ESTÁTICA GRÁFICA
Apunte didáctico

Javier Alejandro Cequeira

Revisores:

Luis Antonio Fontana

Helga C. Vogel

Guillermo González

Cátedra: Estática y resistencia de materiales

Colección: Cuadernos de Cátedra

Facultad de Ciencias Forestales
Universidad Nacional de Misiones

Editorial Universitaria
Universidad Nacional de Misiones

Coronel José Félix Bogado 2160
Tel-Fax: 0376-4428601

Correos electrónicos:
direccion@editorial.unam.edu.ar
Página WEB: www.editorial.unam.edu.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra
Coordinación de la edición: Nélida González
Preparación para la web: Francisco A. Sánchez

Cequeira, Javier Alejandro
Estática gráfica : apunte didáctico / Javier Alejandro Cequeira. - 1a ed. - Posadas : Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ciencias Forestales, 2021.
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-766-176-1

1. Estática. 2. Física. 3. Mecánica. I. Título.
CDD 531.12

ÍNDICE DE CONTENIDO

Prólogo

El *objetivo* de la preparación de este material no es otro que exponer los conocimientos indispensables concernientes a *Estática Gráfica*, procurando condensar y agrupar ordenadamente los diversos temas dictados en la Cátedra, que, seguramente, se encuentran desarrollados con más lucimiento en las diferentes obras consultadas, apuntando a que el estudiante cuente principalmente, con una *guía práctica* y paso a paso para la resolución de problemas típicos de esta asignatura y así lograr *construcciones gráficas y geométricas* precisas, complementadas con sus *procedimientos analíticos*.

En este sentido, las construcciones gráficas y geométricas aludidas se presentan lo más detalladas posibles. Los procedimientos analíticos, por su parte, consisten principalmente en la proyección de fuerzas sobre ejes orientados (análisis vectorial) y se utilizan en la presentación y exposición de los Principios Fundamentales de la Mecánica. Sin embargo, el énfasis del documento se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la Mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.

Por lo tanto, en este documento se establecen aspectos teóricos, metodológicos y normativos para que los estudiantes de las carreras de *Ingeniería en Industrias de la Madera* e *Ingeniería Forestal* puedan afrontar con éxito la ardua tarea que implica la resolución de los ejercicios. El trasfondo de todo esto, sin embargo, es desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos.

Es importante acentuar que la definición del contenido de este material está basada en el dictado tradicional de la Cátedra y se considera que es un punto de partida para que los estudiantes puedan comprender, en primer lugar, esta materia para posteriormente abordar la segunda parte del curso: *Resistencia de Materiales*.

Lo que el Lector debe Saber

Escritura Basada en el Sistema Internacional de Unidades

En el cuerpo principal del documento se utilizan preferentemente las unidades del sistema internacional, SI, con lo cual, no se especifican explícitamente las unidades de todas las magnitudes que aparecen en una ecuación, solo se consigna la unidad de la magnitud principal (la que se está calculando). En la Sección 10.2 se listan las unidades fundamentales y derivadas del sistema métrico internacional.

Sin embargo, como un reconocimiento al hecho de que las *unidades inglesas*, así como algunas de otros sistemas de unidades; como el *técnico*, aún se usan ampliamente en la industria, también se incorporan ejemplos numéricos con unidades de estos últimos. Este enfoque es el que se adecua mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar estos sistemas de unidades. Por lo dicho, el *apunte* no descuida las relaciones o equivalencias entre los sistemas mencionados, y por ello se incorpora la Sección 10.4 de factores de conversión que incorpora los utilizados en el documento.

Nomenclatura que se debe Conocer

Los símbolos de las unidades y de las magnitudes no son simples abreviaturas; son entidades algebraicas cuyo uso está normalizado. No seguir estas reglas puede provocar errores y malas interpretaciones. Las reglas facilitan la comprensión de las publicaciones científicas y técnicas. Las reglas obligatorias están incluidas en el Sistema Internacional (SI), las voluntarias proceden del mundo de la normalización y están recomendadas por las normas internacionales ISO 31-0:1992 a ISO 31-13:1992. En este sentido, mientras que para los símbolos de las magnitudes sólo existen recomendaciones, es obligatorio emplear los símbolos correctos de las unidades (CEM, 2013).

En este documento, los símbolos de magnitudes físicas que se deben conocer son los que se listan a continuación.

$[1]$: Indica magnitud adimensional.

