerzas cortantes producen una deformación angular o distorsión en la geometría del miembro, al mismo tiempo que la longitud de sus lados no cambia. En cambio, las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales.

¹³⁶ Si se analiza el elemento de tensión tridimensional, el elemento original, que es un paralelepípedo rectangular, se deforma en un paralelepípedo oblicuo y las caras anterior y posterior se transforman en romboides (romboide es aquel paralelogramo oblicuo de lados contiguos desiguales).

¹³⁷ Que en la figura se muestra a un grado exagerado.

¹³⁸ Nota: esta definición de deformación unitaria cortante es la que aparece mayormente en los libros, sin embargo, en sentido estricto, la deformación unitaria cortante se define como la variación experimentada por el ángulo entre dos caras perpendiculares de un elemento diferencial.

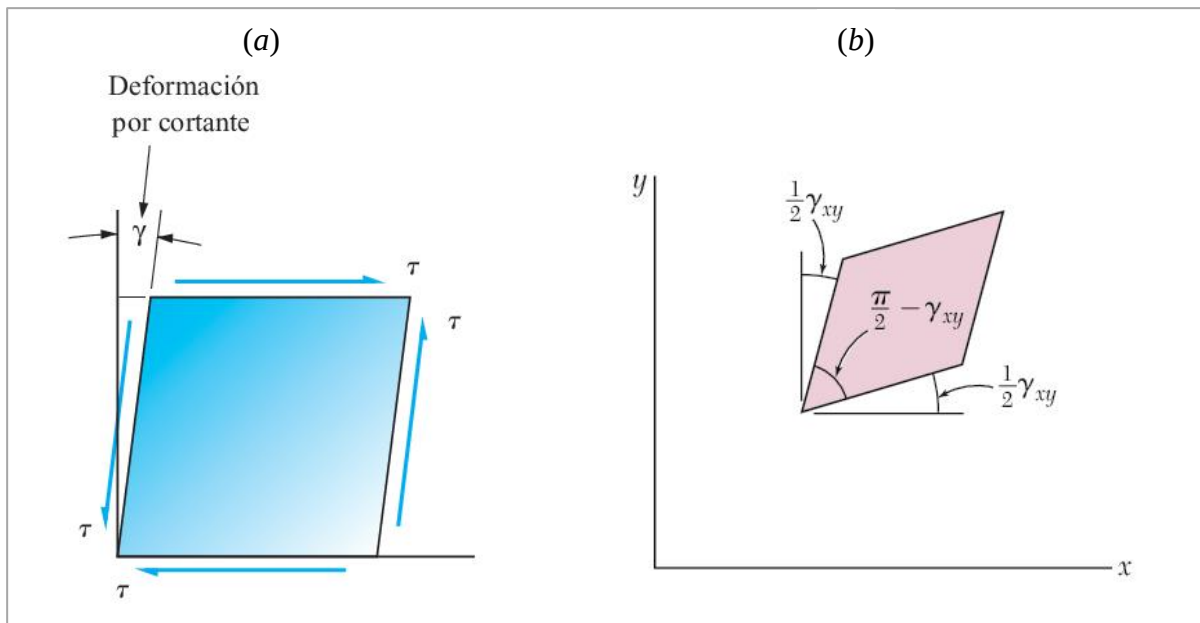


Figura 73. Deformación Unitaria Cortante mostrada en un Elemento de Tensión Bidimensional: (a): Definición Uno (Fuente: MOTT, 2009). (b): Definición Dos (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Una última cuestión debe aclararse respecto de la definición de deformación unitaria cortante que suele aparecer en la literatura:

Al definir la deformación unitaria cortante, algunos autores suponen, en forma arbitraria, que la deformación del elemento se acompaña de una rotación de cuerpo rígido de tal manera que las caras horizontales del elemento no giran. La deformación γ se representa, entonces, por el ángulo a través del cual las otras dos caras han girado (véase Figura 73–a), siendo esta la manera en la que se ha definido en este documento. Otros, en cambio, suponen una rotación de cuerpo rígido tal que las caras horizontales giran $1/2\gamma_{xy}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y las caras verticales a través de $1/2\gamma_{xy}$ en sentido horario (véase **Figura 73–b**).¹³⁹

Finalmente, y como nota ampliatoria, considere que la deformación unitaria cortante recibe varios nombres, a saber: **deformación angular, tangencial, de corte o de cizalladura.**

¹³⁹ Según señalan BEER *et al.*, 2009, como ambas suposiciones son innecesarias y pueden crear confusión, es preferible asociar la deformación a corte con el cambio de ángulo formado por las dos caras, más que con la rotación de una cara dada en condiciones restrictivas.

4.2.4. Deformación Unitaria Cortante en Corte Directo

Tal como lo señala MOTT (2009), en los problemas prácticos se encuentran sólo valores muy pequeños de deformación unitaria cortante y, por lo tanto, las dimensiones del elemento cambian sólo un poco, siendo, en la mayoría de los casos, imperceptibles al ojo humano. Sin embargo, en ciertas situaciones prácticas en las cuales la pieza está sometida a cortante directo, también es posible determinarla. Así pues, un caso de interés es el de una fuerza actuando paralela a una superficie de un elemento como el que se muestra en la **Figura 74**.

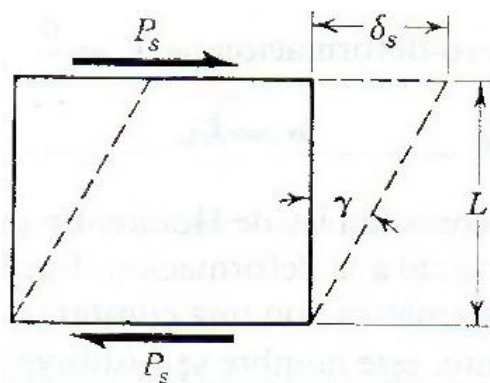


Figura 74. Esquema de un Elemento Sometido a Fuerzas, P_s , Cortantes (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

En la imagen precedente, δ_s es la deformación total del objeto debido a las fuerzas cortantes (donde el subíndice s proviene de *share*). Este proceso de deformación puede imaginarse como producido por el desplazamiento infinitesimal, o resbalamiento, de capas infinitamente delgadas del elemento unas sobre otras, siendo la suma de estos infinitos resbalamientos infinitesimales la deformación transversal total δ_s , en una longitud L . Así pues, una expresión para la deformación unitaria cortante puede obtenerse por inspección visual de la Figura 74, Ec. (22).

$$a) \quad \tan \gamma = \frac{\delta_s}{L}$$

Considerando que γ es siempre muy pequeño; entonces, $\tan \gamma \cong \gamma \therefore$ (22)

$$b) \quad \gamma = \frac{\delta_s}{L} [\text{rad}]$$

Suponiendo que existe una relación lineal entre la deformación unitaria cortante y la tensión cortante, es decir, suponiendo la validez de la ley de Hooke en cortante, se puede obtener una relación para la deformación cortante total y las fuerzas cortantes aplicadas, **Ec. (23)**.

$$a) \quad \tau = G \cdot \gamma [\text{Pa}] \quad (\text{ley de Hooke})$$

Y sustituyendo las expresiones para γ y τ , se tiene: (23)

$$b) \quad \delta_s = \frac{P_s \cdot L}{A_s \cdot G} [\text{m}]$$

En la anterior, P_s es la fuerza cortante que actúa sobre la sección de área A_s que la soporta. Obsérvese la semejanza de este resultado, con la expresión para la deformación elástica de un elemento cargado axialmente.

PROBLEMA RESUELTO 4.11

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a corte directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 75**. **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

Un bloque rectangular de material con un módulo de rigidez $G = 90$ ksi se une a dos placas rígidas horizontales. La placa inferior está fija, mientras que la placa superior se somete a una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ (figura 2.51). Sabiendo que la placa superior se mueve 0.04 in. bajo la acción de la fuerza, halle *a*) la deformación unitaria promedio a corte del material, *b*) la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida sobre la placa superior.

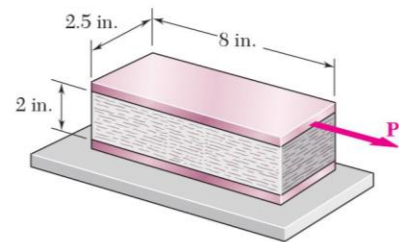


Figura 2.51

a) Deformación unitaria a corte. Se seleccionan ejes coordenados centrados en el punto medio C del borde AB y dirigidos como se muestra en la figura 2.52. De acuerdo con su definición, la deformación unitaria bajo cortante γ_{xy} es igual al ángulo formado por la vertical y por la línea CF que une los puntos medios de los bordes AB y DE . Advirtiéndose que es un ángulo muy pequeño y recordando que debe expresarse en radianes, se escribe

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in.}}{2 \text{ in.}} \quad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

b) Fuerza ejercida sobre la placa superior. Primero se determina el esfuerzo cortante τ_{xy} en el material. Utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria, se tiene que

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (90 \times 10^3 \text{ psi})(0.020 \text{ rad}) = 1\,800 \text{ psi}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior es, por lo tanto,

$$P = \tau_{xy} A = (1\,800 \text{ psi})(8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.}) = 36.0 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P = 36.0 \text{ kips}$$

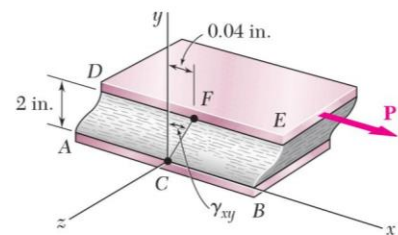


Figura 2.52

Figura 75. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.11 (Fuente: BEER et al., 2009).

Observaciones

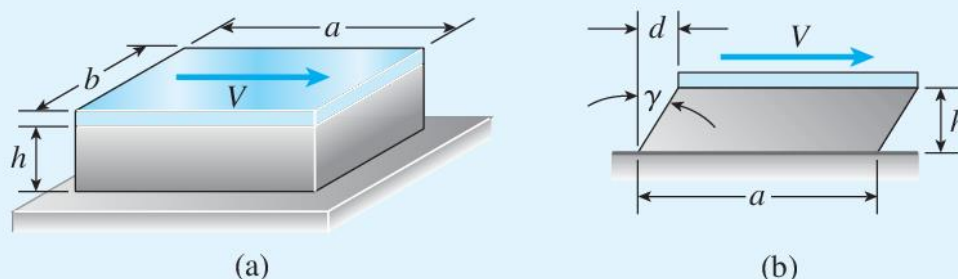
- Observe que el subíndice xy de γ_{xy} , indica que también pueden existir deformaciones unitarias cortantes γ_{yz} y γ_{zx} (y por tanto, también tensiones), correspondientes a los planos yz y zx , respectivamente. Estas tensiones y deformaciones pueden existir simultáneamente, si se considera una **situación más general de tensión**, la cual estaría asociada, lógicamente, a la **aplicación multiaxial de cargas** sobre el elemento. He incluso, dichas tensiones y deformaciones cortantes, pueden estar combinadas con tensiones y deformaciones normales, este conjunto de efectos, mediante el principio de superposición, arroja un grupo de ecuaciones que representan la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición más generalizada de tensiones.
- Advierta, como se ha dicho, que la determinación de la deformación unitaria cortante tiene aplicación práctica en **ciertos casos**, tal como las **juntas pegadas**. En otros, como puede ser el de un pasador sometido a cortante, no tiene sentido dicha determinación, al menos, no tiene sentido práctico.

PROBLEMA RESUELTO 4.12

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a corte directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 76 y 77**. **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

Una placa de soporte del tipo empleado para sostener máquinas y traveses de puentes se compone de un material linealmente elástico (por lo general un elastómero como el caucho) cubierto con una placa de acero (figura 1.53a). Suponga que el espesor del elastómero es h , que las dimensiones de la placa son $a \times b$ y que la placa está sometida a una fuerza cortante horizontal V .

Obtenga fórmulas para el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el elastómero y el desplazamiento horizontal d de la placa (figura 1.53b).



Solución

Suponga que los esfuerzos cortantes en el elastómero están distribuidos uniformemente en todo el volumen del mismo. Entonces el esfuerzo cortante sobre cualquier plano horizontal a través del elastómero es igual a la fuerza cortante V dividida entre el área ab de la placa (figura 1.53a):

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{ab} \quad \leftarrow (1.23)$$

La deformación unitaria cortante correspondiente (de la ley de Hooke para corte; ecuación 1.21) es

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{prom}}}{G_e} = \frac{V}{abG_e} \quad (1.24)$$

donde G_e es el módulo de corte del material elastomérico. Por último, el desplazamiento horizontal d es igual a $h \tan \gamma$ (de la figura 1.53b):

Figura 76. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.12 (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{abG_e} \right) \quad \leftarrow (1.25)$$

En la mayoría de las situaciones prácticas la deformación unitaria por cortante γ es un ángulo pequeño, y en esos casos $\tan \gamma$ se puede sustituir por γ , y se obtiene

$$d = h\gamma = \frac{hV}{abG_e} \quad \leftarrow (1.26)$$

Las ecuaciones (1.25) y (1.26) producen resultados aproximados del desplazamiento horizontal de la placa, debido a que se basan en el supuesto de que el esfuerzo cortante y la deformación unitaria cortante son constantes en todo el volumen del material elastomérico. En realidad, el esfuerzo cortante es cero en los bordes del material (porque no hay esfuerzos cortantes sobre las caras verticales libres) y, por lo tanto, la deformación del material es más compleja que la que se representa en la figura 1.53b. Sin embargo, si la longitud a de la placa es grande en comparación con el espesor h del elastómero, los resultados anteriores son satisfactorios para fines de diseño.

Figura 77. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.12 (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

Observaciones

- Note como este autor insiste en que lo que se está calculando es un valor promedio de la tensión cortante.
- Lea con detenimiento cada comentario de este problema.

PROBLEMA RESUELTO 4.13

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a corte directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 78 y 79**. **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

Problema de ejemplo 1-6 La fuerza en el eslabón en la junta de pasador simple, mostrada en la figura 1-15, es de 3550 N. El pasador tiene un diámetro de 10.0 mm; calcule el esfuerzo cortante en el pasador.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en el pasador.

Dada $F = 3550 \text{ N}$; $D = 10.0 \text{ mm}$

Análisis El pasador se encuentra sometido a cortante directo y una de sus secciones transversales resiste toda la fuerza aplicada (cortante simple). Use la ecuación (1-4).

Resultados El área expuesta a cortante, A_s , es

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (10.0 \text{ mm})^2}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

Luego el esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550 \text{ N}}{78.5 \text{ mm}^2} = 45.2 \text{ N/mm}^2 = 45.2 \text{ MPa}$$

Comentario Este esfuerzo se muestra en la figura 1-17 en una sección cortada del pasador.

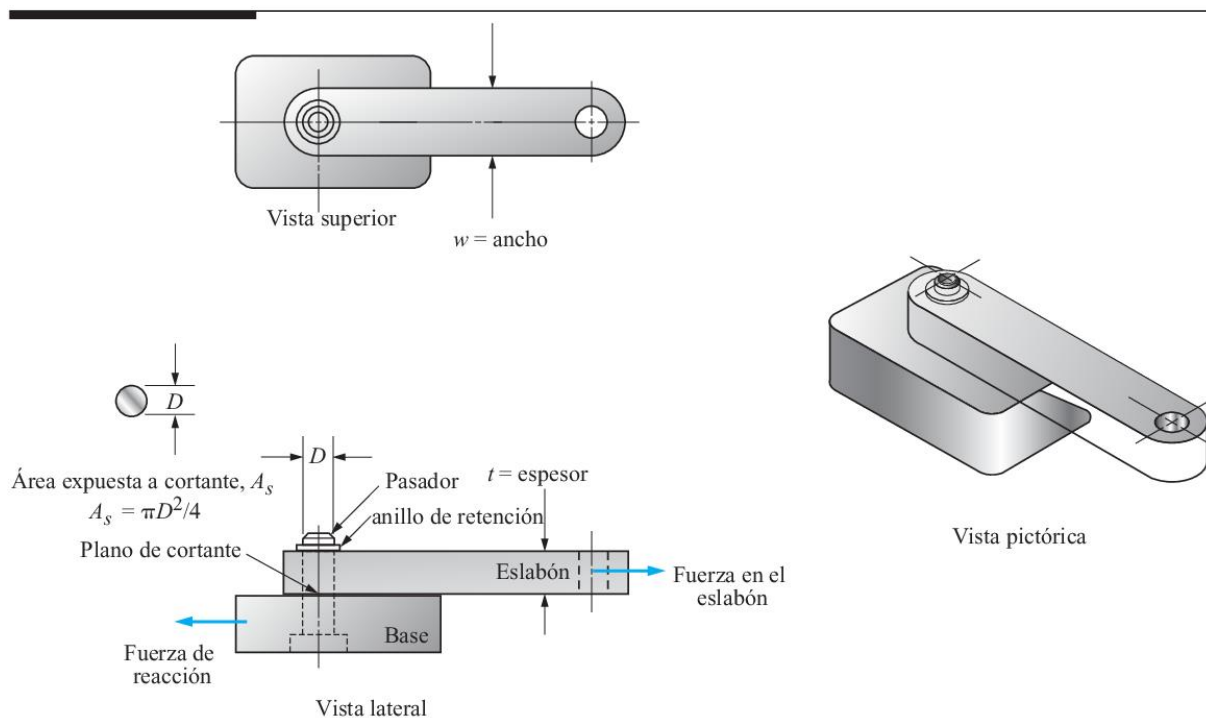


FIGURA 1-15 Conexión de pasador que ilustra el cortante simple.

Figura 78. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.13 (Fuente: MOTT, 2009).

FIGURA 1-17

Esfuerzo cortante directo en un pasador.

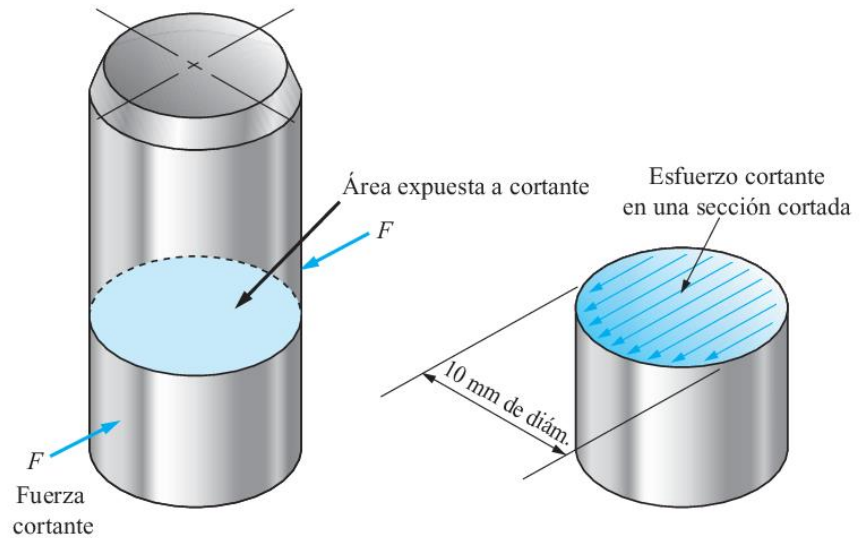


Figura 79. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.13 (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- En este caso, el pasador normalmente se diseña de modo que la tensión cortante al que está siendo sometido debido a la fuerza externa, quede por debajo del nivel que haría que el pasador falle. En la Sección 4.2.6 se ha de tratar sobre niveles de tensiones admisibles.

PROBLEMA RESUELTO 4.14

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a corte directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 80**. **Nota.** Para este autor esfuerzo = tensión.

Problema de ejemplo 1-7 La junta de pasador que se acaba de analizar fue diseñada como se muestra en la figura 1-16; calcule el esfuerzo cortante en el pasador.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo cortante en el pasador.

Dada $F = 3550 \text{ N}$; $D = 10.0 \text{ mm}$ (como en el problema del ejemplo 1-6)

Análisis El pasador se encuentra sometido a cortante directo y dos de sus secciones transversales resisten la fuerza aplicada (cortante doble). Use la ecuación (1.4).

Resultados El área expuesta a esfuerzo cortante, A_s , es

$$A_s = 2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = 2 \left[\frac{\pi (10.0 \text{ mm})^2}{4} \right] = 157 \text{ mm}^2$$

El esfuerzo cortante en el pasador es

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{3550 \text{ N}}{157 \text{ mm}^2} = 22.6 \text{ N/mm}^2 = 22.6 \text{ MPa}$$

Comentario El esfuerzo cortante resultante es $\frac{1}{2}$ del valor encontrado para cortante simple.

FIGURA 1-16

Conexión de pasador que ilustra el cortante doble.

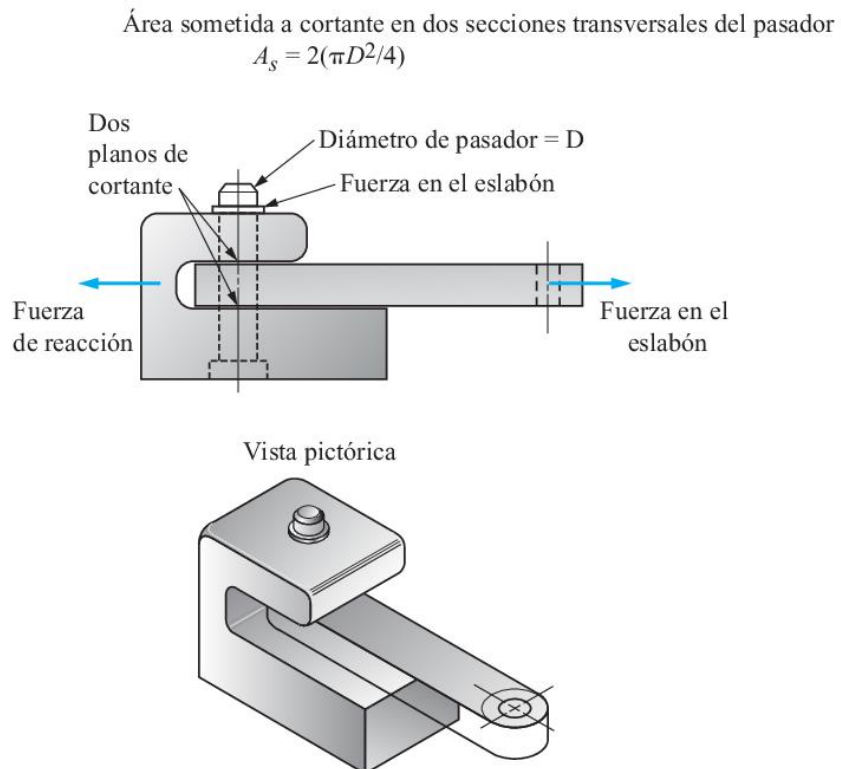


Figura 80. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.14 (Fuente: MOTT, 2009).

4.2.5. Tensión de Apoyo o Aplastamiento

Cuando un cuerpo sólido está apoyado en otro y transfiere una carga P a él, en la superficie de contacto¹⁴⁰ se desarrolla la forma de tensión conocida como tensión de apoyo. Similar a la tensión de compresión,¹⁴¹ la tensión de apoyo, llamada σ_b (donde el subíndice “ b ” proviene de *bearing*), mide la tendencia de la fuerza aplicada P de aplastar el miembro sustentante. Esta tensión se calcula como se indica en la **Ec. (24)**, en la cual, A_b es el área de apoyo.

$$\sigma_b = \frac{\text{carga aplicada}}{\text{área de apoyo}} = \frac{P}{A_b} [\text{Pa}] \quad (24)$$

Tensiones de Apoyo en Superficies Planas. En esta situación, el área de apoyo es simplemente el área sobre la cual la carga se transfiere de un miembro al otro. Si las dos partes tienen áreas diferentes, se utiliza el área menor. El requerimiento, en este caso, es que los materiales que transmiten las cargas deben permanecer casi rígidos y planos para que conserven su capacidad de soportar dichas cargas.

A modo de ejemplo, considere la **Figura 81** que muestra el caso de la construcción de un edificio donde la tensión de apoyo es importante. Una columna de acero hueca cuadrada de 4.00 in descansa sobre una gruesa placa de acero cuadrada de 6.00 in. La placa descansa sobre una pila de concreto, la que a su vez descansa sobre una base de grava. Estas áreas sucesivamente más grandes son necesarias para limitar las tensiones de apoyo a niveles razonables para los materiales implicados.

¹⁴⁰ Esto, a diferencia de la tensión de compresión que existe en el interior de los cuerpos bajo la acción de cargas exteriores.

¹⁴¹ Este tipo de tensión, bien puede considerarse con un caso particular de compresión, tal como lo señalan SINGER y PYTEL (2008), sin embargo, en la literatura también es tratada como una tensión aparte de las ya estudiadas. En este material didáctico, en particular, se desarrolla en esta sección por estar asociado al cortante directo en ciertos aplicativos de interés (lo cual también es coherente con algunos autores), como una unión remachada o empernada de una estructura reticulada.

Problema de ejemplo 3-17

Refiérase a la figura 3-12. El tubo de acero cuadrado soporta una fuerza de compresión axial de 30 000 lb. Calcule el esfuerzo de compresión en el tubo y el esfuerzo de apoyo entre cada superficie en contacto. Considere que la pila de concreto pesa 338 lb.

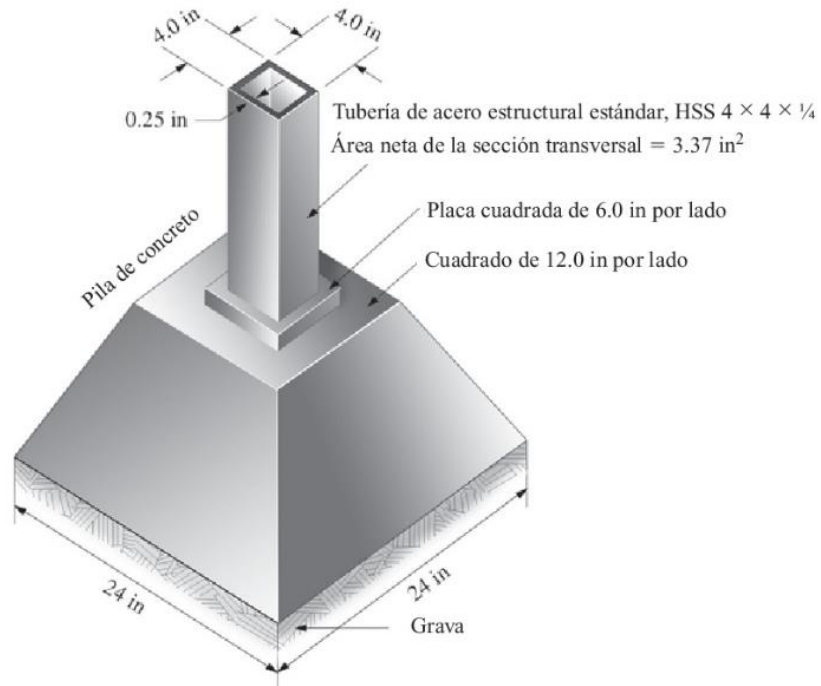
Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo de compresión en el tubo. Calcular el esfuerzo de apoyo en cada superficie.

Datos Carga $F = 30\,000$ lb de compresión. Peso de la pila = 338 lb. La geometría de los miembros se observa en la figura 3-12.

FIGURA 3-12

Ejemplo de esfuerzo de apoyo.



Análisis Tubo: Utilice la fórmula del esfuerzo de compresión directo. Esfuerzos de apoyo: Utilice la ecuación (3-20) para cada par de superficies en contacto.

Resultados *Esfuerzo de compresión en el tubo:* (área = $A = 3.37$ in²)

$$\sigma = F/A = 30\,000 \text{ lb}/3.37 \text{ in}^2 = 8902 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre el tubo y la placa cuadrada. Éste será igual en magnitud al esfuerzo de compresión en el tubo porque el área de sección transversal del tubo es el área menor en contacto con la placa. Entonces,

$$\sigma_b = 8902 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre la placa y la cara superior de la pila de concreto. El área de apoyo es la de la placa cuadrada porque es el área menor en la superficie.

$$\sigma_b = F/A_b = 30\,000 \text{ lb}/(6.00 \text{ in})^2 = 833 \text{ psi}$$

Esfuerzo de apoyo entre la pila y la grava. El área de apoyo es la de un cuadrado de 24 in por lado. Agregue 338 lb por el peso de la pila.

$$\sigma_b = F/A_b = 30\,338 \text{ lb}/(24.00 \text{ in})^2 = 52.7 \text{ psi}$$

Figura 81. Ejemplo Conceptual del Cálculo de la Tensión de Apoyo en Áreas Planas (Fuente: MOTT, 2009).

Tensiones de Apoyo en Juntas de Pasador. Frecuentemente, en diseño mecánico y estructural se utilizan pasadores cilíndricos para conectar componentes entre sí. En la **Figura 82** se muestra el diseño de una conexión como ésta. Cuando se transfiere una carga a través del pasador, se deberá calcular la tensión de apoyo entre el pasador y cada uno de los miembros en contacto con él. En este caso, tenga en cuenta también, que la presión del remache contra las paredes del orificio no es constante, variando desde cero en los puntos en que desaparece el contacto, hasta un máximo en el centro de la parte apoyada. Para salvar las dificultades inherentes a esta distribución variable de tensiones, se suele suponer que la tensión de contacto se distribuye uniformemente sobre un área más pequeña: la superficie proyectada, como se explica enseguida.

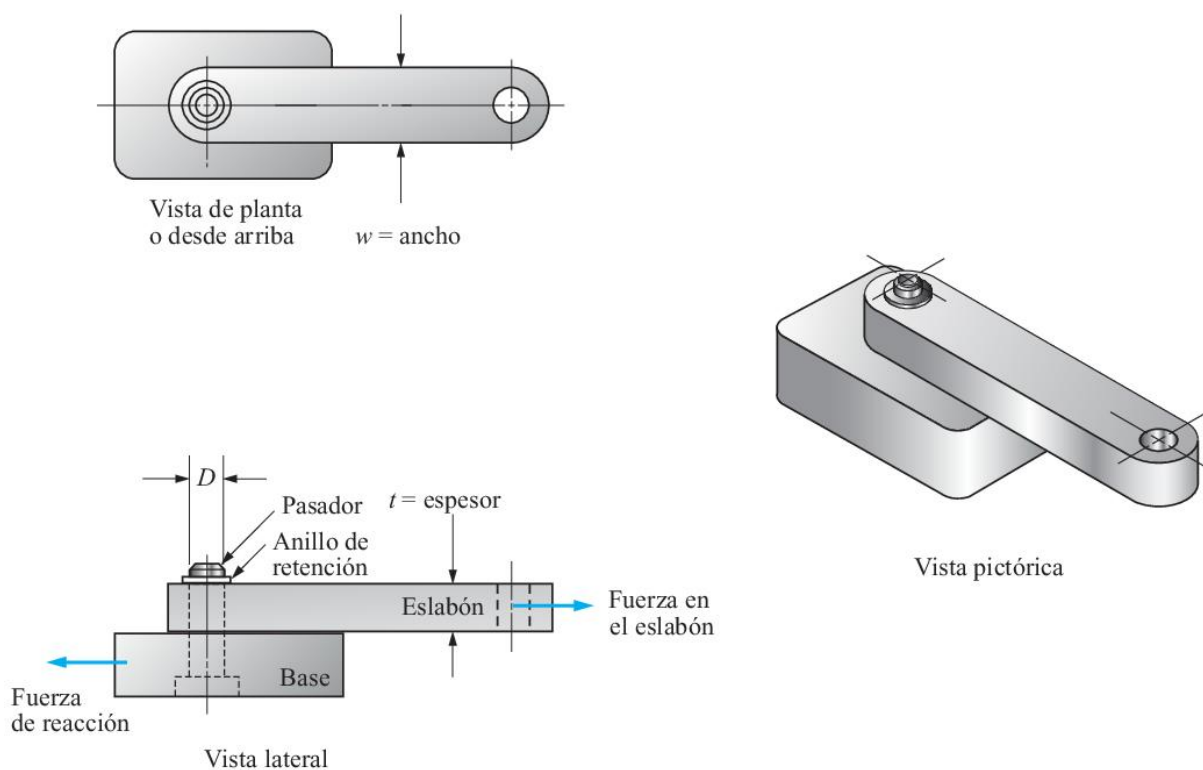


FIGURA 3-13 Conexión de pasador.

Figura 82. Tensiones de Apoyo en Conexiones de Pasador (Fuente: MOTT, 2009).

De esta manera, el área de apoyo efectiva para el pasador cilíndrico en un barreno ajustado requiere que se utilice el **área proyectada**, calculada como el producto del diámetro (D) del

pasador por la longitud (L) de la superficie en contacto, **Ec. (25)**. En la **Figura 83** se presenta un ejemplo resuelto de aplicación.

$$A_b = D \cdot L \left[\text{m}^2 \right] \quad (25)$$

Problema de ejemplo 3-18

Referirse a la figura 3-13. Calcule el esfuerzo de apoyo entre el pasador de 10.0 mm de diámetro y el barreno en el eslabón. La fuerza aplicada al eslabón es de 3550 N. El espesor del eslabón es de 15.0 mm y su ancho de 25.0 mm.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo de apoyo entre las superficies en contacto del pasador y el interior del barreno en el eslabón.

Datos Carga = $F = 3550 \text{ N}$; $t = 15.0 \text{ mm}$; $w = 25.0 \text{ mm}$; $D = 10.0 \text{ mm}$. La geometría de los miembros se observa en la figura 3-13.

Análisis Esfuerzos de apoyo: Utilice la ecuación (3-20) para cada par de superficies en contacto. Use el área proyectada del barreno como área de apoyo.

Resultados Entre el pasador y el eslabón: $L = t$ = espesor del eslabón. Con la ecuación (3-21),

$$A_b = D \times t = (10.0 \text{ mm})(15.0 \text{ mm}) = 150 \text{ mm}^2$$

Por consiguiente, el esfuerzo de apoyo es

$$\sigma_b = \frac{3550 \text{ N}}{150 \text{ mm}^2} = 23.7 \text{ N/mm}^2 = 23.7 \text{ MPa}$$

Figura 83. Ejemplo Conceptual del Cálculo de la Tensión de Apoyo en Pasadores Cilíndricos (Fuente: MOTT, 2009).

Para cerrar esta parte, tenga en cuenta que ambos ejemplos conceptuales presentados en este apartado, han sido introducidos con el fin de favorecer la comprensión del concepto y forma de cálculo de este tipo de tensión, sin embargo, en ninguno de ellos se ha hecho un análisis de diseño del elemento en cuestión, ya que esto se ha de abordar a continuación.

4.2.6. Diseño de Elementos

En este punto, se han de examinar los aspectos de diseño de corte directo y tensión de aplastamiento en algunos aplicativos simples de interés, mayormente relacionados al alcance del curso,¹⁴² a saber: elementos de fijación como pasadores (o pernos) cilíndricos, placas de apoyo o bloques de soporte de elementos estructurales, uniones de piezas, entre otras.

Tensión de Apoyo (o Aplastamiento) Admisible

Esta sección describe algunos casos especiales que implican diferentes materiales y diferentes geometrías de las superficies en contacto. Se analiza el acero y el aluminio. Es importante destacar que los criterios y/o métodos de determinación de la tensión de apoyo admisible aquí expuestos, están tomados de la literatura referenciada y pueden no ser los únicos.

Concretamente, y tal como lo indica MOTT (2009), en algunas aplicaciones se utiliza una tensión de apoyo admisible, $\sigma_{adm.}$,¹⁴³ basada en la tensión en el punto de cedencia (σ_Y) o la resistencia a la cedencia (σ_{YS}) en tracción, y la **fórmula de dimensionamiento** adopta la forma de la **Ec. (26-a)**,¹⁴⁴ donde n es el coeficiente de seguridad. Alternativamente, la (26-a) puede transformarse en la **(26-b)** al considerar que $C = 1/n$, siendo C es un coeficiente especificado.

Por otro lado, si las partes en contacto tienen resistencias diferentes, se utilizará la resistencia a la cedencia más baja. En cualquier caso, la tensión de apoyo real (o de trabajo, $\sigma_{trab.}$)¹⁴⁵ debe ser menor que la tensión de apoyo admisible, **Ec. (26-c)**.

¹⁴² También hacen parte de esta serie de ejercicios aquellos problemas que muestren o destaquen algún aspecto relevante o particular de diseño. Porsupuesto, es evidente que no es posible ser exhaustivo en la presentación de aplicativos que abarquen todas las variantes.

¹⁴³ Advierta que la tensión admisible de apoyo, y, por tanto, la tensión de apoyo, son tensiones normales. Recuerde que, como se ha dicho, este tipo de tensión, bien puede considerarse con un caso particular de compresión.

¹⁴⁴ Es conveniente aclarar que, por simplicidad en la presentación de la ecuación 26-a, σ_Y puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia.

¹⁴⁵ La tensión de trabajo es la que se ha definido en la ecuación (24).

Por último, es conveniente aclarar dos cuestiones, la primera, es que las fórmulas 26 *a* y *b* son expresiones generales que se han de particularizar luego para el acero y el aluminio. La segunda, es que en algunas aplicaciones es más conveniente especificar una carga de apoyo permisible, R_o , en tal caso la carga de contacto real debe ser más baja que la carga de apoyo permisible.

$$\begin{aligned} a) \quad \sigma_{\text{adm.}} &= \frac{\sigma_Y}{n} [\text{Pa}] \\ b) \quad \sigma_{\text{adm.}} &= C \cdot \sigma_Y [\text{Pa}] \\ c) \quad \sigma_{\text{adm.}} &\geq \sigma_{\text{trab.}} = \frac{P}{A_b} [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{26}$$

Acero. De acuerdo con el AISC, la tensión de apoyo permisible en acero para **superficies planas** o sobre el **área proyectada de pasadores** insertados en barrenos fresados, taladrados o perforados, es la indicada en la **Ec. (27)**.¹⁴⁶

$$\sigma_{\text{adm.}} = 0,90 \cdot \sigma_Y [\text{Pa}] \tag{27}$$

Si en lugar de una superficie plana se utilizan rodillos o balancines (para permitir que se dilate el miembro) para soportar una viga u otro miembro que soporta carga, la tensión de apoyo depende del diámetro del rodillo o balancín, d , y de su longitud, L .¹⁴⁷ Si bien este tipo de tensión de aplastamiento no es tema de desarrollo, se considera pertinente mencionarlo para propiciar

¹⁴⁶ Note que la forma de esta ecuación se deriva de la (26-*b*).

¹⁴⁷ En este caso, la tensión es inherentemente muy elevada porque la carga es soportada por sólo un área rectangular pequeña. Teóricamente, el contacto entre la superficie plana y el rodillo es simplemente una línea, pero por la elasticidad de los materiales, el área real es rectangular.

una visión algo más general y para destacar ciertas diferencias respecto del aplastamiento de una superficie plana, tal como ha de quedar evidenciado en los siguientes problemas de ejemplo.

Aluminio. La Asociación del Aluminio (AA)¹⁴⁸ basa las tensiones de apoyo admisibles en aleaciones de aluminio para **superficies planas** y **pasadores**, en la resistencia a la cedencia de apoyo, σ_{bY} , Ec. (28-a).¹⁴⁹ Los valores mínimos de σ_{bY} se enlistan en los códigos del AA, pero muchas referencias no incluyen esta información. Sin embargo, un análisis de los datos muestra que para la mayoría de las aleaciones de aluminio, σ_{bY} es aproximadamente 1,60 veces más grande que la resistencia a la cedencia a la tracción (σ_Y). En ese caso la (28-a) puede ser reformulada a la (28-c). Se ha de utilizar esta forma para la tensión de apoyo admisible para el aluminio.

$$\begin{aligned} a) \quad \sigma_{adm.} &= \frac{\sigma_{bY}}{2,48} [\text{Pa}] \\ b) \quad \sigma_{adm.} &= \frac{1,60 \cdot \sigma_Y}{2,48} [\text{Pa}] \therefore \\ c) \quad \sigma_{adm.} &= 0,65 \cdot \sigma_Y [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{28}$$

Hay que recalcar que las ecuaciones (27) y (28-c) son exclusivas para los materiales y geometrías de superficies de contacto descritas. De ellas es relevante resaltar que se utiliza la tensión en el punto de cedencia (o la resistencia a la cedencia) a tracción del material (MOTT, 2009), pese a que la tensión de apoyo es una tensión de compresión. Sin embargo, esto es válido

¹⁴⁸ Asociación del Aluminio (AA, *Aluminum Association*), es un organismo que se encarga de estudiar las normas para el diseño y construcción de edificios, puentes y estructuras similares que utilizan aluminio.

¹⁴⁹ También en este caso, σ_{bY} puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia. Además, advierta que esta propiedad se obtiene de un ensayo específico no abordado en este documento.

ya que el acero y el aluminio son **materiales isotrópicos** en los cuales las propiedades a tracción y compresión son prácticamente idénticas.¹⁵⁰

En este último aspecto, hay que decir que en los casos en los que se trate con el diseño de **materiales anisotrópicos**, como la madera, es responsabilidad del diseñador investigar si el producto o sistema que está diseñando es controlado por códigos o estándares, en caso afirmativo, son estos los que han de definir, tanto, la tensión de referencia que se debe utilizar para calcular la tensión de apoyo admisible, como el factor de seguridad. Sin embargo, en algunas aplicaciones, por ejemplo, al considerar el diseño por tensión de aplastamiento entre la superficie de contacto de una barra de madera y uno o más pernos de una unión de barras de un reticulado, dicho diseño puede llevarse a cabo utilizando el valor la resistencia a la cedencia a compresión paralela a las fibras, en las ecuaciones (26).

¹⁵⁰ Esta característica ya se ha analizado con anterioridad al desarrollar las propiedades mecánicas de los materiales.

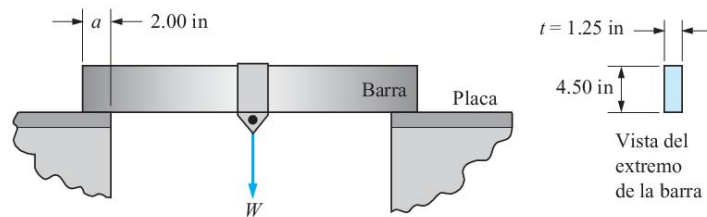
PROBLEMA RESUELTO 4.15

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el diseño basado en tensión de apoyo de superficies planas y pasadores cilíndricos, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 84**. **Referencias:** esfuerzo = tensión, esfuerzo de apoyo de diseño = tensión de apoyo admisible; S_y = tensión en el punto de cedencia en tracción.

Problema de ejemplo 3-19

Una viga corta, mostrada en la figura 3-15, se fabricó con una barra de acero rectangular de 1.25 in de espesor y 4.50 in de altura. En cada extremo, la longitud apoyada sobre una placa de acero es de 2.00 in. Si tanto la barra como la placa son de acero estructural ASTM A36, calcular la carga máxima permisible, W , que podría ser soportada por la viga, basándose sólo en el esfuerzo de apoyo en los extremos. La carga está centrada entre los apoyos.

FIGURA 3-15 Viga del problema de ejemplo 3-19.



Solución

Objetivo Calcular la carga permisible, W , con base en sólo el esfuerzo de apoyo.

Datos La carga mostrada en la figura 3-15.

Área de apoyo en cada extremo: 2.00 in por 1.25 in (es decir, $A_b = ta$).

Material: acero estructural ASTM A36 ($s_y = 36\,000$ psi).

Análisis Esfuerzo de apoyo de diseño: $\sigma_{bd} = R_a/A_b$

Donde R_a es la reacción permisible en el apoyo y $R_a = W/2$.

Ecuación de esfuerzo de diseño (3-22):

$$\sigma_{bd} = 0.90s_y = 0.90(36\,000 \text{ psi}) = 32\,400 \text{ psi}$$

Entonces, $R_a = A_b\sigma_{bd}$ y $W = 2R_a$.

Resultados Área de apoyo: $A_b = ta = (1.25 \text{ in})(2.00 \text{ in}) = 2.50 \text{ in}^2$.

$R_a = A_b\sigma_{bd} = (2.50 \text{ in}^2)(32\,400 \text{ lb/in}^2) = 81\,000 \text{ lb}$.

$W = 2R_a = 2(81\,000 \text{ lb}) = 162\,000 \text{ lb} = 162 \text{ kip}$

Comentario Ésta es una carga muy grande, por lo que es improbable que el apoyo sea el modo de falla de esta viga.

Figura 84. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.15 (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Observe que se está calculando $W_{\text{máx.}}$ solo considerando la tensión de apoyo, es decir, no se toma en cuenta la tensión cortante admisible, la tensión de tracción o compresión admisibles debida a la flexión, o la deformación permisible de la viga.
- Como ya se ha destacado en otros problemas, note que si se plantea la desigualdad

$\sigma_{\text{adm.}} \geq \frac{R_a}{A_b} = \frac{\frac{W}{2}}{t \cdot a}$, al despejar para W , es evidente que esta cantidad tiene que ser el valor máximo, tal como indica la consigna.

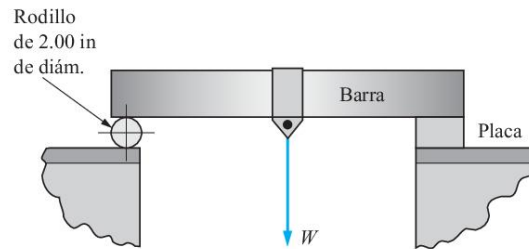
PROBLEMA RESUELTO 4.16

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el diseño basado en tensión de apoyo de superficies planas y pasadores cilíndricos, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 85**. **Referencias:** esfuerzo = tensión, esfuerzo de apoyo de diseño = tensión de apoyo admisible; S_y = tensión en el punto de cedencia en tracción.

Problema de ejemplo 3-20

Una propuesta alternativa para soportar la barra descrita en el ejemplo 3-19 se muestra en la figura 3-16. Para permitir la dilatación de la viga, el extremo izquierdo está apoyado sobre un rodillo de 2.00 in de diámetro hecho de acero CD AISI 1040. Calcule la carga permisible, W , para esta configuración.

FIGURA 3-16 Viga del problema de ejemplo 3-20.



Solución

Objetivo Calcular la carga permisible sobre la viga.

Datos La carga mostrada en la figura 3-16.
Ancho de la viga ($t = 1.25$ in) descansa en el rodillo ($d = 2.00$ in).
Material de la viga: acero estructural ASTM A36 ($s_y = 36$ ksi).
Material del rodillo: AISI 1040 CD ($s_y = 71$ ksi).

Análisis En el apoyo de rodillo, se aplica la ecuación (3-23) para determinar la carga permisible. Observe que $W = 2R_a$. Utilice $s_y = 36$ ksi, el más débil de los dos materiales en contacto.

Resultados La carga de apoyo permisible es

$$R_a = (36 - 13) (0.03) (2.00) (1.25) = 1.73 \text{ kip.}$$

Ésta sería la reacción permisible en cada apoyo. La carga total es

$$W = 2R_a = 2(1.73 \text{ kip}) = 3.45 \text{ kip.}$$

Comentario Observe que ésta es significativamente más baja que la carga permisible para las superficies encontradas en el ejemplo 3-19. El esfuerzo de apoyo en el rodillo, ciertamente, puede limitar la carga que podría ser soportada con seguridad.

Figura 85. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.16 (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Tal como ya ha sido aclarado en el desarrollo teórico, tenga cuenta que las ecuaciones de diseño que se utilizan en este ejemplo no han sido desarrolladas o presentadas en este documento, tal como se hizo para los casos de superficies planas y pasadores cilíndricos. Sin embargo, y con base en la lectura de la teoría desarrollada, es conveniente que el lector haga un **análisis minucioso** del procedimiento, resultados y comentario.

PROBLEMA RESUELTO 4.17

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el diseño basado en tensión de apoyo de superficies planas y pasadores cilíndricos, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 86** y solución en la **Figura 87**. **Referencias:** esfuerzo = tensión, esfuerzo de apoyo de diseño = tensión de apoyo admisible; S_y = tensión en el punto de cedencia en tracción.

Problema de ejemplo 3-21

Se utiliza una barra rectangular como soporte colgante, como se muestra en la figura 3-17. Calcule la carga permisible basada en el esfuerzo de apoyo en la conexión de pasador si la barra y la horquilla son de aluminio 6061-T4. El pasador se tiene que hacer de un material más resistente.

FIGURA 3-17

Soporte colgante del problema de ejemplo 3-21.

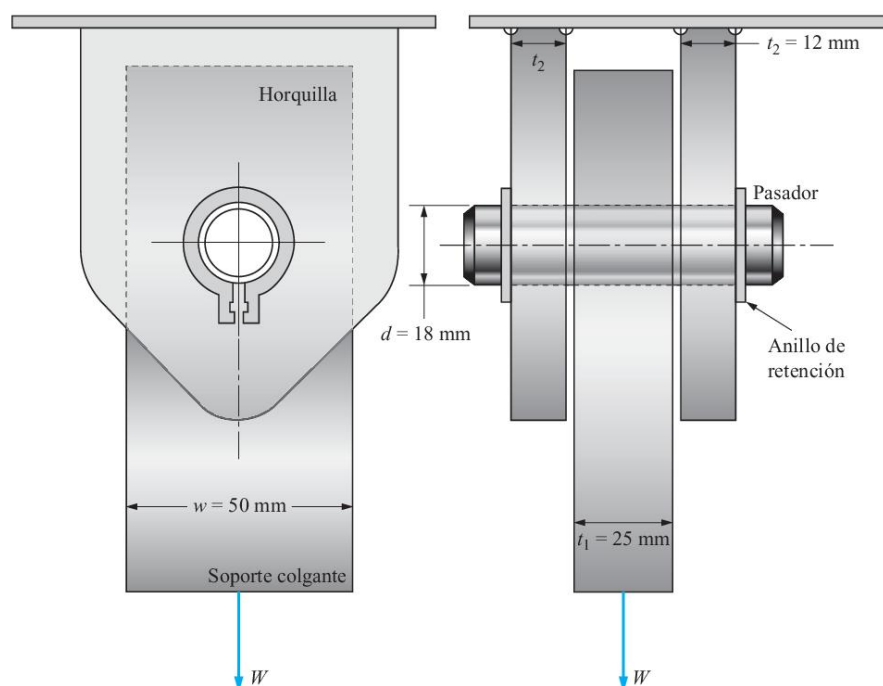


Figura 86. Consigna Problema Resuelto 4.17 (Fuente: MOTT, 2009).

Solución

Objetivo	Calcular la carga permisible en el soporte colgante.
Datos	La carga mostrada en la figura 3-17. Diámetro del pasador = $d = 18$ mm. Espesor del soporte colgante = $t_1 = 25$ mm; ancho = $w = 50$ mm. Espesor de cada una de las partes de la horquilla = $t_2 = 12$ mm. Material del soporte y horquilla: aluminio 6061-T4 ($s_y = 145$ MPa). El pasador es más resistente que el soporte u horquilla.
Análisis	Para pasadores cilíndricos insertados en barrenos ajustados, el esfuerzo de apoyo se basa en el área <i>proyectada</i> sometida a esfuerzo de apoyo, obtenida con el diámetro del pasador multiplicado por la longitud sobre la cual la carga está distribuida. $\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{dL}$ Sea $\sigma_b = \sigma_{bd} = 0.65s_y$ para aluminio 6061-T4. Área de apoyo del soporte colgante: $A_{b1} = t_1d = (25 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 450 \text{ mm}^2$. Esta área soporta toda la carga, W . Para cada lado de la horquilla: $A_{b2} = t_2d = (12 \text{ mm})(18 \text{ mm}) = 216 \text{ mm}^2$. Esta área soporta la mitad de la carga aplicada, $W/2$. Como A_{b2} es menor que $\frac{1}{2}$ de A_{b1} , el apoyo en la horquilla prevalece.
Resultados	$\sigma_{bd} = 0.65 s_y = 0.65 (145 \text{ MPa}) = 94.3 \text{ MPa} = 94.3 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_b = \sigma_{bd} = (W/2)/A_{b2}$ Entonces, $W = 2(A_{b2})(\sigma_{bd}) = 2(216 \text{ mm}^2)(94.3 \text{ N/mm}^2) = 40\,740 \text{ N}$.
Comentario	Esta es una fuerza muy grande y habrá que analizar otros modos de falla del soporte colgante. La falla podría ocurrir por corte en el pasador o por falla de tensión del soporte colgante o la horquilla.

Figura 87. Solución Problema Resuelto 4.17 (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Analice minuciosamente la solución de este problema y compárela con la teoría desarrollada.

Tensión Cortante Admisible

Materiales Dúctiles. Cuando los miembros se someten a tensiones cortantes como se ha analizado con anterioridad, la tensión cortante admisible, $\tau_{adm.}$, está basada en la resistencia a la cedencia en cortante, τ_{YS} , y la **fórmula de dimensionamiento** adopta la forma de la Ec. (29-a). Como siempre, n es el coeficiente de seguridad.

Definición: la **resistencia a la cedencia en cortante**, τ_{YS} , es el nivel de tensión cortante al cual el material exhibiría el fenómeno de cedencia. Esto es, el nivel al cual sufriría una significativa cantidad de deformación por cortante con poco o ningún incremento de la carga de cortante (MOTT, 2009).

Por otra parte, prácticamente todos los diseños de miembros sometidos a cortante requerirían que la tensión cortante de trabajo estuviera por debajo del valor de la admisible, Ec. (29-b). Donde, P_s es la fuerza cortante que actúa sobre la sección de área A_s .

$$\begin{aligned} a) \quad \tau_{adm.} &= \frac{\tau_{YS}}{n} [\text{Pa}] \\ b) \quad \tau_{adm.} &\geq \tau_{trab.} = \frac{P_s}{A_s} [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{29}$$

Desde luego, si los valores de resistencia a la cedencia a cortante están disponibles, pueden ser utilizados en la ecuación de tensión admisible anterior. Desafortunadamente, esos valores con frecuencia no se reportan y es necesario recurrir a **estimaciones**. Para la resistencia a la cedencia a cortante, una estimación frecuentemente utilizada es la indicada en la **Ec. (30)**.¹⁵¹ Esta relación se deriva de la observación de una prueba de tracción típica en la cual la tensión

¹⁵¹ Nuevamente, en la (30), σ_Y puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia.

cortante es la mitad de la tensión de tracción. Este fenómeno, relacionado con la **teoría de falla por tensión cortante máxima**, es un poco conservadora y requeriría de un análisis más a fondo, tal como lo señala (MOTT, 2009).

$$\tau_{ys} = \frac{\sigma_y}{2} = 0,5 \cdot \sigma_y \text{ [Pa]} \quad (30)$$

Materiales Frágiles. Las tensiones cortantes admisibles para materiales frágiles están basadas en la tensión máxima a cortante, τ_{us} , porque no exhiben cedencia, y la **fórmula de dimensionamiento** es la indicada en la **Ec. (31)**. En este caso se deberá utilizar un factor de seguridad más elevado que para materiales dúctiles, porque con frecuencia los materiales son de estructura menos consistentes. Sin embargo, se carece de datos publicados sobre factores de seguridad aceptables. Además, para obtener propiedades de resistencia más exactas, se recomienda realizar pruebas con prototipos reales de miembros cargados a cortantes hechos de materiales frágiles.

Definición: **tensión máxima a cortante**, τ_{us} , es el nivel de tensión cortante al cual el material se fracturaría (MOTT, 2009).

$$\tau_{adm.} = \frac{\tau_{us}}{n} \text{ [Pa]} \quad (31)$$

Cuando se tengan valores de tensión máxima, deberán utilizarse. Por ejemplo, MOTT (2009), presenta en el apéndice A-17 algunos valores para hierros fundidos y en el apéndice A-18 proporciona datos para aleaciones de aluminio. Pero para las ocasiones en las que no se cuenten con datos publicados, es posible calcular estimaciones con las relaciones dadas en la **Figura 88**. Recuerde que, para este autor, S_u es la tensión máxima a tracción.

TABLA 3–9 Estimaciones de la resistencia máxima a cortante.

Fórmula	Material
$s_{us} = 0.65 s_u$	Aleaciones de aluminio
$s_{us} = 0.82 s_u$	Acero estructural
$s_{us} = 0.90 s_u$	Hierro maleable y aleaciones de cobre
$s_{us} = 1.30 s_u$	Hierro fundido gris

Figura 88. Estimaciones de la Resistencia Máxima a Cortante para Algunos Materiales de Ingeniería (Fuente: MOTT, 2009).

Como nota ampliatoria, hay que decir que existen algunas aplicaciones prácticas que requieren de una estimación de S_u a pesar de que el material sometido a cortante no sea frágil (de hecho, debe ser moderadamente dúctil). En estas aplicaciones se pretende que el miembro cargado a cortante se fracture.

Algunos ejemplos incluyen el **perno cortable** con frecuencia utilizado como un elemento en el tren de propulsión de máquinas con componentes costosos. En tales casos, lo deseable es que sea el perno barato lo que falle en lugar de los costosos componentes. Además, debe tener en cuenta que en estos ejemplos dicho perno puede ser tanto, de un material frágil como dúctil.

Finalmente, es importante destacar que las relaciones de tensión cortante admisible antes expuestas deben analizarse con detenimiento cuando se trate con determinados materiales, como por ejemplo, la madera, ya que generalmente estas presentan particularidades¹⁵² a comparación de otros como el acero o el aluminio.

Métodos de Diseño. En el Problema Resuelto 4.5 (de tracción axial) se presentó uno de los esquemas de método típico de diseño, el caso C, tal como lo designa el autor citado. Según se ha dicho, este caso está asociado al objetivo del problema, que es **determinar la forma y dimensiones** requeridas de un componente cuando se conoce la carga, y el material ha sido

¹⁵² Por ejemplo, resistencias a tracción diferentes según se la analice paralela o perpendicular a las fibras.

especificado. En general, para los diseños en cortante, este también ha de ser el enfoque adoptado en el curso.

PROBLEMA RESUELTO 4.18

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a cortante directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 89** y solución en la **Figura 90**. **Notas.** ^(a) Ver referencias abajo consignadas.

Para la estructura mostrada en la figura P3 164, determine el diámetro requerido de cada pasador de acero estructural de baja aleación de cromo–vanadio de alta resistencia ASTM A572, grado 50. Cada pasador está sometido a doble cortante y la carga es estática.

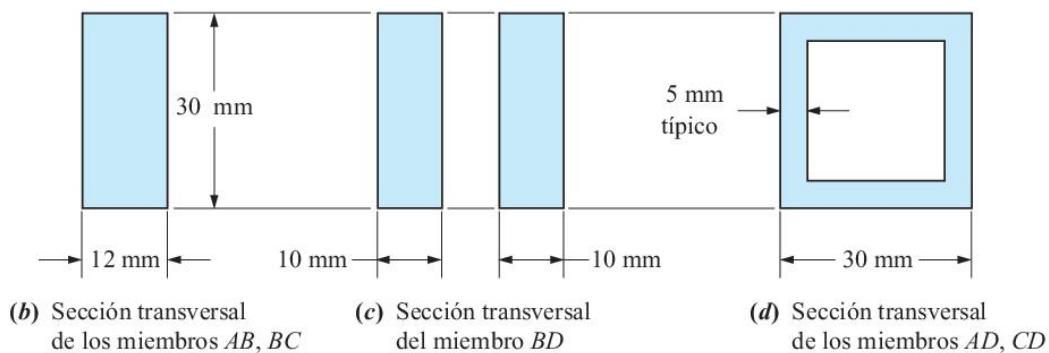
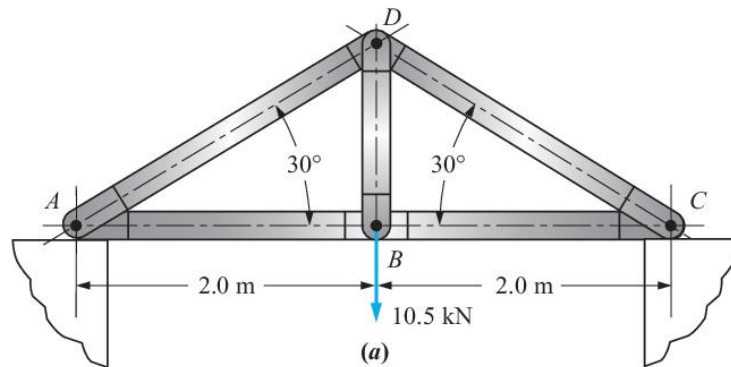
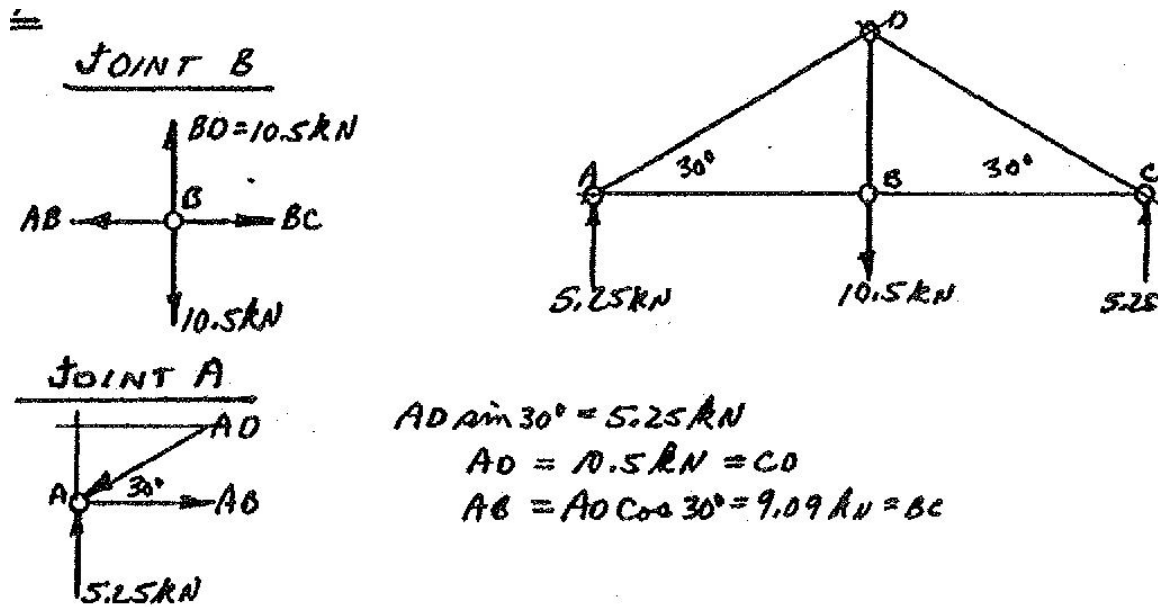


FIGURA P3-164 Armadura del problema 3-164.

Figura 89. Consigna Problema Resuelto 4.18 (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Al calcular las fuerzas en todos los miembros (: barras) de la armadura se tiene:



Y al dimensionar los pasadores o pernos:

$$\begin{aligned} \text{JOINT A: } F_s &= AD = 10.5 \text{ kN} = \text{JOINT C} \\ \text{JOINT B: } F_s &= \sqrt{10.5^2 + 9.09^2} = 13.9 \text{ kN} = \text{JOINT D} \\ \tau_d &= \frac{0.5 S_y}{2} = \frac{(0.5)(345)}{2} = 86.3 \text{ MPa} \\ \text{REQ'D. } A_s &= \frac{F_s}{\tau_d} = \frac{10.5 \times 10^3 \text{ N}}{86.3 \text{ N/mm}^2} = 121.7 \text{ mm}^2 = \frac{\pi D^2}{4} \\ D &= \sqrt{4A_s / \pi} = 12.4 \text{ mm} \quad \text{FOR JOINTS A AND C} \\ \text{REQ'D. } A_s &= \frac{F_s}{\tau_d} = \frac{13.9 \times 10^3 \text{ N}}{86.3 \text{ N/mm}^2} = 161.1 \text{ mm}^2 \\ D &= \sqrt{4A_s / \pi} = 14.3 \text{ mm} \quad \text{FOR JOINTS B AND D.} \end{aligned}$$

Figura 90. Solución Problema Resuelto 4.18 (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Referencias

- F_s y A_s : Fuerza cortante y área cortante, respectivamente.
- $\tau_d = \tau_{adm.}$: Tensión cortante admisible.
- $S_y = \sigma_Y$: Tensión en el punto de cedencia a la tracción del material.
- REQ'D. Required: requerido.

Observaciones

- Verifique el **cálculo de las fuerzas en las barras** mediante algunos de los métodos que conoce, y compare con lo realizado por este autor.
- Advierta que las **fuerzas cortantes** a utilizar en el diseño de los pasadores, se corresponden con las fuerzas que actúan en las barras, o bien, con la composición de estas, como sucede en el nudo B y D.
- Observe que la **tensión cortante admisible** se calcula utilizando la tensión en el punto de cedencia a tracción del material. Es decir, se está estimando la tensión a la cedencia en cortante. A tal efecto se toman los criterios de la tabla de la **Figura 91** para la elección del factor de seguridad.

TABLA 3–8 Criterios de esfuerzo de diseño a cortante.

Forma de carga	Esfuerzo de diseño, materiales dúctiles	
	$\tau_d = s_{ys}/N = 0.5 s_y/N = s_y/2N$	
Estática	Use $N = 2$	$\tau_d = s_y/4$
Repetida	Use $N = 4$	$\tau_d = s_y/8$
Impacto	Use $N = 6$	$\tau_d = s_y/12$

Figura 91. Tabla para la Selección del Factor de Seguridad (Fuente: MOTT, 2009).

- Recuerde, como se ha señalado en la Sección 3.2.1, que la **aplicación de la ecuación (3)** de tensión cortante promedio (calculada en este caso como: F_s/A_s), es aceptable para muchos problemas de diseño y análisis en ingeniería. Por ejemplo, los códigos de ingeniería permiten su uso cuando se consideran las dimensiones de diseño para elementos de fijación como pernos y para obtener la fuerza de adhesión de juntas pegadas que están sometidas a cargas cortantes, siendo el primer caso el del problema presentado.
- Considere el siguiente comentario general respecto de la **solución de uniones** (o nudos) de una estructura reticulada: la carga externa se transfiere a través de la estructura hasta los apoyos, y finalmente al suelo. En un nudo, específicamente, esta carga es transferida desde una barra a uno o más pernos (elementos de fijación). En esta situación el elemento de

fijación es solicitado tanto, por una fuerza de aplastamiento como por una fuerza cortante (recuerde que, para el primer caso, la superficie de contacto se calcula como: semiperímetro perno $\times$ espesor de la barra). En tal sentido, en este problema se ha realizado el diseño sin considerar el aplastamiento, en otros, en cambio, si ha de ser tenido en cuenta.

PROBLEMA RESUELTO 4.19

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a cortante directo, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consignas en la **Figura 92** y solución en la **Figura 93**. **Notas.** ^(a) Este problema incluye varios ítems. ^(b) Para este autor esfuerzo = tensión.

2.81 Un soporte elastomérico ($G = 0.9 \text{ MPa}$) se emplea para apoyar una viga de un puente, como se muestra en la figura, para suministrar flexibilidad durante terremotos. La viga no debe desplazarse más de 10 mm cuando una carga lateral de 22 kN sea aplicada como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo cortante permisible es de 420 kPa, determine *a*) la dimensión b mínima permisible, *b*) el mínimo grosor a requerido.

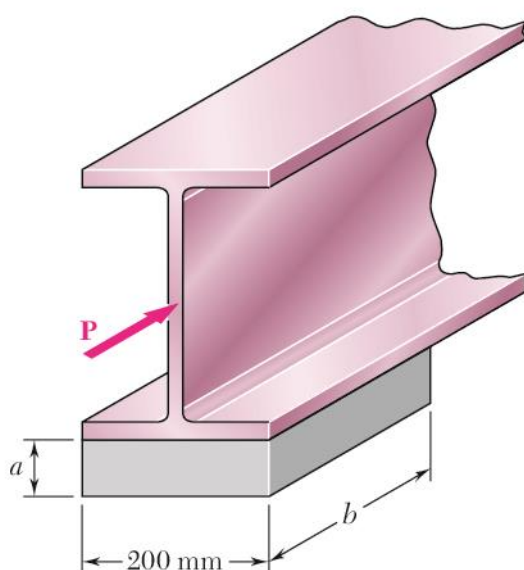
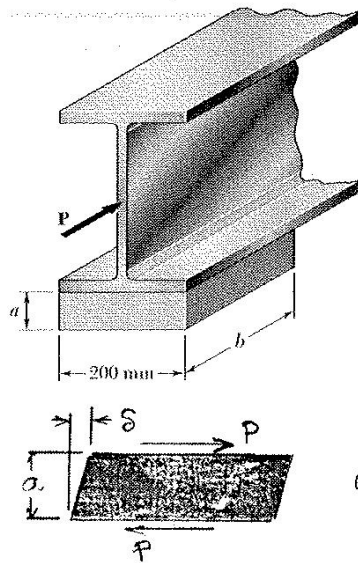


Figura P2.81

2.82 Para el apoyo elastomérico del problema 2.81 con $b = 220 \text{ mm}$ y $a = 30 \text{ mm}$, determine el módulo de cortante G y el esfuerzo cortante τ para una carga lateral máxima $P = 19 \text{ kN}$ y un desplazamiento máximo $\delta = 12 \text{ mm}$.

Figura 92. Consignas Problema Resuelto 4.19 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Problem 2.81



2.81 An elastomeric bearing ($G = 0.9 \text{ MPa}$) is used to support a bridge girder as shown to provide flexibility during earthquakes. The beam must not displace more than 10 mm when a 22-kN lateral load is applied as shown. Knowing that the maximum allowable shearing stress is 420 kPa, determine (a) the smallest allowable dimension b , (b) the smallest required thickness a .

Shearing force $P = 22 \times 10^3 \text{ N}$

Shearing stress $\tau = 420 \times 10^3 \text{ Pa}$

$$\tau = \frac{P}{A} \therefore A = \frac{P}{\tau} = \frac{22 \times 10^3}{420 \times 10^3} = 52.381 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$= 52.381 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

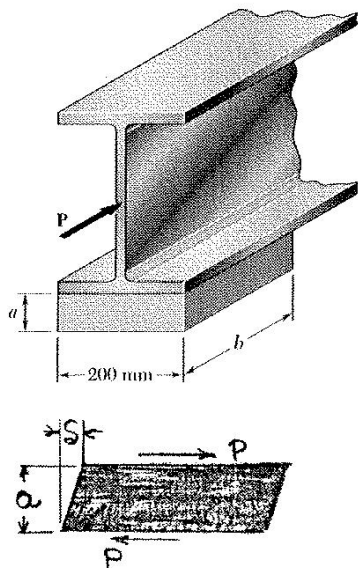
$$A = (200 \text{ mm})(b)$$

(a) $b = \frac{A}{200} = \frac{52.381 \times 10^3}{200} = 262 \text{ mm}$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{420 \times 10^3}{0.9 \times 10^6} = 466.67 \times 10^{-3}$$

(b) But $\gamma = \frac{\delta}{a} \therefore a = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{10 \text{ mm}}{466.67 \times 10^{-3}} = 21.4 \text{ mm}$

Problem 2.82



2.82 For the elastomeric bearing in Prob. 2.81 with $b = 220 \text{ mm}$ and $a = 30 \text{ mm}$, determine the shearing modulus G and the shear stress τ for a maximum lateral load $P = 19 \text{ kN}$ and a maximum displacement $\delta = 12 \text{ mm}$.

Shearing force $P = 19 \times 10^3 \text{ N}$

Area $A = (200 \text{ mm})(220 \text{ mm}) = 44 \times 10^3 \text{ mm}^2$

$$= 44 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{19 \times 10^3}{44 \times 10^{-3}} = 431.81 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$= 431 \text{ kPa}$$

Shearing strain $\gamma = \frac{\delta}{a} = \frac{12 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 0.400$

Shearing modulus

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{431.81 \times 10^3}{0.4} = 1.080 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 1.080 \text{ MPa}$$

Figura 93. Solución Problema Resuelto 4.19 (Fuente: BEER et al., 2009).

Observaciones

- Tenga en cuenta que en toda otra situación similar al ejemplo presentado en este problema, se asume que γ es la tangente del ángulo de cambio (esto ya se ha analizado), esto hace que el desplazamiento relativo δ sea proporcional a la fuerza P aplicada.

PROBLEMA RESUELTO 4.20

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a cortante directo y aplastamiento, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 94** y solución en la **Figura 95**. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión, Tensión de Apoyo o Aplastamiento = Esfuerzo de Contacto y σ_c = tensión de contacto.

115. La figura P-115 muestra la unión de un tirante y la base de una armadura de madera. Despreciando el rozamiento, (a) determine la dimensión b si el esfuerzo cortante admisible es de 900 kPa. (b) Calcule también la dimensión c si el esfuerzo de contacto no debe exceder de 7 MPa.

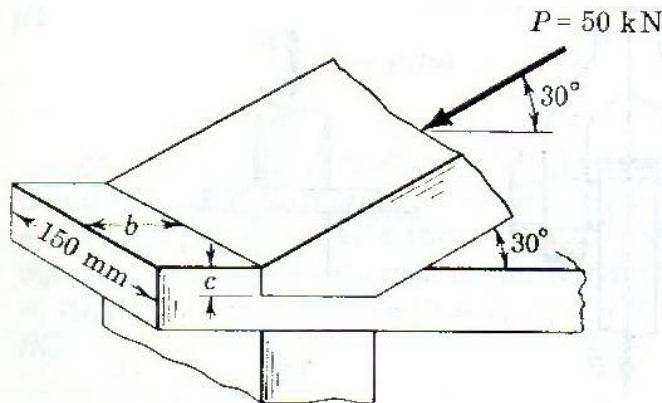


Figura P-115.

Figura 94. Consignas Problema Resuelto 4.20 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \tau &= 900 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}; \quad \tau = \frac{P \cos \alpha}{b \times 0,15} \\
 900 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} &= \frac{50 \cos 30^\circ \times 10^3 \text{ N}}{b \times 0,15 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{b = 0,321 \text{ m} = 321 \text{ mm}} \\
 \text{b) } \sigma_c &= 7 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\
 c &= \frac{50 \cos 30^\circ \times 10^3 \text{ N}}{7 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0,15 \text{ m}} = 0,0412 \text{ m} \Rightarrow \boxed{c = 41,2 \text{ mm}}
 \end{aligned}$$

Figura 95. Solución Problema Resuelto 4.20 (Fuente: LLANOS, 2008).

PROBLEMA RESUELTO 4.21

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a cortante directo y aplastamiento, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 96** y solución en la **Figura 97**. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión, Tensión de Apoyo o Aplastamiento = Esfuerzo de Contacto.

122. En la figura 1-12 se muestra el detalle de la unión del extremo de una viga tipo W460 $\times$ 97 a una trabe W610 $\times$ 125 mediante dos ángulos de 100 $\times$ 90 $\times$ 10, y remaches de 19 mm de diámetro. En las tablas del Apéndice B se relacionan las dimensiones y otros datos de éstos y otros perfiles normalizados. Para los remaches, realizados en el taller, que unen los ángulos a la viga puede tomarse $\tau = 80$ MPa y $\sigma_b = 170$ MPa. Para los demás, colocados en obra, $\tau = 70$ MPa y $\sigma_b = 140$ MPa. El alma de la trabe tiene 11.9 mm de espesor y la de la viga, 11.4 mm. Determinar la máxima reacción de la viga que puede soportar esta unión remachada.

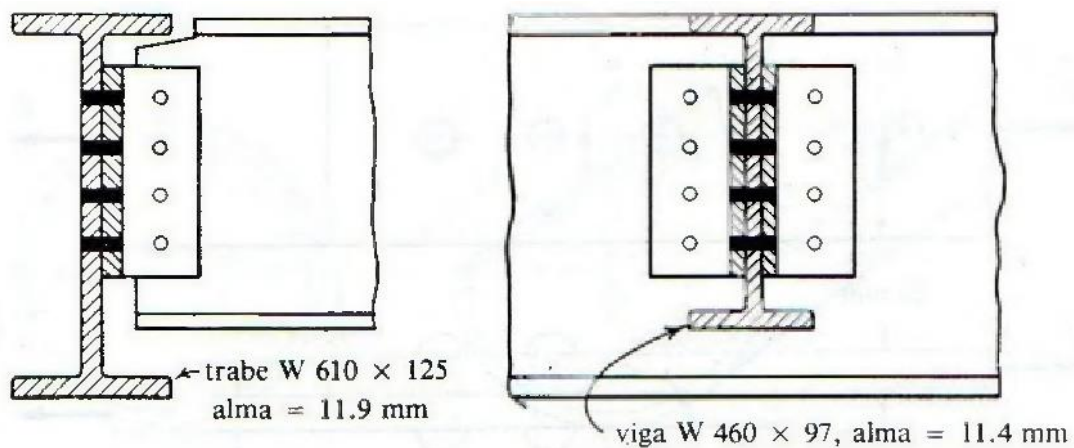


Figura 1-12. Detalles de la unión de una viga y una trabe o viga maestra.

Figura 96. Consigna Problema Resuelto 4.21 (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Solución: En la trabe, la sección resistente al corte es la de los ocho remaches a cortante simple colocados en obra. Por tanto,

$$[P = A\tau] \quad P = 8\left(\frac{\pi}{4}\right)(19 \times 10^{-3})^2(70 \times 10^6) = 159 \text{ kN}$$

La resistencia al aplastamiento o esfuerzo de contacto en esta unión depende de la placa de menor espesor, que en este caso es el ángulo de 10 mm de espesor. Para los ocho remaches se tiene:

$$[P = A\sigma_b] \quad P = 8(19 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})(140 \times 10^6) = 213 \text{ kN}$$

En la unión viga-ángulos, los cuatro remaches a cortante doble dan un total de ocho secciones resistentes, como en la otra unión, que con un esfuerzo admisible mayor, 80 MPa, admiten una fuerza también mayor.

La resistencia al aplastamiento o esfuerzo de contacto en la viga se calcula para el alma de ésta, ya que su espesor es menor que la suma de los espesores de los dos angulares, y para los cuatro remaches se obtiene:

$$[P = A\sigma_b] \quad P = 4(19 \times 10^{-3})(11.4 \times 10^{-3})(170 \times 10^6) = 147 \text{ kN}$$

La máxima reacción de la viga (carga de seguridad) que debe soportar esta unión es la menor de las calculadas, o sea, 147 kN, y está limitada por la fuerza de aplastamiento que pueden resistir los remaches en la unión viga-ángulos.

Figura 97. Solución Problema Resuelto 4.21 (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Observaciones

- Tal como se ha hecho mención en la Sección 4.2.6, en algunas aplicaciones de tensión de aplastamiento se suele trabajar con una **carga de apoyo permisible**, en este caso asociada a la máxima reacción de la viga que puede soportar la unión remachada. Así pues, la carga de contacto real a aplicar luego a la viga, debe ser más baja que la carga de apoyo permisible. También en este sentido, el autor citado hace extensible el concepto de carga de apoyo permisible (o carga de seguridad, como la designa) a **carga cortante permisible**.
- Advierta que en este ejemplo se calculan y comparan **dos tipos de cargas permisibles** en los remaches: las de corte directo y las de aplastamiento. Ambas asociadas a sus tensiones homólogas.
- Observe que, para el caso del aplastamiento, este problema evidencia que el **área de apoyo efectiva o área proyectada** (A_b) depende del espesor del elemento solicitado. Esto es, el espesor del ángulo de unión o del alma de la viga. En este sentido, advierta que en el caso de la unión ángulos-viga se toma el espesor mínimo.
- Observe que en este caso se analiza **únicamente el aplastamiento de los remaches**, sin embargo, tenga en cuenta que por una excesiva tensión de contacto se puede llegar también a la fluencia del material de la viga, del ángulo de unión o de ambos.

4.3. Torsión Circular Recta

En lo que sigue, se ha de limitar el estudio a la torsión simple, esto es, cuando la acción exterior sobre un elemento se reduce únicamente a un momento torsor. Específicamente, se ha de tratar el caso de torsión circular recta, es decir, cuando el elemento es un cilindro de eje recto.

4.3.1. Introducción e Hipótesis

Para establecer la validez de las relaciones (fórmulas) de torsión circular recta se deben establecer las hipótesis¹⁵³ siguientes:

1. El miembro cargado a torsión debe ser de eje recto y sección circular (o anular) constante en toda la longitud.
2. Las secciones circulares, permanecen circulares (no se distorsionan) después de la torsión.
3. Las secciones planas, permanecen planas (no se alabea) después de la torsión (hipótesis de Coulomb).
4. Las líneas radiales de una sección transversal se conservan rectas después de la torsión.
5. El árbol¹⁵⁴ está sometido a la acción de pares torsores o torsionantes que actúan en planos perpendiculares a su eje.
6. Las tensiones no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad del material (verificación de la ley de Hooke).

¹⁵³ En otras palabras, se deben satisfacer condiciones.

¹⁵⁴ Se conoce como árbol a todo elemento mecánico que tiene la forma de un sólido de revolución y que se utiliza para transmitir par. El árbol de sección transversal circular suele llamarse “eje” o “flecha” (en inglés *shaft*) (SINGER y PYTEL, 2008). Considerando esta definición, en los análisis subsiguientes (Secciones 4.3.1 a 4.3.4), se ha utilizar indistintamente los términos árbol, eje o flecha. En tanto que en el Apartado 4.3.5, se ha de hacer una distinción al respecto.

7. El material del cual está hecho el miembro debe ser homogéneo e isotrópico (hipótesis mecánicas del material).¹⁵⁵
8. El par de torsión externo es constante en toda la longitud eje (torsión uniforme).

Tenga en cuenta, por otra parte, que con la torsión se inicia el estudio de los problemas en los que la **tensión no** se distribuye **uniformemente** dentro de la **sección resistente**. En este último sentido, también es conveniente remarcar que el camino lógico para desarrollar la torsión es exponiendo lo concerniente a la carga, la deformación y la tensión, en ese orden, para esta sollicitación.

4.3.2. Deformación por Torsión de un Eje Circular

El **par de torsión** es un momento que tiende a torcer un elemento sobre su eje longitudinal. Su efecto es de gran importancia en el diseño de ejes o árboles de transmisión utilizados en vehículos y maquinaria.

De esta manera, para ilustrar físicamente lo que ocurre cuando un par de torsión se aplica sobre un eje circular¹⁵⁶ con un extremo fijo, refiérase a la **Figura 98-a)**. En efecto, cuando se aplica el par T al extremo libre, una generatriz¹⁵⁷ cualquiera (inicialmente recta y paralela al eje) en la superficie del cilindro, tal como la AB , se deforma en una hélice $A'B$. En estas condiciones, queda definido en la sección transversal un ángulo ϕ , llamado **ángulo de giro** (o **ángulo de torsión**), **Figura 98-b)**.

¹⁵⁵ En general, tal como se ha mencionado en el Capítulo 2, estas propiedades del material ideal son satisfechas en forma aproximada por los materiales reales que constituyen las estructuras resistentes; en mayor o menor grado según se trate.

¹⁵⁶ A los efectos de comprender de mejor manera este análisis, puede considerar que el eje es de un material altamente deformable como el caucho.

¹⁵⁷ En geometría: línea que a causa de su movimiento conforma una figura geométrica.

Esto último significa que, dentro de un cierto rango de valores de T , el ángulo de giro es proporcional a T .¹⁵⁸ También muestra que ϕ es proporcional a la longitud L del eje. En otras palabras, el ángulo de giro para un eje del mismo material y con la misma sección transversal, pero del doble de longitud, se duplicará bajo el mismo par de torsión T . En este sentido, la relación específica que existe entre ϕ , L y T ; se ha de desarrollar en la Sección 4.3.4, mientras que en la presente y en la 4.3.3, el propósito será determinar la distribución de deformaciones y tensiones cortantes en el eje circular, respectivamente.

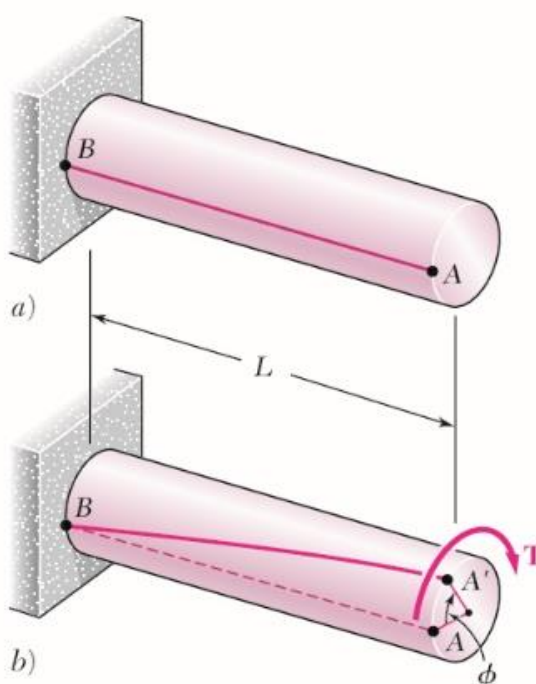


Figura 98. Deformación de un Eje Recto de Sección Circular Sometido a Torsión (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

En este punto, debe señalarse una propiedad importante de los ejes circulares: cuando un eje circular se somete a torsión, todas sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.¹⁵⁹ Dicho de otra manera, aunque las distintas secciones transversales a lo largo del

¹⁵⁸ Haga una revisión de la Sección 3.3.4.

¹⁵⁹ Se sugiere una relectura de las hipótesis presentadas al inicio de la sección.

eje giran diferentes cantidades, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida.¹⁶⁰ Esto se ilustra en la **Figura 99-a)** que muestra el eje antes de la deformación, mientras que en la **Figura 99-b)**, después de la deformación. Cada una de las líneas axiales indicadas en la 99-a) representa una generatriz del cilindro.

Cabe destacar que, la propiedad que se analiza en este momento es característica de **ejes circulares, sólidos (o macizos) o huecos**, y no la comparten los elementos con sección transversal no circular. Por ejemplo, cuando una barra con sección transversal cuadrada se sujeta a torsión, sus distintas secciones transversales se tuercen y no permanecen planas.