$\vec{F}$: El signo diacrítico indica *magnitud vectorial*. Para el ejemplo; Fuerza.

En este último pueden existir excepciones, por ejemplo, en la presentación de algún problema resuelto que pudiera provenir de la literatura consultada la magnitud vectorial fuerza se puede presentar con negrita y en letra recta **F** o bien como ***F***. En el Anexo 10.6 se listan la nomenclatura utilizada.

Se Utilizan Presentaciones en Distintos Tonos para Distinguir Vectores

Se opta por el uso de *escala de grises* en las ilustraciones, principalmente, para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. Por ejemplo, a lo largo del material, el gris se utiliza para representar fuerzas componentes, mientras que el negro para fuerzas resultantes. Una aplicación de ello es cuando se analizan sistemas y descomposición de fuerzas, entre otros. Sin embargo, en otros contextos, como al tratar con momentos de una fuerza, cuplas, etc., se opta por el uso del color negro.

Esto vuelve más fácil para los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el documento. Sin embargo, la incorporación de los problemas resueltos (en el cuerpo del documento) no tiene necesariamente que seguir esta regla de colores dado que pueden provenir directamente de la literatura consultada.

Problemas Resueltos

Los problemas resueltos incorporados en el cuerpo del documento se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Cabe remarcar que en los problemas que así lo requieran, se puede utilizar para su solución el software gratuito GeoGebra, siendo este u otro, recursos que el estudiante debería adoptar estratégicamente para la verificación de sus ejercicios.

Ecuaciones de uso Práctico

En *negrita se resalta la numeración* de las ecuaciones que revisten mayor importancia para el alumno dada su aplicación práctica en la resolución de problemas.

Glosario de Términos en Estática Gráfica

En el Anexo 10.1 se presenta una lista de términos utilizados comúnmente en Estática Gráfica. La lista no es exhaustiva, pero tiene conceptos neurálgicos para la comprensión e ilación de conceptos. Se recomienda recurrir a ella en la medida en que se avanza con la lectura del material.

Cualquier tema referente a esta documentación, como así también, los errores que pudiere haber, se solicita sea comunicado directamente a través del correo electrónico: JAVIERCEQUEIRA@YAHOO.COM.AR.

1. INTRODUCCIÓN

El inicio conveniente para cualquier estudio, en este caso particular *Estática Gráfica*, consiste primeramente en contextualizar la disciplina, en este sentido, cabe la pregunta: *¿En qué rama de la Física Clásica está incluida esta*? Precisamente, esta cuestión se puede responder si se observa la **Figura 1**, en la que se presenta la Mecánica (y sus subdivisiones) como una de las ramas de la Física Clásica.