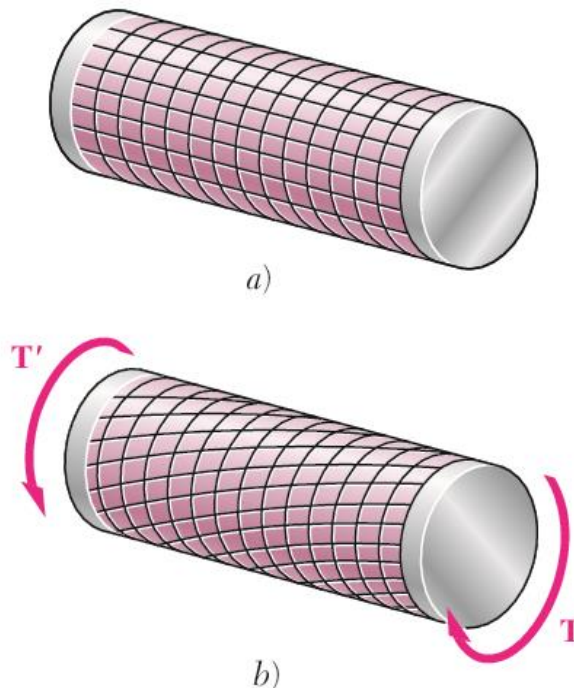


Figura 99. Modelo de Deformación de un Eje Recto de Sección Circular Sometido a Torsión (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

¹⁶⁰ En forma ampliada, la idea de esta última oración permite entender cómo se obtiene al ángulo de torsión en la sección transversal extrema indicada en la Figura 98-b). Es decir, piense al eje como conformado por muchas monedas contiguas, de modo tal que, de izquierda a derecha, cada una de ellas va girando en un ángulo cada vez mayor, dando la suma de todos estos ángulos: ϕ . Esto último también quiere decir que ϕ depende de la posición y varía a lo largo del eje.

Hasta ahora, este análisis ha ignorado el modo de aplicación de los pares torsores T y T' ; ¹⁶¹ y en este sentido, si todas las secciones del eje, desde un extremo hasta el otro, deben permanecer planas y sin distorsión, es necesario asegurarse de que los pares se apliquen de tal manera que los extremos mismos del eje permanezcan planos y sin distorsión. Esto puede lograrse aplicando los pares T y T' a **placas rígidas** que se encuentren sólidamente unidas a los extremos del eje (Figura 99-b). Sólo así puede estarse seguro de que todas las secciones permanecerán planas y sin distorsión cuando la carga se aplique, y que las deformaciones resultantes ocurrirán de manera uniforme a lo largo de todo el eje. Así pues, todos los círculos igualmente espaciados que se muestran en la Figura 99-a, girarán en la misma cantidad en relación con sus vecinos, y cada una de las líneas rectas (generatrices) se convertirá en una curva (hélice) que interseca los distintos círculos con el mismo ángulo (Figura 99-b). Por lo tanto, las deducciones dadas en esta sección y en las siguientes se basarán en la suposición de **placas rígidas en los extremos**. ¹⁶²

Deformación Unitaria Cortante en Torsión

En este punto, tal como se ha anticipado en la Sección 4.2, se ha de demostrar de una manera muy elemental, que las deformaciones por torsión en un eje circular de longitud L y radio c que ha sido girado en un ángulo ϕ (**Figura 100-a**), son deformaciones por cortante. Además, se determinará la distribución de estas deformaciones.

En efecto, desprendiendo del eje un cilindro de radio ρ , considere el pequeño cuadrado ¹⁶³ formado por dos círculos adyacentes y dos líneas rectas adyacentes trazadas en la superficie del cilindro antes de que se aplique carga alguna, **Figura 100-b**. Al someterse el eje a una carga de torsión, el elemento se deforma para convertirse en un rombo, **Figura 100-c**.

¹⁶¹ La aparición de T' en la Figura 99 debe entenderse como otro par torsor ($|T| = |T'|$) que representa la reacción del soporte fijo (mostrado en la Figura 98) sobre el eje.

¹⁶² Lo cual está en coherencia con las hipótesis planteadas al inicio de la sección.

¹⁶³ Este pequeño cuadrado es un elemento de tensión (Sección 4.2.2).

Ahora, recuerde que en la Sección 4.2.3 se ha visto que la deformación unitaria cortante γ , en un elemento de tensión dado se mide por el cambio en los ángulos formados por los lados de dicho elemento. Así pues, ya que los círculos que definen dos de los lados del elemento considerado aquí permanecen sin cambio, la deformación en corte (γ) debe ser igual al ángulo entre las líneas AB y $A'B$.

Para deducir la expresión para γ , observe en la Figura 100-c) que para valores pequeños de γ (ya que se trata de deformaciones elásticas), puede expresarse la longitud de arco AA' como: $AA' = \gamma \cdot L = \phi \cdot \rho$.¹⁶⁴ Deduciéndose, por tanto, la Ec. (32), en la cual, γ y ϕ deben expresarse en radianes, mientras que la longitud L del eje y su radio genérico ρ , en una misma unidad.

$$\gamma = \frac{\rho \cdot \phi}{L} [\text{rad}] \quad (32)$$

¹⁶⁴ Si se quiere hacer una analogía con el caso de deformación unitaria cortante en corte directo de la Figura 74 (Sección 4.2.4), advierta que en aquel tipo de aplicativo se denominó δ_s a la deformación total del objeto debido a las fuerzas cortantes. En torsión, en cambio, δ_s (denominada por SINGER y PYTEL (2008) como deformación tangencial) es la longitud del arco AA' , es decir, $AA' = \delta_s = \gamma \cdot L$, de donde se obtiene: $\gamma = \delta_s / L$ (compare esta expresión con aquel caso de corte directo). Por otra parte, hay que decir que esta forma de expresar la longitud del arco para ángulos pequeños, es una propiedad matemática demostrada.

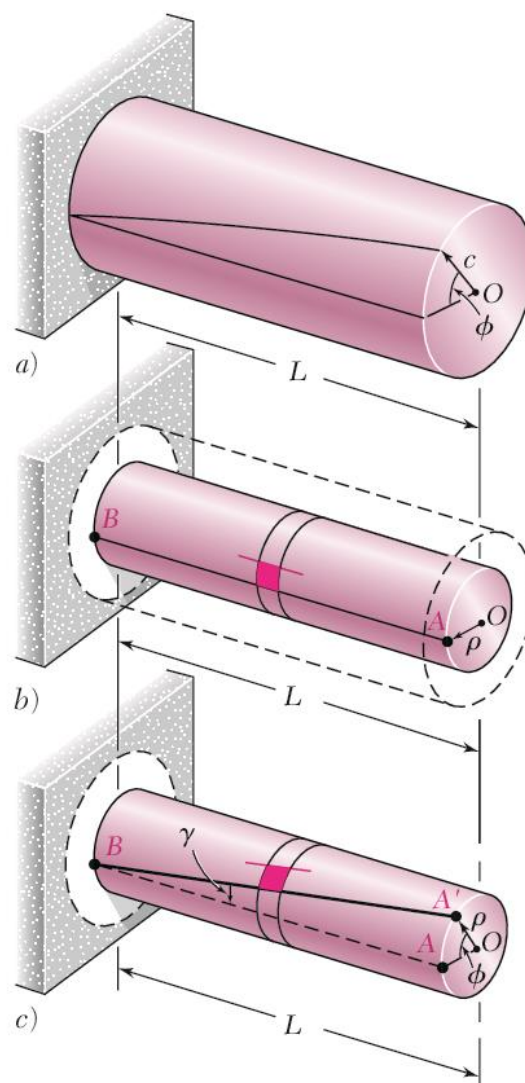


Figura 100. Deformación Unitaria Cortante de un Eje Recto de Sección Circular Sometido a Torsión (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

La ecuación (32) obtenida muestra, como podría haberse anticipado, que la deformación unitaria cortante en un punto dado del eje en torsión¹⁶⁵ es proporcional al ángulo de giro. También muestra que γ es proporcional a la distancia ρ desde el eje de la flecha hasta el punto bajo consideración. Por lo tanto, la **deformación unitaria a corte en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha.**

¹⁶⁵ La expresión “en un punto dado”, implica tanto, una distancia específica desde el soporte del eje (si tomamos a este como referencia), como un radio genérico específico desde el eje de la flecha. Esta condición de distancia específica desde el soporte, se fundamenta en el hecho de que el ángulo de giro es función de dicha distancia, como se ha de analizar más adelante.

Por otra parte, también se deduce de la ecuación (32) que la deformación a cortante es máxima en la superficie del eje, donde $\rho = c$. Se tiene entonces la **Ec. (33-a)**. Y, despejando ϕ de la (32) y (33) e igualando, puede expresarse la deformación unitaria cortante γ a una distancia ρ del eje de la flecha, como se indica en la **Ec. (33-b)**.

$$\begin{aligned} a) \quad \gamma_{\text{máx}} &= \frac{c \cdot \phi}{L} [\text{rad}] \\ b) \quad \gamma &= \frac{\rho}{c} \cdot \gamma_{\text{máx}} [\text{rad}] \end{aligned} \tag{33}$$

Como nota de cierre, advierta que, el **elemento de tensión** sometido a deformación cortante analizado y mostrado en la Figura 100-c), es fundamentalmente el mismo que el presentado en corte directo (Véase Figura 73). Se puede concluir, por tanto, que para un eje circular en torsión las deformaciones, y en consecuencia las tensiones generadas, son cortantes. En este último sentido, en el apartado siguiente se ha de demostrar que esta deformación unitaria cortante precedentemente analizada, genera **tensiones cortantes en la sección transversal del eje**, que se derivan luego en **tensiones cortantes longitudinales** al mismo.

4.3.3. Tensiones Debidas a la Torsión

Análisis Preliminar de las Tensiones en un Eje

Antes de estudiar la distribución de tensiones cortantes asociadas a la deformación analizada en el apartado precedente, son necesarios dos pasos previos, a saber: **1)** Identificar las distintas tensiones cortantes en el eje sometido a torsión; y, **2)** Comprender las condiciones de equilibrio elástico en el eje mediante el análisis de los pares de torsión internos actuantes en la sección transversal de dicho eje.

Para cumplimentar el último paso se ha de exponer, directamente, el desarrollo presentado por BEER *et al.* (2009), **Figura 103**; mientras que para el primero, considere, en un principio,

la **Figura 101**, que muestra, en forma ampliada, el mismo elemento de tensión de la Figura 100-c) con la respectiva deformación unitaria cortante γ debida a la torsión, y las correspondientes tensiones cortantes τ actuantes.

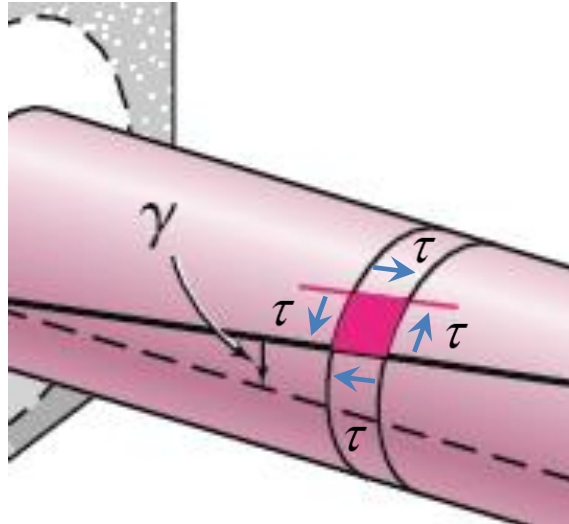


Figura 101. Deformación Unitaria Cortante γ y Tensión Cortante τ en un Elemento de Tensión de un Material en Torsión (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

Advierta que, debido a la deformación γ , las tensiones en los lados definidos por los dos círculos corresponden a tensiones cortantes actuantes en la sección transversal del eje. Sin embargo, también aparecen tensiones cortantes longitudinales de dirección perpendicular al anterior y del mismo módulo (véase propiedad complementaria del cortante en la Sección 4.2.2).

Es conveniente hacer una observación más en este punto. Para ello considere un “eje” elaborado de duelas separadas y sujetas con pasadores en ambos extremos a discos, como se muestra en la **Figura 102-a)**. Si se pintan marcas en dos duelas adyacentes, se observa que las duelas se deslizan una con respecto a la otra cuando se aplican pares iguales y opuestos a los extremos del “eje”, **Figura 102-b)**. Aunque no ocurrirá deslizamiento en un eje de un material homogéneo y cohesivo, la tendencia al deslizamiento existirá, lo cual muestra que ocurren tensiones en planos longitudinales, así como en los planos perpendiculares al eje de la flecha, tal como se ha dicho.

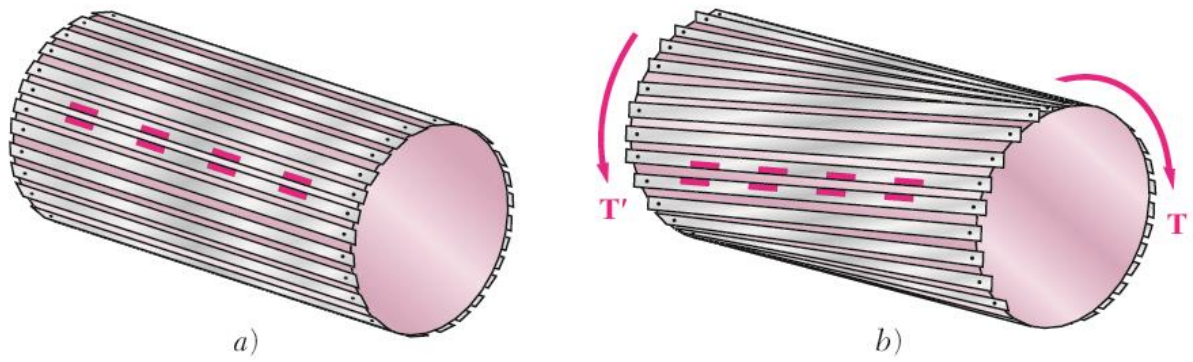


Figura 102. Tensiones Longitudinales en un Eje en Torsión (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Considerando un eje AB sometido en A y en B a pares de torsión $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ iguales y opuestos, se efectúa un corte perpendicular al eje de la flecha en algún punto arbitrario C (figura 3.4). El diagrama de cuerpo libre de la porción BC del eje debe incluir las fuerzas cortantes elementales $d\mathbf{F}$, perpendiculares al radio del eje, que la porción AC ejerce sobre BC al torcerse el eje (figura

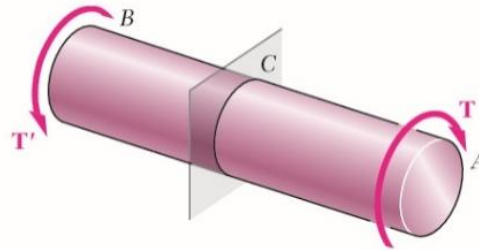


Figura 3.4

3.5a). Pero las condiciones de equilibrio para BC requieren que el sistema de estas fuerzas elementales sea equivalente a un par de torsión interno $\mathbf{T}$, igual y opuesto a $\mathbf{T}'$ (figura 3.5b). Denotando con ρ la distancia perpendicular desde la fuerza $d\mathbf{F}$ al eje de la flecha, y expresando que la suma de momentos de las fuerzas cortantes $d\mathbf{F}$ alrededor del eje es igual en magnitud al par $\mathbf{T}$, se escribe

$$\int \rho dF = T$$

o, ya que $dF = \tau dA$, donde τ es el esfuerzo cortante en el elemento de área dA ,

$$\int \rho(\tau dA) = T \quad (3.1)$$

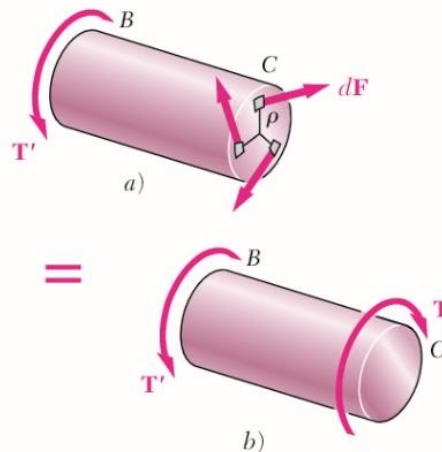


Figura 3.5

Figura 103. Condiciones de Equilibrio Elástico del Eje mediante el Análisis de los Pares de Torsión Internos Actuantes en la Sección Transversal de dicho Eje (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

Distribución de la Tensión Cortante

Si el material del eje circular en torsión antes analizado, verifica un comportamiento elástico lineal, entonces es aplicable la **ley de Hooke**, $\tau = G \cdot \gamma$, y en consecuencia cualquier variación lineal en la deformación por cortante conducirá a una correspondiente **variación lineal de la tensión cortante** τ ,¹⁶⁶ a lo largo de cualquier línea radial ubicada en la sección transversal. Por consiguiente, τ variará desde cero en la línea central longitudinal del eje hasta un valor máximo, $\tau_{\text{máx}}$, en su superficie externa. Esta variación se muestra analíticamente en la **Ec. (34-c)**.¹⁶⁷

a) $\tau = G \cdot \gamma$ [Pa] (ley de Hooke)

Y sustituyendo γ por la expresión 33-b), se tiene:

b) $\tau = G \cdot \frac{\rho}{c} \cdot \gamma_{\text{máx}}$ [Pa] (34)

Donde se observa que $\tau_{\text{máx}} = G \cdot \gamma_{\text{máx}} \therefore$

c) $\tau = \frac{\rho}{c} \cdot \tau_{\text{máx}}$ [Pa]

De esta manera, y con base en la (34-c), la **Figura 104-a)** muestra la distribución de tensiones en la sección transversal de un eje circular de radio c , mientras que la **Figura 104-b)** hace lo propio para un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2 . Además, de la (34-c) también puede derivarse la **Ec. (35)**, correspondiente a este segundo caso. También, en la **Figura 104-c)**, se ilustra la distribución de la tensión cortante longitudinal (propiedad complementaria de la tensión cortante).

¹⁶⁶ Se da por sobreentendido (por lo analizado en la Sección 3.3.4) que, esta afirmación solamente es válida para cierto rango de valores del par torsor aplicado al eje.

¹⁶⁷ Esta expresión permite calcular cualquier tensión para un radio menor al máximo.

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \tau_{\text{máx}} \text{ [Pa]} \quad (35)$$

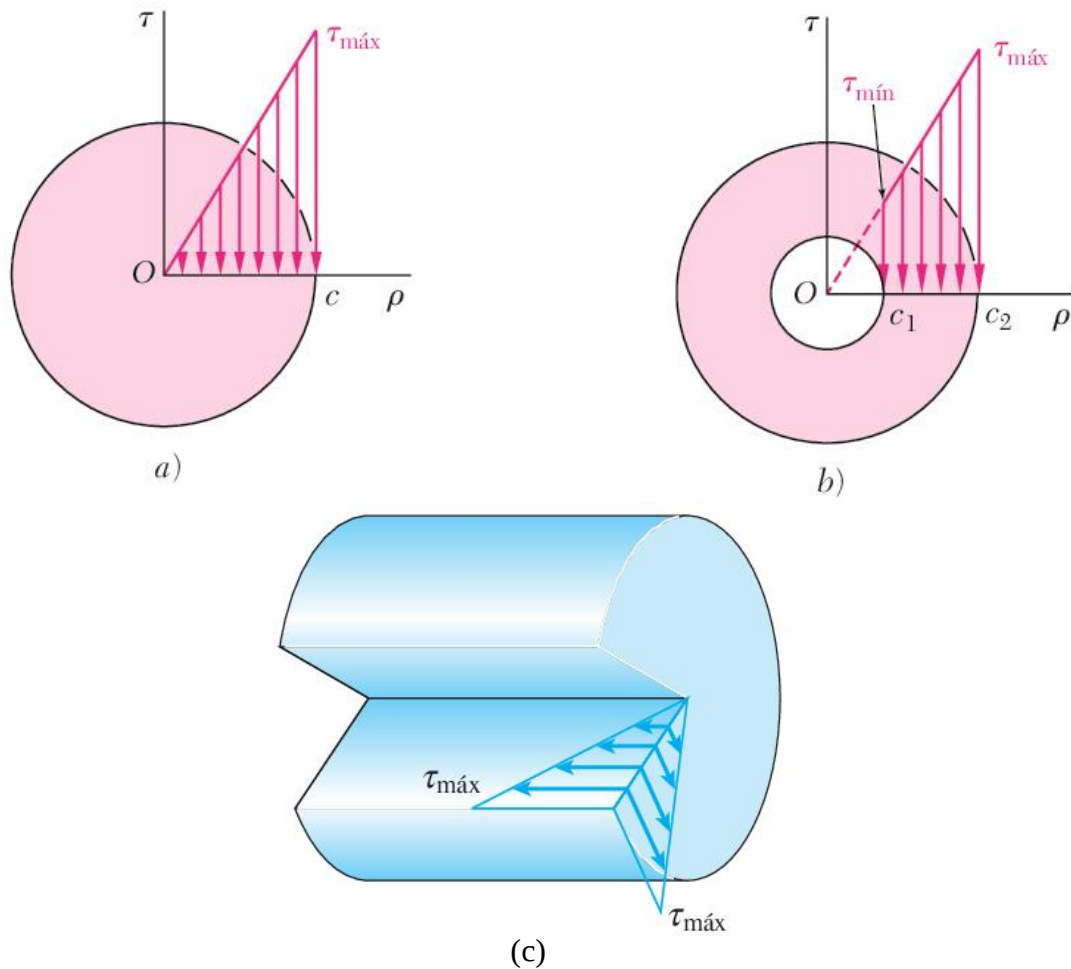


Figura 104. a) y b) Distribución de Tensiones Cortantes Transversales en un Eje Circular Macizo y Hueco (Fuente: BEER *et al.*, 2009). c) Distribución de Tensiones Cortantes Transversales y Longitudinales en un Eje Circular Macizo (Fuente: GERE y GOODNO, 2013).

Fórmula de Torsión

Recuerde ahora que según la ecuación (3.1) de la Figura 103, la suma de los momentos de las fuerzas internas elementales ejercidas sobre cualquier sección transversal del eje, debe ser igual a la magnitud T del par ejercido sobre el eje. Con esto en mente, y haciendo uso de otras

relaciones deducidas precedentemente, se pueden obtener dos ecuaciones muy importantes denominadas **fórmulas de torsión** o ecuaciones de resistencia, **Ec. (36)-d) y e)**.¹⁶⁸

$$a) \quad T = \int \rho \cdot (\tau dA) [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (\text{véase Figura 103})$$

Sustituyendo τ de la (34-c):

$$b) \quad T = \int \rho \cdot \left(\frac{\rho}{c} \cdot \tau_{\text{máx}} \cdot dA \right) = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int \rho^2 dA [\text{N} \cdot \text{m}]$$

La integral en el último miembro representa el momento polar de inercia J_o de la sección transversal con respecto a su centro O .

Se tiene entonces que:

$$c) \quad T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \cdot J_o [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (36)$$

O, despejando para $\tau_{\text{máx}}$:

$$d) \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot c}{J_o} [\text{Pa}]$$

Y para un radio genérico cualquiera ρ ($\rho < c$) se puede escribir :

$$e) \quad \tau = \frac{T \cdot \rho}{J_o} [\text{Pa}]$$

La ecuación 36-d) puede reformularse en términos del diámetro D del eje. Para ello, considere la expresión del momento polar de inercia de la sección transversal de un eje macizo:

$J_o = (1/2) \cdot \pi \cdot c^4$; y, de un eje hueco: $J_o = (1/2) \cdot \pi \cdot (c_2^4 - c_1^4)$. Ambas expresiones están en

función del radio, sin embargo, reemplazando en ellas $c = D/2$ para el macizo y, $c_1 = D_1/2$ y

$c_2 = D_2/2$ para el hueco,¹⁶⁹ y operando, se obtienen, respectivamente, las **Ec. (37-a) y (37-c)**.

¹⁶⁸ En la Sección 4.4, el lector ha de constatar (y a los fines del aprendizaje es bueno que así sea) que estas ecuaciones son análogamente formales a las ecuaciones de estabilidad (tal como las designa RAFFO, 2007) de flexión simple normal.

¹⁶⁹ Recuerde que, al considerar un eje hueco, el diámetro D se corresponde con un diámetro exterior denotado aquí como D_2 . En correspondencia, el diámetro interior es D_1 .

Por tanto, sustituyendo estas ecuaciones en la 36-d) se tienen las **Ec. (37-b) y (37-d)** para ejes macizos y huecos, respectivamente.¹⁷⁰

Reformulación de las Ecuaciones de Torsión en Términos del Diámetro

1ro. Ejes Macizos

$$\begin{aligned} a) \quad J_O &= \frac{\pi \cdot D^4}{32} [\text{m}^4] \therefore \\ b) \quad \tau_{\text{máx}} &= \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot D^3} [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{37}$$

2do. Ejes Huecos

$$\begin{aligned} c) \quad J_O &= \frac{\pi \cdot D_2^4 \cdot (1 - k^4)}{32} [\text{m}^4] \quad \text{donde: } k = \frac{D_1}{D_2} \therefore \\ d) \quad \tau_{\text{máx}} &= \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot D_2^3 \cdot (1 - k^4)} [\text{Pa}] \end{aligned}$$

Por otra parte, hay que mencionar que las fórmulas de torsión (Ec. 36-d y 36-e) se dedujeron para un eje con sección transversal circular constante sometido a pares torsores en sus extremos. Sin embargo, también pueden utilizarse para un eje con **secciones transversales de distinto diámetro** o para un eje sujeto a **pares de torsión en lugares distintos de sus extremos** (**Figura 105-a**). De esta manera, la distribución de las tensiones cortantes en una sección transversal S dada del eje, se obtiene de la ecuación (36-d), donde de J_O denota el momento polar de inercia de esa sección, y T representa el par de torsión interno en esa sección. El valor de T se obtiene dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción de eje localizada a un lado del corte (**Figura 105-b**) y escribiendo que la suma de los pares aplicados a esta porción, incluyendo el par interno T , es cero (véase Problema Resuelto 4.23).¹⁷¹

¹⁷⁰ Advierta que al reemplazar en la (36-d) las expresiones para J_O , también debe sustituirse c por $D/2$ y por $D_2/2$, para el eje macizo y hueco, respectivamente.

¹⁷¹ Advierta que, este modo de determinar el par interno es, en esencia, el método de las secciones presentado en el Apartado 3.1. Método que, por cierto, ha sido recurrentemente utilizado en este documento.

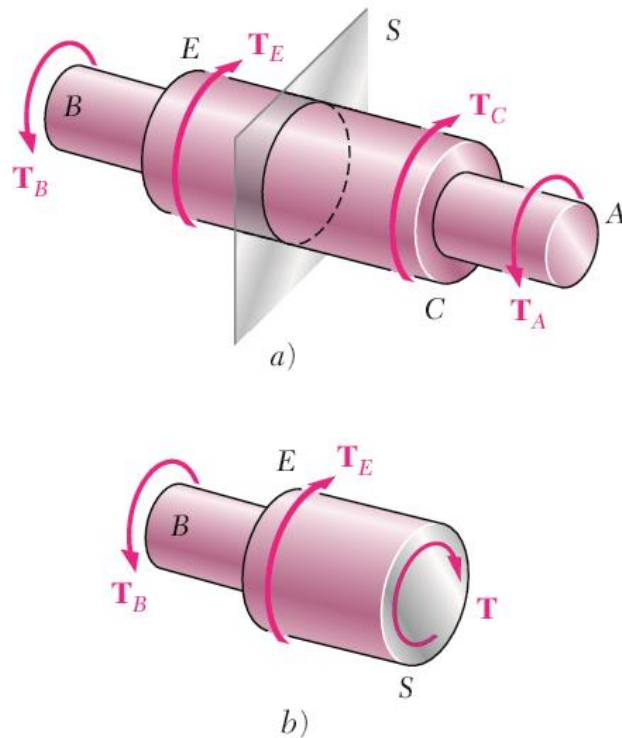


Figura 105. Determinación de Tensiones en un Eje con Secciones Transversales de Distintos Diámetros, y Pares Torsionales Aplicados en Distintos Puntos de su Longitud (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Como nota de cierre, considere que las expresiones (37) antes presentadas, adquieren relevancia en el diseño de ejes, tal como se ha de analizar en la Sección 4.3.5.

4.3.4. Ángulo de Giro o de Torsión

En esta sección se deducirá una relación entre el ángulo de giro ϕ de un eje circular y el par de torsión T ejercido sobre el eje. Se supondrá que la totalidad del eje permanece elástica.¹⁷² Así pues, para esta deducción considere primero la **Figura 106**, que es el caso de un eje de longitud L y sección transversal constante de radio c sujeto a un par de torsión T en su extremo libre; y, en segundo término, inspeccione el desarrollo analítico de la Ec. (38).

¹⁷² En todo el desarrollo de este documento se considera que el material trabaja en la zona elástica, y este comentario es solo un recordatorio de ello.

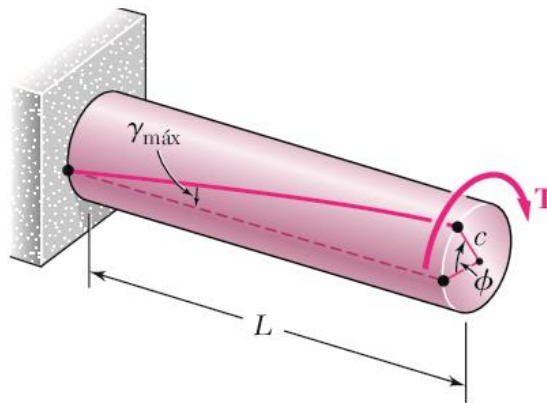


Figura 106. Ángulo de Giro ϕ (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Se sabe de la Sección 4.3.2 que el ángulo de giro y la deformación máxima a cortante se relacionan como:

$$a) \quad \gamma_{\text{máx}} = \frac{c \cdot \phi}{L} [\text{rad}]$$

Pero, en el rango elástico es válida la aplicación de la ley de Hooke, y se tiene que: $\gamma_{\text{máx}} = \tau_{\text{máx}} / G$. Si en esta expresión se reemplaza $\tau_{\text{máx}}$ de la (36-d):

$$b) \quad \gamma_{\text{máx}} = \frac{T \cdot c}{J_o \cdot G} [\text{rad}]$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones anteriores, y despejando ϕ :

$$c) \quad \phi = \frac{T \cdot L}{J_o \cdot G} [\text{rad}]$$

(38)

La fórmula 38-c) representa la expresión general de ϕ deducida con base en un eje macizo. Para ejes huecos, basta, simplemente, con sustituir el momento de inercia polar del eje hueco:

$$d) \quad \phi = \frac{32 \cdot T \cdot L}{\pi \cdot D_2^4 \cdot (1 - k^4) \cdot G} [\text{rad}]$$

Donde: $k = D_1 / D_2$, siendo D_1 y D_2 los diámetros interior y exterior del eje, respectivamente.

La relación 38-c) obtenida, muestra que, dentro del rango elástico, el ángulo de giro ϕ es proporcional al par de torsión T aplicado al eje, lo que está de acuerdo con la evidencia

experimental citada en la Sección 4.3.2. Además, dicha fórmula únicamente puede utilizarse si el eje tiene una sección transversal constante y sólo si está cargado en sus extremos. En cambio, si el eje es sometido a **par de torsión en lugares distintos de los extremos**, o si consta de varias porciones con **secciones transversales distintas** y posiblemente distintos materiales, debe dividirse en partes componentes que satisfagan individualmente las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (38-c).

De esta manera, en el caso del eje AB de la **Figura 107**, por ejemplo, deben considerarse cuatro partes diferentes: AC , CD , DE y EB . El ángulo total de giro del eje, esto es, el ángulo que gira el extremo A con respecto al extremo B , se obtiene sumando algebraicamente los ángulos de giro de cada parte componente.¹⁷³ Denotando respectivamente con T_i , L_i , J_{oi} y G_i el par de torsión interno, longitud, momento polar de inercia de la sección transversal y módulo de rigidez correspondiente a la i -ésima parte, el ángulo total de giro del eje se expresa como se indica en la **Ec. (39)**, donde el par de torsión interno T_i se obtiene mediante el método de las secciones.

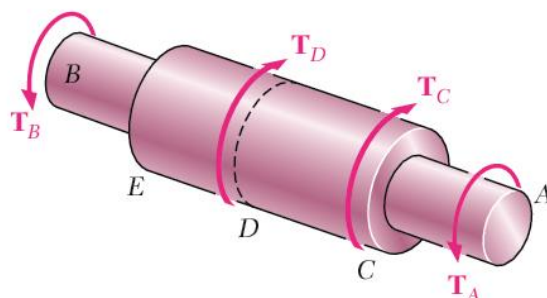


Figura 107. Determinación del Ángulo de Giro en un Eje con Secciones Transversales de Distintos Diámetros, y Pares Torsores Aplicados en Distintos Puntos de su Longitud (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

¹⁷³ Nuevamente, como yase ha hecho en otros casos, esta estrategia de resolución no es otra cosa que la aplicación del principio de superposición de los efectos.

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i \cdot L_i}{J_{O_i} \cdot G_i} [\text{rad}] \quad (39)$$

Por último, es útil tener presente que en el caso de un eje con **sección transversal circular variable en toda la longitud** (como se muestra en la figura 3.25, p.152 del BEER *et al.*, 2009), la fórmula (38-c) puede generalizarse a: $\phi = \int_0^L T \cdot dx / J_O \cdot G$. También, debe tener en cuenta que en la deducción de la fórmula (38-c) del ángulo de giro, los ejes tenían un extremo unido a un soporte fijo, en esos casos, por lo tanto, el ángulo de giro ϕ del eje fue igual al ángulo de rotación de su extremo libre. Pero, cuando **ambos extremos de un eje giran**, sin embargo, el ángulo de giro del eje es igual al ángulo a través del que un extremo del eje gira con respecto al otro, **Figura 108**.

mo libre. Cuando ambos extremos de un eje giran, sin embargo, el ángulo de giro del eje es igual al ángulo a través del que un extremo del eje gira *con respecto al otro*. Considere, por ejemplo, el ensamble de la figura 3.26a, compuesto por dos ejes elásticos AD y BE , cada uno de longitud L , radio c y módulo de rigidez G , unidos a engranes que se juntan en C . Si un par de torsión T se aplica en E (figura 3.26b), ambos ejes se torcerán. Puesto que el extremo D del eje AD es fijo, el ángulo de giro AD se mide por el ángulo de rotación ϕ_A del extremo A . Por otra parte, ya que ambos extremos del eje BE giran, el ángulo de giro de BE es igual a la diferencia entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E , es decir, el ángulo de giro es igual al ángulo a través del cual el extremo E gira con respecto al extremo B . Denotando este ángulo relativo de rotación $\phi_{E/B}$, se escribe

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

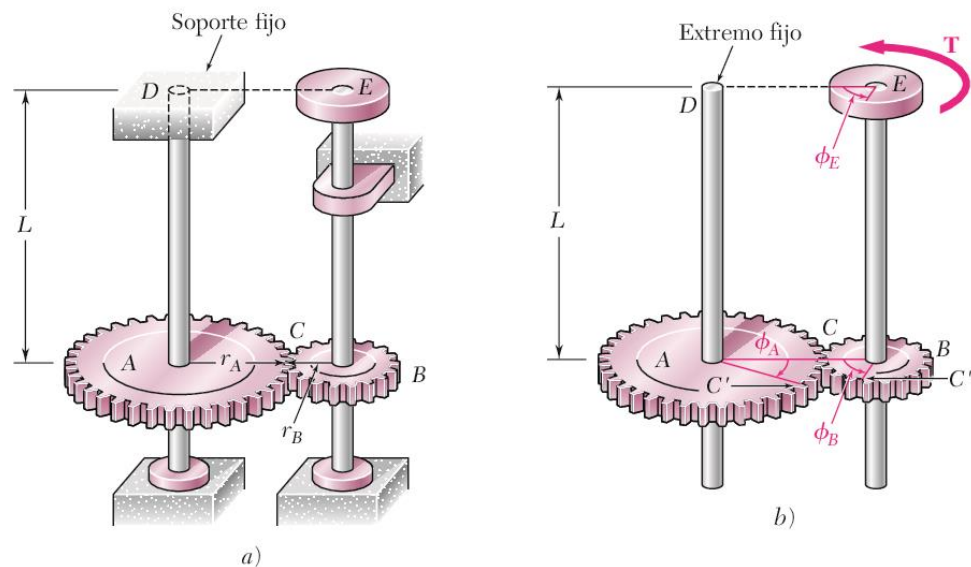


Figura 3.26

Figura 108. Cálculo del Ángulo de Giro cuando Ambos Extremos del Eje Giran (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

Finalmente, para aplicar la ecuación (39) (de pares torsores múltiples, y secciones y materiales distintos), ya sea que se quiera calcular el ángulo de giro total para un eje con un soporte fijo o para uno en el que ambos extremos giran, es necesario desarrollar una **convención de signos**, tal como se expone en la **Figura 109**.¹⁷⁴

¹⁷⁴ En las Figuras 108 y 109, J es J_O .

Convención de signos. Para aplicar esta ecuación es necesario desarrollar una convención de signos, tanto para el par de torsión interno, como para el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro. Para ello, se usará la regla de la mano derecha, según la cual el par de torsión y el ángulo serán *positivos*, siempre que el *pulgar* se dirija *hacia fuera* del eje cuando los otros dedos se enroscan indicando la tendencia de rotación, figura 5-17.

Para ilustrar el uso de esta convención de signos, considere el eje mostrado en la figura 5-18a. Se desea determinar el ángulo de giro del extremo A con respecto al extremo D. Es necesario considerar tres segmentos del

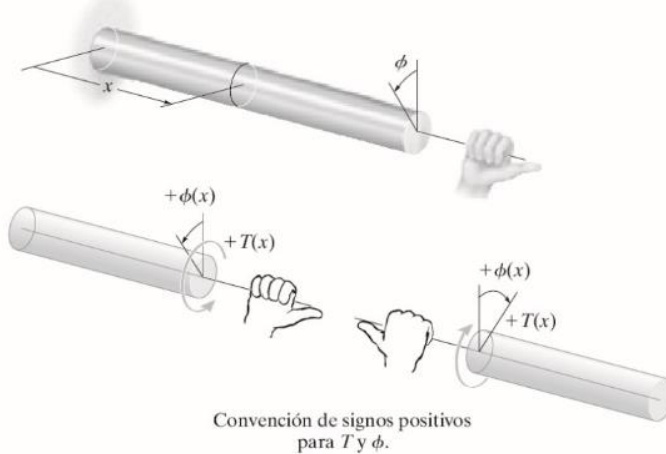


Figura 5-17

eje, ya que el par interno cambiará en B y en C. Usando el método de las secciones, se determinan los *pares de torsión internos* para cada segmento, figura 5-18b. Por la regla de la mano derecha, con pares de torsión positivos dirigidos en sentido opuesto al *extremo seccionado* del eje, se tiene $T_{AB} = +80 \text{ N} \cdot \text{m}$, $T_{BC} = -70 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $T_{CD} = -10 \text{ N} \cdot \text{m}$. Estos resultados también se muestran en el *diagrama de par de torsión* para el eje, figura 5-18c. Al aplicar la ecuación

$$\phi_{A/D} = \frac{(+80 \text{ N} \cdot \text{m}) L_{AB}}{JG} + \frac{(-70 \text{ N} \cdot \text{m}) L_{BC}}{JG} + \frac{(-10 \text{ N} \cdot \text{m}) L_{CD}}{JG}$$

Si se sustituyen los demás datos y se encuentra que la respuesta es una cantidad *positiva*, esto significa que el extremo A girará como lo indica la curva de los dedos de la mano derecha cuando el pulgar se *aleja* del eje, figura 5-18a. La notación con doble subíndice se emplea para indicar el ángulo de giro relativo ($\phi_{A/D}$); sin embargo, si el ángulo de giro debe determinarse respecto a un *soporte fijo*, entonces sólo se usará un subíndice. Por ejemplo, si D es un soporte fijo, entonces el ángulo de giro se denotará con ϕ_A .

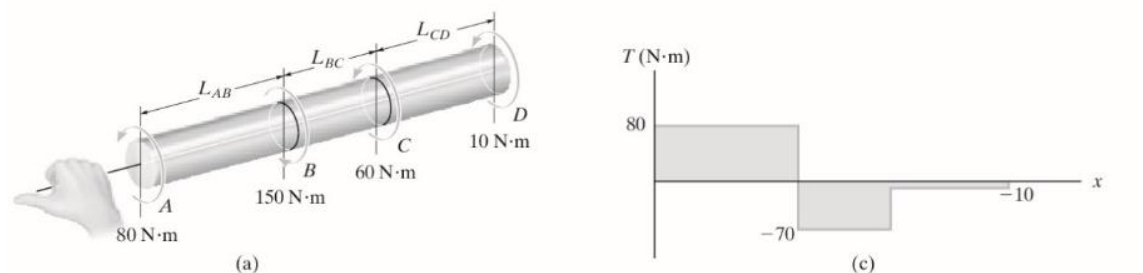


Figura 5-18

Figura 109. Convención de Signos en la Determinación del Ángulo de Giro Total (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

PROBLEMA RESUELTO 4.22

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 110. Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$.

Un eje cilíndrico hueco de acero mide 1.5 m de longitud y tiene diámetros interior y exterior iguales a 40 y 60 mm, respectivamente (figura 3.16). a) ¿Cuál es el máximo par de torsión que puede aplicarse al eje si el esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa? b) ¿Cuál es el valor mínimo correspondiente del esfuerzo cortante en el eje?

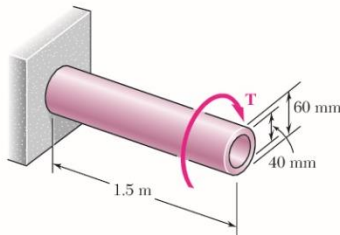


Figura 3.16

a) Máximo par de torsión permisible. El máximo par permisible T que puede aplicarse al eje es el par para el que $\tau_{\text{máx}} = 120$ MPa. Como este valor es menor que la resistencia de cedencia del acero, se puede usar la ecuación (3.9). Despejando T de esta ecuación, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} \quad (3.12)$$

Recuerde que el momento polar de inercia J de la sección transversal es dado por la ecuación (3.11), donde $c_1 = \frac{1}{2}(40 \text{ mm}) = 0.02 \text{ m}$ y $c_2 = \frac{1}{2}(60 \text{ mm}) = 0.03 \text{ m}$, y se escribe

$$J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Sustituyendo J y $\tau_{\text{máx}}$ en la ecuación (3.12) y haciendo $c = c_2 = 0.03 \text{ m}$, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}} = 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

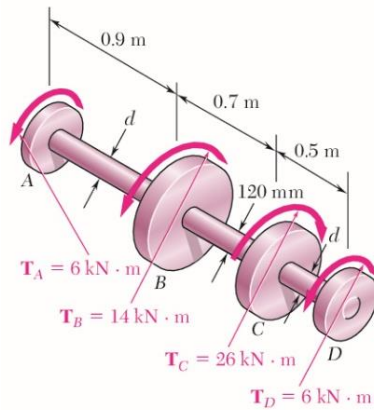
b) Esfuerzo mínimo de corte. El valor mínimo del esfuerzo cortante ocurre en la superficie interior del eje. Se obtiene de la ecuación (3.7), que expresa que $\tau_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ son respectivamente proporcionales a c_1 y c_2 :

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\text{máx}} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

Figura 110. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.22 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

PROBLEMA RESUELTO 4.23

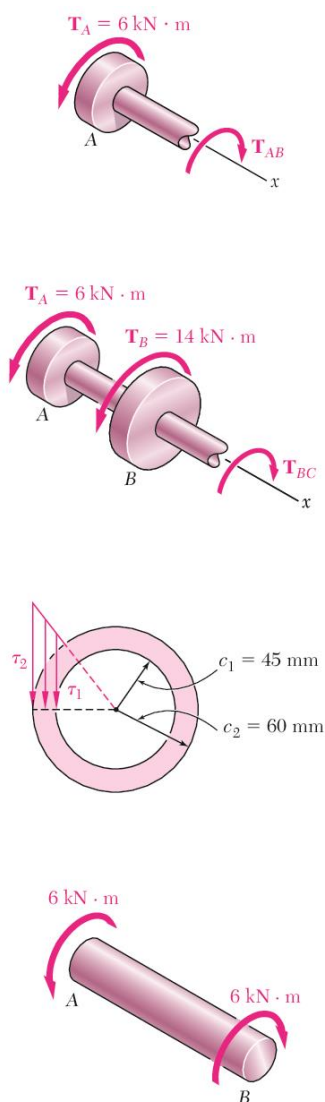
Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 111 y 112**, respectivamente. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$.