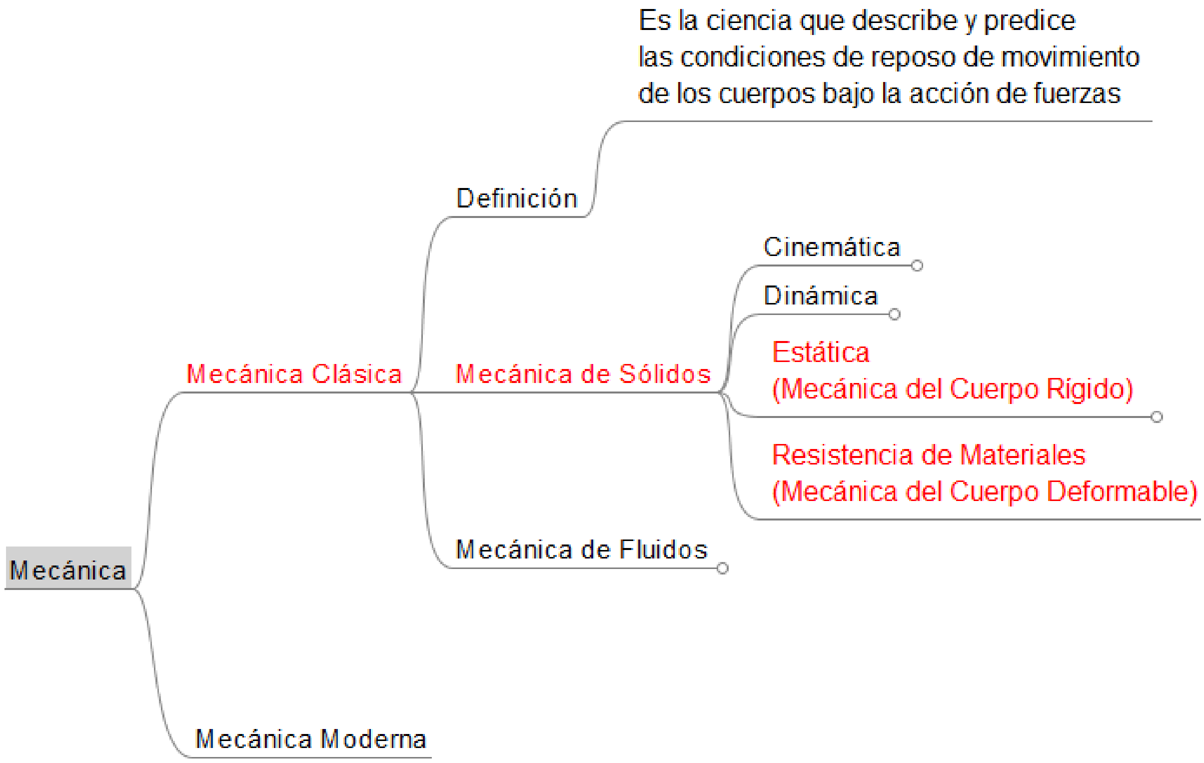


Figura 1. La Mecánica Clásica y sus Ramas (Fuente: Adaptado de FATELA, 2012).

Específicamente, dentro de la mecánica del cuerpo rígido (Ver Sección 2), se puede distinguir la *Estática Gráfica*, que, según PANSERI (1978) se puede definir como la ciencia derivada de la Física que, en particular, estudia gráficamente, es decir, por intermedio de dibujos y gráficos, las condiciones que deben cumplir las *fuerzas* exteriores (activas y reactivas) para que el sistema sobre el cual actúan, permanezca en estado de *equilibrio*, es decir, que no sufra desplazamientos.

Como se ha de ver más adelante, la Estática da un *número de ecuaciones limitado* para resolver sus problemas de equilibrio. Cuando las incógnitas sobrepasan ese número de ecuaciones, se está en presencia de un problema estáticamente indeterminado. Estos no se han de abordar, pues para resolverlos hay que apelar a la Resistencia de Materiales (o Mecánica de Materiales), fuera del objeto de este documento. Se han de ver pues, sólo *problemas estáticamente determinados* (GUZMÁN, 1964).

En otras palabras, la Resistencia de Materiales trabaja con cuerpos reales, es decir cuerpos que se pueden deformar ante las cargas aplicadas. Dichas posibles deformaciones introducen las relaciones faltantes que permiten, como ecuaciones adicionales a las de equilibrio, resolver el problema planteado. Finalmente, se puede resumir la relación entre estas dos ramas de la Mecánica de la siguiente forma (Ver **Figura 2**).

Figura 2. Relación entre Estática y Resistencia de Materiales (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Los parágrafos anteriores expresan la finalidad esencial de la materia, que, con un enfoque teórico-práctico, se ha de estudiar en las Secciones 2 a 8. Teniendo en cuenta lo dicho y, para contextualizar mejor aún los límites de estudio del presente material, cabe dejar sentado algunos aspectos generales, a saber:

Se Trabaja en Dos Dimensiones

Las fuerzas que se analizan están contenidas en un plano bidimensional, esto implica que la recta de acción de dichas fuerzas o sistemas de fuerzas (Ver Sección 3) actúan en un mismo plano, quedando, por el momento, el análisis espacial (3 dimensiones) como tema eventual de comparación, ampliación o contraste con los primeros.

Se Analiza el Equilibrio Estático de los Cuerpos

En Física, el *equilibrio mecánico* es un estado estacionario en el que se cumple la siguiente condición: *Un sistema está en equilibrio mecánico cuando la suma de fuerzas y momentos sobre cada partícula del sistema es cero*.

Como consecuencia de las Leyes de la Mecánica (Leyes de Newton) una partícula en equilibrio no sufre aceleración lineal ni de rotación, pero puede estar moviéndose a velocidad uniforme o rotar a velocidad angular uniforme. Esto es ampliable a un Sólido Rígido. El concepto de partícula y de sólido rígido se definen en la Sección 2.1; y, la importancia de su aplicación práctica en ingeniería se evidencia en la resolución de los distintos tipos de sistemas de fuerzas en la Sección 3.

En este sentido, se distingue un tipo particular de equilibrio mecánico llamado *Equilibrio Estático* que corresponde a una situación en el que el cuerpo está en *reposo*, con velocidad cero: una hoja de papel sobre un escritorio está en equilibrio mecánico y estático, un paracaidista cayendo a velocidad constante estaría en equilibrio mecánico, pero no estático (WIKIPEDIA, 2019).

Finalmente, mencionar que el contenido del documento aborda de manera secuencial las diferentes temáticas de estudio con lo cual para una mejor comprensión la lectura debe ser igualmente ordenada.

2. FUNDAMENTOS DE ESTÁTICA GRÁFICA

Hay que enfatizar el hecho de que la Mecánica es, esencialmente, una *ciencia deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Dichos principios se ubican en el contexto de aplicaciones simples. Es decir, en virtud de que el *proceso de aprendizaje* es primordialmente *inductivo*, las aplicaciones más simples se consideran primero y se generalizan luego para casos más complejos.

Para ilustrar los anterior considere la definición de *cuerpos ideales* (denominados cuerpos rígidos) que se definen en la sección siguiente, los mismos están conformados, a su vez, por muchas partículas. Con este concepto, el estudio de la Estática se puede dividir en dos partes[1]: la *Estática de Partículas* y la *Estática de Cuerpos Rígidos*.

La Estática de Partículas antecede a la Estática de Cuerpos Rígidos. En la primera los objetos pueden modelarse como partículas para resolver los problemas planteados (como se ve en el Problema Resuelto 2.1). Una vez comprendido ello puede generalizarse para cuerpos reales en los cuales dicha modelización no es posible (Estática de Cuerpos Rígidos) (BEER *et al.* 2007). En este material, sin embargo, no se realiza una división rigurosa de ambas partes de la Estática.

2.1. Conceptos y Principios Fundamentales

Los conceptos básicos que se emplean en la Mecánica son *espacio, tiempo, masa y fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia y emplearse como un marco de referencia mental en el estudio de la Mecánica (BEER *et al.* 2007).

[1] Siendo usual que así sea.

El concepto de fuerza, particularmente, se describe en la sección siguiente, dejando para estas líneas el enunciado de conceptos, principios y leyes que intervienen en el estudio de la Estática, a saber:

Condición de Indeformabilidad de los Cuerpos: La Mecánica al estudiar el equilibrio estático de los cuerpos los considera sólidos e indeformables suponiendo que los diversos puntos (: *partículas*) del cuerpo se mantienen siempre a distancias fijas cualquiera sea la intensidad de las fuerzas que tiendan a acercarlos o a separarlos. Un cuerpo que cumple con estas condiciones se denomina *Cuerpo Rígido*. Cabe remarcar que se trata de una idealización.

En este sentido, BEER *et al.* (2007) señala: Por *partícula* se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un cuerpo rígido es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la Mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además, los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

Principio de Transmisibilidad: El concepto de rigidez permite omitir el punto de aplicación de una fuerza ya que puede ser cualquiera del cuerpo con tal que se conserve sobre la misma recta de acción (*transmisibilidad*). Se considera, por lo tanto, a las fuerzas como vectores libres sobre sus rectas de acción, es decir, *vectores deslizantes* (Ver Anexo 10.1).

Principio de Superposición de la Acciones y de la Independencia de los Movimientos: Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo (o sistemas de cuerpos) en forma simultánea o sucesivamente, cada una producirá en el mismo la aceleración que le corresponde independientemente de las demás (*Independencia de los Movimientos*).

Lógicamente, la velocidad y la aceleración total del cuerpo resulta de la composición de la velocidad y aceleración parcial que produce cada fuerza, es decir que, la velocidad, aceleración y trayectoria del cuerpo es la que produce la resultante de todas las fuerzas (*Principio de Superposición*). El concepto de resultante se analiza en la Sección 2.2.3.

Las Tres Leyes Fundamentales de Newton: Sintéticamente, pueden enunciarse como sigue. *Primera Ley o Principio de Inercia*: Si la fuerza resultante o fuerza neta (Ver Anexo 10.1) que actúa sobre un cuerpo es cero, el cuerpo permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante (si originalmente estaba en movimiento). La *Segunda Ley*: Si la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo no es cero, el cuerpo tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta. Esto se expresa como: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} = m \times \vec{a} \quad [\mathrm{N}]$, donde $\vec{F}_i, \vec{R}, m \; y \; \vec{a}$ representan, respectivamente, las fuerzas que componen el sistema, la resultante de las fuerzas, la masa del cuerpo y la aceleración adquirida por este debido a las fuerzas actuantes. La *Tercera Ley*: Dos cuerpos que actúan uno sobre otro desarrollan siempre dos fuerzas que se hallan sobre la misma recta de acción, tienen igual intensidad, pero sentido contrario.