PROBLEMA MODELO 3.1

El eje BC es hueco y tiene diámetros interior y exterior de 90 mm y 120 mm, respectivamente. Los ejes AB y CD son sólidos y de diámetro d . Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el eje BC , *b*) el diámetro d requerido en los ejes AB y CD si los esfuerzos cortantes permisibles en estos ejes son de 65 MPa.

Figura 111. Consigna Problema Resuelto 4.23 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).



SOLUCIÓN

Ecuaciones de estática. Denotando con T_{AB} el par de torsión en el eje AB , se hace un corte en el eje AB y, para el cuerpo libre mostrado, se escribe

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ahora se corta en el eje BC y, para el cuerpo libre mostrado en la figura, se tiene

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

a) Eje BC . Para este eje hueco se tiene

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Esfuerzo cortante máximo. En la superficie externa, se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC}c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\text{máx}} = 86.2 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Esfuerzo cortante mínimo. Se sabe que los esfuerzos son proporcionales a la distancia del eje de la flecha.

$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\text{mín}} = 64.7 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

b) Ejes AB y CD . Se advierte que en ambos ejes la magnitud del par de torsión es $T = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $\tau_{\text{perm}} = 65 \text{ MPa}$. Denotando con c el radio de los ejes, se escribe

$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm}) \quad d = 77.8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

Figura 112. Solución Problema Resuelto 4.23 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Observaciones

- Observe que el ítem *b)* implica el **diseño del eje**. Con lo cual, podría estar incluido dentro de los problemas resueltos del apartado siguiente.

PROBLEMA RESUELTO 4.24

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 113 y 114**, respectivamente. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$.

El diseño preliminar de un eje grande que conecta a un motor con un generador requiere el uso de un eje hueco con diámetros interior y exterior de 4 in. y 6 in., respectivamente. Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi, determine el máximo par que puede ser transmitido *a)* por el eje como fue diseñado, *b)* por un eje sólido del mismo peso, *c)* por un eje hueco del mismo peso y de 8 in. de diámetro exterior.

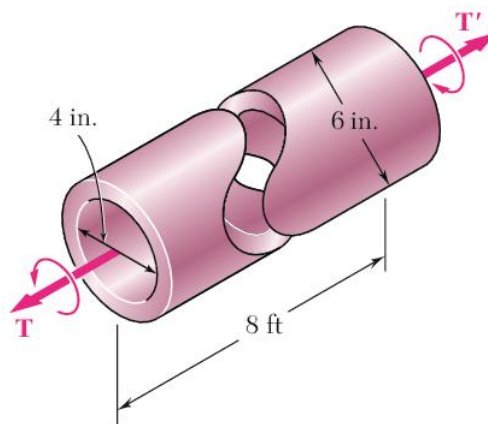
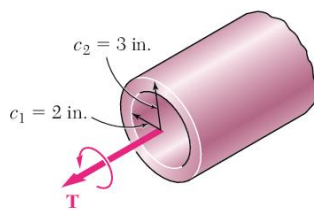


Figura 113. Consigna Problema Resuelto 4.24 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).



SOLUCIÓN

a) El eje hueco como fue diseñado. Para el eje hueco se tiene que

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(3 \text{ in.})^4 - (2 \text{ in.})^4] = 102.1 \text{ in.}^4$$

Utilizando la ecuación (3.9) se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(3 \text{ in.})}{102.1 \text{ in.}^4} \quad T = 408 \text{ kip} \cdot \text{in.} \quad \blacktriangleleft$$

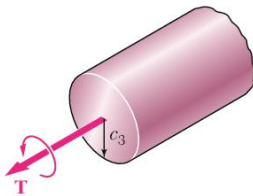
b) Eje sólido de igual peso. Para que el eje como se diseñó y este eje sólido tengan el mismo peso y longitud, las áreas de sus secciones transversales deben ser iguales.

$$A_{(a)} = A_{(b)}$$

$$\pi[(3 \text{ in.})^2 - (2 \text{ in.})^2] = \pi c_3^2 \quad c_3 = 2.24 \text{ in.}$$

Ya que $\tau_{\text{perm}} = 12 \text{ ksi}$, se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(2.24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(2.24 \text{ in.})^4} \quad T = 211 \text{ kip} \cdot \text{in.} \quad \blacktriangleleft$$



c) Eje hueco con 8 in. de diámetro. Para un peso igual, nuevamente deben ser iguales las áreas de las secciones transversales. Se determina el diámetro interior del eje a partir de

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$

$$\pi[(3 \text{ in.})^2 - (2 \text{ in.})^2] = \pi[(4 \text{ in.})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 3.317 \text{ in.}$$

Para $c_5 = 3.317 \text{ in.}$ y $c_4 = 4 \text{ in.}$,

$$J = \frac{\pi}{2}[(4 \text{ in.})^4 - (3.317 \text{ in.})^4] = 212 \text{ in.}^4$$

Con $\tau_{\text{perm}} = 12 \text{ ksi}$ y $c_4 = 4 \text{ in.}$,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(4 \text{ in.})}{212 \text{ in.}^4} \quad T = 636 \text{ kip} \cdot \text{in.} \quad \blacktriangleleft$$

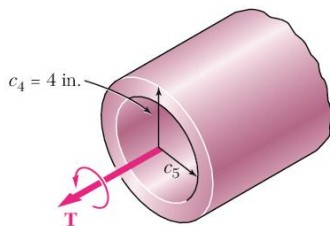


Figura 114. Solución Problema Resuelto 4.24 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).

Observaciones

- Independientemente de las unidades utilizadas para el momento torsor (típicas del sistema inglés), este problema ejemplifica muy bien un **aspecto comparativo** importante entre un eje macizo y uno hueco, respecto de la **resistencia del elemento**. Esto es, a igualdad de peso, el eje hueco resiste un momento torsor mayor (compare los momentos torsores obtenidos en los incisos a y b). Está implícito que la longitud debe ser la misma en ambos casos.

PROBLEMA RESUELTO 4.25

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 115. Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$. ^(b) El ejemplo 3.01 se corresponde con el Problema Resuelto 4.22.

¿Qué par de torsión deberá aplicarse al extremo del eje del ejemplo 3.01 para producir un giro de 2° ? Utilice el valor $G = 77 \text{ GPa}$ para el módulo de rigidez del acero.

Despejando T de la ecuación 38-c se escribe

$$T = \frac{JG}{L}\phi$$

Sustituyendo los valores dados

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2^\circ \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

y recordando del ejemplo 3.01 que, para una sección transversal dada,

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

se tiene que

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}} (34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura 115. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.25 (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

PROBLEMA RESUELTO 4.26

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en la **Figura 116. Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$. ^(b) El ejemplo 3.01 se corresponde con el Problema Resuelto 4.22 y el 3.02 con el Problema Resuelto 4.25.

¿Qué ángulo de giro creará un esfuerzo cortante de 70 MPa en la superficie interior del eje hueco de acero de los ejemplos 3.01 y 3.02?

El método que primero viene a la mente para resolver este problema es utilizar la ecuación 36-d para encontrar el par de torsión T correspondiente al valor dado de τ , y la ecuación 38-c para determinar el ángulo de giro ϕ correspondiente al valor de T recién encontrado.

Sin embargo, puede utilizarse una solución más directa. De la ley de Hooke, primero se calcula la deformación a cortante en la superficie interna del eje:

$$\gamma_{\min} = \frac{\tau_{\min}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 909 \times 10^{-6}$$

Usando la ecuación (32) que fue obtenida expresando la longitud del arco AA' en la Fig. 100-c en términos tanto de γ y ϕ , se tiene que:

$$\phi = \frac{L\gamma_{\min}}{c_1} = \frac{1\,500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} (909 \times 10^{-6}) = 68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obtener el ángulo de giro en grados, se escribe

$$\phi = (68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 3.91^\circ$$

Figura 116. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.26 (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

Observaciones

- Verifique el lector que, utilizando las ecuaciones 36-d) y 38-c), se llega al **mismo valor de ángulo de giro**.

PROBLEMA RESUELTO 4.27

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen la determinación de tensiones y deformaciones elásticas de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 117** y **118**, respectivamente. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$.

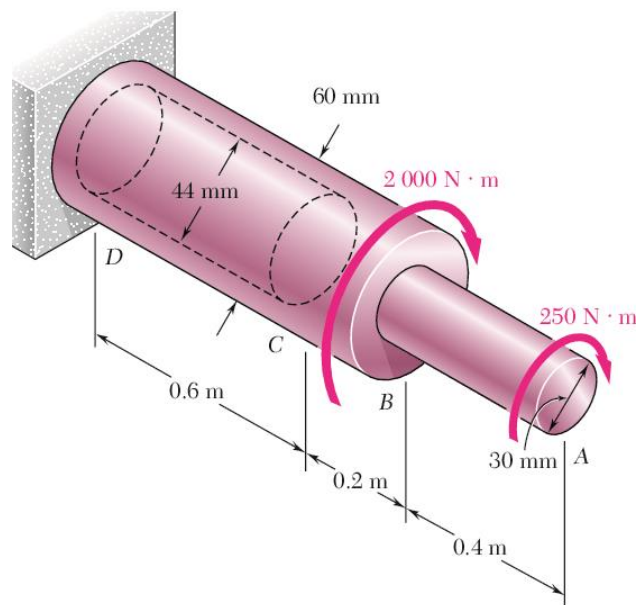
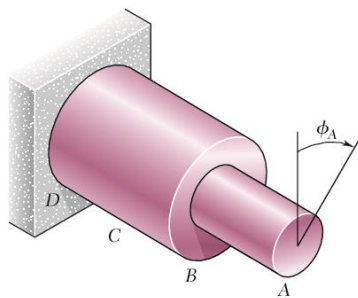
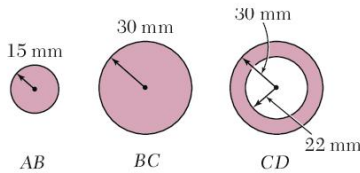
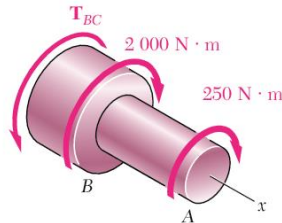
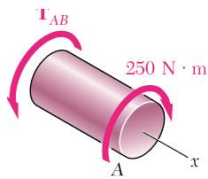


Figura 117. Consigna Problema Resuelto 4.27 (Fuente: BEER *et al.*, 2009).



SOLUCIÓN

Debido a que el eje consta de tres porciones AB , BC y CD , cada una con sección transversal uniforme y con un par interno constante, puede utilizarse la ecuación 39.

Estática. Efectuando un corte en el eje entre A y B y utilizando el cuerpo libre mostrado en la figura, se encuentra

$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Haciendo un corte entre B y C , se tiene

$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2\,000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como ningún par se aplica en C ,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momentos polares de inercia

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.015 \text{ m})^4 = 0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.030 \text{ m})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.030 \text{ m})^4 - (0.022 \text{ m})^4] = 0.904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ángulo de giro. Usando la ecuación 39 y recordando que $G = 77 \text{ GPa}$ para todo el eje, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_A &= \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right) \\ \phi_A &= \frac{1}{77 \text{ GPa}} \left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0.4 \text{ m})}{0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2\,250)(0.2)}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0.6)}{0.904 \times 10^{-6}} \right] \\ &= 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\phi_A = (0.0403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \quad \phi_A = 2.31^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Figura 118. Solución Problema Resuelto 4.27 (Fuente: Adaptado de BEER *et al.*, 2009).

Observaciones

- Note que, en este ejercicio, todos los momentos torsores internos tienden a generar una rotación del eje en el mismo sentido, por tanto, no se hace necesario una **convención de signos** para los momentos torsores ni para los ángulos de giro.

4.3.5. Diseño de Elementos

Generalidades

Se considera muy oportuno y necesario precisar aquí, o al menos consensuar con la definición brindada por algún autor, respecto de los conceptos de **árbol de transmisión** (o simplemente, árbol) y **eje**,¹⁷⁵ términos que en ciertas obras son tratados como sinónimos.¹⁷⁶ Sin embargo, y sin ánimos de extender la confusión, para el tema diseño, en particular, se adoptan las definiciones de ROKO (1995), a quien se glosa a continuación:

Es muy frecuente el empleo, como elementos de máquinas, de piezas con forma cilíndrica soportadas por cojinetes, destinadas a transmitir una cierta potencia mediante un movimiento de rotación por intermedio de una polea motora ubicada a un extremo, a otra conducida o directamente a la máquina operadora, ubicada en el otro. Estos elementos se denominan **árboles de transmisión** y están sometidos esencialmente a un momento torsor, acompañado por otro de flexión menos importante producido por el peso propio de la pieza, y generalmente no tenido en cuenta en el dimensionado. Allí radica justamente la diferencia fundamental entre árbol y **eje**, ya que este último soporta una tensión de flexión considerable, y por tal razón la sección transversal debe variar para no resultar antieconómico, mientras que el árbol es un cuerpo cilíndrico. La **Figura 119** ilustra las diferencias apuntadas y compara la forma y el trabajo de ambas piezas mecánicas. Los árboles son largos y de sección transversal pequeña, mientras que los ejes son cortos y más robustos. (ROKO, 1995, p.191).

¹⁷⁵ En este sentido, y este apartado, se deja fuera de la discusión el término “flecha”.

¹⁷⁶ Lo que también se ha hecho previamente en este documento, principalmente, a los fines de mejorar la expresión escrita. De hecho, algunos autores como BEER *et al.* (2009), usan el término eje de transmisión como sinónimo de árbol de transmisión.

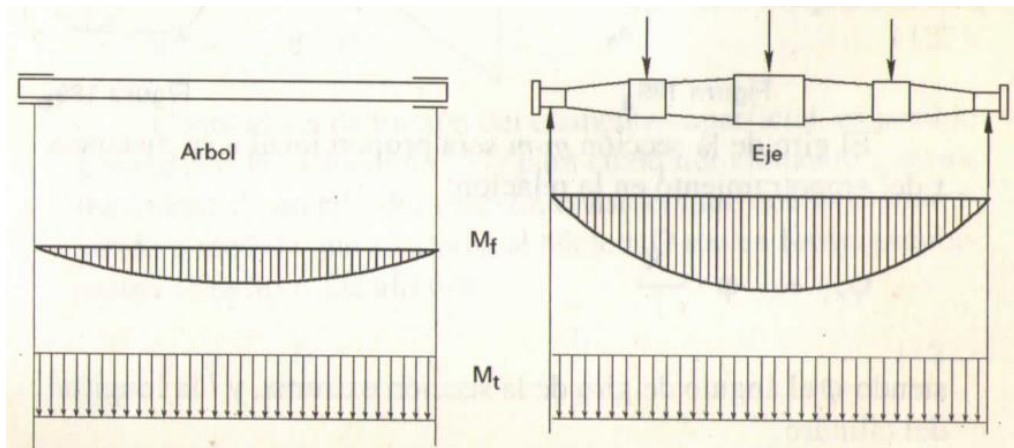


Figura 119. Distinción entre Árbol de Transmisión y Eje (Fuente: ROKO, 1995).

Así pues, en un problema de diseño se conocen las cargas que actúan en un miembro, y lo que se requiere es determinar su geometría para asegurar que este soportará las cargas con seguridad. La selección del material y la determinación de las tensiones admisibles son partes integrales del proceso de diseño. De esta manera, las técnicas desarrolladas en este apartado son sólo para miembros circulares sometidos únicamente a torsión, es decir: **árboles de transmisión**. Desde luego, se analizan tanto miembros circulares **sólidos** como **huecos**. En este último sentido, es importante recalcar que quedan exentos del estudio la torsión en miembros no circulares, como así también el análisis de la combinación de torsión con flexión y cargas axiales.

En forma ampliada, para el caso de la combinación de torsión con flexión, conviene remarcar que, pese a que en algunas aplicaciones la flexión (debida al peso propio o a la acción del elemento que transmite potencia)¹⁷⁷ puede ser importante, su efecto puede despreciarse al considerar una distancia prudencial entre cojinetes. Sin embargo, en los casos en que esto no sea posible, la acción de las fuerzas perpendiculares al eje del árbol tenderá a combarlo, por ello, estos también deben diseñarse para mantener deflexiones a un nivel mínimo, aceptable.

¹⁷⁷ Tal como un engranaje, una rueda dentada o una polea.

Por lo tanto, en este tipo de condiciones, los ejes se consideran como vigas aplicándoles a ellos el mismo tratamiento que a estas últimas.

Diseño de Miembros Circulares Sometidos a Torsión

Teniendo en cuenta las condiciones mencionadas en los párrafos precedentes, el planteo del proceso de diseño consiste en sustituir la tensión cortante máxima, $\tau_{\text{máx}}$, por la **tensión cortante admisible**, $\tau_{\text{adm.}}$, en las fórmulas (37-b) y (37-d) de torsión,¹⁷⁸ y resolver para el diámetro D del árbol macizo, **Ec. (40-a)**¹⁷⁹ y, para el diámetro exterior D_2 del árbol hueco, **Ec. (40-b)**.

Las ecuaciones anteriores, que representan las **fórmulas de dimensionamiento**, fijan el diámetro mínimo¹⁸⁰ del árbol para resistir el momento torsor T aplicado, sin sobrepasar la tensión admisible.¹⁸¹ En unidades del sistema internacional (SI), el diámetro estaría en metros.

Es oportuno aclarar que, en el último caso, resolver para el diámetro interior D_1 es poco práctico ya que requiere de un mayor tratamiento algebraico. Afortunadamente, en los problemas típicos de diseño uno de los diámetros o la relación k entre ellos, suele ser especificado para resolver la geometría completa del árbol hueco.

Árboles Macizos

$$a) \quad D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot \tau_{\text{adm.}}}} \quad [\text{m}] \quad (40)$$

Árboles Huecos

$$b) \quad D_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot (1 - k^4) \cdot \tau_{\text{adm.}}}} \quad [\text{m}]$$

¹⁷⁸ Es decir, con esta sustitución se está limitando la tensión cortante en el árbol a un nivel que sea seguro: la tensión cortante admisible.

¹⁷⁹ Algunos autores, tal como RAFFO (2007), simplifican aún más estas expresiones, así pues, para el caso del árbol macizo se obtendría: $D = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{T}{\tau_{\text{adm.}}}}$. Análogamente para el árbol hueco.

¹⁸⁰ También en este caso, tal como se ha hecho en las fórmulas de diseño de las Secciones 4.1 y 4.2, en la (40) a) y b) se podría haber planteado la desigualdad para hacer más explícito el diámetro mínimo referido. En efecto, aquí se omite la desigualdad por simplicidad.

¹⁸¹ El cálculo de la tensión admisible se ha de analizar posteriormente en este apartado.

En Resistencia de Materiales, al cociente $T/\tau_{adm.}$, el cual según la fórmula de torsión 36-d) es igual a J_O/c , es denominado **módulo resistente polar**, Z_p .¹⁸² Este concepto también es de utilidad para el dimensionamiento, y su expresión para árboles macizos y huecos se presenta en la Ec. 41-a) y b), respectivamente. Con este nuevo concepto, por tanto, pueden reformularse las expresiones (40), Ec. (42).

Árboles Macizos

$$a) \quad Z_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} [\text{m}^3] \quad (41)$$

Árboles Huecos

$$b) \quad Z_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_2^4 - D_1^4}{D_2} [\text{m}^3]$$

Árboles Macizos

$$a) \quad D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot Z_p}{\pi}} [\text{m}] \quad (42)$$

Árboles Huecos

$$b) \quad D_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot Z_p}{\pi \cdot (1 - k^4)}} [\text{m}]$$

Diseño en Función de la Potencia y la Frecuencia de Rotación. Generalmente los datos o especificaciones del problema son la **potencia**, N , a **transmitir** por el árbol y su **frecuencia de rotación**, n , medido en revoluciones por minuto.¹⁸³ Conviene expresar, pues, las ecuaciones (40) en términos de N y n .

¹⁸² En la Sección 4.4.3, el lector ha de constatar (y a los fines del aprendizaje es bueno que así sea) que, el módulo resistente polar, Z_p , es análogamente formal al módulo resistente de la fórmula de la flexión normal pura (o simplemente, fórmula de la flexión).

¹⁸³ Recuerde que la revolución por minuto al igual que el radián sobre segundo, son unidades de frecuencia utilizadas también para expresar velocidad angular.

Para ello hay que recordar de la Dinámica elemental, que N está asociada con la velocidad angular, ω , de un cuerpo rígido sujeto a un par T , por medio de la Ec. (43-a), de la cual se puede despejar T , Ec. (43-b).

$$\begin{aligned} a) \quad N &= T \cdot \omega \text{ [W]}; \quad \text{donde: } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ [Hz]}; [\text{rad/s}] \\ b) \quad T &= \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned} \quad (43)$$

De esta manera, al reemplazar la (43-b) en la 40-a) o b); y al elegir unidades convenientes para N , T y $\tau_{\text{adm.}}$ en función de la unidad deseada para el diámetro, se obtienen diversas fórmulas que permiten su dimensionamiento. Por ejemplo, estando N en hp, T en kgf·cm y $\tau_{\text{adm.}}$ en kgf/cm², se obtiene la **Ec. 44-a) y b)** en términos de n y N , cumpliendo con el objetivo planteado al inicio.

Árboles Macizos

$$a) \quad D = 71,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot \tau_{\text{adm.}}}} \text{ [cm]} \quad (44)$$

Árboles Huecos

$$b) \quad D_2 = 71,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot (1 - k^4) \cdot \tau_{\text{adm.}}}} \text{ [cm]}$$

Para terminar, cabe remarcar que, siguiendo un procedimiento análogo al anterior pero utilizando unidades distintas para las magnitudes, se pueden obtener otras expresiones válidas para el cálculo del diámetro. En este sentido, también es factible deducir otras fórmulas en función de otras variables (por ejemplo, el ángulo de giro). Sin embargo, carece de sentido

práctico presentarlas todas aquí. En cambio, se insta al lector indagar sobre estas expresiones en las obras de los autores citados.¹⁸⁴

Tensión Cortante Admisible

Como en el caso de miembros sometidos a cortante directo hechos de **materiales dúctiles**, la tensión cortante admisible, $\tau_{adm.}$, está basada en la **resistencia a la cedencia en cortante**, τ_{ys} , del material, Ec. (45-a). Donde n es el factor de seguridad.¹⁸⁵ También en esta solicitud, los diseños de miembros requieren que la tensión cortante de trabajo, $\tau_{trab.}$, se encuentre por debajo del valor de la admisible, Ec. (45-b).¹⁸⁶

$$\begin{aligned} a) \quad \tau_{adm.} &= \frac{\tau_{ys}}{n} [\text{Pa}] \\ b) \quad \tau_{adm.} &\geq \tau_{trab.} = \frac{T \cdot c}{J_o} [\text{Pa}] \end{aligned} \tag{45}$$

En los casos en que no se dispone de valores de τ_{ys} ,¹⁸⁷ esta puede ser **estimada** como $\sigma_Y/2$. Siendo σ_Y la resistencia a la cedencia en tracción.¹⁸⁸ Esta estimación dará un valor razonable, y por lo general conservador, para metales dúctiles, sobre todo para el acero. De esta manera, la (45-a) puede reescribirse según la **Ec. (46)**.

$$\tau_{ys} = \frac{\sigma_Y}{2 \cdot n} [\text{Pa}] \tag{46}$$

¹⁸⁴ Considere de manera particular: RAFFO (2007).

¹⁸⁵ En el Problema Resuelto 4.29 se presenta una tabla con valores recomendados de factores de seguridad.

¹⁸⁶ Advierta que esto mismo ya se ha planteado con anterioridad en la Sección 4.3.5, presente.

¹⁸⁷ Tal como se ha dicho, desafortunadamente, esos valores con frecuencia no se reportan.

¹⁸⁸ Nuevamente, σ_Y puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia.

Por último, en lo que se refiere a la tensión admisible, hay que destacar que MOTT (2009)¹⁸⁹ solo hace referencia a materiales dúctiles, a juicio personal, esta circunstancia advierte que en general los **materiales frágiles** no son sometidos a torsión, al menos, no en los aplicativos usuales de ingeniería.

Métodos de Diseño

En el Problema Resuelto 4.5 (de tracción axial) se presentó uno de los esquemas de método típico de diseño, el caso C, tal como lo designa el autor citado. Según se ha dicho, este caso está asociado al objetivo del problema, que es **determinar la forma y dimensiones** requeridas de un componente cuando se conoce la carga, y el material ha sido especificado. En general, para los diseños en torsión, este también ha de ser el enfoque adoptado en el curso.

¹⁸⁹ Autor del cual se toma, en general, en este documento, los análisis referidos a la determinación de la tensión admisible.

PROBLEMA RESUELTO 4.28

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase Solución en las Figuras 120 y 121.

Consigna. Dimensionar un árbol de transmisión que se someterá a un momento torsor M_t , de 10 kNm, de acuerdo a las siguientes alternativas:

- Macizo de diámetro d_1 .
- Tubular de diámetros d_i y d_o en relación 7/8.
- Comparar ambas soluciones y calcular la economía porcentual relativa.
- Resolver los ítems a) y b) utilizando el módulo resistente polar, Z_p .

Considere los siguientes datos: $G = 80 \text{ GPa}$; $\tau_{adm} = 60 \text{ MPa}$.

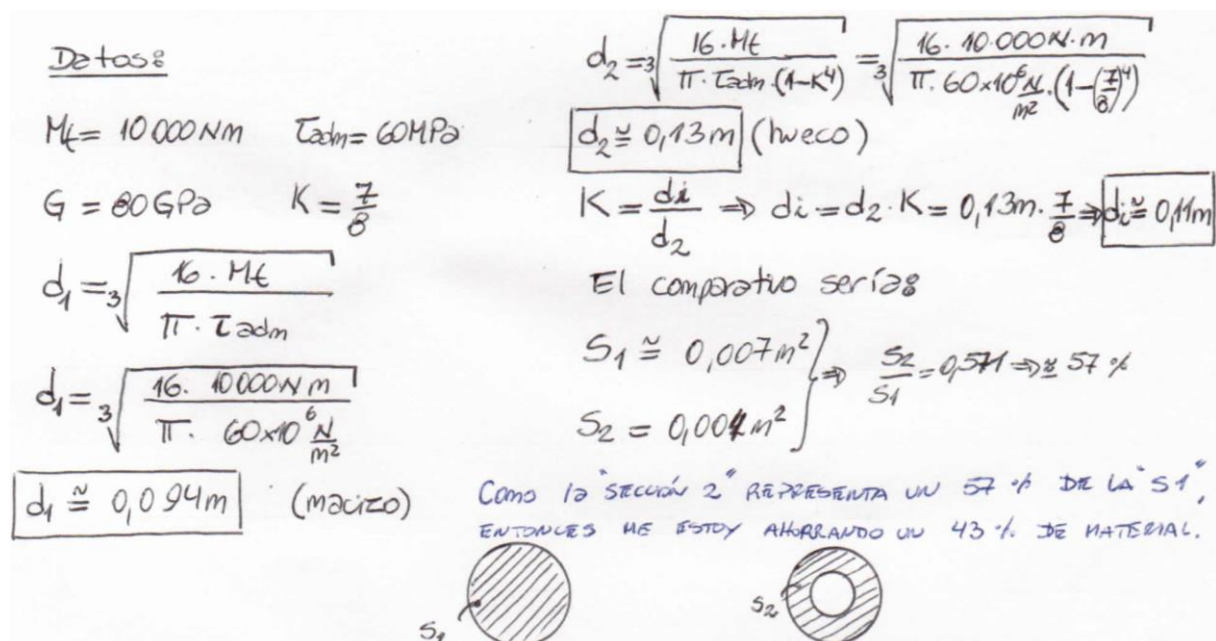


Figura 120. Solución Problema Resuelto 4.28. ítems a, b y c (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2012).

$$I_{adm.} = \frac{T}{Z_p}$$

$$Z_p = \frac{T}{I_{adm.}} = \frac{10 \times 10^3 \text{ Nm}}{60 \times 10^6 \text{ Pa}} = 1,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

MAGIZO

$$Z_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16 Z_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3}{\pi}}$$

$$D = 0,095 \text{ m}$$

HUECO

$$Z_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_2^4 - D_1^4}{D_2}$$

$$K = \frac{7}{8} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$Z_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_2^4 - \left(\frac{7}{8}\right)^4 D_2^4}{D_2}$$

$$D_1 = \frac{7}{8} D_2$$

$$Z_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_2^4 \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right]}{D_2}$$

$$Z_p = \frac{\pi}{16} D_2^3 \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right]$$

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{16 Z_p}{\pi \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3}{\pi \cdot \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right]}}$$

$$D_2 = 0,13 \text{ m} \quad \therefore$$

$$D_1 = \frac{7}{8} \cdot D_2 = \frac{7}{8} \cdot 0,13 \text{ m}$$

$$D_1 = 0,11 \text{ m}$$

Figura 121. Solución Problema Resuelto 4.28. ítem d (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2012).

Observaciones

- Este ejemplo demuestra que los **árboles huecos** son más **eficientes** que los macizos. En este caso el término eficiencia se utiliza como una medida de la masa del material de un árbol requerido, para soportar un par de torsión y tensión cortante máxima permisible especificados. En otras palabras, este ejemplo muestra que para resistir un cierto momento torsor, el árbol hueco es más liviano.
- Advierta que en el *ítem d)* se determinó, en primer lugar, el **módulo resistente polar** Z_p , luego, haciendo uso de las expresiones 41-a) y b) se hallaron los diámetros requeridos. Note, además, que una vez calculado Z_p también podrían haberse aplicado directamente la 42-a) y b). Escoger uno u otro camino depende del problema.

PROBLEMA RESUELTO 4.29

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 122** y solución en la **Figura 123**. **Notas.** ^(a) Ver referencias abajo consignadas.

La flecha motriz de la hélice de un barco debe transmitir 2500 hp a 75 rpm. Se tiene que fabricar de acero AISI 1040 WQT 1300. Use un factor de diseño de 6 basado en la resistencia a la cedencia a cortante. La flecha tiene que ser hueca, con el diámetro interno igual a 0.80 veces el diámetro externo. Determine el diámetro requerido de la flecha.

Figura 122. Consigna Problema Resuelto 4.29 (Fuente: MOTT, 2009).

Referencias

- Tensión admisible = esfuerzo de diseño (τ_d).
- N : Factor de seguridad = factor de diseño. La tabla con valores recomendados que se utiliza aquí, se presenta en la **Figura 125**.
- $S_y = \sigma_Y$: Resistencia a la cedencia en tracción.¹⁹⁰ Su valor para este problema resuelto se toma del Apéndice A-14, cuyo extracto se presenta en la **Figura 124**.

$$\begin{aligned}
 T &= 63000(2500)/75 = 2.1 \times 10^6 \text{ LB}\cdot\text{IN} \\
 \tau_d &= \frac{S_y}{2N} = \frac{63000 \text{ PSI}}{2(6)} = 5250 \text{ PSI} \\
 \text{REQ'D, } Z_p &= \frac{T}{\tau_d} = \frac{2.1 \times 10^6 \text{ LB}\cdot\text{IN}}{5250 \text{ LB/IN}^2} = 400 \text{ IN}^3 = \frac{\pi}{16} \left[\frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o} \right] \\
 \text{BUT } D_i &= 0.8 D_o; \quad D_i^4 = 0.4096 D_o^4 \\
 Z_p &= \frac{\pi}{16} \frac{(D_o^4 - 0.4096 D_o^4)}{D_o} = \frac{\pi (0.5904 D_o^4)}{16 D_o} = 0.1159 D_o^3 \\
 \text{REQ'D, } D_o &= \sqrt[3]{\frac{Z_p}{0.1159}} = \sqrt[3]{\frac{400}{0.1159}} = 15.11 \text{ IN} \\
 D_i &= 0.8 D_o = 12.09 \text{ IN}
 \end{aligned}$$

Figura 123. Solución Problema Resuelto 4.29 (Fuente: MOTT, 2009).

¹⁹⁰ Nuevamente, recuerde que, σ_Y puede representar, tanto, la tensión en el punto de cedencia como la resistencia a la cedencia.

A-14 Propiedades típicas de aceros al carbón y de aleación

Material AISI núm.	Condición [†]	Resistencia máxima, s_u		Resistencia a la cadencia, s_y		Porcentaje de alargamiento
		ksi	MPa	ksi	MPa	
1020	Recocido	57	393	43	296	36
1020	Laminado en caliente	65	448	48	331	36
1020	Estirado en frío	75	517	64	441	20
1040	Recocido	75	517	51	352	30
1040	Laminado en caliente	90	621	60	414	25
1040	Estirado en frío	97	669	82	565	16
1040	WQT 700	127	876	93	641	19
1040	WQT 900	118	814	90	621	22
1040	WQT 1100	107	738	80	552	24
1040	WQT 1300	87	600	63	434	32

*Otras propiedades aproximadamente iguales para todos los aceros aleados y al carbón.

Módulo de elasticidad a tensión = 30 000 000 lb/in² (207 GPa)

Módulo de elasticidad a cortante = 11 500 000 lb/in² (80 GPa)

Densidad = 0.283 lb_m/in³ (7680 kg/m³)

[†]OQT significa templado y enfriado en aceite. WQT significa templado y enfriado en agua.

Figura 124. Extracto del Apéndice A-14: Propiedades Típicas de Aceros al Carbón y de Aleación (Fuente: MOTT, 2009).

TABLA 4-1 Factores de diseño y esfuerzos cortantes de diseño para metales dúctiles

Tipo de carga	Factor de diseño	Esfuerzo cortante de diseño $\tau_d = s_y/2N$
Torsión estática o constante	2	$\tau_d = s_y/4$
Torsión repetida	4	$\tau_d = s_y/8$
Impacto o choque torsional	6	$\tau_d = s_y/12$

Figura 125. Tabla para Selección del Factor de Seguridad en Torsión (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Advierta que en este problema el autor utiliza la **fórmula (43-a)** de **potencia rotacional**, para el cálculo del momento torsor. En este sentido, es común en muchos problemas de torsión encontrar datos de la potencia, frecuencia de rotación y/o velocidad angular del árbol, por tanto, siempre es factible utilizar directamente la mencionada fórmula.
- Observe que, en el **camino escogido para dar solución** al problema, se estima la resistencia a la cedencia en cortante utilizando la resistencia a la cedencia en tracción, para finalmente, calcular la tensión cortante admisible. Posteriormente, se calcula el módulo resistente polar, y finalmente los diámetros. En este sentido, es importante que el lector demuestre que puede arribar a los mismos resultados para los diámetros, utilizando la (44-b) (tenga cuidado con las unidades para la tensión cortante admisible).

PROBLEMA RESUELTO 4.30

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de elementos sometidos a torsión, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna en la **Figura 126** y solución en la **Figura 127**. **Notas.** ^(a) Para este autor esfuerzo = tensión. $J = J_O$. $\theta = \phi$ (ángulo de giro).

Una varilla de aluminio sólida de 4.0 mm de diámetro tiene que experimentar una torsión de $\frac{1}{2}$ revolución (180 grados) cuando actúa como barra de torsión. El esfuerzo cortante torsional no debe ser de más de 150 Mpa. Determine la longitud requerida de la varilla.

Figura 126. Consigna Problema Resuelto 4.30 (Fuente: MOTT, 2009).

$$\begin{aligned}
 \underline{4-69} \quad D &= 4.0 \text{ mm}; \quad \theta = 180 \text{ DEG} \times \frac{\pi \text{ RAD}}{180^\circ} = \pi \text{ RAD}; \quad T_{\text{MAX}} = 150 \text{ MPa} = \frac{T_c}{J} \\
 J &= \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (4.0 \text{ mm})^4}{32} = 25.1 \text{ mm}^4 \\
 T_{\text{MAX}} &= \frac{T_{\text{MAX}} J}{c} = \frac{(150 \text{ N/mm}^2)(25.1 \text{ mm}^4)}{2.0 \text{ mm}} = 1885 \text{ N}\cdot\text{mm} \\
 \theta &= \frac{TL}{GJ}; \quad L_{\text{MIN}} = \frac{\theta GJ}{T_{\text{MAX}}} \\
 G &= 26 \text{ GPa} = \frac{26 \times 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} \times \frac{1/\text{m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 26.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\
 \underline{L_{\text{MIN}}} &= \frac{(\pi \text{ RAD})(26 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)(25.1 \text{ mm}^4)}{1885 \text{ N}\cdot\text{mm}} = 1088 \text{ mm} = \underline{1.088 \text{ m}}
 \end{aligned}$$

Figura 127. Solución Problema Resuelto 4.30 (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Es importante hacer notar que el **ángulo de giro** o de torsión, también es importante al momento del diseño. Muchas piezas se diseñan para no sobrepasar determinado valor de este ángulo.

4.4. Flexión Normal

4.4.1. Introducción e Hipótesis

En lo que sigue, se ha de limitar el estudio a la flexión normal (también conocida como **flexión recta** o **flexión simétrica**) en vigas. Una manera objetiva de comprender esta sollicitación es enunciando las hipótesis que deben cumplirse. Por tanto, se puede decir que una viga trabaja a flexión normal cuando se satisfacen las siguientes condiciones¹⁹¹ (referirse, también, a la **Figura 128**):

1. La viga es inicialmente recta (de eje longitudinal recto)¹⁹² y de sección transversal uniforme (constante).
2. La viga ofrece un plano α de simetría vertical.
3. Las cargas $P_1, P_2, \dots, P_n$, están contenidas en el plano α y actúan perpendicularmente al eje longitudinal (eje geométrico) de la viga.¹⁹³
4. El material del cual está hecho el miembro debe ser homogéneo e isotrópico (hipótesis mecánicas del material).¹⁹⁴
5. Las secciones transversales de la viga, inicialmente planas, permanecen planas luego de la flexión (verificación del principio de Bernoulli o de Navier).
6. Las tensiones no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad del material (verificación de la ley de Hooke).

¹⁹¹ Es necesario destacar que, de las condiciones listadas, las tres primeras son específicas de esta sollicitación, es decir, la definen. Sin embargo, también es importante la consignación de las generales (ya enunciadas en el Capítulo 2), dado que ellas exponen aspectos particulares a tener en cuenta.

¹⁹² O de pequeña curvatura.

¹⁹³ Esto equivale a decir que, no deben existir cargas que actúen paralelas al eje geométrico, ya que si estas existieran se estaría en el caso de otro tipo de sollicitación: la flexión compuesta normal (ROKO, 1995). En términos de SINGER y PYTEL (2008): la componente de las fuerzas exteriores paralelas al eje neutro debe ser cero.

¹⁹⁴ En general, tal como se ha mencionado en el Capítulo 2, estas propiedades del material ideal son satisfechas en forma aproximada por los materiales reales que constituyen las estructuras resistentes; en mayor o menor grado según se trate. Además, hay que destacar una implicancia importante que tiene esta hipótesis en esta sollicitación en particular, y es que: el módulo de elasticidad debe ser igual tanto, en tracción como en compresión.

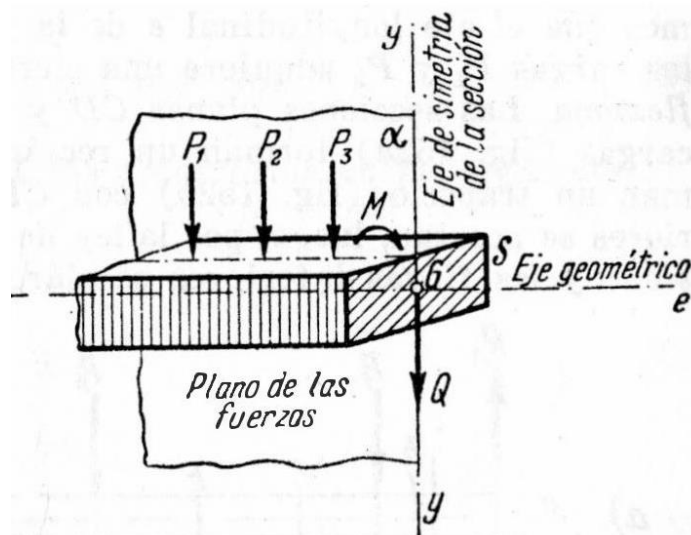


Figura 128. Viga Solicitada a Flexión Normal (se presenta un sólido prismático solamente por facilidad de representación, pero puede tener otra forma) (Fuente: RAFFO, 2007).

Para describir completamente esta sollicitación (a un grado básico), aún es necesario indicar algunas precisiones importantes, y a ello están dedicados los párrafos finales de este apartado. En primer lugar, el plano α es denominado **plano de cargas**, de fuerzas, de sollicitación o de flexión.¹⁹⁵ La traza de este plano (es decir, el eje yy) en una sección transversal, S , determinada, es denominada **eje de sollicitación**. Como el eje de sollicitación es eje de simetría, y, por tanto, **eje principal de inercia** de la sección, resulta la siguiente **definición de flexión normal**: Una viga trabaja a flexión normal cuando el eje de sollicitación es un eje principal de inercia (RAFFO, 2007).

La anterior, en efecto, es una definición más precisa de flexión normal, que, de haberse enunciado al inicio de la Sección 4.4, revestiría cierto grado de complejidad en la comprensión. Además, esta última conceptualización permite generalizar la sollicitación tratada, diferenciándola de la **flexión oblicua**,¹⁹⁶ diciendo que: cuando la traza del plano de flexión con

¹⁹⁵ Ya definido en la Sección 5.3 del apunte de Estática Gráfica, al tratar el tema vigas.