2.2. Fuerza

Como se menciona en un párrafo anterior, esta sección trata sobre la fuerza y los conceptos asociados los cuales son necesarios tener en cuenta para la resolución de los problemas. Comprender que es una fuerza implica el conocimiento de *magnitudes vectoriales* (en contraposición a las *magnitudes escalares*) conceptos que se dan por entendidos o, en su defecto, se deben consultar en la bibliografía citada, por ende, en la sección siguiente solo se brindan algunas precisiones de interés.

2.2.1. Vectores

2.2.1.1. Representación Geométrica y Notación

Los vectores son expresiones matemáticas geométricas que permiten representar magnitudes vectoriales, por ejemplo, la *Fuerza*. En estática, algunas cantidades vectoriales encontradas con frecuencia son fuerza, posición y momento. En el glosario se incorpora su definición, pero aquí es necesario definir genéricamente ciertos aspectos de estos como son la *Representación Geométrica* y la nomenclatura normalizada para su *Notación*, a fin de estandarizar, o bien, tener una referencia para trabajos escritos que se exigen con frecuencia en la Cátedra.

En la **Figura 3** se muestra la representación de un vector en la que, además, se señalan implícitamente algunos elementos propios de estas expresiones matemáticas como el punto de aplicación, la dirección, etc., sin embargo, estos se definen con mayor detalle en la siguiente sección.

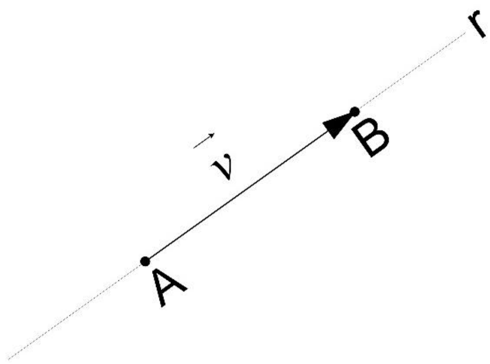


Figura 3. Representación Geométrica de Vectores (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En la figura anterior se han elegido dos puntos: A y B sobre la recta r. Si se considera el punto A como el origen y el punto B como el extremo tendremos un *segmento orientado*, entonces, queda definido el vector $\overrightarrow{AB}$ que también puede designarse con una letra en minúscula o mayúscula según el caso, por ejemplo $\vec{v}$, la preferencia es el uso de esta última por una cuestión de simplicidad. Para los vectores fuerza, particularmente, se han de utilizar en este material las designaciones que se indican en la **Figura 4**, las cuales son de uso estricto en el curso.

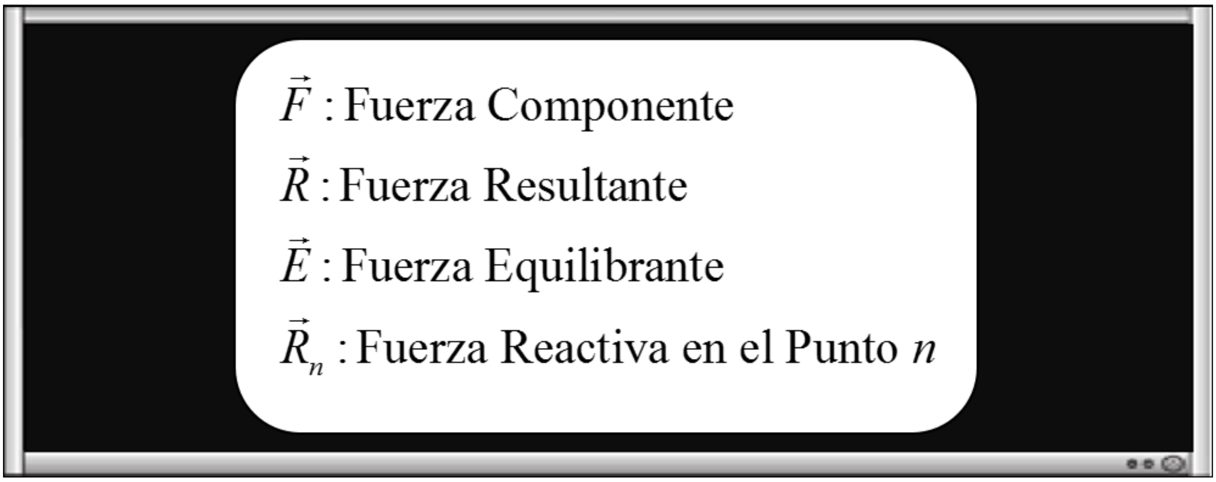


Figura 4. Notación de Vectores Fuerza en Estática Gráfica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El porqué de las designaciones anteriores está directamente relacionado con el lenguaje simbólico de Estática Gráfica de la mayoría de la literatura y se fundamentan en las secciones sucesivas.