¹⁹⁶ La flexión oblicua, también llamada flexión asimétrica.

la sección transversal de la pieza resistente, no coincide con un eje de simetría,¹⁹⁷ **Figura 129**,¹⁹⁸ se está en presencia de flexión oblicua (ROKO, 1995).¹⁹⁹

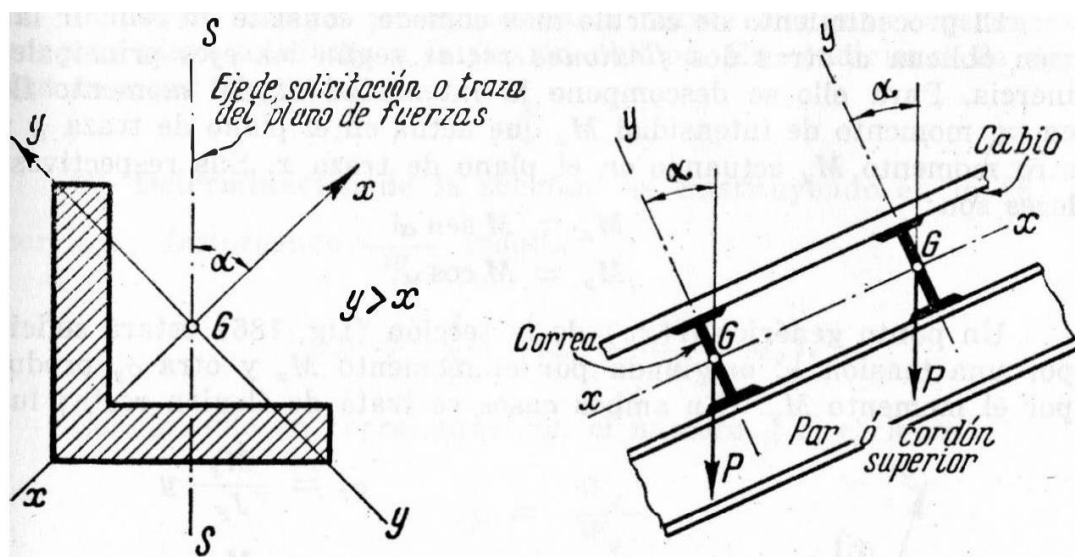


Figura 129. Sollicitación por Flexión Oblicua (Fuente: RAFFO, 2007).

También es importante enfatizar que las vigas son elementos estructurales importantes en ingeniería;²⁰⁰ y, en este capítulo, se estudian las **tensiones por flexión** en estos elementos. Específicamente, se deducen las relaciones entre el momento flexionante y las **tensiones normales**²⁰¹ que este momento origina en una sección transversal de la viga, como así también, la relación entre la fuerza cortante vertical y las **tensiones cortantes** producidas tanto en la sección transversal como en planos longitudinales de viga.²⁰²

¹⁹⁷ O bien, en términos más generales, no coincide con un eje principal de inercia (en caso de no tener eje de simetría).

¹⁹⁸ Las correas de una armadura, que se disponen perpendicularmente al cordón superior y apoyan en éste, constituyen un ejemplo de flexión oblicua.

¹⁹⁹ Es importante aclarar que existen, además de la flexión oblicua, otros casos especiales que involucran: los elementos fabricados con materiales compuestos, los elementos curvos, entre otros, todos estos, quedan excluidos del estudio.

²⁰⁰ Refiérase a la Sección 5.3 del apunte de Estática Gráfica donde se expone un desarrollo más descriptivo de este elemento estructural.

²⁰¹ Esto es, se deduce la fórmula de la flexión (Sección 4.4.3).

²⁰² Esto es, se deduce la fórmula de la tensión cortante (Sección 4.4.5).

Por último, conforme a lo anterior, hay que puntualizar que se han de analizar con particular interés vigas cuya sección transversal sea rectangular o correspondiente a algún perfil estructural (mayormente, IPN).

4.4.2. Flexión Normal Simple y Pura

Enunciado el concepto de flexión normal, es menester especificar los dos casos que pueden darse en esta sollicitación, a saber: flexión normal simple y flexión normal pura. Para una aproximación al entendimiento de estas dos definiciones es necesario que el lector tenga en cuenta que, en el interior de una viga que trabaja en estas condiciones existen tensiones tanto normales (de tracción y compresión) como tangenciales (o cortantes), que son originadas por el momento flector y la fuerza cortante vertical actuantes sobre la sección transversal de la viga, respectivamente,²⁰³ como ya se ha mencionado.

Por lo tanto, la **flexión normal simple** se da cuando una sección transversal de viga se haya accionada tanto, por un momento flector como por una fuerza cortante. Mientras que, la **flexión normal pura**, se da cuando la sección transversal considerada se halla accionada solo con un momento flector²⁰⁴ (ROKO, 1995).

Por ultimo, y a la luz de la exposición de la mayoría de los autores de la bibliografía citada en este material de estudio, las definiciones del párrafo anterior son las que se han de adoptar en este documento. No obstante, conviene aclarar que RAFFO (2007) denomina a la flexión normal pura (tal como se la ha definido aquí) como simple.

²⁰³ En este sentido, haga una revisión de la Sección 6.3 del apunte de Estática Gráfica.

²⁰⁴ El concepto de flexión normal pura, ya se ha tratado e ilustrado al final de la Sección 3.3.5.

4.4.3. Fórmula de la Flexión

En este apartado se ha de obtener la importante Fórmula de la Flexión Normal Pura,²⁰⁵ o simplemente, **Fórmula de la Flexión** (también conocida como **Ecuación de Estabilidad**),²⁰⁶ la cual establece la relación entre el momento flexionante que actúa sobre una viga y las tensiones normales que en esta se producen.

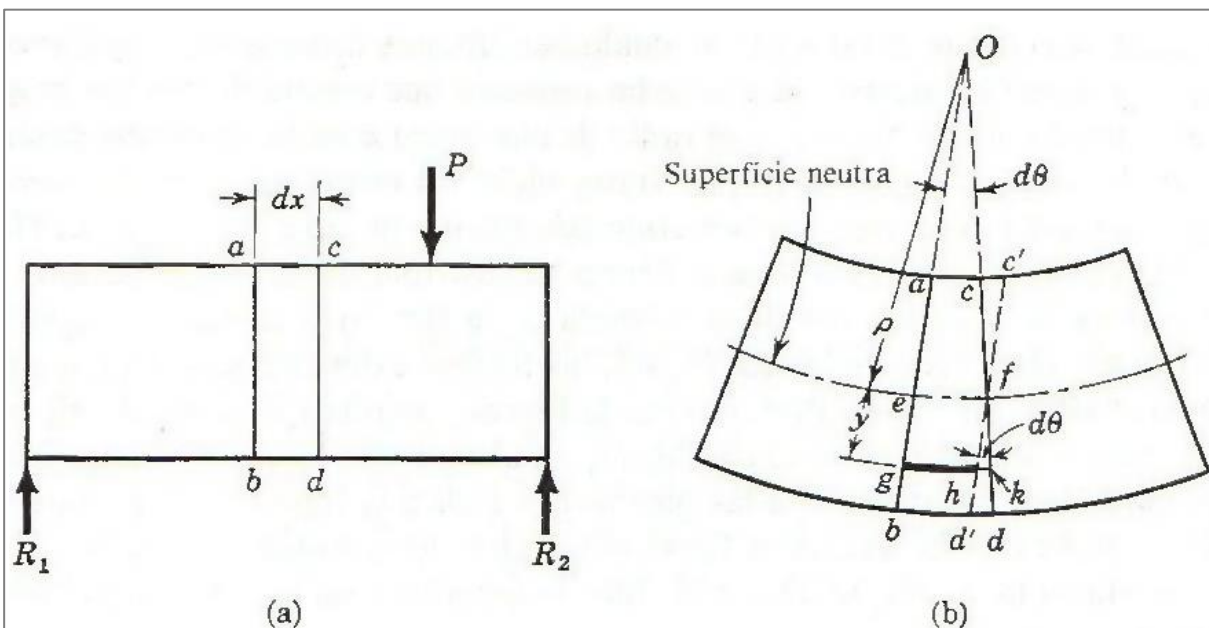
Para cumplir con el propósito anterior se ha optado por exponer el desarrollo presentado por SINGER y PYTEL (2008), **Figuras 130 a 135**.²⁰⁷ De esta manera, la secuencia seguida por este autor consta de dos etapas, a saber: **1)** Obtener las expresiones de las deformaciones elásticas, las cuales junto con la ley de Hooke han de determinar la **distribución de tensiones**²⁰⁸ en la sección transversal del elemento; **2)** Plantear las condiciones de equilibrio elástico entre el momento externo actuante y el momento interno reaccionante en la sección transversal, para establecer la **relación entre las tensiones y las cargas**.

²⁰⁵ Formalmente análoga a la fórmula de torsión.

²⁰⁶ Otro nombre menos usual es: fórmula de la escuadría.

²⁰⁷ Cabe aclarar, sin embargo, que se han realizado modificaciones convenientes al texto original, con la finalidad de hacerlo coherente a este material didáctico, favoreciendo la concatenación de ideas.

²⁰⁸ Denominadas por este autor como esfuerzos.



La figura 5-1a muestra dos secciones adyacentes ab y cd separadas una distancia dx . Debido a la flexión producida por la carga P , las secciones ab y cd giran una con respecto a la otra un pequeño ángulo $d\theta$, como se ve en la figura 5-1b, pero permanecen planas y sin distorsión de acuerdo con la hipótesis 5 de este material didáctico.

La fibra* ac de la parte superior se acorta y la fibra bd se alarga. En algún punto entre ellas existe una fibra, tal como ef , cuya longitud no varía. Trazando la línea $c'd'$ por f , paralela a ab , se observa que la fibra ac se ha acortado una longitud cc' y está, pues, comprimida, mientras que la fibra bd se ha alargado la longitud $d'd$ y está sometida a tensión.

El plano que contiene todas las fibras como la ef se llama *superficie neutra*, ya que tales fibras no varían de longitud y, por tanto, no están sujetas a esfuerzo alguno. En seguida veremos que la superficie neutra pasa por los centros de gravedad de las secciones transversales de la viga.**

Consideremos ahora la deformación de una fibra cualquiera gh situada a una distancia y de la superficie neutra. Su alargamiento hk es el arco de circunferencia de radio y y ángulo $d\theta$ y viene dado por:

$$\delta = hk = y d\theta$$

La deformación se obtiene dividiendo el alargamiento entre la longitud inicial ef de la fibra:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y d\theta}{ef}$$

Llamando ρ al radio de curvatura de la superficie neutra, la longitud ef es igual a $\rho d\theta$, por lo que la deformación unitaria vale

$$\epsilon = \frac{y d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

* El término “fibra” se emplea con un significado meramente figurado.

** Véase Puntos Importantes al final del Apartado 4.4.3.

Figura 130. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, hipótesis 6, el esfuerzo en la fibra gh viene dado por:

$$\sigma = E\epsilon = \left(\frac{E}{\rho}\right)y \quad (a)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo en cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia y a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el módulo elástico es igual a tensión que a compresión, hipótesis 4, y el radio de curvatura ρ de la superficie neutra es independiente de la ordenada y de la fibra. Ahora bien, los esfuerzos no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad, pues en caso contrario dejaría de cumplirse la ley de Hooke en la que se ha basado la determinación de la forma de distribución de los esfuerzos.

Para completar la deducción de la fórmula de la flexión se aplican las condiciones de equilibrio elástico (referirse a la **Figura 5-2**)*. Esto es:

La condición de equilibrio elástico $\sum M_z = 0$ requiere que el momento flexionante externo, M , que actúa a un lado de la sección transversal en estudio, sea equilibrado por el momento resistente interno, M_r , en esa sección, es decir, $M = M_r$. Y, el momento resistente con respecto a la superficie neutra de un elemento cualquiera es $M_r = \int (\sigma_x \cdot dA) \cdot y$, por tanto:

$$M = \int y(\sigma_x dA) **$$

Sustituyendo σ_x por Ey/ρ , resulta

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

Puesto que $\int y^2 \cdot dA$ es el momento de inercia axial, I , del área con respecto al eje de referencia (que en este caso está dado por la intersección entre la superficie neutra y la sección transversal de la viga) que pasa por el centro de gravedad, se obtiene, finalmente:

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (b)$$

La forma más común de escribir la ecuación (b) es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (5-1)$$

* La sección transversal (o sección recta) de la Figura 5-2, se ha dibujado rectangular por facilidad de representación, pero puede tener otra forma cualquiera.

** $\sigma_x \cdot dA$ representa la fuerza que actúa sobre un elemento diferencial de área.

Figura 131. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Plano longitudinal
de las fuerzas aplicadas

Superficie
neutra

Eje de referencia que
surge de la
intersección de la
superficie neutra y la
sección transversal
de la viga.
Comúnmente
llamado **Eje Neutro**.

Este eje pasa por el
centro de gravedad
de la sección
transversal.

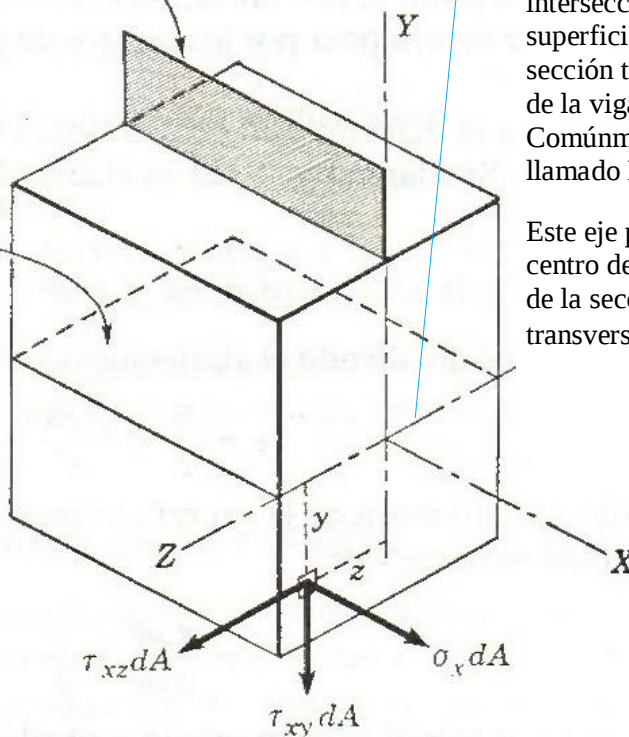


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

Igualando la relación E/ρ deducida de (5-1) con el valor de la ecuación (a) se obtiene

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

que conduce directamente a la fórmula de la flexión†, también llamada “fórmula de la escuadría”:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (5-2)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo debido a la flexión en cualquier sección es directamente proporcional a la distancia del punto considerado a la línea neutra.

Figura 132. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Una forma más común de la fórmula de la flexión se obtiene sustituyendo y por la distancia c del elemento más alejado de la línea neutra. Con esto se obtiene el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \quad (5-2a)$$

El cociente I/c se llama *módulo de resistencia** de la sección o simplemente, *módulo de sección*, y se suele designar por S , por lo que la fórmula de la flexión adquiere la forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S} = \frac{M_{\text{máx.}}}{S} \quad (5-2b)$$

Esta fórmula es muy empleada en vigas de sección constante, y muestra como el esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ se produce en la sección de momento flexionante máximo, $M_{\text{máx.}}$. Es muy importante comprender, en este sentido, que la deducción de la fórmula (5-2b) de la flexión, no se ha restringido a una geometría específica para la sección transversal de la viga, siempre y cuando esta cumpla con las hipótesis planteadas al inicio. Por este mismo motivo, en la Tabla 5-1 presentada por SINGER y PYTEL (2008), se exponen los valores del módulo de resistencia de las formas más comunes de sección recta.

Cabe enfatizar, para hacerlo más explícito, que la expresión para el cálculo de $S = I/c$, se obtiene expresando c en términos de la distancia a la fibra más alejada de la superficie neutra, según la geometría de la sección transversal. Para el caso de un rectángulo de base b y altura h (como el de la Tabla 5-1), por ejemplo, es $c = h/2$ y $I = b \cdot h^3/12$, por tanto, al reemplazar estas expresiones en $S = I/c$ y operar, se tiene que: $S = b \cdot h^2/6$.

Caso particular: viga de sección transversal rectangular

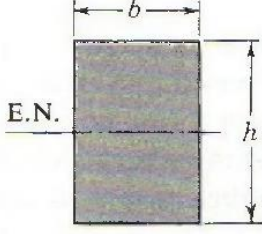
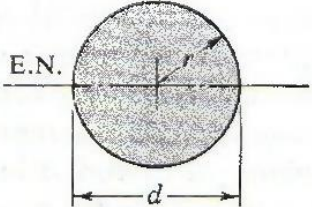
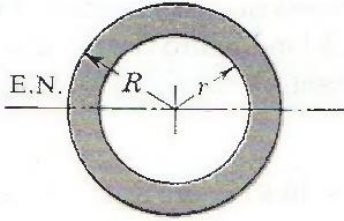
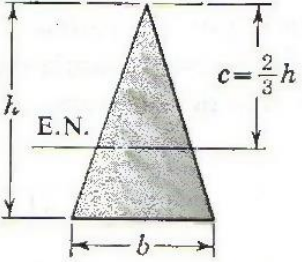
Un análisis muy interesante, por su amplia aplicación, es el de la variación de los esfuerzos de flexión en una sección rectangular, como se indica en la Figura 5-3. En efecto:

Dado que la suma de las fuerzas horizontales en la sección debe ser nula, la fuerza total de compresión C , en la mitad superior de la sección recta, ha de ser igual a la fuerza total de tensión T en la mitad inferior. Por tanto, el momento resistente M , está constituido por el par que forman las fuerzas C y T iguales y opuestas. La magnitud de cada una de estas fuerzas es igual al producto del esfuerzo medio por el área.

* En nuestro contexto, es más habitual utilizar el término módulo resistente (en lugar de: módulo de resistencia), y denotarlo con la letra W .

Figura 133. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Tabla 5-1.
Módulos de resistencia de varias formas de sección transversal

Rectangular  $S = \frac{bh^3}{6}$	Circular (llena)  $S = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$
Circular hueca (tubular)  $S = \frac{\pi}{4R} (R^4 - r^4)$	Triangular  $S = \frac{bh^3}{24}$

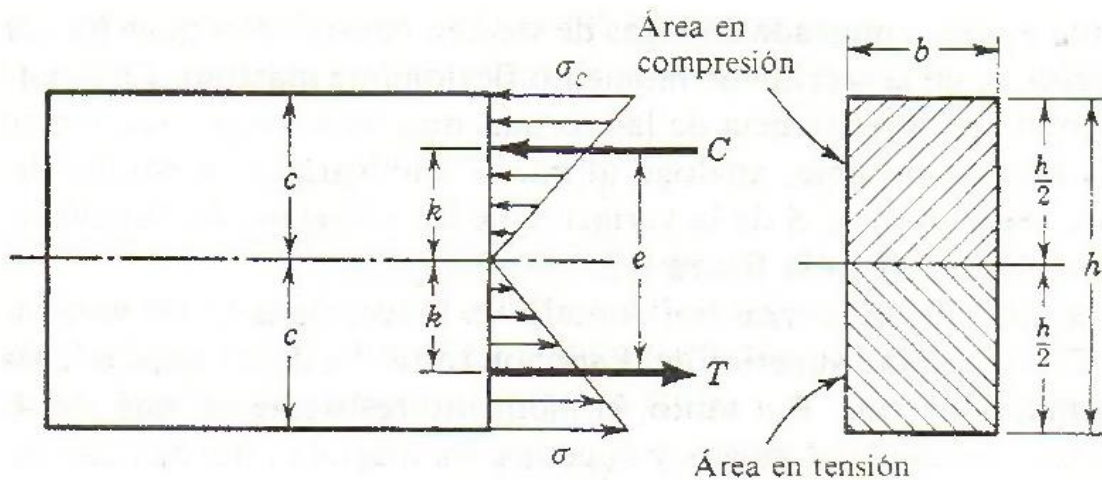


Figura 5-3. El momento resistente equivale a un par formado por las resultantes de las fuerzas de compresión y de tensión.

Figura 134. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Finalmente, y en referencia a la Figura 5-3, es importante entender dónde actúan las fuerzas C y T que componen el par interno resistente, ya que, como se ha de ver más adelante, mientras más separadas estén dichas fuerzas, más resistencia a la flexión ha de presentar la viga. En efecto:

Las fuerzas C y T actúan en el centro de gravedad de la carga triangular a una distancia k de S.N.^{*}, y como $k = \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} (h/2)$, el brazo del par resistente es $e = 2k = \frac{2}{3} h$. Igualando el momento flexionante al momento resistente resulta:

$$M = M_r = Ce = Te$$

$$M = \left(\frac{1}{2} \sigma \right) \left(b \frac{h}{2} \right) \left(\frac{2}{3} h \right) = \sigma \frac{bh^2}{6}$$

que coincide con la ecuación (5-2b) para una sección rectangular.

* S.N.: Superficie neutra.

Figura 135. Deducción de la Fórmula de la Flexión (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Puntos Importantes:

- ✚ La fórmula de la flexión deducida, Ec. 5-2b (Figura 133), también es denominada **Ley de Navier** en honor al famoso matemático e ingeniero francés (ya mencionado en este documento), quien hizo grandes contribuciones a la teoría de vigas.
- ✚ Es muy importante entender que pese a que la fórmula de la flexión (Ec. 5-2b, Figura 133) obtenida corresponde al caso de flexión pura, también se aplica a **vigas solicitadas al corte**,²⁰⁹ pues las tensiones de corte que se originan son, generalmente, de importancia muy inferior a las tensiones de flexión (RAFFO, 2007).
- ✚ Advierta que en el Apartado 4.4.3 presente, al tomar el material de SINGER y PYTEL (2008) como base para la deducción de ley de Navier, la nomenclatura de algunas cantidades cambia respecto a las que se han venido utilizando tanto, en el material didáctico de Estática Gráfica como en el presente documento. Por ejemplo, el momento de inercia axial (de J a I) y el módulo resistente (de W a S).
- ✚ Al inicio de la deducción de la fórmula de la flexión, en la Figura 130, se ha afirmado que **la superficie neutra pasa por el centro de gravedad de la sección transversal de la viga**. La justificación de ello, tal como lo exponen SINGER y PYTEL (2008), es como sigue (referirse a la **Figura 136**, repetida de la Figura 132):

²⁰⁹ Es decir, vigas solicitadas a flexión normal simple.

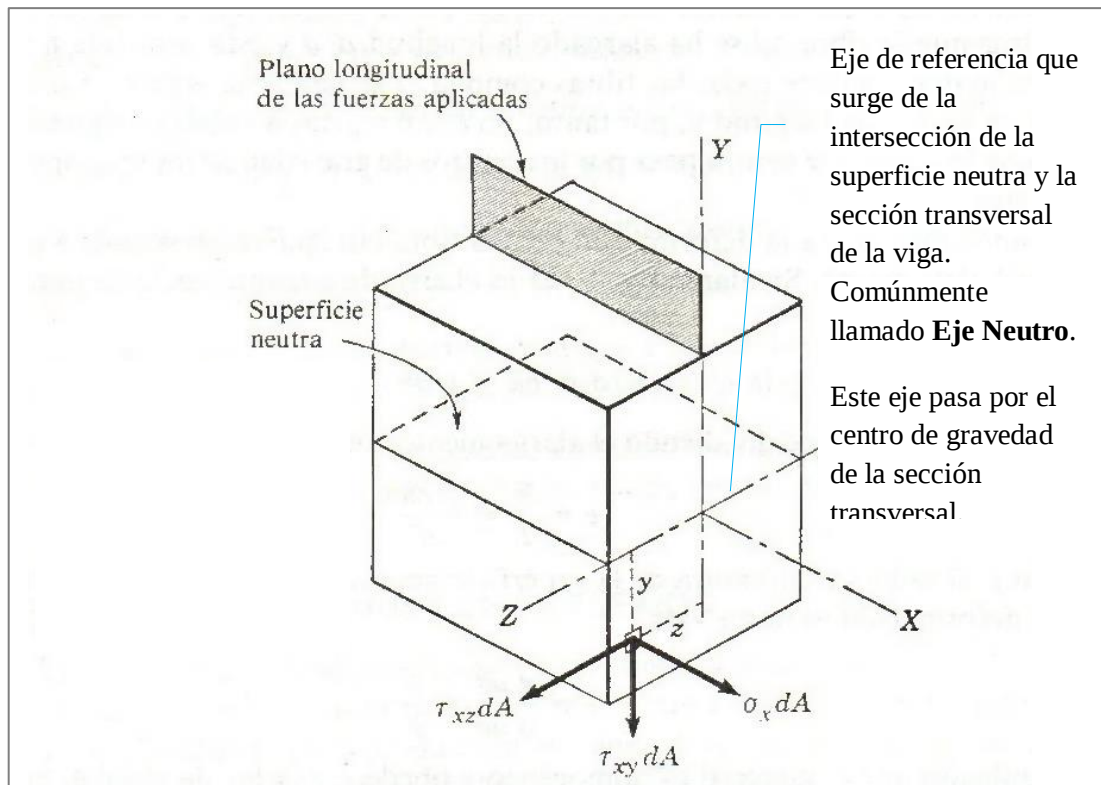


Figura 136. La Superficie Neutra pasa por el Centro de Gravedad de la Sección Transversal (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Para satisfacer la condición de que las fuerzas exteriores no tengan componente según el eje X , hipótesis 3, se tiene:²¹⁰

$$\left[\sum X = 0 \right] \quad \int \sigma_x \cdot dA = 0$$

En la cual σ_x equivale a σ de la ecuación (a) de la Figura 131. Por tanto, sustituyendo

σ_x por su valor $E \cdot y / \rho$ resulta:

$$\frac{E}{\rho} \int y \cdot dA = 0$$

²¹⁰ La expresión indicada dice que al no haber fuerzas exteriores horizontales (o normales a la sección), las fuerzas interiores también deben ser cero.

Los términos E y ρ , constantes, se han sacado fuera del signo integral; y, como $y \cdot dA$ es el momento estático del área diferencial dA respecto de la superficie neutra, entonces la integral $\int y \cdot dA$ es el momento estático total del área.²¹¹ Por tanto:

$$\frac{E}{\rho} \cdot A \cdot \bar{y} = 0$$

Para que esta igualdad se cumpla, $\bar{y}$ en esta expresión debe ser nulo, se deduce entonces, que la superficie neutra²¹² pasa por centro de gravedad de la sección recta.



De la deducción de la ecuación (b)²¹³ de la Figura 131, se ha constatado que el momento resistente interno, Mr , depende del momento de inercia axial de la sección transversal respecto de un eje de referencia que pasa por el baricentro de dicha sección.²¹⁴ Por lo tanto, según dicha deducción, ahora se comprende porque en la Sección 6.3 del Apunte de Estática Gráfica, se ha definido el **momento flexionante externo** (o momento flector), M , **con respecto al eje baricéntrico de la sección transversal**; en efecto, de esta manera se tiene un eje común para calcular e igualar M y Mr .

²¹¹ Recuerde del curso de Estática, que: $\int y \cdot dA = A \cdot \bar{y}$, donde A es el área total de la sección considerada y $\bar{y}$ (o y_G) es la distancia desde el eje baricéntrico del área hasta el eje de referencia.

²¹² Recuerde que, como se ha dicho anteriormente, la intersección de la superficie neutra y la sección transversal de la viga definen el eje de referencia. Eje, respecto al cual se está determinando el momento estático.

²¹³ Ecuación de equilibrio elástico.

²¹⁴ Una vez más, recuerde que este eje de referencia está dado por la intersección de la superficie neutra de la viga y la sección transversal de la misma.

4.4.4. Perfiles Estructurales Normalizados

En una viga de sección transversal rectangular o circular, las fibras situadas en la proximidad del eje de referencia que pasa por el centro de gravedad (véase Figura 136), están sometidas a una tensión muy pequeña comparada con la tensión en la parte superior e inferior. De esta manera, el hecho de que una gran parte de la sección no esté aprovechada las hace poco apropiadas para trabajar a flexión.

En efecto, a partir de la fórmula de la flexión, $M = \sigma \cdot I/c$, se observa que si el área de la sección rectangular, **Figura 137 (a)**, pudiera distribuirse de manera que la viga siguiera teniendo la misma altura pero con la forma indicada en la **Figura 137 (b)**, el momento de inercia I aumentaría “muchísimo”, por lo que el momento flexionante M que podría soportar sería mucho mayor. Físicamente, este incremento de momento resistente es debido a que hay muchas más fibras a mayor distancia del eje de referencia, fibras que soportarán una tensión mayor, y con un brazo de momento también mayor respecto a dicho eje.

Sin embargo, la sección de la Figura 137 (b) no es realizable; las dos partes en que ha quedado dividida no pueden estar aisladas, siendo necesario, por tanto, emplear parte del área en la sujeción, tal como se indica en la **Figura 137 (c)**, conformándose así los denominados **perfiles estructurales normalizados**.²¹⁵ Se ha de ver más adelante, en la Sección 4.4.5, como el área del alma²¹⁶ de estos perfiles soporta prácticamente la totalidad de la fuerza cortante vertical.

²¹⁵ Los materiales de estos perfiles son, comúnmente, aleaciones de acero y aleaciones de aluminio, sin embargo, en la actualidad también se han desarrollado de madera.

²¹⁶ Se denomina alma a la sección transversal media que une a las secciones transversales extremas, las cuales se denominan alas o patines.

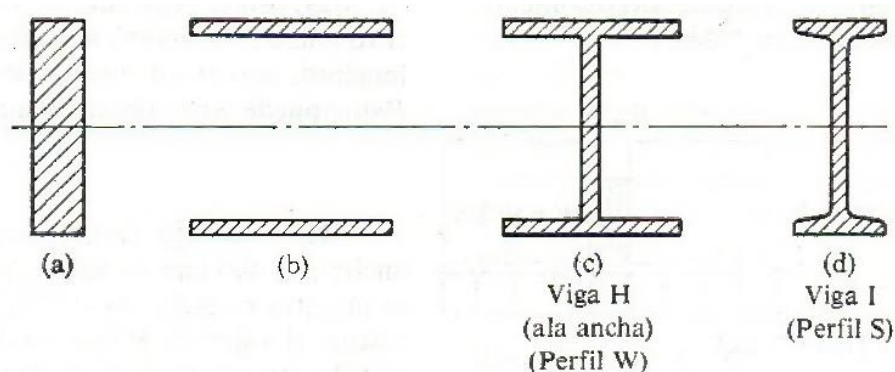


Figura 137. Conformación de Algunas Secciones Transversales de Perfiles Estructurales Normalizados para el caso del Acero (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

Los perfiles mencionados, que se obtienen mediante procesos de laminado,²¹⁷ tienen **designaciones específicas** establecidas por los estándares, por ejemplo, para el **acero**, la Figura 137 (c) representa un **perfil I de ala ancha** (o patín ancho) denominado perfil W o perfil IPE, entre otras designaciones según la normativa,²¹⁸ siendo este uno de los perfiles más eficientes, ya que no solo tiene gran resistencia trabajando a flexión como viga, sino también como columna. Otro tipo común, es el **perfil I normal**, Figura 137 (d), conocido comúnmente como perfil IPN (o I.P.N.) o perfil doble T; y, según el estándar, también se utiliza la designación perfil S. Este es más antiguo que el de ala ancha.

El perfil IPN es una viga con sección en forma de “I” y con alas inclinadas por su parte interior un 14% (ala de espesor variable). La altura de una IPN es mayor que la anchura de sus alas. La principal diferencia entre el perfil IPN y el perfil IPE radica en su forma. Las vigas IPE presentan unas alas paralelas más anchas, un alma más delgada y tiene los cantos vivos en sus extremos. Esta diferencia, aunque mínima, hace que los perfiles IPE sean más versátiles en su manipulación y uso.

²¹⁷ En términos de MOTT (2009), los tres métodos más populares de producir perfiles estructurales de acero son: el estirado en frío (CD, *cold-drawn*) que produce la resistencia más alta, seguido por el laminado en frío (CR, *cold-rolled*) y el laminado en caliente (HR, *hot-rolled*).

²¹⁸ También llamado perfil H.

Por otra parte, la **información de los perfiles estructurales** requeridas para el diseño, aparece generalmente en formato de tabla, tanto en los manuales de ingeniería como en catálogos comerciales de los fabricantes, tal como se observa en la **Figura 138**.

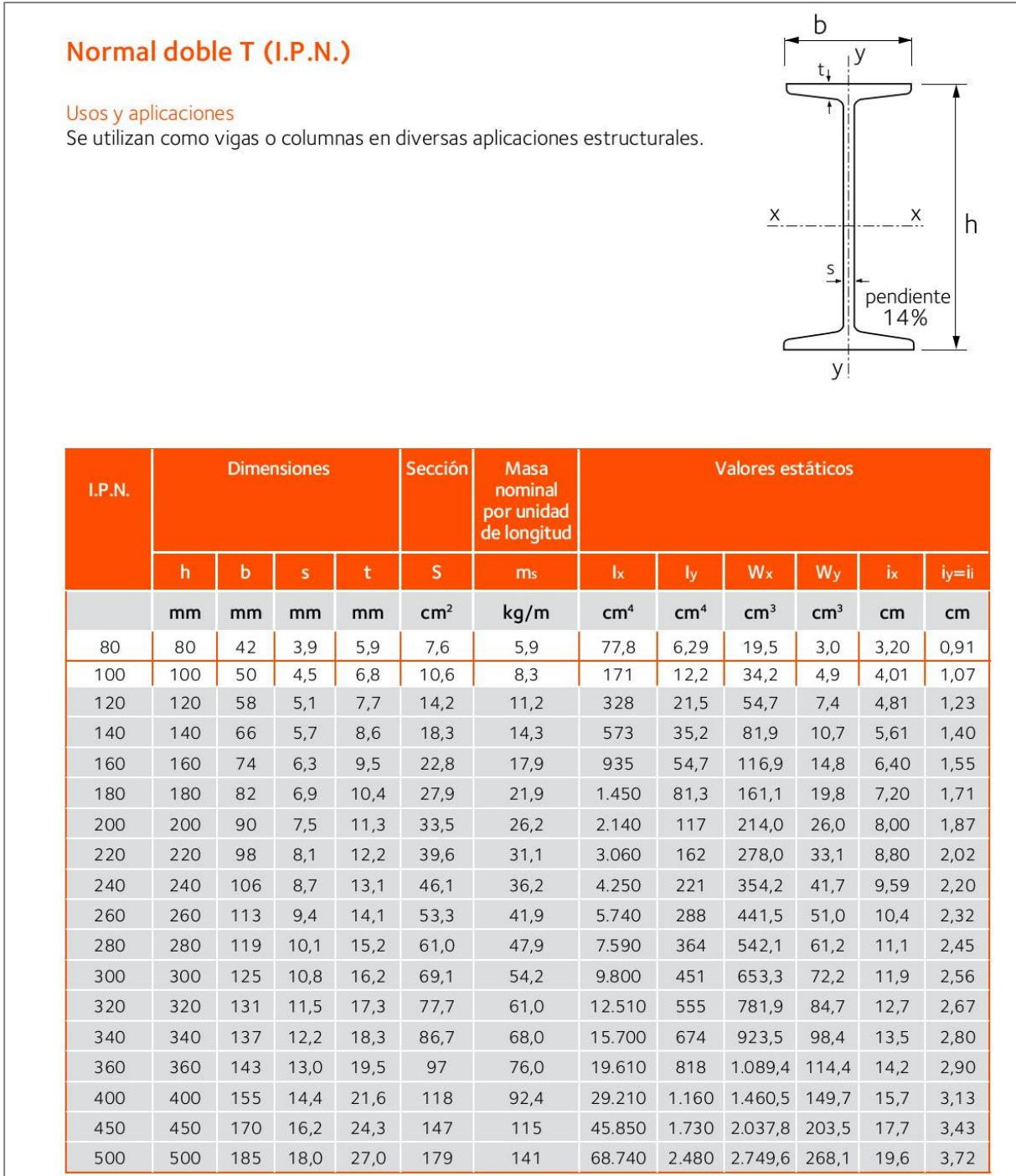


Figura 138. Catálogo de Datos Técnicos para el Perfil Normal I (I.P.N.) (Fuente: ACINDAR, 2024).

Estas tablas incluyen las dimensiones de la sección transversal, y propiedades como peso, área de la sección transversal, momento de inercia, módulo de sección y radio de giro, entre otros datos. Para el caso particular de la tabla de la Figura 138, es importante destacar algunos aspectos: 1) La primera columna indica el número de IPN (su designación), el cual es coincidente con su altura h ; ²¹⁹ 2) El espesor, t , del ala está medido a $b/4$ de la arista exterior; 3) Dentro del grupo valores estáticos, aparecen: el momento de inercia axial I , el módulo resistente W , y el radio de giro i , todos ellos respecto a los ejes x e y .

Cabe señalar que prácticamente todas las tablas de perfiles estructurales normalizados tienen, mínimamente, este formato y contenido descrito, sin embargo, pueden presentarse algunas variantes, por ejemplo, en la designación del perfil o en la designación de las dimensiones de la sección transversal, ²²⁰ por mencionar algunas comunes.

Por otro lado, como nota anticipada, mencionar que cuando se trate el **diseño de vigas** en la Sección 4.4.6, se ha de ver que el requisito para escoger un determinado perfil y aplicarlo como viga, es que su módulo resistente S (definido en la Figura 133) debe ser igual o mayor que la relación del momento flexionante máximo entre la tensión admisible. Esta condición puede expresarse por la desigualdad siguiente: $S \geq M_{\text{máx.}} / \sigma_{\text{adm.}}$, la cual se obtiene al despejar S de la ley de Navier.

Para terminar, es importante hacer mención de otros aspectos que deben considerarse al tratar el diseño de perfiles estructurales en su uso como vigas; y, si bien estos no se han de desarrollar en esta edición es conveniente hacer una breve reseña:

En primer lugar, la **flexión o deflexión lateral**: en las vigas I , los patines sometidos a compresión tienden a pandearse transversalmente en sentido horizontal si la viga es demasiado

²¹⁹ Por ejemplo, al decir IPN 80, se sobrentiende que se trata de un perfil de altura 80 mm.

²²⁰ Por ejemplo, la altura h también suele llamarse peralte.

larga.²²¹ Cuando esta flexión está impedida por la estructura del piso o porque los patines sometidos a compresión estén arriostrados mediante varillas espaciadas a intervalos apropiados, se puede emplear la tensión admisible. En caso contrario, debe reducirse dicha tensión. Esta reducción en la tensión admisible puede hacerse según fórmulas dadas por los organismos pertinentes, como ser el *American Institute of Steel Construction*, AISC. De esta manera, en los ejemplos ilustrativos de este material, se ha de suponer que todas las vigas están arriostradas adecuadamente para evitar la deflexión lateral.

En segundo lugar, todas las vigas examinadas en este documento han de ser de sección transversal simétrica con respecto al eje de referencia que pasa por el centro de gravedad de la dicha sección (Véase Figura 136). Sin embargo, como la tensión por flexión varía linealmente con la distancia a dicho eje, tales secciones son útiles solo para materiales que tengan igual resistencia a la tracción que a la compresión, pero, para aquellos otros que sean relativamente débiles a la tracción y más resistentes a la compresión, como es el caso del hierro fundido, es preferible emplear **secciones transversales asimétricas** respecto al eje de referencia antes mencionado.²²²

Con esta forma de sección asimétrica, las fibras de gran resistencia pueden colocarse a mayor distancia que las fibras más débiles. La sección ideal sería aquella en la que el centro de gravedad, o sea el eje de referencia, se colocara en tal posición que la relación de distancias a las fibras que van a quedar sometidas a máxima tracción y compresión, fuera la misma que la relación de las tensiones admisibles para cada caso. De esta manera se alcanzarían simultáneamente los valores admisibles a tracción y a compresión.

²²¹ En otras palabras, el plano de simetría vertical de la viga se curva. Este fenómeno de inestabilidad es, en esencia, el pandeo, el cual se ha de estudiar en la Sección 4.5 para el caso de columnas.

²²² En otras palabras, y considerando el caso del hierro fundido, según la fórmula de la flexión la tensión aumenta linealmente a medida que nos alejamos del eje de referencia, por lo tanto, no es conveniente que la parte de la sección sometida a tracción (sección más débil) esté muy alejada de dicho eje.

4.4.5. Fórmula de la Tensión Cortante

La fórmula de la flexión (Sección 4.4.3) se ha analizado sin considerar la acción que ejercen las tensiones cortantes en la viga, es decir, el estudio se ha enfocado a la flexión normal pura. Pero, hay que admitir que en la mayoría de los casos comunes la flexión va acompañada por el corte (: flexión normal simple), como ya se ha mencionado. En este sentido, por tanto, este apartado está dedicado a la obtención de la **Fórmula de la Tensión Cortante** (también conocida como **Fórmula de Collignon-Jourawski**,²²³ o simplemente, Fórmula de Collignon),²²⁴ la cual establece la relación entre la fuerza cortante vertical y las tensiones cortantes producidas en la viga.

Por ende, para cumplir con el propósito anterior se ha optado por exponer el desarrollo presentado por SINGER y PYTEL (2008), **Figuras 141 y 142**.²²⁵ Así, el método de análisis para el desarrollo de la fórmula de la tensión que utiliza este autor, es un método indirecto que consiste en plantear el **equilibrio de fuerzas horizontales** de una porción del elemento tomado de la viga.²²⁶

Como nota conclusiva y previo al desarrollo propiamente dicho, tenga en cuenta que, en lo que sigue se ha de obtener la fórmula de la tensión cortante generalizada, la cual permite calcular la tensión cortante longitudinal (: horizontal) y transversal (: vertical) que actúan en una viga prismática. Es menester, por tanto, conceptualizar primeramente dichas tensiones.

²²³ Édouard Charles Romain Collignon (1831–1913) fue un científico e ingeniero francés. Dmitri Ivánovich Zhuravski (a veces adaptado de la transcripción francesa como Jourawski y también como Dmitrij Ivanovič Žuravskij) (1821-1891), fue un ingeniero ferroviario y de puentes ruso.

²²⁴ O a veces, en español, simplemente: “Colignón” (ROKO, 1995).

²²⁵ Cabe aclarar, sin embargo, que se han realizado modificaciones convenientes al texto original, con la finalidad de hacerlo coherente a este material didáctico, favoreciendo la concatenación de ideas.

²²⁶ De hecho, este un método generalizado utilizado por la mayoría de los autores, por ejemplo, se puede citar a HIBBELER (2011) y FLIESS (1974), ambos referenciados en este documento.

Tensiones Cortantes Longitudinales y Transversales en una Viga

En general, una viga soportará tanto una fuerza cortante como un momento. La fuerza interna cortante V es el resultado de una distribución de la tensión cortante transversal τ que actúa sobre la sección transversal de la viga. Sin embargo, debido a la propiedad complementaria del cortante (refiérase a la Sección 4.2.1), esta tensión creará las tensiones cortantes longitudinales correspondientes que actuarán a lo largo de los planos longitudinales de la viga, como se muestra en la **Figura 139**.

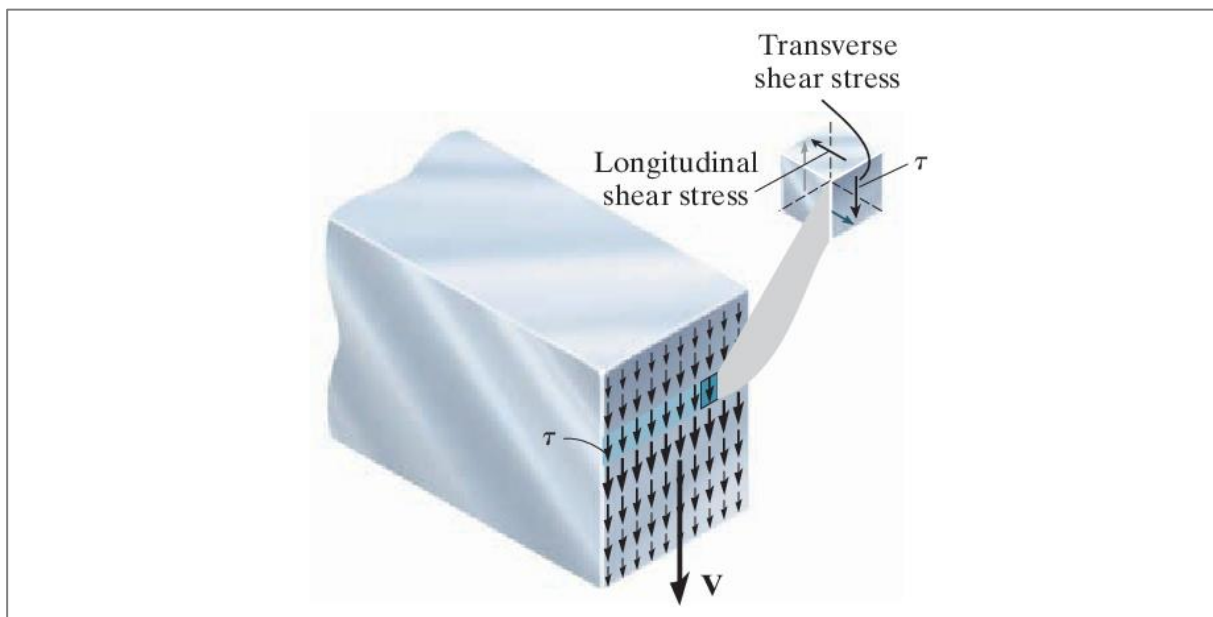


Figura 139. Tensiones Cortantes Longitudinales y Transversales en una Viga (Fuente: HIBBELER, 2011).

Para ilustrar este efecto, considere una viga que está hecha con tres tablas, **Figura 140-a**. Si las superficies superior e inferior de cada tabla son lisas, y las tablas no están unidas entre sí, entonces la aplicación de la carga P hará que cada tabla se deslice con respecto a las otras cuando la viga se somete a flexión. Sin embargo, si las tablas están unidas entre sí, entonces las tensiones cortantes longitudinales que actúan entre las tablas impedirán su deslizamiento relativo, y por lo tanto la viga actuará como una sola unidad, **Figura 140-b**.

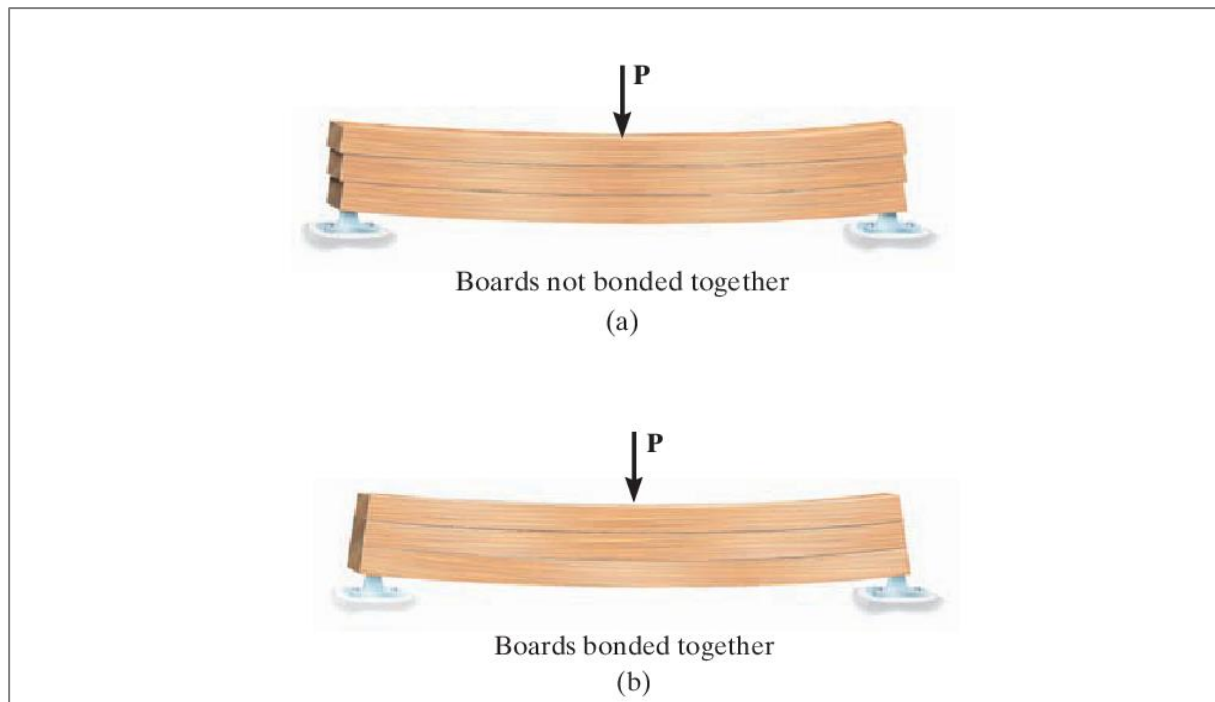


Figura 140. Ilustración del Efecto de la Acción de las Tensiones Cortantes Longitudinales en una Viga (Fuente: HIBBELER, 2011).

Fórmula de la Tensión Cortante Generalizada

Consideremos dos secciones adyacentes (1) y (2) de una viga, separadas una distancia dx , como indica la figura 5-21, y aislemos la parte rayada del elemento comprendido entre ellas. La figura 5-22 representa, en perspectiva, esta parte aislada.

Supongamos que el momento flexionante en la sección (2) es mayor que en la sección (1), por lo que los esfuerzos normales también serán distintos, σ_2 mayor que σ_1 , y la resultante horizontal de las fuerzas de compresión en la sección (2) será mayor que la de la sección (1), $H_2 > H_1$. Esta diferencia entre H_2 y H_1 sólo puede equilibrarse por la fuerza cortante resistente dF que actúe en la cara inferior del elemento aislado, ya que en las restantes caras de éste no actúa fuerza exterior alguna.

Como $H_2 - H_1$ es la suma de las diferencias de las compresiones $\sigma_2 dA$ y $\sigma_1 dA$ que actúan en cada elemento diferencial contenido en el elemento aislado, como se observa en la figura 5-22, aplicando la condición de la estática $\Sigma H = 0$ resulta,

$$[\Sigma H = 0] \quad \begin{aligned} dF &= H_2 - H_1 \\ &= \int_{y_1}^c \sigma_2 dA - \int_{y_1}^c \sigma_1 dA \end{aligned}$$

Sustituyendo σ por su valor My/I ,

$$dF = \frac{M_2}{I} \int_{y_1}^c y dA - \frac{M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA = \frac{M_2 - M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA$$

De la figura 5-21, $dF = \tau b dx$, siendo τ el esfuerzo cortante medio en el área diferencial de ancho b y longitud dx . Ahora bien, $M_2 - M_1$ representa el incremento diferencial de momento flexionante en la longitud dx , por lo que la relación anterior se puede escribir en la forma,

$$\tau = \frac{dM}{Ib dx} \int_{y_1}^c y dA$$

Y, al recordar la relación: $dM/dx = Q$, entre el momento flector y la fuerza cortante vertical, la tensión cortante horizontal viene dada por:

$$\tau = \frac{Q}{I \cdot b} \int_{y_1}^c y \cdot dA = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} \quad (5-4)$$

Advierta que, en la anterior, se ha sustituido la integral por S , el cual representa el momento estático (con respecto al eje neutro, véase Fig. 5-22) del área ubicada por encima (o por debajo) de la sección donde se quiere calcular la tensión cortante horizontal. También, I , b y Q son, respectivamente, el momento de inercia axial (respecto del eje neutro) del área transversal de la viga, la anchura de la viga y la fuerza cortante actuante en la sección transversal de la viga.

La ecuación (5-4) es la **Fórmula de la Tensión Cortante Generalizada**, la cual permite calcular la tensión cortante promedio tanto longitudinal como transversal que actúan en una viga prismática, a una altura y desde el eje neutro.

Figura 141. Deducción de la Fórmula de la Tensión Cortante (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

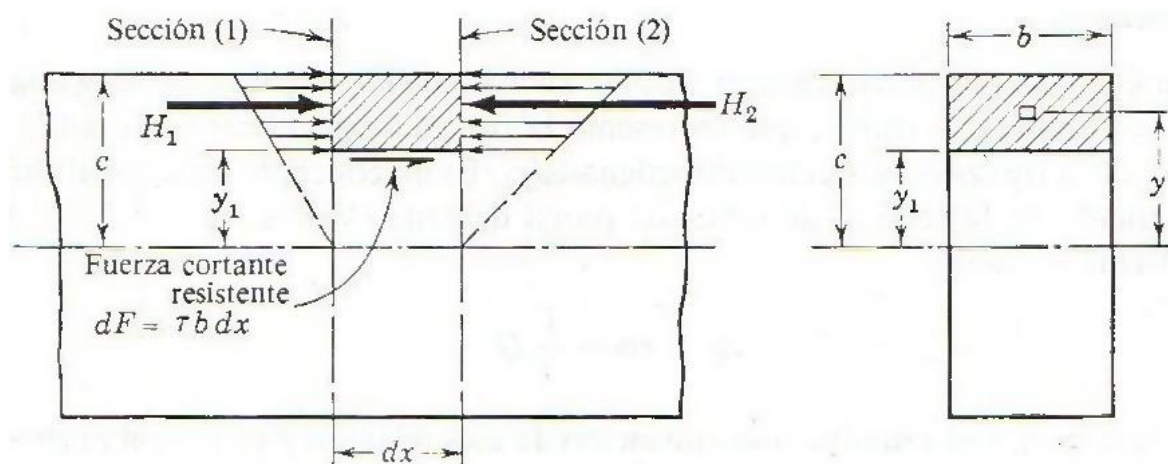


Figura 5-21.

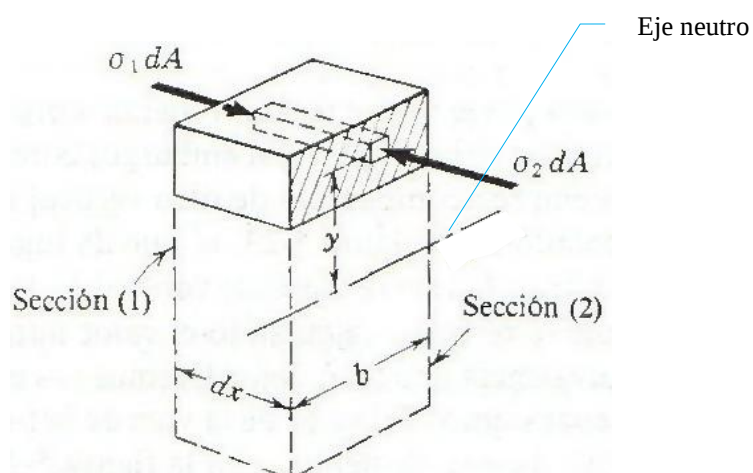


Figura 5-22.

Figura 142. Deducción de la Fórmula de la Tensión Cortante (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Puntos Importantes:

-  Es común en la obtención de la fórmula de la tensión cortante generalizada²²⁷ (Véase Ec. 5-4 de la Figura 141), que solo se consideren las tensiones cortantes que actúan sobre el plano longitudinal de la viga, sin embargo, dicha ecuación se aplica también para encontrar la tensión cortante en la sección transversal de la viga. Es necesario recordar que estas **tensiones son complementarias y numéricamente iguales**. Además, recuerde que la (5-4) se aplica solo a vigas prismáticas (GERE y GOODNO, 2013).²²⁸ A este respecto, como ya se ha dicho, las secciones transversales rectangulares y de los perfiles IPN resultan de particular de interés, y son las que se analizan con más detalle en términos de la aplicación de la (5-4).
-  También, en relación con la geometría de la sección transversal, conviene mencionar aquí que existe **otra limitación importante en el uso de la fórmula (5-4)** asociada con la irregularidad de la frontera de dicha sección. Sin embargo, la fundamentación de ello no se presenta aquí ya que las secciones transversales que se tratan en este curso no presentan tal irregularidad. De todas maneras, se insta al estudiante a dar lectura de la explicación consignada por HIBBELER (2011) en la página 365.
-  **Variación de la Tensión Cortante en la Anchura de la Viga.** La (5-4) da un **valor promedio de la tensión cortante** ($\tau_{\text{prom.}}$) en la anchura de la viga.²²⁹ Es decir, uno de

²²⁷ Tal como la designa FLIESS (1974).

²²⁸ En este sentido, advierta que diferentes autores adoptan, para el análisis, diferentes geometrías de sección transversal. Por ejemplo, HIBBELER (2011) en el Apartado 7.2 parte de una sección transversal genérica para el desarrollo de la fórmula de la tensión cortante generalizada. SINGER y PYTEL (2008), sin embargo, utilizan una sección transversal rectangular por facilidad de representación. En forma ampliada, de la hipótesis 2, la viga debe ofrecer un plano de simetría vertical y esta condición tiene consecuencias directas sobre la geometría de su sección transversal. En relación a esto, recuerde que “seguimos estando” dentro del análisis de las tensiones producidas en una viga sometida a flexión normal. Por lo tanto, tal como lo mencionan GERE y GOODNO (2013), es fundamental que comprenda que: la fórmula para la tensión cortante que se presenta en este Apartado está sometida a las mismas restricciones (hipótesis) que la fórmula de la flexión de la cual se dedujo.

²²⁹ Sin embargo, tenga en cuenta que en la mayoría de los textos suele omitirse el subíndice “prom.” indicativo del valor promedio, dando por sobrentendido este detalle.

los supuestos principales que se utilizaron en el desarrollo de la fórmula de la tensión cortante es que esta se distribuye uniformemente en toda la anchura b de la sección. Este aspecto de la variación de la tensión cortante se puede ilustrar considerando, por ejemplo, una viga de sección transversal rectangular como la mostrada en la **Figura 143**.

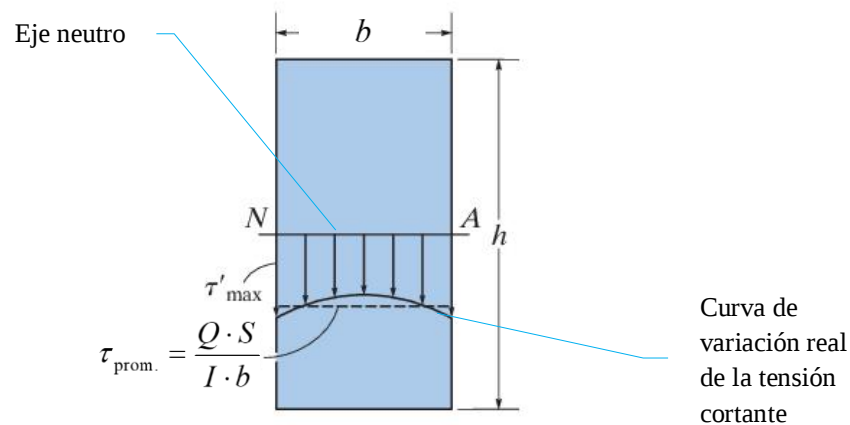


Figura 143. Tensión de Corte Promedio ($\tau_{prom.}$) Obtenida con la Fórmula de la Tensión, y Distribución de la Tensión de Corte Real Obtenida Mediante el Análisis Matemático Basado en la Teoría de la Elasticidad (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2011).

En la figura anterior se observa el valor promedio (en línea de trazos) y la curva real de variación de la tensión cortante (obtenida mediante el análisis matemático basado en la Teoría de la Elasticidad). Advierta que la tensión máxima real (τ'_{max}) se produce en las caras laterales de la viga. En este sentido, considere que en la práctica de diseño los ingenieros utilizan con mucha frecuencia la tensión cortante promedio máxima en la viga obtenida con la (5-4),²³⁰ por tanto, interesa que esta sea aproximadamente igual a la tensión máxima real; y, esto se cumple siempre que la relación anchura/altura (b/h)

²³⁰ La tensión cortante promedio máxima se produce en el eje neutro, como se explica sintéticamente en los ítems siguientes.

sea pequeña. Por lo dicho, esta relación es importante y debe ser tomada en cuenta en la aplicación de la fórmula de la tensión.



Tensiones de Corte en la Altura de Una Sección Rectangular. Sea la sección transversal rectangular de ancho b y altura h mostrada en la **Figura 144**. Para el plano de sección ubicado a una distancia arbitraria y del eje neutro, las tensiones cortantes longitudinales²³¹ τ pueden suponerse constantes en todo el ancho b de la pieza,²³² pero variando en la altura en función de y , ya que según la (5-4) τ está en función del momento estático S del área A la cual a su vez varía con la distancia y al eje neutro.²³³

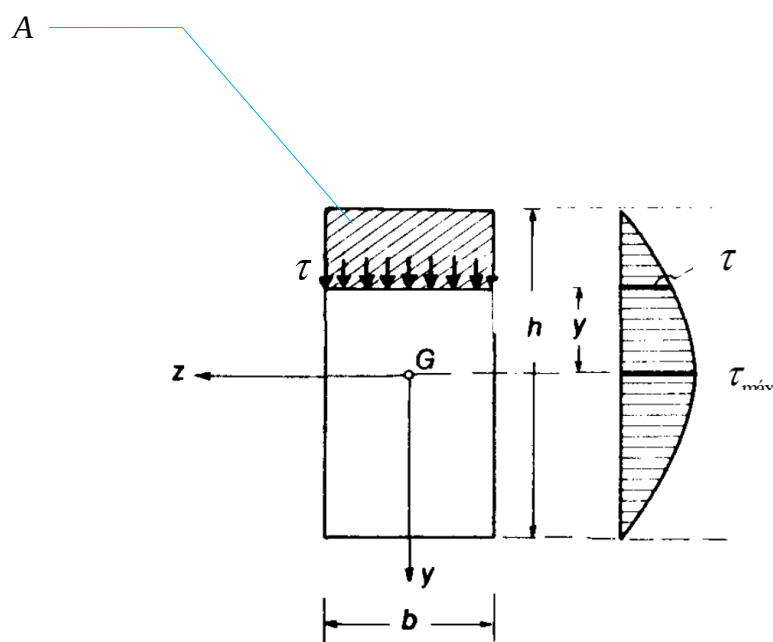


Figura 144. Distribución de la Tensión de Corte en una Sección Transversal Rectangular (Fuente: Adaptado de FLIESS, 1974).

Conforme con lo anterior, es posible reformular la (5-4) para una sección transversal rectangular al sustituir en esta las expresiones del momento estático del área A y el momento de inercia axial de la sección transversal, Ec. (47-c) y (47-d),

²³¹ Y también las transversales.

²³² Tal como se ha analizado.

²³³ Cuanto mayor es y menor ha de ser el área A .

respectivamente. Resultando así, luego de algunas transformaciones, la Ec. (48), la cual da valores de la tensión cortante en función de la distancia y medida desde el eje neutro.

Por definición de momento estático:

$$a) \quad S_z = \int_y^{+h/2} y \cdot dA = A \cdot \bar{y} \quad [\text{m}^3]$$

Donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro al eje baricéntrico del área A.

Para el caso analizado, y al aplicar la expresión del tercer miembro, se tiene:

$$b) \quad S_z = A \cdot \bar{y} = \underbrace{\left(\frac{h}{2} - y\right)}_A \cdot b \cdot \overbrace{\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right)}^{\bar{y}} \quad [\text{m}^3] \quad (47)$$

Y luego de algunas operaciones algebraicas, se tiene para la sección rectangular:

$$c) \quad S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad [\text{m}^3]$$

Además, también recuerde que:

$$d) \quad I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad [\text{m}^4]$$

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad [\text{Pa}] \quad (48)$$

Por tanto, según se ve en la (48), la variación de la tensión cortante τ sobre la altura de la sección responde a una **ley parabólica de segundo grado**. En particular, si $y = \pm h/2 \Rightarrow \tau = 0$.²³⁴ Del mismo modo, para $y = 0$, en correspondencia con las fibras

²³⁴ Es decir, en los bordes superior e inferior el área A, y, por tanto, el momento estático valen cero.

ubicadas en el eje neutro, el término entre corchetes de la expresión (48) adquiere su mayor valor y τ se hace máxima ($\tau_{\text{máx}}$), resultando la Ec. (49).

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad [\text{Pa}] \quad (49)$$

Es decir que, la tensión tangencial máxima para la sección rectangular es un 50 % mayor que la que resulta de admitir una repartición uniforme de la tensión cortante (Q/A) en la altura.



Tensiones de Corte en la Altura de Una Sección Doble T. En estas secciones la distribución de las tensiones τ en el alma es también parabólica, **Figura 145**, y se rige por la fórmula (5-4) en la que se reemplaza b por e (el espesor del alma). En las alas, sin embargo, no es aplicable esta variación pues se ha demostrado que el cambio brusco de anchura produce una complicación en la distribución de tensiones,²³⁵ asociada al hecho de que estas porciones de sección contribuyen muy poco a absorber la carga cortante Q .²³⁶ Recuerde, como se ha dicho, que el área del alma de estos perfiles soporta prácticamente la totalidad de la fuerza cortante vertical.

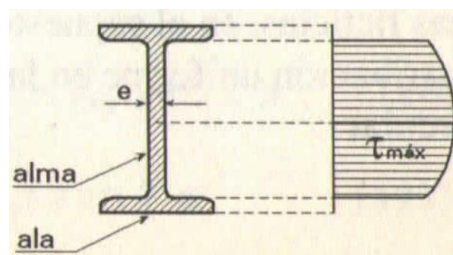


Figura 145. Distribución de la Tensión de Corte en el Alma de la Sección Transversal de un Perfil IPN (Fuente: ROKO, 1995).

²³⁵ Es decir, se produce concentración de tensiones.

²³⁶ Para el interesado en la profundización de estas afirmaciones consultar el Apartado 11.5.8 de FLIESS (1974).

Afortunadamente, estas complicaciones o limitaciones para aplicar la fórmula de la tensión cortante a las alas de un perfil estructural no son importantes en la práctica de la ingeniería. Con mucha frecuencia, los ingenieros sólo deben calcular la tensión cortante promedio máxima en la viga, la cual se produce en el eje neutro, donde la relación b/h (anchura/altura) para el alma es muy pequeña y, por ende, el resultado calculado es muy cercano a la tensión cortante máxima real como se explicó anteriormente.

4.4.6. Diseño de Elementos

Para diseñar una viga habrá que especificar su material, su longitud, la colocación de las cargas, la colocación de los apoyos y el tamaño y perfil de su sección transversal. Normalmente, los requerimientos de la aplicación determinan la longitud y la colocación de cargas y apoyos, siendo el diseñador quien determina la especificación del material y el tamaño y perfil de la sección transversal.²³⁷ Así, en este curso el término diseñar una viga implica, principalmente, determinar la forma y dimensiones requeridas de la sección transversal cuando se conoce la carga, y el material ha sido especificado.²³⁸

Además, el deber principal del diseñador es garantizar la seguridad del diseño lo cual requiere un análisis de tensión de la viga y una decisión en relación con la tensión permisible al cual puede verse sometido el material seleccionado. A este respecto, hay que comprender que en la mayoría de los casos el **criterio dominante en el diseño por resistencia** de una viga sometida a flexión, es el **valor máximo de la tensión normal** en la viga. Es decir, en el diseño de una viga la tensión normal máxima que en esta se genera no debe exceder el valor permisible

²³⁷ Pero tenga en cuenta, que también son de interés para el diseñador el costo, la apariencia, el tamaño físico, el peso, la compatibilidad del diseño con otros componentes de la máquina o estructura y la disponibilidad del material o el perfil.

²³⁸ Recuerde que este es uno de los esquemas de método típico de diseño, el caso C, según lo designa MOTT (2009), y es el que se ha estado siguiendo en tracción y compresión, corte directo y torsión.

(BEER *et al.*, 2009). Una razón que explicaría la afirmación anterior es el hecho de que las tensiones de corte que se originan son, generalmente, de importancia muy inferior a las tensiones de flexión (RAFFO, 2007).

Sin embargo, según la situación analizada o el criterio del diseñador, hay casos en los que también debe diseñarse considerando las **tensiones máximas de corte**. En este sentido, si no es usted quien está a cargo de tomar esta decisión, esta consideración suele ser explicitada en las consignas de trabajo. En términos generales, la regla que se ha de seguir en este curso es: diseñar a la flexión y verificar al corte.

Teniendo en cuenta lo consignado en los párrafos precedentes, el planteo del proceso de diseño consiste en sustituir la tensión normal máxima ($\sigma_{\text{máx}}$) por la tensión normal admisible ($\sigma_{\text{adm.}}$) en la fórmula de la flexión (Ec. 5-2b de la Figura 133),²³⁹ resultando la **fórmula de dimensionamiento a flexión, Ec. (50)**. Tal como se ha señalado en varias oportunidades, la aplicación de esta ecuación se ha de enfocar a vigas con secciones transversales rectangulares y vigas IPN.

Para el caso del diseño por tensiones de corte, y considerando una sección transversal rectangular de viga, debe sustituirse la tensión cortante máxima ($\tau_{\text{máx}}$) por la tensión cortante admisible ($\tau_{\text{adm.}}$) en la fórmula (49), resultando la **fórmula de dimensionamiento a corte, Ec. (51)**. En este caso es necesario aclarar algunos aspectos, en primer lugar, advierta que se considera la fuerza cortante vertical máxima ($Q_{\text{máx}}$) ya que esta representa la situación crítica. En segundo lugar, para el procedimiento de dimensionado de los perfiles IPN no es común

²³⁹ Es decir, con esta sustitución se está limitando la tensión normal en la viga a un valor que sea seguro: la tensión normal admisible.

verificar al corte, con lo cual, la (51) suele aplicarse más frecuentemente, por ejemplo, a vigas de madera de sección rectangular.

$$\sigma_{\text{adm.}} \geq \frac{M_{\text{máx.}}}{W} \quad [\text{Pa}] \quad (50)$$

$$\tau_{\text{adm.}} \geq \frac{3}{2} \frac{Q_{\text{máx.}}}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\text{máx.}}}{A} \quad [\text{Pa}] \quad (51)$$

Los problemas resueltos ilustran la aplicación de estas fórmulas según el esquema de diseño antes mencionado.

Tensión Normal Admisible

Cuando se especifiquen tensiones admisibles, es importante tener en cuenta que en las vigas se producen tanto tensiones de compresión como de tracción. Si el material es razonablemente homogéneo e isotrópico con la misma resistencia a tracción o a compresión, entonces el diseño se basa en la tensión máxima desarrollada en la viga. Cuando un material tiene resistencias diferentes a tracción y a compresión, como en el caso de hierro colado o madera, entonces se tendrán que analizar tanto las tensiones máximas de tracción como de compresión.²⁴⁰

Específicamente hablando, el método utilizado para determinar tensiones normales admisibles es similar al descrito en el Apartado 4.1.4 y convendría repasarlo en este momento. A este respecto, MOTT (2009)²⁴¹ expone en su texto una serie de tablas que especifican valores de $\sigma_{\text{adm.}}$ recomendados para casos específicos tanto para metales como no metales (madera,

²⁴⁰ En este sentido, y en forma ampliada, un concepto muy importante que es recalcado por MOTT (2009) y que ya se ha mencionado en este documento, es que las variaciones en la composición y estructura de un material hacen variar sus propiedades de resistencia, por lo tanto, siempre que sea posible, **el material que va a ser utilizado en una estructura debe probarse para determinar su resistencia**. Esto, en efecto, es lo usual para vigas de madera.

²⁴¹ El autor principal del cual se toman las consideraciones respecto de la determinación de tensiones admisibles, incluido el Apartado 4.1.4.

plástico y compuestos). Sin embargo, dichas tablas no son expuestas aquí y solo han de ser referenciadas en los problemas en caso de ser necesario, ya que el propósito principal de estos párrafos es orientar y/o aproximar al lector a la metodología para determinar tensiones admisibles.²⁴²

Tensión Cortante Admisible

La tensión cortante admisible depende en gran medida del material del cual se va a hacer la viga y de la forma del miembro sometido a la tensión cortante. Por ejemplo, se puede decir en términos generales para el caso del acero, que la determinación de la $\tau_{adm.}$ es similar a la descrita en el Apartado 4.2.6, es decir, se recurre a estimaciones con base en la resistencia a la cedencia en tracción. Para otros materiales (aluminio y madera, entre otros), en cambio, existen procedimientos específicos.

Nuevamente, también para este caso, MOTT (2009) presenta una cantidad limitada de datos para casos específicos y en formato de tablas;²⁴³ y, tal como él mismo lo señala, el lector haría bien en consultar otras referencias más completas.

²⁴² Se toma esta decisión porque, presentar dichas tablas implicaría necesariamente una explicación más exhaustiva que no reviste de mucha utilidad a los efectos del curso.

²⁴³ Referenciadas convenientemente en los problemas, según sea necesario.

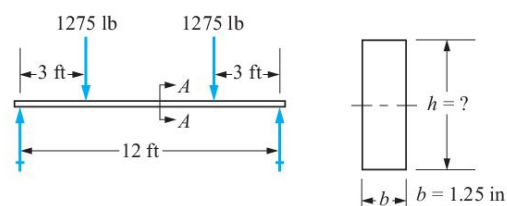
PROBLEMA RESUELTO 4.31

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de vigas, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 146 y 147**. **Nota.** Ver referencias abajo consignadas.

Problema de ejemplo 7-4

Se pretende diseñar una viga que soporte las cargas estáticas mostradas en la figura 7-15. La sección de la viga será rectangular y se fabricará con una placa de acero estructural ASTM A36 de 1.25 in de espesor. Especifique una altura adecuada para la sección transversal.

FIGURA 7-15 Carga y sección transversal de la viga del problema de ejemplo 7-4.



Sección transversal de la viga—Sección A-A

Solución

Objetivo Especificar la altura de la sección transversal rectangular.

Datos El patrón de carga mostrado en la figura 7-15. Acero estructural ASTM A36. Ancho de la viga de 1.25 in. Cargas estáticas.

Resultados **Paso 1.** La figura 7-16 muestra los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante completos. El momento flexionante máximo es de 45 900 lb·in entre las cargas, a la mitad de la viga entre $x = 3.00$ ft y 9.00 ft.

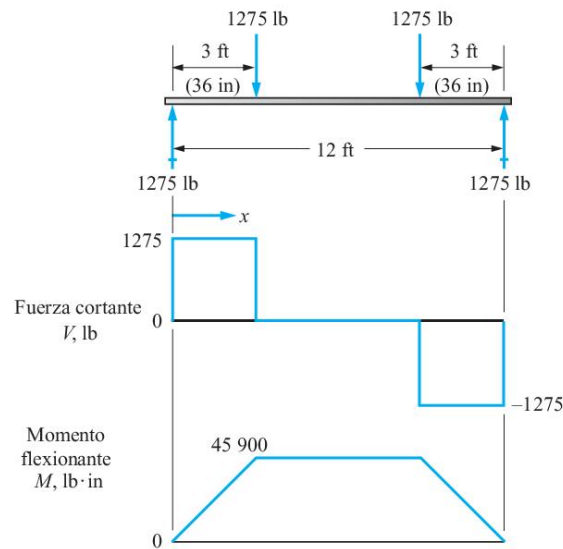
Paso 2. Según la tabla 7-1, para carga estática sobre material dúctil.

$$\sigma_d = S_y/2$$

Figura 146. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.31 (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

FIGURA 7-16

Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 7-4.



Paso 3. En el apéndice A-16, $s_y = 36\,000$ psi para acero ASTM A36. Para una carga estática, un factor de diseño de $N = 2$ basado en la resistencia a la cadencia es razonable. Entonces

$$\sigma_d = \frac{S_y}{N} = \frac{36\,000 \text{ psi}}{2} = 18\,000 \text{ psi}$$

Paso 4. El S requerido es

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{45\,900 \text{ lb}\cdot\text{in}}{18\,000 \text{ lb}/\text{in}^2} = 2.55 \text{ in}^3$$

Paso 5. La fórmula del módulo de sección de una sección rectangular de altura h y espesor b es

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^3}{12(h/2)} = \frac{bh^2}{6}$$

Para la viga de este problema de diseño, b será de 1.25 in. Luego resolviendo para h se obtiene

$$S = \frac{bh^2}{6}$$

$$h = \sqrt{\frac{6S}{b}} = \sqrt{\frac{6(2.55 \text{ in}^3)}{1.25 \text{ in}}}$$

$$h = 3.50 \text{ in}$$

Comentario El valor mínimo calculado para h es un tamaño conveniente. Especifique $h = 3.50$ in. El perfil de la viga será rectangular con dimensiones de 1.25 in $\times$ 3.50 in. Observe que como la viga es un tanto larga, 12 ft, puede que se deforme lateralmente por inestabilidad elástica. Puede que se requiera arriostramiento lateral. Además, la deflexión se deberá analizar con los métodos presentados en el capítulo 9.

Figura 147. Solución Problema Resuelto 4.31 (Fuente: MOTT, 2009).

Referencias

- σ_d = tensión admisible.
- Esfuerzo = tensión.
- S_y = tensión en el punto de cedencia en tracción. Su valor para este problema resuelto se toma del Apéndice A-16, cuyo extracto se presenta en la **Figura 149**.
- N : Factor de seguridad = factor de diseño. La tabla con valores recomendados que se utiliza aquí, se presenta en la **Figura 148**.
- $S = W$: módulo resistente o módulo de sección.

TABLA 7-1 Instrucciones para determinar el esfuerzo de diseño-esfuerzos flexionantes.

Patrón de carga	Material dúctil	Material frágil
Estática	$\sigma_d = s_y/2$	$\sigma_d = s_u/6$
Repetida	$\sigma_d = s_u/8$	$\sigma_d = s_u/10$
Impacto o choque	$\sigma_d = s_u/12$	$\sigma_d = s_u/15$

Figura 148. Tensiones admisibles para vigas de máquinas y estructuras especiales en condiciones en las que las cargas y las propiedades del material se conocen a la perfección. Se puede utilizar factores de seguridad más grandes en los casos de mayor incertidumbre. (Fuente: MOTT, 2009).

A-16 Propiedades de aceros estructurales.

Material ASTM núm. y productos	Resistencia máxima, s_u *		Resistencia a la cadencia, s_y *		Porcentaje de alargamiento, en 2 in
	ksi	MPa	ksi	MPa	
A36-Perfiles, placas y barras de acero al carbón	58	400	36	248	21
A 53-Tubo grado B	60	414	35	240	—
A242—Perfiles, placas y barras HSLA resistentes a la corrosión					
$\leq \frac{3}{4}$ in de espesor	70	483	50	345	21
$\frac{3}{4}$ a $1\frac{1}{2}$ in de espesor	67	462	46	317	21
$1\frac{1}{2}$ a 4 in de espesor	63	434	42	290	21

*Valores mínimos; pueden ser más elevados

HSLA-Baja aleación y alta resistencia

El American Institute of Steel Construction especifica $E = 29 \times 10^6$ lb/in² (200 GPa) para acero estructural.

Figura 149. Extracto del Apéndice A-16: Propiedades de Aceros Estructurales (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- Un **itinerario alternativo** a los pasos presentados en la resolución por parte del autor, puede ser el siguiente: **1)** Calcular las reacciones de vínculo; **2)** Trazar los diagramas de fuerza cortante (Q) y momento flector (M), y determinar la magnitud y ubicación del valor absoluto máximo de la fuerza cortante ($Q_{\text{máx}}$) y el momento flexionante ($M_{\text{máx}}$). Advierta que en este problema el autor no verifica la dimensión al corte, por ello no se utiliza la fuerza cortante máxima;²⁴⁴ **3)** Determinar la tensión normal admisible²⁴⁵ (lo cual tiene implícito la elección del factor de seguridad) y calcular el módulo resistente mediante la fórmula de dimensionamiento a flexión;²⁴⁶ **4)** Igualar el valor del módulo resistente hallado con su correspondiente expresión según la geometría de la sección transversal, y resolver para alguna de las incógnitas (h o b). En algunos casos, en lugar de dar el dato de h o b , se brinda la relación entre estas cantidades (por ejemplo: $b = 0,3 \cdot h$); **5)** Seleccionar medidas comerciales iguales o mayores a las obtenidas para h o b .
- Observar la importancia que tiene **conocer a la perfección** las cargas y las propiedades del material en la determinación de la tensión admisible (se recomienda analizar nuevamente la Tabla 7-1 de las Referencias).
- Otro aspecto de diseño muy importante es la **consideración del peso propio de la viga** en los cálculos. En este ejercicio el autor no realiza esta consideración, sin embargo, refiérase al problema resuelto siguiente para analizar cómo se incluye dicho peso en la resolución.
- Notar que, en la fórmula de dimensionamiento a flexión el autor resuelve para el módulo de sección mediante la igualdad (: como ecuación). Sin embargo, como ya se ha hecho en otras oportunidades también se puede resolver como **desigualdad** (: como inecuación).

²⁴⁴ Refiérase para este caso al Problema Resuelto 4.33.

²⁴⁵ Y la tensión cortante admisible si corresponde.

²⁴⁶ Y, verificar al corte mediante la fórmula de dimensionamiento a corte, si corresponde.

PROBLEMA RESUELTO 4.32

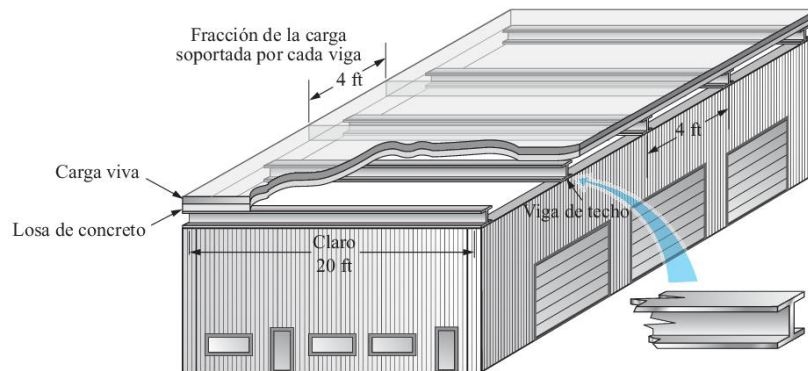
Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de vigas, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 150 y 151**. **Nota.** Ver referencias abajo consignadas.

Problema de ejemplo 7-5

El techo de una nave industrial tiene que ser soportado por vigas de patín ancho con una separación de 4 ft entre sí a lo largo de un claro de 20 ft, como se muestra en la figura 7-17. El techo será una losa de concreto colado, de 4 in de espesor. La carga viva de diseño sobre el techo es de 200 lb/ft². Especifique una viga de patín ancho que limite el esfuerzo que actúa en ella al esfuerzo de diseño para acero estructural ASTM A36 de acuerdo con la especificación del AISC.

FIGURA 7-17

Estructura de techo del edificio del problema de ejemplo 7-5.



Solución

Objetivo Especificar una viga de patín ancho adecuada.

Datos El patrón de carga mostrado en la figura 7-17. Esfuerzo de diseño conforme a las especificaciones AISC para acero estructural ASTM A36.

Resultados **Paso 1.** Primero determinamos la carga sobre cada viga de la estructura del techo. Si la carga se reparte por igual entre las vigas adyacentes entonces cada viga soportaría un tramo de 4 ft de ancho de la carga del techo. Además de la carga viva de 200 lb/ft², el peso de la losa representa una carga medible. En la sección 2-10 vimos que el concreto pesa 150 lb/pie³. Entonces cada pie cuadrado del techo, de 4.0 in de espesor, pesaría 50 lb. Ésta es la *carga muerta*. Así pues la carga total producida por el techo es de 250 lb/ft². Ahora observe que cada pie de longitud de la viga soporta 4 ft² del techo. Por consiguiente, la carga sobre la viga es una carga uniformemente distribuida de 1000 lb/ft. La figura 7-18 muestra la viga cargada y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El momento flexionante máximo es de 50 000 lb·ft.

Pasos 2 y 3. La tabla 7-2 requiere que el esfuerzo de diseño sea

$$\sigma_d = 0.66 s_y$$

Según el apéndice A-16, la resistencia a la cadencia del acero estructural ASTM A36 es de 36 000 psi. Entonces

$$\sigma_d = 0.66 s_y = 0.66(36\,000 \text{ psi}) = 23\,760 \text{ psi}$$

Paso 4. Para seleccionar una viga de patín ancho, habrá que calcular el módulo de sección requerido,

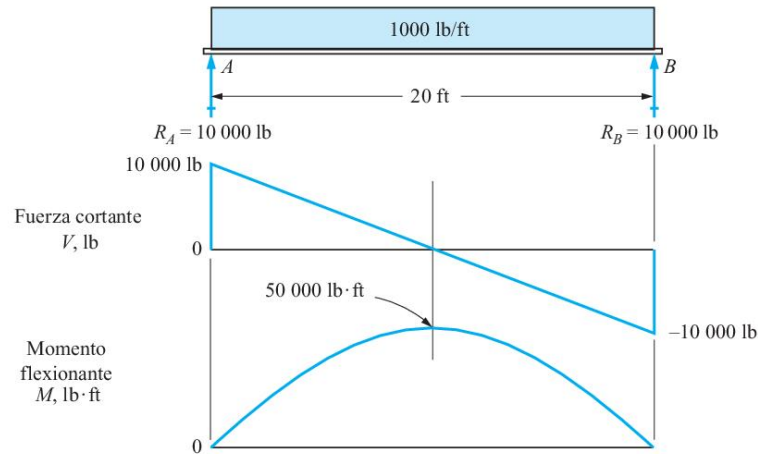
$$\sigma = \frac{M}{S}$$

$$S = \frac{M}{\sigma_d} = \frac{50\,000 \text{ lb} \cdot \text{ft}}{23\,760 \text{ lb/in}^2} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} = 25.3 \text{ in}^3$$

Figura 150. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.32 (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

FIGURA 7-18

Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante del problema de ejemplo 7-5.



Paso 5. Este paso no se aplica en este problema.

Paso 6. En el apéndice A-7 se localiza una viga cuyo valor de S es mayor que 25.3 in^3 . Al considerar diferentes opciones, de las que existen muchas, deberá buscar la viga más ligera que sea segura, puesto que su costo se basa en su peso. Algunas vigas posibles son

$$W14 \times 26; \quad S = 35.3 \text{ in}^3, 26 \text{ lb/ft}$$

$$W12 \times 30; \quad S = 38.6 \text{ in}^3, 30 \text{ lb/ft}$$

De éstas, se preferiría la $W14 \times 26$, por ser la más ligera.

Comentario En el diseño final de la estructura, se requeriría arriostramiento lateral, tal como se define en la referencia 2. Además, la deflexión de la viga debe revisarse usando los métodos descritos en el capítulo 9.

Figura 151. Solución Problema Resuelto 4.32 (Fuente: MOTT, 2009).

Referencias

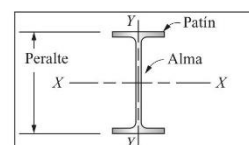
- σ_d = tensión admisible .
- Esfuerzo = tensión.
- S_y = tensión en el punto de cedencia en tracción. Su valor para este problema resuelto se toma del Apéndice A-16, cuyo extracto se presenta en la Figura 149.
- N : Factor de seguridad = factor de diseño. La tabla con valores recomendados que se utiliza aquí se presenta en la **Figura 152**.
- $S = W$: módulo resistente o módulo de sección. El catálogo de datos técnicos para el perfil que se utiliza aquí, y en el cual se observan los módulos de sección, se presenta en el Apéndice A-7, **Figura 153**.

TABLA 7-2 Esfuerzos de diseño tomados de códigos seleccionados-esfuerzos flexionantes-cargas estáticas en estructuras de edificios.

Acero estructural (AISC)		
$\sigma_d = s_y/1.5 = 0.66 s_y$		
Aluminio (Aluminum Association)		
$\sigma_d = s_y/1.65 = 0.61 s_y$	o	$\sigma_d = s_u/1.95 = 0.51 s_u$
el que sea menor		

Figura 152. Especificaciones para tensiones admisibles definidas por el *American Institute of Steel Construction* (AISC) para acero estructural y por la *Aluminum Association* (AA) para aleaciones de aluminio. Estos datos atañen a vigas sometidas a cargas estáticas como las que se utilizan en estructuras de edificios y utilizan el método diseño basado en la tensión admisible (ASD) (Fuente: MOTT, 2009).

A-7 Propiedades de perfiles de acero de patín ancho (perfiles W) en unidades del sistema inglés.



Ref.	Perfil		Área, A (in ²)	Peralte, d (in)	Espesor del alma, t_w (in)	Patin		Propiedades de sección			
						Ancho, b_f (in)	Espesor, t_f (in)	Eje X-X		Eje Y-Y	
	(in)	(lb/ft)						I_x (in ⁴)	S_x (in ³)	I_y (in ⁴)	S_y (in ³)
a	W 30 × 173		51.0	30.4	0.655	15.0	1.070	8230	541	598	79.8
b	W 30 × 108		31.7	29.8	0.545	10.5	0.760	4470	299	146	27.9
c	W 27 × 146		43.1	27.4	0.605	14.0	0.975	5660	414	443	63.5
d	W 27 × 102		30.0	27.1	0.515	10.0	0.830	3620	267	139	27.8
e	W 24 × 76		22.4	23.9	0.440	8.99	0.680	2100	176	82.5	18.4
f	W 24 × 68		20.1	23.7	0.415	8.97	0.585	1830	154	70.4	15.7
g	W 21 × 73		21.5	21.2	0.455	8.30	0.740	1600	151	70.6	17.0
h	W 21 × 57		16.7	21.1	0.405	6.56	0.650	1170	111	30.6	9.35
i	W 18 × 55		16.2	18.1	0.390	7.53	0.630	890	98.3	44.9	11.9
j	W 18 × 40		11.8	17.9	0.315	6.02	0.525	612	68.4	19.1	6.35
k	W 14 × 43		12.6	13.7	0.305	8.00	0.530	428	62.7	45.2	11.3
l	W 14 × 26		7.69	13.9	0.255	5.03	0.420	245	35.3	8.91	3.54
m	W 12 × 65		19.1	12.1	0.390	12.0	0.605	533	87.9	174	29.1
n	W 12 × 30		8.79	12.3	0.260	6.52	0.440	238	38.6	20.3	6.24
o	W 12 × 16		4.71	12.0	0.220	3.99	0.265	103	17.1	2.82	1.41
p	W 10 × 60		17.60	10.2	0.420	10.1	0.680	341	66.7	116	23.0
q	W 10 × 30		8.84	10.5	0.300	5.81	0.510	170	32.4	16.7	5.75
r	W 10 × 12		3.54	9.87	0.190	3.96	0.210	53.8	10.9	2.18	1.10
s	W 8 × 40		11.70	8.25	0.360	8.07	0.560	146	35.5	49.1	12.2
t	W 8 × 21		6.16	8.28	0.250	5.27	0.400	75.3	18.2	9.77	3.71
u	W 8 × 10		2.96	7.89	0.170	3.94	0.205	30.8	7.81	2.09	1.06
v	W 6 × 15		4.43	5.99	0.230	5.99	0.260	29.1	9.72	9.32	3.11
w	W 6 × 12		3.55	6.03	0.230	4.00	0.280	22.1	7.31	2.99	1.50
x	W 5 × 19		5.54	5.15	0.270	5.03	0.430	26.2	10.2	9.13	3.63
y	W 5 × 16		4.68	5.01	0.240	5.00	0.360	21.3	8.51	7.51	3.00
z	W 4 × 13		3.83	4.16	0.280	4.06	0.345	11.3	5.46	3.86	1.90

Figura 153. Apéndice A-7: Propiedades de Perfiles de Acero de Patín Ancho (perfiles W) (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- **Carga viva** se refiere a la fuerza generada por el uso de la estructura, también llamada carga impuesta o carga probabilística, ya que su cálculo se basa en estimaciones y no en datos concretos. Incluye elementos como personas, mobiliario, tráfico vehicular, equipamientos y estructuras temporales. En el análisis y diseño estructural, es esencial considerar distintas cargas, siendo la carga viva una de las más importantes.
- **Carga muerta**, también conocida como carga estática o carga permanente, se refiere al peso constante y estable de los elementos estructurales y los materiales que componen una construcción. También son aquellas que se mantienen fijas en posición durante la vida de la estructura. Por lo general, la carga muerta consiste principalmente en el peso de la propia estructura, al menos de que haya alguna modificación en la construcción. La carga muerta se puede calcular con precisión a partir del diseño, las dimensiones y la densidad de los materiales utilizados.
- Notar que, en este problema, primero debe determinarse el **patrón o configuración de cargas** que ha de permitir luego trazar los diagramas de M y Q . Para ello, el ingeniero debe analizar los datos proporcionados de la estructura, y, justamente, la habilidad de realizar este análisis es lo que se pretende que adquiera el lector a nivel de estructuras sencillas, por lo tanto, se insta al mismo a analizar cuidadosamente el paso 1 presentado por MOTT (2009).
- Advierta que la Tabla 7-2 utilizada en este ejercicio da valores de tensión admisible para casos específicos de vigas sometidas a cargas estáticas, como las que se utilizan en estructuras de edificios. En el ejercicio anterior, sin embargo, se hizo uso de la Tabla 7-1 ya que, en ese caso, si bien se analizó una viga, por sus dimensiones esta no podría corresponder a su uso en edificios. Lo que se quiere enfatizar con esto es lo que ya se ha mencionado: **la determinación de las tensiones admisibles es específica para cada situación.**

- Si usted analiza con detenimiento el **itinerario** presentado en las observaciones del Problema Resuelto 4.31, se ha de percatar que para este ejercicio los pasos 1) a 3) son idénticos a aquel.²⁴⁷ De esta manera, cuando se trabaja con el **dimensionamiento a flexión de perfiles estructurales**,²⁴⁸ el paso 4) consiste seleccionar el perfil que tenga un módulo de sección mayor o igual al calculado en el paso 3). Dicha selección se realiza desde algún catálogo de datos técnicos para el perfil. A este respecto, lea con detenimiento los comentarios del paso 6) presentado por el autor.
- En el apéndice A-7 de la Figura 153, la **designación de las vigas de ala ancha** se da expresando su altura (o peralte) nominal y su peso por unidad de longitud. Por ejemplo, un W14×26 tiene una altura nominal de 14 pulgadas y un peso de 26 lb/pie.²⁴⁹ Observe que de acuerdo con los datos que aparecen en la tabla, el peralte real a menudo es diferente del nominal, para el perfil mencionado el peralte real es 13,9 in.
- Otro aspecto de diseño muy importante es la **consideración del peso propio de la viga** en los cálculos. Así, en este problema no se ha considerado el peso propio de la viga puesto que no se conocía sus dimensiones antes del análisis.²⁵⁰ Existen alternativas que permiten solucionar este inconveniente y que pueden aplicarse según el caso. La primera opción es redefinir la carga: esto es, tomar el peso por unidad de longitud obtenido, en este caso 26 lb/pie, y sumarlo a las 1000 lb/pie obtenida inicialmente en el paso 1. Luego, repetir los pasos siguientes para re-seleccionar un nuevo perfil. Una segunda opción es, seleccionar de antemano un cierto perfil para conocer su peso propio y sumarlo a las 1000 lb/pie, luego proceder con los pasos siguientes. Dicha selección, sin embargo, debe hacerse con mucho

²⁴⁷ Salvando, claro, el análisis del patrón de cargas.

²⁴⁸ El paso 4) no es exclusivo de los perfiles estructurales, y puede aplicarse siempre que se cuente con las tablas de propiedades de la viga. Confróntese esto con el Problema Resuelto 4.33.

²⁴⁹ Otras tablas dan datos en unidades del sistema internacional.

²⁵⁰ Justamente, eso es lo que se pedía hallar.

criterio y va de la mano de la experiencia del diseñador. Por último, en ciertas consignas de trabajo, y a un nivel más bien académico, se puede presuponer que, dado un valor de carga uniformemente distribuida (por ejemplo, las 1000 lb/pie) ésta ya incluye el peso propio de la viga.

- Observe del apéndice A-7 que las propiedades de momento de inercia y módulo de sección son mucho más altas con respecto al eje X de lo que son con respecto al eje Y . Por consiguiente, los perfiles W en general se utilizan en la orientación mostrada en el dibujo de dicho apéndice, **Figura 154-a**).²⁵¹ Sin embargo, también es posible que por algún motivo particular de diseño se los utilice según se muestra en la **Figura 154-b**).

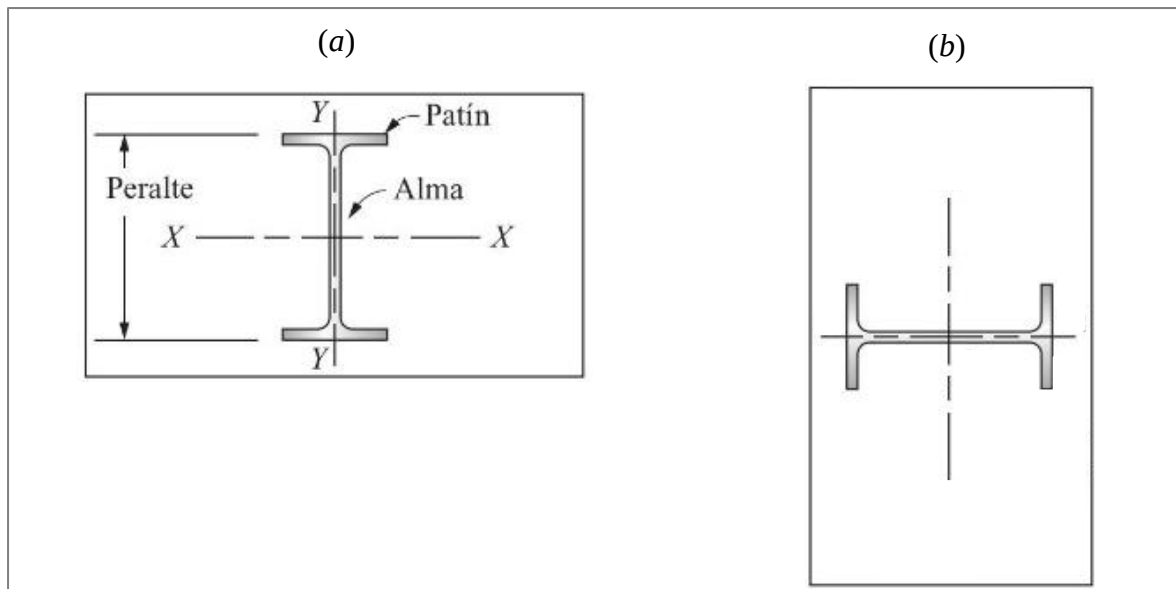


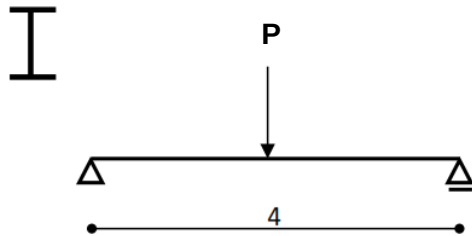
Figura 154. Orientaciones de los Perfiles W (o bien, IPN) para su Uso como Viga (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

En este sentido, una situación problemática típica que se le puede plantear es la que se indica en la **Figura 155**.

²⁵¹ Esto también se aplica a los perfiles IPN.

5. Hallar la fuerza máxima que podré aplicar en el centro de un Perfil doble T nº 20 (PNI nº20) para que verifique a flexión en los siguientes casos. Considerar el peso propio del perfil.

Caso A



Caso B

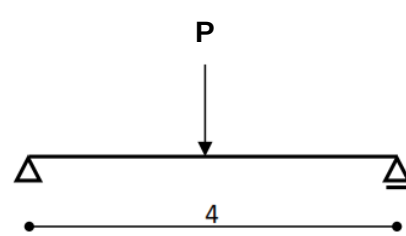


Figura 155. Ejemplo de Situación Problemática de Comparación de la Eficiencia de un Perfil IPN (o Perfil W) Según su Orientación (Fuente: Adaptado de CÁTEDRA DE ESTÁTICA Y RESISTENCIA DE MATERIALES, 2024).

Este es un problema muy interesante ya que permite comparar la eficiencia del perfil (sea el perfil W o IPN) en uno u otro caso (Caso A o B). Como se trata de un diseño a flexión, para la solución de este problema se debe partir de la fórmula de la flexión, considerando en esta la expresión del momento flector máximo para el patrón de cargas correspondiente; y, resolviendo luego para P .

- Advierta, según lo mencionado en los párrafos anteriores, que mucho de lo dicho para perfiles W también se aplica a perfiles IPN.

PROBLEMA RESUELTO 4.33

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de vigas, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las Figuras 156 y 157. **Nota.** Ver referencias abajo consignadas.

Un viga de madera para exteriores tiene que soportar la carga mostrada en la figura P8-46. Si se va a fabricar de abeto Douglas grado 3, especifique un viga de madera estándar adecuada para que sea segura tanto a flexión como a cortante (vea los apéndices A-4 a A-19).

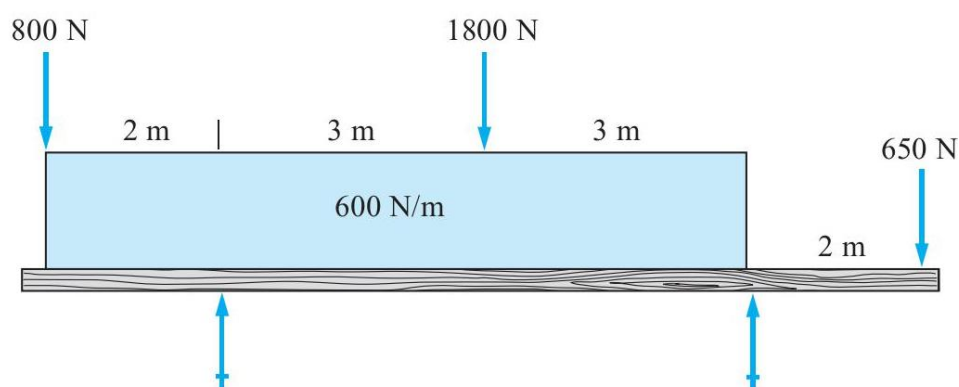
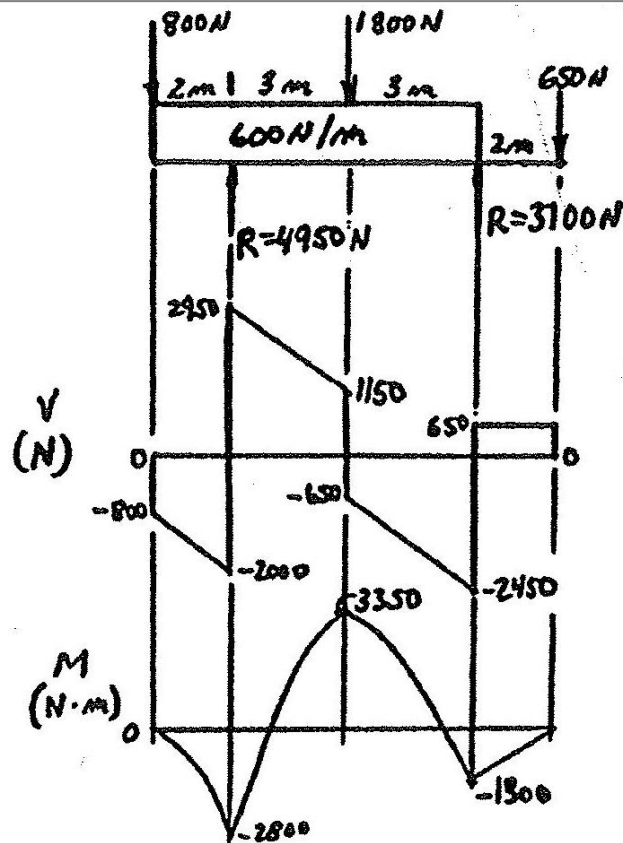


FIGURA P8-46

Figura 156. Consigna Problema Resuelto 4.33 (Fuente: MOTT, 2009).



Del diagrama:

$$V_{MAX} = 2950 \text{ N} ; M_{MAX} = 3350 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Utilizando las fórmulas de la tensión cortante y de la flexión: *

$$\text{SHEAR: } A_{MIN} = \frac{3V}{2f_v} = \frac{(3)(2950 \text{ N})}{(2)(0.66 \text{ N/mm}^2)} = 6705 \text{ mm}^2 \quad \underline{2 \times 10 \text{ BEAM OR } 4 \times 10 \text{ BEAM}}$$

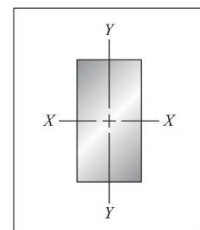
$$\text{BENDING: } S = \frac{M}{\sigma_b} = \frac{3350 \text{ N}\cdot\text{m}}{5.5 \text{ N/mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}} = 609 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \underline{\text{USE } 4 \times 10 \text{ BEAM}}$$

* Al respecto de esta resolución se sugiere leer las observaciones.

Figura 157. Solución Problema Resuelto 4.33 (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Referencias

- $V = Q$ = Fuerza cortante.
- *Shear*: Corte.
- *Bending*: Flexión.
- *Beam*: Viga.
- σ_d = tensión normal admisible; τ_d = tensión cortante admisible. Se usan las tensiones admisibles del Apéndice A-19 de la **Figura 159**.
- Esfuerzo = tensión.
- $S = W$: módulo resistente o módulo de sección. Se usan los valores del Apéndice A-4 de la **Figura 158**.



A-4 Propiedades de vigas de madera estándar.

Tamaño nominal	Tamaño real		Área de sección		Momento de inercia, I_x		Módulo de sección, S_x	
	in	mm	in ²	mm ²	in ⁴	mm ⁴	in ³	mm ³
2 × 4	1.5 × 3.5	38 × 89	5.25	3.39 × 10 ³	5.36	2.23 × 10 ⁶	3.06	50.1 × 10 ³
2 × 6	1.5 × 5.5	38 × 140	8.25	5.32 × 10 ³	20.8	8.66 × 10 ⁶	7.56	124 × 10 ³
2 × 8	1.5 × 7.25	38 × 184	10.87	7.01 × 10 ³	47.6	19.8 × 10 ⁶	13.14	215 × 10 ³
2 × 10	1.5 × 9.25	38 × 235	13.87	8.95 × 10 ³	98.9	41.2 × 10 ⁶	21.4	351 × 10 ³
2 × 12	1.5 × 11.25	38 × 286	16.87	10.88 × 10 ³	178	74.1 × 10 ⁶	31.6	518 × 10 ³
4 × 4	3.5 × 3.5	89 × 89	12.25	7.90 × 10 ³	12.51	5.21 × 10 ⁶	7.15	117 × 10 ³
4 × 6	3.5 × 5.5	89 × 140	19.25	12.42 × 10 ³	48.5	20.2 × 10 ⁶	17.65	289 × 10 ³
4 × 8	3.5 × 7.25	89 × 184	25.4	16.39 × 10 ³	111.1	46.2 × 10 ⁶	30.7	503 × 10 ³
4 × 10	3.5 × 9.25	89 × 235	32.4	20.90 × 10 ³	231	96.1 × 10 ⁶	49.9	818 × 10 ³
4 × 12	3.5 × 11.25	89 × 286	39.4	25.42 × 10 ³	415	172 × 10 ⁶	73.9	1211 × 10 ³
6 × 6	5.5 × 5.5	140 × 140	30.3	19.55 × 10 ³	76.3	31.8 × 10 ⁶	27.7	454 × 10 ³
6 × 8	5.5 × 7.5	140 × 191	41.3	26.65 × 10 ³	193	80.3 × 10 ⁶	51.6	846 × 10 ³
6 × 10	5.5 × 9.5	140 × 241	52.3	33.74 × 10 ³	393	164 × 10 ⁶	82.7	1355 × 10 ³
6 × 12	5.5 × 11.5	140 × 292	63.3	40.84 × 10 ³	697	290 × 10 ⁶	121	1983 × 10 ³
8 × 8	7.5 × 7.5	191 × 191	56.3	36.32 × 10 ³	264	110 × 10 ⁶	70.3	1152 × 10 ³
8 × 10	7.5 × 9.5	191 × 241	71.3	46.00 × 10 ³	536	223 × 10 ⁶	113	1852 × 10 ³
8 × 12	7.5 × 11.5	191 × 292	86.3	55.68 × 10 ³	951	396 × 10 ⁶	165	2704 × 10 ³
10 × 10	9.5 × 9.5	241 × 241	90.3	58.26 × 10 ³	679	283 × 10 ⁶	143	2343 × 10 ³
10 × 12	9.5 × 11.5	241 × 292	109.3	70.52 × 10 ³	1204	501 × 10 ⁶	209	3425 × 10 ³
12 × 12	11.5 × 11.5	292 × 292	132.3	85.35 × 10 ³	1458	607 × 10 ⁶	253	4146 × 10 ³

Figura 158. Apéndice A-4: Propiedades de Vigas de Madera Estándar (Fuente: MOTT, 2009).

A-19 Propiedades típicas de la madera.

Tipo y grado	Esfuerzo permisible											
	Flexión		Tensión paralela a la veta		Cortante horizontal		Compresión				Módulo de elasticidad	
							Perpendicular a la veta		Paralela a la veta			
	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	lb/in ²	MPa	ksi	GPa
Pino Douglas—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1750	12.1	1050	7.2	95	0.66	385	2.65	1250	8.62	1800	12.4
Núm. 2	1450	10.0	850	5.9	95	0.66	385	2.65	1000	6.90	1700	11.7
Núm. 3	800	5.5	475	3.3	95	0.66	385	2.65	600	4.14	1500	10.3
Abeto—2 a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	75	0.52	245	1.69	1000	6.90	1500	10.3
Núm. 2	1150	7.9	675	4.7	75	0.52	245	1.69	800	5.52	1400	9.7
Núm. 3	625	4.3	375	2.6	75	0.52	245	1.69	500	3.45	1200	8.3
Pino del sur—2½ a 4 in de espesor, 6 in o más de ancho												
Núm. 1	1400	9.6	825	5.7	80	0.55	270	1.86	850	5.86	1600	11.0
Núm. 2	1000	6.9	575	4.0	70	0.48	230	1.59	550	3.79	1300	9.0
Núm. 3	650	4.5	375	2.6	70	0.48	230	1.59	400	2.76	1300	9.0

Figura 159. Apéndice A-19: Propiedades Típicas de la Madera (Fuente: MOTT, 2009).

Observaciones

- En la **resolución del autor** se determina el área de la sección transversal mediante la fórmula de la tensión cortante y luego se pre-seleccionan dos vigas, una de 2×8 y otra de 4×4 que verifiquen esta área.²⁵² Posteriormente al calcular el módulo resistente mediante la fórmula de la flexión resulta que ninguna de las vigas anteriores verifica, ya que ambas tienen módulos menores al calculado. Por lo tanto, la mejor opción es adoptar una viga 4×10 que verifique el módulo de sección. Por supuesto, esta tiene un área mayor a la calculada en primera instancia con la fórmula de la tensión cortante.
- En la **resolución típica de este curso** lo que se haría es diseñar a la flexión y verificar al corte, tal como se ha explicado al inicio de la Sección 4.4.6. En efecto, primero se calcularía el módulo de sección y de tabla (Apéndice A-4) se seleccionaría una viga cuyo módulo de sección sea mayor o igual. En este caso, la primera viga que satisface esta condición es una de 4×10 . En segunda instancia se calcularía el área de la sección trasversal mediante la fórmula de la tensión cortante. Esta área debe ser mayor o igual al área de la viga de 4×10 , lo cual también se verifica en este caso. En caso de no verificar, se puede re-seleccionar otra viga que verifique esta área. Se sugiere al lector poner por escrito esta forma de resolución típica y compararla con la brindada por el autor.
- Nuevamente es necesario hacer énfasis en el análisis del **itinerario** que se debe seguir para resolver los problemas que impliquen el diseño de vigas a flexión y corte, itinerario que fue presentado en primera instancia en el Problema Resuelto 4.31. Naturalmente, ciertos ejercicios pueden introducir variantes, sin embargo, la forma general de resolución es en esencia la misma.

²⁵² Es decir, que tengan un área mayor o igual a la calculada.

4.5. Pandeo

El tema de este capítulo es el **pandeo de columnas largas y esbeltas** (también conocido como **pandeo elástico** o **teoría de Euler para columnas largas y esbeltas**) que soportan cargas de compresión en estructuras. En específico, los elementos largos y delgados²⁵³ que se someten a una fuerza de compresión axial se denominan columnas,²⁵⁴ y la deflexión lateral que se produce se llama **pandeo**. Con mucha frecuencia, el pandeo de una columna puede llevar a una falla repentina y dramática de una estructura o mecanismo y, como resultado, debe prestarse atención especial al diseño de las columnas para que puedan soportar con seguridad las cargas previstas sin pandearse.

4.5.1. Introducción e Hipótesis

Para establecer la validez de las relaciones (fórmulas) de pandeo de columnas esbeltas se deben establecer las hipótesis²⁵⁵ siguientes:

1. La columna debe ser de eje recto y sección transversal uniforme (constante) y simétrica.
2. La dirección de la carga es paralela y coincidente con el eje de la columna.²⁵⁶
3. El material del cual está hecho el miembro debe ser homogéneo e isotrópico (hipótesis mecánicas del material).
4. Las secciones transversales de la columna, inicialmente planas, permanecen planas luego de la flexión lateral o pandeo (verificación del principio de Bernoulli o de Navier).²⁵⁷

²⁵³ Aunque esta aclaración le parezca redundante, entiéndase el concepto de esbeltez como sinónimo de “delgadez”. Es decir, más adelante se ha de definir un coeficiente de esbeltez para columnas el cual relaciona la longitud de esta con sus características geométricas a través del radio de giro (otro concepto propio del pandeo).

²⁵⁴ Una columna es un miembro relativamente largo y esbelto cargado a compresión (MOTT, 2009).

²⁵⁵ En otras palabras, se deben satisfacer condiciones.

²⁵⁶ Hay que mencionar, sin embargo, que puede haber excentricidad en la aplicación de la carga (el estudio del pandeo de columnas cargadas excéntricamente queda excluido de este curso).

²⁵⁷ Este principio de conservación de las superficies planas (tal como se ha descrito en el Capítulo 2) es referida por RAFFO (2007) bajo el título 51, como el **Principio de Bernoulli o de Navier** incluyéndolo dentro de las hipótesis de la Resistencia de Materiales. En coherencia con ello, FLIESS (1974) en el capítulo 11.5. Flexión y Corte, habla de hipótesis de Bernoulli-Navier. Hay que aclarar, sin embargo, que en otras fuentes esta misma hipótesis suele aparecer como de **Euler-Bernoulli**, en inclusive de **Navier-Euler-Bernoulli**.

5. Las tensiones no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad del material (verificación de la ley de Hooke).

Advierta la similitud entre estas hipótesis y las de flexión normal expuestas en la Sección 4.4.1. En efecto, esta similitud tiene sentido ya que este fenómeno de inestabilidad es un caso de flexión o deflexión lateral, de hecho, la teoría de columnas largas parte del análisis de la ecuación de la elástica de una viga articulada en ambos extremos (Véase Sección 4.5.3).

4.5.2. Relación de Esbeltez

Se ha definido una columna como un miembro esbelto relativamente largo cargado a compresión, esta descripción, sin embargo, se plantea en términos relativos y no es muy útil para el análisis. En cambio, la cuantificación o medida de esbeltez de una columna debe tener en cuenta la longitud, el perfil de la sección transversal y las dimensiones de la columna, además de la forma de sujetar los extremos de la columna en las estructuras que generan las cargas y reacciones en la columna. Así, la medida de esbeltez comúnmente utilizada es la relación de esbeltez, definida en la **Ec. (52)**.

$$\lambda = \frac{K \cdot L}{r} = \frac{L_e}{r} \quad [1] \quad (52)$$

Donde L = longitud real de la columna entre los puntos de apoyo o de restricción lateral. K = factor de fijación de los extremos o factor de longitud efectiva. L_e = longitud efectiva,²⁵⁸ teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que $L_e = KL$). r = radio de giro mínimo de la sección transversal de la columna.²⁵⁹ Cada uno de estos términos se analiza a continuación.

²⁵⁸ O longitud de pandeo.

²⁵⁹ En este documento se emplea r para designar el radio de giro utilizado en la notación del AISC.

Longitud real, L . En una columna simple con la carga aplicada en uno de sus extremos y la reacción que se genera en el otro, la longitud real es, obviamente, la longitud entre sus extremos.²⁶⁰ Pero en el caso de componentes de estructuras cargados a compresión que disponen de medios de restringir el miembro lateralmente para evitar que se pandee, la longitud real se considera entre los puntos de restricción. Cada una de las partes, entonces, se considera una columna aparte.

Factor de fijación de los extremos, K . El factor de fijación de los extremos mide el grado al cual cada extremo de la columna está limitado contra rotación.²⁶¹ En general se consideran **tres tipos clásicos de conexiones de los extremos:**²⁶² el extremo de pasador (: **extremo articulado**), el extremo fijo (: **extremo empotrado**) y el **extremo libre**. La Figura 161 muestra estos tipos de extremo en varias combinaciones junto con los valores correspondientes de K . Observe que se dan dos valores de K , uno es el valor teórico y el otro es el que por lo general se utiliza en situaciones prácticas, aunque hay que reconocer que es difícil lograr el extremo verdaderamente fijo.

La **Figura 160** muestra un dispositivo de demostración comercialmente disponible que ilustra la rigidez y resistencia relativas al pandeo de **cuatro condiciones de fijación de los extremos.**²⁶³ Los tamaños de las pilas de pesas colocadas sobre el extremo superior de los primeros tres indican la carga aproximada a la cual se inicia el pandeo.²⁶⁴ La carga muy pequeña en el extremo derecho de la columna (la condición de empotrado-libre) no representa la carga

²⁶⁰ Para ilustrar esto considere que toma una pequeña barra rectangular (columna) entre sus manos, mientras que una mano la aprieta en un extremo la otra mano produce una reacción en el otro extremo. La longitud real es por tanto la longitud misma de la barra.

²⁶¹ Alternativamente, otra manera de interpretar el concepto de K es el siguiente: K indica que proporción de la longitud real, L , de otros tipos de columnas se comporta como una columna bi-articulada.

²⁶² Las conexiones en los extremos también se conocen como **condiciones de apoyo** (Véase Sección 3.3.6).

²⁶³ Estas cuatro, que se describen en los párrafos siguientes, son: articulado-articulado, empotrado-articulado, empotrado-empotrado y empotrado-libre, y se conocen como los **cuatro casos de pandeo de Euler**, o **cuatro casos fundamentales**.

²⁶⁴ Este valor de carga así obtenido es aproximado al valor teórico obtenido con la fórmula de Euler que se presentara más adelante, debido principalmente a la fricción.

de pandeo verdadera porque la columna es inestable por sí misma y se flexiona hacia un lado con facilidad si hay algún grado de desalineación de la carga con respecto al eje de la columna.



(a)

(a) Demostrador de fijación de extremos
comercialmente disponible

(Fuente: P.A. Milton Ltd, Hi-Tech, Hampshire, Inglaterra)

Figura 160. Dispositivo Comercial de Demostración de la Rigidez y Resistencia Relativas al Pandeo, de 4 Condiciones de Fijación de los Extremos de una Columna: Los 4 Casos de Pandeo de Euler (Fuente: MOTT, 2009).

Los extremos articulados en esencia permiten rotación. Cuando una columna con dos extremos articulados se pandea, asume la forma de una curva uniforme entre sus extremos, como se muestra en la **Figura 161 (b)**. Éste es el caso básico o **caso fundamental de pandeo** de una columna, y el valor de $K = 1$ se aplica a columnas **articulada–articulada**. Un tipo ideal de extremo articulado es la articulación de rótula libre de fricción que permite que una columna gire en cualquier dirección con respecto a cualquier eje. En el caso de una junta de pasador cilíndrico, se permite la rotación libre con respecto al eje del pasador, pero se limita en cierto grado en el plano perpendicular al eje. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar factores

de fijación a pasadores cilíndricos. Se supone que se guía al extremo de pasador de modo que la línea de acción de la carga axial no cambie.

Por otra parte, la combinación de un extremo empotrado y uno articulado se muestra en la **Figura 161 (c)**. Observe que la forma pandeada se aproxima al extremo empotrado con una pendiente cero mientras que el extremo articulado gira libremente. El valor teórico de $K = 0,7$ se aplica a ese tipo de fijación de los extremos (**empotrado-articulado**) en tanto que $K = 0,8$ se recomienda para usos prácticos.

En teoría, los extremos empotrados impiden perfectamente la rotación de la columna en sus extremos. A medida que la columna tiende a pandearse, la curva de flexión del eje de la columna debe aproximarse al extremo empotrado con una pendiente cero, como se ilustra en la **Figura 161 (d)**. La columna se arquea hacia fuera a la mitad, pero exhibe dos puntos de inflexión donde se invierte la dirección de la curvatura cerca de los extremos. El valor teórico del factor de fijación de los extremos es $K = 0,5$, el cual indica que la columna actúa como si fuera sólo la mitad de larga de lo que realmente es. Las columnas con extremos empotrados (**empotrado-empotrado**) son mucho más rígidas que las columnas con extremos articulados y por consiguiente son capaces de soportar cargas mayores antes de pandearse. Se debe entender que es muy difícil fijar perfectamente los extremos de una columna. Se requiere que la conexión a la columna sea rígida y que la estructura a la que se transfieren las cargas también sea rígida. Por esta razón, en la práctica se recomienda el valor más alto de $K = 0,65$.

Por último, el extremo libre de una columna gira y también se traslada. Como puede moverse en cualquier dirección, éste es el peor caso de fijación de los extremos de una columna. El único modo práctico de utilizar una columna con un extremo libre es empotrar el extremo opuesto, como se ilustra en la **Figura 161 (e)**. Una columna como ésa en ocasiones se conoce como asta de bandera, porque el extremo empotrado se comporta como una asta de bandera profundamente insertada en un orificio de ajuste forzado, mientras que el extremo libre puede

moverse en cualquier dirección. Citada como condición de extremos **empotrado–libre**, el valor teórico es de $K = 2$ y el valor práctico es $K = 2,1$.

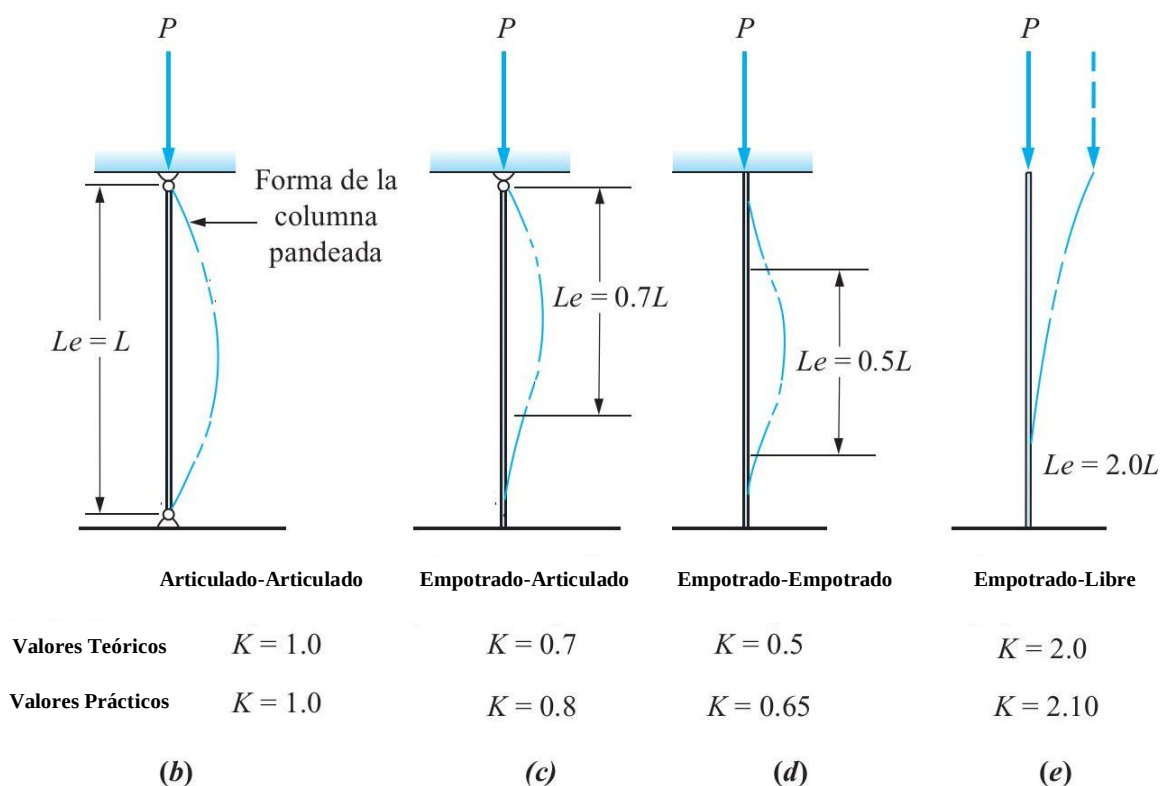


Figura 161. Los 4 Casos de Pandeo de Euler y sus Correspondientes Factores de Longitud Efectiva (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Longitud Efectiva o Longitud de Pandeo, L_e . La longitud efectiva combina la longitud real con el factor de fijación de los extremos; $L_e = KL$. En la resolución de los problemas se puede optar por utilizar los valores teóricos de K o bien los valores prácticos recomendados, según el enfoque del mismo.

Radio de Giro, r . La medida de la esbeltez de la sección transversal de una columna es su radio de giro, r , definido según se indica en la Ec. (53). Donde I = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales. A = área de la sección transversal.

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad [\text{m}] \quad (53)$$

En virtud de que tanto I como A son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro, r , también lo es. En el apéndice A-1 de MOTT (2009) se dan fórmulas para calcular el radio de giro, r , de varios perfiles comunes. Además, se da r junto con otras propiedades de algunos de los perfiles estándar que aparecen en el apéndice. Para aquellos para los que no se da r , los valores de I y A están disponibles y se puede utilizar la ecuación (53) para calcular r de manera muy simple.

De la (53), observe que el valor del radio de giro, r , depende del eje con respecto al cual se tiene que calcular. En la mayoría de los casos, se debe determinar el eje con respecto al cual el **radio de giro es mínimo**, porque es el eje con respecto al cual la columna se pandearía. Considere, por ejemplo, una columna de sección rectangular cuyo ancho es mucho mayor que su espesor, como se ilustra en la vara de un metro de la **Figura 162**. Esta vara demuestra que cuando se carga a compresión axial con poca o ninguna restricción en los extremos, siempre se pandeará con respecto al eje que pasa por la dimensión mínima.

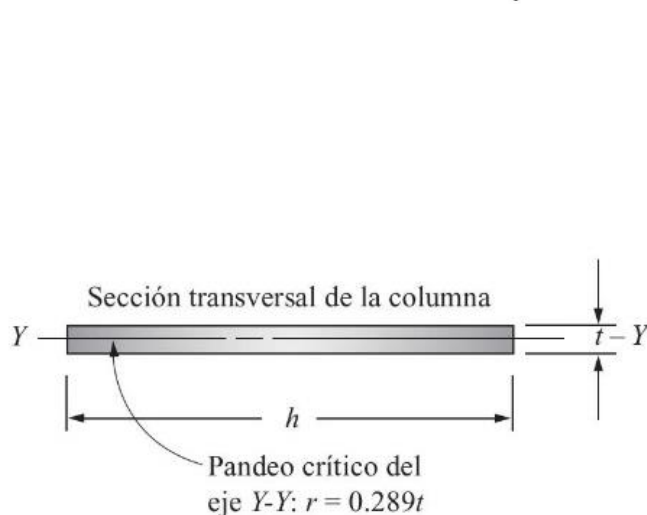
En este último sentido, consulte con detenimiento las **Figuras 163 y 164** para ilustrar este punto. En ella se muestran ilustraciones de la sección transversal rectangular de la vara de la Figura 162 y se expone el análisis analítico del r y otros comentarios de interés.



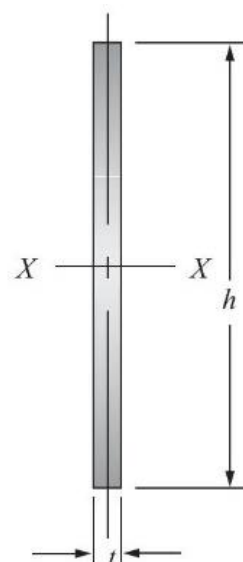
Figura 162. Ilustración del Pandeo de una Vara Esbelta (Fuente: MOTT, 2009).

parte (a) la muestra con respecto al eje centroidal $Y-Y$. El espesor de rectángulo es t y su ancho es h . Por consiguiente, el momento de inercia del rectángulo con respecto al eje $Y-Y$ es

$$I_Y = ht^3/12$$



(a) Radio de giro del eje $Y-Y$



(b) Radio de giro del eje $X-X$

El área es simplemente

$$A = th$$

Ahora, con la ecuación (53) calculamos la relación del radio de giro, r_Y .

$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{ht^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{t^2}{12}} = \frac{t}{\sqrt{12}} = 0.289t$$

Asimismo, si utilizamos la figura (b), podemos obtener una ecuación para r_X .

$$I_X = th^3/12$$

$$A = th$$

$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{th^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.289h$$

Figura 163. Análisis del Radio de Giro de la Sección Transversal de Una Columna Rectangular Esbelta (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Observe que como $h > t$, $r_x > r_y$ y por ende r_y es el radio de giro mínimo de la sección.

Para las vigas de patín ancho (apéndice A-7) y las vigas American Standard (apéndice A-8), el valor mínimo de r es el calculado con respecto al eje $Y-Y$; es decir,

$$r_{\min} = r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Asimismo, para secciones estructurales rectangulares huecas (HSS) (apéndice A-9), el radio de giro mínimo es el calculado con respecto al eje $Y-Y$. Los valores de r se dan en la tabla.

Para ángulos estructurales de acero, llamados perfiles L, ni el eje $X-X$ ni el eje $Y-Y$ proporcionan el radio de giro mínimo. Como se ilustra en el apéndice A-5, el $r_{\min}$ se calcula con respecto al eje $Z-Z$, con los valores dados en la tabla.

Para secciones simétricas, el valor de r es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son o las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas sólidas o huecas.

Figura 164. Análisis del Radio de Giro de la Sección Transversal de Una Columna Rectangular Esbelta (Fuente: Adaptado de MOTT, 2009).

Como nota de cierre se presenta un resumen del método para calcular la relación de esbeltez λ (Ec. 52) tal como lo expone este autor principal: **1.** Determine la longitud real de la columna, L , entre sus puntos extremos o entre puntos de restricción lateral. **2.** Determine el factor de fijación de los extremos con base en el tipo de apoyo de los extremos o mediante la Figura 161. **3.** Calcule la longitud efectiva, $L_e = KL$. **4.** Calcule el radio de giro mínimo de la sección transversal de la columna. **5.** Calcule la relación de esbeltez con la (52).

4.5.3. Fórmula de Euler para Columnas Largas

En primer lugar, es conveniente que el lector comprenda que la fórmula a la que hace alusión el título es una expresión que permite calcular la carga crítica, P_{cr} , en cualquiera de los cuatro casos de pandeo analizados en la Figura 161 del apartado anterior. Es menester, por tanto, consignar una **definición de carga crítica**: la carga crítica es la carga axial máxima a la que puede someterse una columna permaneciendo recta, aunque en equilibrio inestable.²⁶⁵

²⁶⁵ Es decir, cualquier carga superior a la carga crítica provocará el pandeo de la columna.

Además, como se ha mencionado al inicio del Apartado 4.5, dicha fórmula es aplicable a columnas largas, pero: **¿cuándo se considera larga una columna?** Para elaborar la respuesta a esta pregunta se debe partir de la fórmula de Euler. Se inicia, por tanto, con la presentación de la misma y más adelante se ofrece dicha respuesta.

Fórmula de Euler

En el año 1757, Euler realiza un análisis teórico de la carga crítica, P_{cr} , para columnas largas basado en la ecuación diferencial de la elástica correspondiente a una viga articulada-articulada.²⁶⁶ La consecuencia de este análisis deriva en la famosa fórmula de Euler, **Ec. (54)**. Donde E = módulo de elasticidad longitudinal del material. I = momento de inercia axial mínimo de la sección transversal de la columna. L_e = longitud efectiva o longitud de pandeo.

Otra forma de expresar la (54) está en función del área, A , de la sección transversal de la columna y de la relación de esbeltez, λ , teniendo en cuenta que $I = r^2 \cdot A$ (por definición de radio de giro r).²⁶⁷ Entonces, la fórmula se reescribe como se indica en la **Ec. (55)**.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2} \quad [\text{N}] \quad (54)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} \quad [\text{N}] \quad (55)$$

Tal como se ha dicho, es importante recalcar que la (54) y (55) son aplicables a los cuatro casos de pandeo de Euler, puesto que ellas están en función de la longitud efectiva. De esta

²⁶⁶ Considere en este sentido, que una columna puede considerarse como una viga en posición vertical y bajo carga axial (BEER *et al.*, 2009). Por una cuestión de simplicidad, el análisis de dicha ecuación elástica que deriva en la fórmula de Euler, se omite en este documento.

²⁶⁷ Tenga presente que al aplicar la (55) debe utilizarse el **radio de giro mínimo**.

manera algunos autores reemplazan L_e en estas ecuaciones por su correspondiente $K \cdot L$, derivando ello en expresiones particulares para cada uno de los casos. Expresiones que permiten comparar los valores de carga crítica en cada situación. Se deja al lector este análisis.

Tensión Crítica de Euler

La tensión crítica de Euler (o simplemente, tensión crítica), σ_{cr} , surge del cociente entre la carga crítica y el área A de la sección transversal de la columna. Para obtener su ecuación basta con dividir por A ambos miembros de la (55), **Ec. (56)**. Esta expresión, tal como lo expone HIBBELER (2011), es más útil para fines de diseño como se ha de ver en el apartado siguiente. Hay que comprender, por otra parte, que σ_{cr} es una tensión crítica normal promedio en la columna justo antes de que ésta se pandee. Dicha tensión es elástica y, por lo tanto: $\sigma_{cr} \leq \sigma_Y$

²⁶⁸

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad [\text{Pa}] \quad (56)$$

Ahora bien, por la hipótesis 5, se sabe que para que la fórmula de Euler sea aplicable, la tensión de trabajo²⁶⁹ no debe exceder el límite de proporcionalidad del material de la columna. Teniendo en cuenta esto, y tal como lo exponen SINGER y PYTEL (2008), por conveniencia **se definen como columnas largas o muy esbeltas** aquellas a las que se puede aplicar la fórmula de Euler.²⁷⁰

²⁶⁸ Recuerde que σ_Y representa la tensión de cedencia. También, tenga presente que determinados autores utilizan el término tensión de cedencia, haciendo caso omiso de si el valor se obtuvo observando el punto de cedencia o utilizando la técnica de corrimiento descrita en la Sección 3.3.

²⁶⁹ La tensión de trabajo, es la tensión que produce la carga axial P que actúa sobre la sección transversal A de la columna: P/A .

²⁷⁰ Se debe enfatizar que esto es una definición.

Por lo tanto, la esbeltez mínima, $\lambda_{\min}$, que fija el límite inferior de aplicación de la fórmula de Euler se obtiene sustituyendo en la (56) los valores conocidos del límite de proporcionalidad (σ_{pl}) y del módulo elástico de cada material (E), y resolviendo para λ . Así, pues, el límite mínimo de la esbeltez varía con el material y también con los diferentes tipos dentro de cada material.

Como ejemplo, para un acero de bajo carbono (refiérase a la Sección 3.3.1) que tenga un límite de proporcionalidad de 200 MPa y un módulo elástico de 200 GPa, el límite mínimo de la esbeltez mecánica, $\lambda_{\min}$, con la que puede aplicarse la fórmula de Euler es de aproximadamente 100, tal como se observa en la Ec. (57), la cual se ha obtenido al despejar la esbeltez de la (56).

$$\lambda_{\min} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} \cong 100 \quad (57)$$

Entonces, para determinar si una columna dada es larga o corta, se aplican las reglas siguientes:

- 1) Si la relación de esbeltez efectiva real ($\lambda = L_e/r$) es mayor o igual que la esbeltez mínima, $\lambda \geq \lambda_{\min}$, entonces la columna es larga y para analizarla se deberá utilizar la fórmula de Euler.
- 2) Si la relación L_e/r es menor que $\lambda_{\min}$, $\lambda < \lambda_{\min}$, entonces la columna es considerada corta o intermedia entre las dos anteriores.

El análisis de **columnas intermedias** implica el estudio de distintas fórmulas empíricas o reglamentos especiales que escapan de los alcances del curso,²⁷¹ por lo tanto, no serán

²⁷¹ Una fórmula bien conocida es la de J.B. Johnson, por citar un ejemplo.

desarrollados aquí. Si se está en el caso de **columnas cortas** se deberá utilizar los métodos de compresión axial de la Sección 4.1. En este último sentido, existen criterios para distinguir entre columnas cortas e intermedias, sin embargo, esta información es secundaria para el lector de este material ya que solo debe ocuparse de decidir si una columna es larga.²⁷² Un aspecto que conceptualmente sí reviste importancia, es comprender que las columnas largas fallan por pandeo, las cortas por compresión y en las intermedias la falla de la columna es un fenómeno más complejo, en el cual algunos autores hablan fallas duales (por pandeo y compresión).

Por último, la ecuación (56) muestra que la tensión crítica es directamente proporcional al módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez efectiva de la columna. La gráfica de σ_{cr} contra L_e/r , conocida como **curva de Euler**,²⁷³ se muestra en la **Figura 165-a)** para el acero estructural, suponiendo $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa . Debe recordarse que al elaborar la gráfica no se ha usado el factor de seguridad. También se observa que, si el valor obtenido para σ_{cr} de la ecuación (56) o de la curva de la Figura 165-a) es mayor que la tensión de cedencia σ_Y , este valor no es de interés, pues la columna fluiría a compresión y dejaría de ser elástica antes de curvarse.

En la **Figura 165-b)**, por su parte, se muestran ejemplos de esta curva, también para columnas fabricadas de un acero estructural típico y de una aleación de aluminio (las unidades corresponden al sistema inglés).

²⁷² ¡Si fuera una columna corta ya se trató en la Sección 4.1!

²⁷³ La curva de Euler no es una forma geométrica común. Algunas veces, de forma equivocada, se le llama hipérbola, pero las hipérbolas son gráficas de ecuaciones polinomiales de segundo grado con dos variables, en tanto que la curva de Euler es una gráfica de una ecuación de tercer grado con dos variables (GERE y GOODNO, 2013).

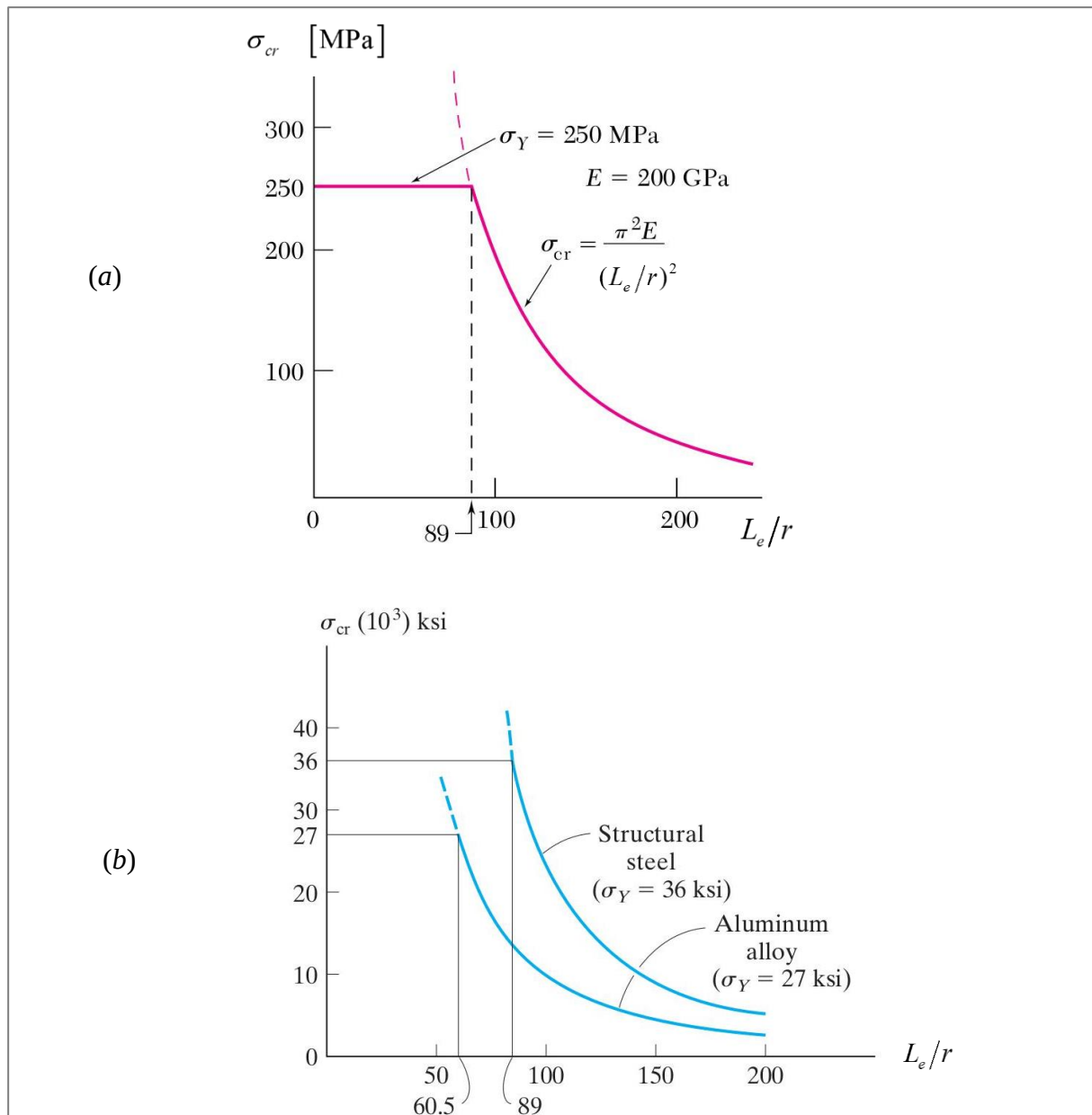


Figura 165. Diagrama de Tensión Crítica contra Relación de Esbeltez Efectiva: Curva de Euler (Fuente: (a) Adaptado de BEER *et al.*, 2009. (b) Adaptado de HIBBELER, 2011).

El lector debe recordar del estudio del Apartado 3.3.1, específicamente el análisis de la Figura 15, que la tensión en el límite de proporcionalidad (σ_{pl}) y la tensión de cedencia (σ_Y) son conceptualmente distintas. Sin embargo, advierta que en las curvas de Euler presentadas, ambos autores indican la σ_Y y ¡no σ_{pl} ! Una explicación de ello es que estos valores están muy

cercanos uno del otro, por eso es que muchas veces se los confunde o se los alterna en alguna explicación (esto ya se ha mencionado anteriormente en este documento).²⁷⁴

Por último, es importante aclarar que, en las Figuras 165 (a y b) la curva de Euler es la representada en línea continua hasta la esbeltez mínima, que en estos son 89 (acero estructural) y 60,5 (aleación de aluminio). Además, cada una de estas curvas se obtiene mediante el ajuste de datos obtenidos de ensayos de muchas columnas de la misma sección transversal y longitudes diferentes.

4.5.4. Diseño de Elementos

El análisis del diseño de columnas es un tema amplio y relativamente más complejo que las solicitaciones anteriores. A este respecto, nuestro curso, de nivel elemental, no nos permite ahondar en mayores consideraciones respecto del mismo, y simplemente se han de exponer algunos aspectos generales. Por lo dicho, los problemas resueltos presentados han de jugar un papel importante en el acercamiento del lector a la comprensión de algunos de los procedimientos que permiten abordar situaciones problemáticas simples.

Específicamente hablando, la **tensión admisible al pandeo**, $\sigma_{adm.}$,²⁷⁵ se define como el cociente entre la tensión crítica de Euler, σ_{cr} (Ec. 56), y el coeficiente de seguridad, n , **Ec. (58)**. Respecto del factor de seguridad, es importante e interesante mostrar un análisis general de su variación, **Figura 166**.

²⁷⁴ En este sentido, analice, por ejemplo, la curva de Euler presentada por SINGER y PYTEL (2008) en la Figura 11-7 de la página 365.

²⁷⁵ O simplemente, tensión admisible.

$$\sigma_{adm.} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \geq \sigma_{trab.} \text{ [Pa]} \quad (58)$$

Donde $\sigma_{trab.} = \frac{P}{A}$ es la tensión generada en la columna (o tensión de trabajo)

debida a la carga la acción de la carga P en su sección transversal A .

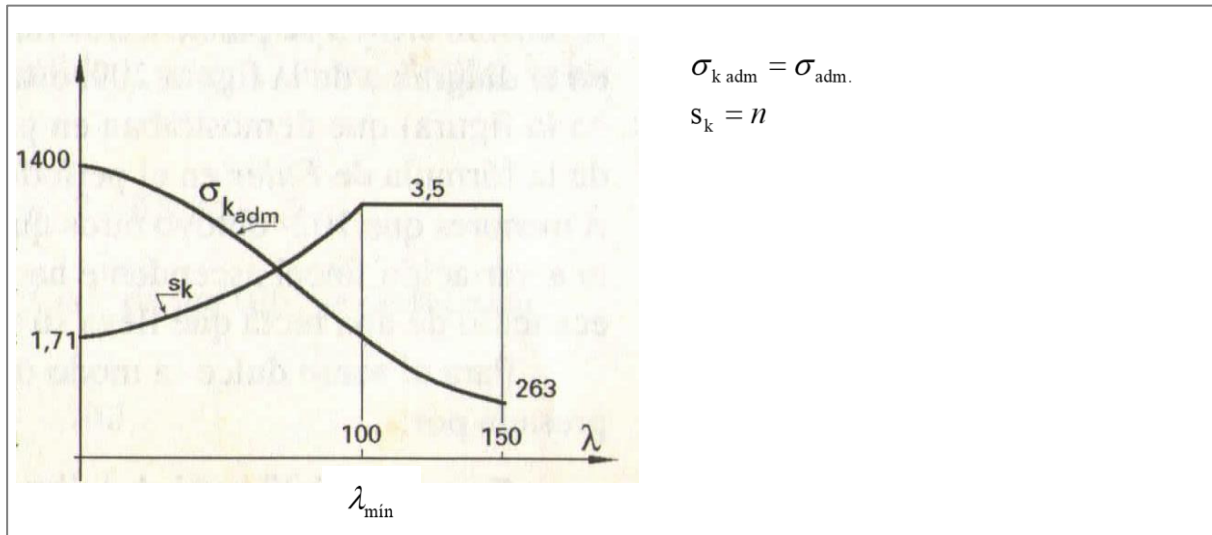


Figura 166. Variación de n y $\sigma_{adm.}$ para el Acero Estructural Típico A 37 (Fuente: Adaptado de ROKO, 1995).

En la imagen anterior se puede observar que el factor de seguridad aumenta dentro del periodo plástico cuando crece la esbeltez. Para el reglamento alemán es según una variación parabólica, y va desde 1,71 para $\lambda = 0$ hasta 3,5 para $\lambda = 100$. En el periodo elástico, por su parte, n se mantiene constante.

Del análisis previo, algunas aclaraciones son convenientes consignar, en primer lugar, según la hipótesis 5 el pandeo de columnas largas que hasta ahora se ha estado desarrollando, es una teoría de **pandeo elástico**, es decir, que el periodo elástico antes mencionado corresponde al rango de esbelteces mayores al mínimo, que en esta curva es 100. La consecuencia inmediata de lo dicho, es que el periodo plástico se da para $\lambda < 100$, correspondientes a columnas intermedias y cortas.

Por otra parte, también se puede plantear un enfoque de **cargas admisibles**, $P_{adm.}$. En efecto, y tal como lo señala MOTT (2009), cuando una columna falla por pandeo y no por cedencia o

por falla máxima del material, los métodos antes utilizados para calcular tensiones admisibles no se aplican a columnas. En vez de eso se calcula una carga admisible dividiendo la carga de pandeo crítica calculada con la fórmula de Euler entre un factor de seguridad, **Ec. (59)**.

$$P_{\text{adm.}} = \frac{P_{cr}}{n} \geq P_{\text{trab.}} \quad [\text{N}] \quad (59)$$

Donde $P_{\text{trab.}}$ es la carga real aplicada a la columna (o carga de trabajo)

La selección del factor de seguridad es la responsabilidad del diseñador a menos que el proyecto esté clasificado dentro de la categoría de un reglamento. Los criterios a considerar en la selección del factor de seguridad son similares a los ya analizados en las solicitaciones anteriores. Un factor común utilizado en el diseño mecánico es $n=3$, seleccionado por la incertidumbre de las propiedades del material, la fijación de los extremos, la rectitud de la columna o la posibilidad de que la carga se aplique con algo de excentricidad y no a lo largo de la columna. En ocasiones se utilizan factores mayores en situaciones críticas y para columnas muy largas. En la construcción de edificios, donde las especificaciones del AISC rigen el diseño, se recomienda un factor de 1,92 para columnas largas. Así mismo, la AA requiere $n=1,95$ para columnas largas.

Puntos Importantes:

- ✚ El fenómeno de pandeo no es una falla del material del cual está hecha la columna; es una falla de la columna en su conjunto para conservar su forma. Este tipo de falla se llama **inestabilidad elástica** (MOTT, 2009).²⁷⁶
- ✚ El principio de estabilidad elástica establece que una columna es estable si conserva su forma recta a medida que se incrementa la carga. No obstante, existe un nivel de carga al cual la columna es incapaz de conservar su forma. Entonces se pandea. La carga por encima de la cual ocurre el pandeo se conoce como **carga de pandeo crítica**, P_{cr} .²⁷⁷ Obviamente, como diseñador de la columna debe asegurarse de que la carga real aplicada a la columna sea mucho menor que la crítica.
- ✚ **Perfiles eficientes para secciones transversales de columnas.** Cuando se diseña una columna para que soporte una carga especificada, el diseñador tiene la responsabilidad de seleccionar el perfil general de su sección transversal y determinar entonces las dimensiones requeridas. Los principios siguientes pueden ayudar en la selección inicial del perfil. Un **perfil eficiente** es uno que utiliza una pequeña cantidad de material para realizar una función dada. Para columnas, el objetivo es **incrementar al máximo el radio de giro** para reducir la relación de esbeltez. Observe también que como $r = \sqrt{I/A}$, el incremento al máximo del momento de inercia de un área dada tiene el mismo efecto. Cuando se analizó el momento de inercia se observó que es deseable colocar tanta área de la sección transversal tan lejos del centroide²⁷⁸ como sea posible. Para vigas por lo general hubo sólo un eje importante, el eje con respecto

²⁷⁶ En contraste de la falla por resistencia, el cual si corresponde a una falla del material.

²⁷⁷ O simplemente, carga crítica.

²⁷⁸ El centroide de un área es el punto con respecto al cual el área podría ser equilibrada si estuviera soportada en dicho punto. La palabra se deriva de la palabra centro y puede ser considerado como el centro geométrico de un área. Para cuerpos tridimensionales, el término centro de gravedad o centro de masa, se usa para definir un punto similar (MOTT, 2009).

al cual ocurría la flexión. En columnas, el pandeo, en general, puede ocurrir en cualquier dirección. Por consiguiente, es deseable **disponer de propiedades uniformes con respecto a cualquier eje**. La sección circular hueca, comúnmente llamado tubo, es entonces un perfil muy eficiente para usarse como columna, le sigue de cerca el tubo cuadrado hueco, también se pueden utilizar secciones compuestas de secciones estructurales estándar. Todo ello se muestra en la **Figura 167**.

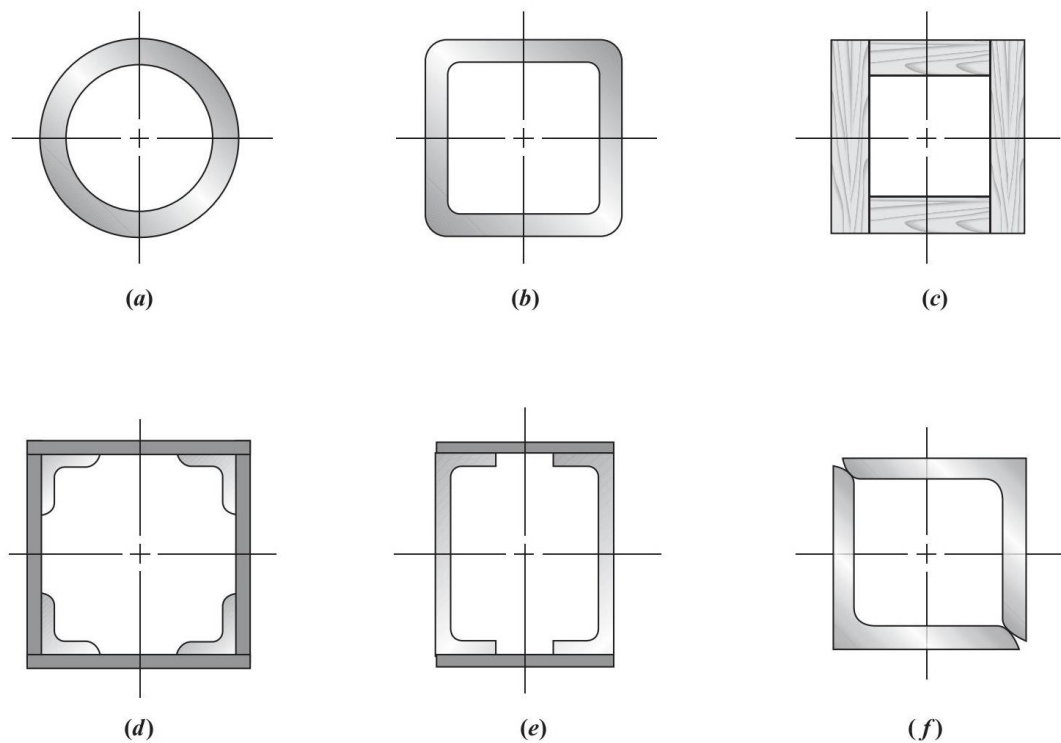


Figura 167. Ejemplos de Perfiles de Columna Eficientes: (a) Sección circular hueca, tubo. (b) Tubo cuadrado hueco. (c) Sección de caja formada con vigas de madera. (d) Ángulos de patas iguales con placas. (e) Canales de aluminio con placas. (f) Dos ángulos de patas iguales (Fuente: MOTT, 2009).

PROBLEMA RESUELTO 4.34

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de columnas, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las Figuras 168 y 169. **Nota.** Ver referencias abajo consignadas.

Elegir el perfil W más económico para trabajar como columna de 7 m de altura que ha de soportar una carga axial de 450 kN con un factor de seguridad igual a 3. Supóngase (a) extremos articulados, y (b) un extremo empotrado y el otro articulado. Emplee $\sigma_{PL} = 200 \text{ MPa}$ y $E = 200 \text{ GPa}$.

Solución: *Parte (a).* Para un acero con límite de proporcionalidad de 200 MPa, la aplicación de la fórmula de Euler para el caso fundamental requiere que la esbeltez L/r sea mayor de 100. Si es menor, se tomará como esfuerzo límite el del límite de proporcionalidad.

La carga de trabajo, multiplicada por el factor de seguridad 3, da una carga crítica de 1350 kN. Aplicando la fórmula de Euler y despejando I se obtiene:

$$\left[P = \frac{EI\pi^2}{L^2} \right] \quad I = \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350 \times 10^3)(7)^2}{(200 \times 10^9)(\pi^2)}$$

$$= 33.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 33.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ahora bien, la esbeltez es $L/r \geq 100$. Por tanto, el radio de giro mínimo ha de ser

$$r < \frac{L}{100} = \frac{7000}{100} = 70.0 \text{ mm}$$

Así, pues, acorde con estos criterios, la sección debe tener un momento de inercia mínimo mayor que $33.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$ y un radio de giro mínimo menor de 70 mm. Se puede elegir un perfil W250 $\times$ 73 que tiene $I_{\min} = 38.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ y un radio de giro mínimo de 64.6 mm.

Si la elección del perfil se hiciera con arreglo al límite de proporcionalidad, la sección debería tener un área mínima de 6750 mm^2 (1350 kN divididos entre 200 MPa), y un valor del radio de giro mínimo superior a 70.0 mm. Estas condiciones serían satisfechas por un perfil W310 $\times$ 97 cuyas características geométricas son $A = 12\,300 \text{ mm}^2$ y $r_{\min} = 76.9 \text{ mm}$.

La sección más ligera y, por tanto, más económica, es el perfil W250 $\times$ 73.

Nota. Véase el extracto Apéndice B-2 en las Referencias.

Figura 168. Consigna y Solución Ítem a) Problema Resuelto 4.34 (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Parte (b). La carga crítica de Euler es, como antes, de 1350 kN. Con un extremo fijo y el otro articulado, la longitud efectiva de una columna equivalente del tipo fundamental es $0.7L = 4.9$ m. Teniendo en cuenta esta longitud efectiva en lugar de la real, los criterios de elección, según la fórmula de Euler, son:

$$I > \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350 \times 10^3)(4.9)^2}{(200 \times 10^9)\pi^2} = 16.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$> 16.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

y

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{4900}{100} = 49.0 \text{ mm}$$

El perfil más liviano que cumple estas condiciones es W360 $\times$ 64 con $I_{\min} = 18.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ y $r_{\min} = 48.1 \text{ mm}$.

De acuerdo con el criterio del límite de proporcionalidad,

$$A \geq \frac{1350 \times 10^3}{200 \times 10^6} = 6.75 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 6750 \text{ mm}^2 \quad \text{y}$$

$$r \geq 49.0 \text{ mm}$$

se necesitaría un perfil W250 $\times$ 58, con $A = 7420 \text{ mm}^2$ y $r_{\min} = 50.4 \text{ mm}$.

Comparando ambas soluciones se deduce que la más económica es la segunda.

Si la elección se hubiera basado en el valor de I , sin comprobar r , se podría elegir un perfil W200 $\times$ 52 con $I_{\min} = 17.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Pero, como para esta sección $r_{\min} = 51.8 \text{ mm}$ y $A = 6660 \text{ mm}^2$, el esfuerzo resultante excedería al límite de proporcionalidad de 200 MPa, lo cual no es aceptable ya que entonces no se cumpliría la proporcionalidad esfuerzo-deformación en que se basa la fórmula de Euler.

Este problema muestra la importancia de la esbeltez en el análisis de las columnas. En la parte (a) la elección de la sección ha quedado determinada por la estabilidad elástica, es decir, por la fórmula de Euler, mientras que en la parte (b), lo ha sido por el límite de proporcionalidad.

Figura 169. Solución ítem b) Problema Resuelto 4.34 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008).

Referencias

- $P = P_{cr}$ = Carga crítica.
- Esfuerzo = tensión.

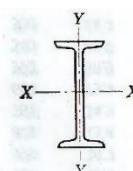


TABLA B-2. Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (unidades SI)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm ²)	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X-X			Eje Y-Y		
				Ancho (mm)	Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	$S = \frac{I}{c}$ (10 ³ mm ³)	$r = \frac{I}{A}$ (mm)	I (10 ⁶ mm ⁴)	$S = \frac{I}{c}$ (10 ³ mm ³)	$r = \frac{I}{A}$ (mm)
W360 × 262	262.7	33 500	387	398	33.3	21.1	894	4 620	163	350	1 760	102
× 237	236.3	30 100	380	395	30.2	18.9	788	4 150	162	310	1 570	102
× 216	216.3	27 600	375	394	27.7	17.3	712	3 790	161	283	1 430	101
× 196	196.5	25 000	372	374	26.2	16.4	636	3 420	159	229	1 220	95.5
× 179	179.2	22 800	368	373	23.9	15.0	575	3 120	159	207	1 110	95.2
× 162	162.0	20 600	364	371	21.8	13.3	516	2 830	158	186	1 000	94.8
× 147	147.5	18 800	360	370	19.8	12.3	463	2 570	157	167	904	94.3
× 134	134.0	17 100	356	369	18.0	11.2	415	2 330	156	151	817	94.0
× 122	121.7	15 500	363	257	21.7	13.0	365	2 010	154	61.5	478	63.0
× 110	110.2	14 000	360	256	19.9	11.4	331	1 840	154	55.7	435	63.0
× 101	101.2	12 900	357	255	18.3	10.5	302	1 690	153	50.6	397	62.7
× 91	90.8	11 600	353	254	16.4	9.5	267	1 510	152	44.8	353	62.2
× 79	79.3	10 100	354	205	16.8	9.4	227	1 280	150	24.2	236	48.9
× 72	71.5	9 110	350	204	15.1	8.6	201	1 150	149	21.4	210	48.5
× 64	63.9	8 140	347	203	13.5	7.7	178	1 030	148	18.8	186	48.1
× 57	56.7	7 220	358	172	13.1	7.9	161	897	149	11.1	129	39.3
× 51	50.6	6 450	355	171	11.6	7.2	141	796	148	9.68	113	38.8
× 45	45.0	5 730	352	171	9.8	6.9	122	691	146	8.18	95.7	37.8
× 39	39.1	4 980	353	128	10.7	6.5	102	580	143	3.75	58.6	27.4
× 33	32.8	4 170	349	127	8.5	5.8	82.7	474	141	2.91	45.8	26.4
W310 × 500	500.4	63 700	427	340	75.1	45.1	1 690	7 910	163	494	2 910	88.0
× 454	454.0	57 800	415	336	68.7	41.3	1 480	7 130	160	436	2 600	86.8
× 415	415.1	52 900	403	334	62.7	38.9	1 300	6 450	157	391	2 340	86.0
× 375	374.3	47 700	391	330	57.1	35.4	1 130	5 760	154	343	2 080	84.8
× 342	343.3	43 700	382	328	52.6	32.6	1 010	5 260	152	310	1 890	84.2
× 313	313.3	39 900	374	325	48.3	30.0	896	4 790	150	277	1 700	83.3
× 283	283.0	36 000	365	322	44.1	26.9	787	4 310	148	246	1 530	82.6
× 253	252.9	32 200	356	319	39.6	24.4	682	3 830	146	215	1 350	81.6
× 226	226.8	28 900	348	317	35.6	22.1	596	3 420	144	189	1 190	81.0
× 202	202.6	25 800	341	315	31.8	20.1	520	3 050	142	166	1 050	80.2
× 179	178.8	22 800	333	313	28.1	18.0	445	2 680	140	144	919	79.5
× 158	157.4	20 100	327	310	25.1	15.5	386	2 360	139	125	805	78.9
× 143	143.1	18 200	323	309	22.9	14.0	348	2 150	138	113	729	78.6
× 129	129.6	16 500	318	308	20.6	13.1	308	1 940	137	100	652	78.0
× 118	117.5	15 000	314	307	18.7	11.9	275	1 750	136	90.2	588	77.6
× 107	106.9	13 600	311	306	17.0	10.9	248	1 590	135	81.2	531	77.2
× 97	96.8	12 300	308	305	15.4	9.9	222	1 440	134	72.9	478	76.9
× 86	86.4	11 000	310	254	16.3	9.1	199	1 280	134	44.5	351	63.6
× 79	78.9	10 100	306	254	14.6	8.8	177	1 160	133	39.9	314	63.0
× 74	74.5	9 490	310	205	16.3	9.4	165	1 060	132	23.4	229	49.7
× 67	66.8	8 510	306	204	14.6	8.5	145	949	131	20.7	203	49.3
× 60	59.6	7 590	303	203	13.1	7.5	129	849	130	18.3	180	49.1
W250 × 167	167.4	21 300	289	265	31.8	19.2	300	2 080	119	98.8	746	68.1
× 149	148.9	19 000	282	263	28.4	17.3	259	1 840	117	86.2	656	67.4
× 131	131.1	16 700	275	261	25.1	15.4	221	1 610	115	74.5	571	66.8
× 115	114.8	14 600	269	259	22.1	13.5	189	1 410	114	64.1	495	66.2
× 101	101.2	12 900	264	257	19.6	11.9	164	1 240	113	55.5	432	65.6
× 89	89.6	11 400	260	256	17.3	10.7	143	1 100	112	48.4	378	65.1
× 80	80.1	10 200	256	255	15.6	9.4	126	982	111	43.1	338	65.0
× 73	72.9	9 280	253	254	14.2	8.6	113	891	110	38.8	306	64.6
× 67	67.1	8 550	257	204	15.7	8.9	104	806	110	22.2	218	51.0
× 58	58.2	7 420	252	203	13.5	8.0	87.3	693	108	18.8	186	50.4
× 49	49.0	6 250	247	202	11.0	7.4	70.6	572	106	15.1	150	49.2
× 45	44.9	5 720	266	148	13.0	7.6	71.1	534	111	7.03	95.1	35.1
× 39	38.7	4 920	262	147	11.2	6.6	60.1	459	110	5.94	80.8	34.7
× 33	32.7	4 170	258	146	9.1	6.1	48.9	379	108	4.73	64.7	33.7
× 28	28.5	3 630	260	102	10.0	6.4	40.0	307	105	1.78	34.8	22.1
× 25	25.3	3 230	257	102	8.4	6.1	34.2	266	103	1.49	29.2	21.5
× 22	22.4	2 850	254	102	6.9	5.8	28.9	227	101	1.23	24.0	20.7
× 18	17.9	2 270	251	101	5.3	4.8	22.4	179	99.3	0.913	18.1	20.0

Figura 170. Extracto del Apéndice B-2: Características de los Perfiles H Estructurales (Fuente: Adaptado de SINGER y PYTEL, 2008).

Observaciones

- Note, tal como se ha explicado al analizar la curva de Euler, que este autor utiliza la **tensión en el límite de proporcionalidad (σ_{pl}) y no la tensión de cedencia (σ_Y)**. Si no tiene presente la fundamentación de ello vuelva a dar lectura de la conclusión de la Sección 4.5.3.
- Advierta que, en la primera parte de ambos ítems el enfoque ha sido por **cargas admisibles**.
- Observe que el momento de inercia y el radio de giro se toman respecto al eje Y–Y.

PROBLEMA RESUELTO 4.35

Propósito. Acercar al estudiante al procedimiento resolutivo de situaciones problemáticas que impliquen el análisis y diseño de columnas, para propiciar la fijación de los conceptos y la formalización de procedimientos de cálculo. Véase consigna y solución en las **Figuras 171 y 172.** **Nota.** Ver referencias abajo consignadas.

Una pieza de madera escuadrada de 50×100 mm se emplea como columna con los extremos empotrados. a) Calcular la longitud mínima para que pueda aplicarse la fórmula de Euler si $E = 10$ GPa y el límite de proporcionalidad es de 30 MPa. b) ¿Qué carga axial podrá soportar con un factor de seguridad igual a 2, si la longitud es 2,5 m.

Resolución:

Dadas las dimensiones de la sección recta, calculamos el radio de giro menor:

$$I = \frac{1}{12} (0,1)(0,05)^3 = 1,042 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = (0,1)(0,05) = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\text{Entonces: } r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1,042 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}}} = 0,0144 \text{ m}$$

Para calcular la longitud usamos la expresión:

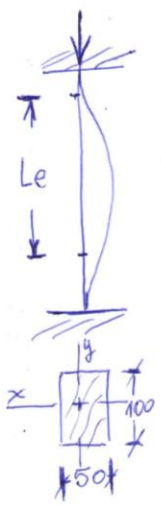
$$\sigma = \frac{E\pi^2}{(L'/r)^2}, \text{ pero } L' = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2L' = 2\pi r \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = 2\pi(0,0144) \sqrt{\frac{10 \times 10^9}{30 \times 10^6}}$$
$$\Rightarrow \boxed{L = 1,65 \text{ m}}$$

Para calcular P_{adm} tenemos lo siguiente: $L = 2,5 \text{ m}$

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} = \frac{(10 \times 10^9)(1,042 \times 10^{-6})\pi^2}{(0,5 \times 2,5)^2} \Rightarrow P_{cr} = 65,8 \text{ kN}$$

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{F_s} = \frac{65,8}{2} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 32,9 \text{ kN}}$$

Figura 171. Consigna y Solución Problema Resuelto 4.35 (Fuente: SINGER y PYTEL, 2008 y LLANOS, 2008).



DATOS

$E = 109 \text{ GPa}$

$\tau_{PI} = 30 \text{ MPa}$

⊕ MOMENTO DE INERCIÁ MÍNIMO

Ⓐ PARA QUE LA FÓRMULA DE EULER SEA APLICABLE:

$$\frac{L_e}{r} \geq \lambda_{\min} \quad \text{DONDE} \quad \lambda_{\min} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 10 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 57,36$$

$$r = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad \text{DONDE: } I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{(50 \text{ mm})^3 \cdot (100 \text{ mm})}{12}$$

ENTONCES

$$r = \sqrt{\frac{1041666,67 \text{ mm}^4}{(50 \cdot 100) \text{ mm}^2}}$$

$$I_y = 1041666,67 \text{ mm}^4$$

$$r = 14,43 \text{ mm} \quad \therefore$$

$$L_e \geq \lambda_{\min} \cdot r = 57,36 \cdot 14,43 \text{ mm} = 827,7 \text{ mm}$$

PERO $L_e = K \cdot L = 0,5 \cdot L \quad \therefore$

$$L = \frac{L_e}{0,5} \Rightarrow L = 1655,4 \text{ mm} \approx 1,66 \text{ m}$$

Ⓑ $P_{adm} = \frac{P_{cr}}{n} \geq P_{trab.}$

DONDE $P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1041666,67 \text{ mm}^4}{(2500 \cdot 0,5 \text{ mm})^2}$

$$P_{cr} = 65797,36 \text{ N}$$

$$P_{trab.} \leq \frac{65797,36 \text{ N}}{2}$$

$P_{trab.} \leq 32898,68 \text{ N} \approx 32,9 \text{ kN}$

Figura 172. Solución Alternativa Problema Resuelto 4.35 (Fuente: ELABORACIÓN PROPIA, 2025).

Referencias

- $L' = L_e$ = Longitud efectiva o longitud de pandeo.
- $F_s = n$ = Factor o coeficiente de seguridad.

Observaciones

- Analice el lector ambas soluciones.

5. BIBLIOGRAFÍA

- ACINDAR. 2024. *Tablas y Equivalencias. Productos y Servicios para la Construcción Civil*. Extraído el 31 de octubre de 2024, de: <https://www.acindar.com.ar/wp-content/uploads/2018/11/Catalogo-Tablas-y-Equivalencias-1.pdf>
- ASKELAND, D. R; Wright, W. J.; 2016. *Ciencia e Ingeniería de Materiales*. (7ma ed.). Cengage Learning ©. México. 856 pp.
- BEER, P. F.; Johnston Jr., R. E.; DeWolf, John T.; Mazurek, F. D. 2009. *Mecánica de Materiales*. (5ta ed.). McGraw-Hill Interamericana. Estados Unidos. 817 pp.
- CEM. 2013. *Recomendaciones del Centro Español de Metrología para la Enseñanza y Utilización del Sistema Internacional de Unidades de Medida*. Extraído el 19 de febrero de 2020, de: www.cem.es.
- CORONEL, E. O.; 1995. *Fundamentos de las Propiedades Físicas y Mecánicas de las Maderas: 2da. Parte: Fundamentos de las Propiedades Mecánicas de las Maderas*. El Liberal. Santiago del Estero, Argentina. 335 pp.
- FLIESS, E. D.; 1974. *Estabilidad: Segundo Curso*. (2ª ed.). Kapelusz. Buenos Aires, Argentina. 626 pp.
- GERE, J. M.; Goodno, B. J; 2013. *Mecánica Materiales*. (8ª ed.). Cengage Learning ©. México. 1129 pp.
- GONZÁLEZ ARIAS, A.; Palazon, A.; 1955. *Ensayos Industriales de Materiales Combustibles y Lubricantes*. (3ra ed.). Argentina. 491 pp.
- HIBBELER, R. C.; 2010. *Ingeniería Mecánica-Estática*. (12ª ed.). Prentice Hall (Pearson). México. 672 pp.
- HIBBELER, R. C.; 2011. *Mecánica de Materiales*. (8ª ed.). Prentice Hall (Pearson). México. 880 pp.
- LLANOS, M. R; 2008. *Resistencia de Materiales*. San Marcos EIRL. Perú. 850 pp.
- MOTT, R. L.; 2009. *Resistencia de Materiales*. (5ª ed.). Prentice Hall (Pearson). México. 792 pp.
- NAGLER, J. (2019). *Failure Mechanics of Multi Materials Laminated Systems Review Analysis-Based Project*. 10.13140/RG.2.2.15062.91200. Extraído el 18 de junio de 2024, de: https://www.researchgate.net/publication/331074946_Failure_Mechanics_of_Multi_Materials_Laminated_Systems_Review_Analysis-Based_Project

- RAFFO, C. M. 2007. *Introducción a la Estática y Resistencia de Materiales*. (11^a ed.). Alsina. Argentina. 304 pp.
- ROKO, J. J. 1995. *Lecciones de Estática y Resistencia de Materiales*. Editorial Universitaria. Universidad Nacional de Misiones. 245 pp.
- SINGER, L. F.; Pytel, A. 2008. *Resistencia de Materiales. Traducción de la Cuarta Edición en Inglés* (4ta ed.). Alfa Omega Grupo Editor, S.A. de C.V. Estados Unidos. 584 pp.
- UNIVERSIDAD DE ATACAMA (UDA)-Departamento de Metalurgia. 2024. *Unidad 6. Ensayos Mecánicos*. Extraído el 31 de mayo de 2024, de: <https://www.slideserve.com/summer-sanford/unidad-6-ensayos-mec-nicos>
- ZALDIVAR, P. M. A.; CUENCA, H. S. 2017. Un Procedimiento para realizar los Ensayos a Pandeo. *Ciencias Holguín*, 23(2): 57-70.