2.2.1.2. Componentes Rectangulares

En esta sección se introduce el concepto general de componente rectangular de un vector, luego, con la definición de vector canónico se expresan dichas componentes en términos cartesianos para finalmente presentar las expresiones analíticas de un vector siendo este el fin último, dado que el lector debe identificar un vector en sus distintas notaciones como se ha dicho.

En muchos problemas es conveniente descomponer[2] un vector en sus dos *componentes perpendiculares* entre sí. En la **Figura 5**, el vector $\vec{v}$ se ha ubicado en un plano cartesiano Oxy

[2] El tema Descomposición de Fuerzas, específicamente, se introduce en la Sección 2.2.4.

y se lo ha descompuesto en una componente $\vec{v}_x$ a lo largo del eje x y una componente $\vec{v}_y$ a lo largo del eje y.

Dichas componentes se han obtenido mediante la proyección[3] del vector sobre dichos ejes. Se observa que el paralelogramo formado es un rectángulo, y los vectores $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ se llaman *componentes rectangulares*. Al ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las x medido en sentido antihorario se denomina *argumento* designado, en este caso, como φ (letra griega *phi*) siendo esta la *convención* adoptada para medir la dirección de los vectores.

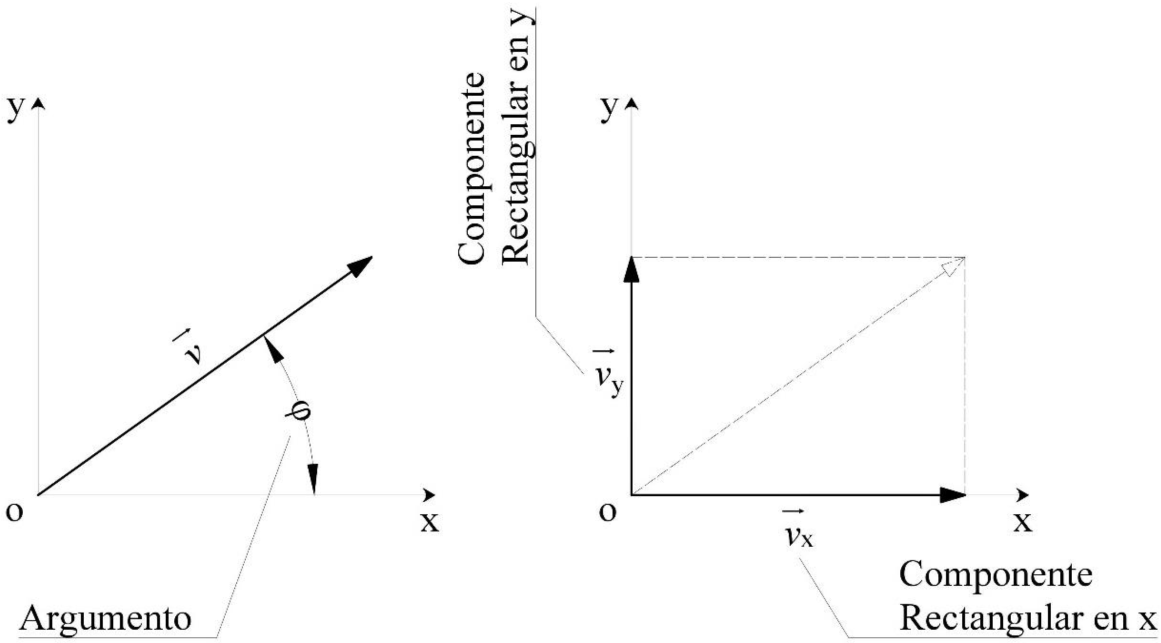


Figura 5. Representación Geométrica de Vectores y sus Componentes Rectangulares (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Comprendido el concepto de componentes, es necesario en este punto, introducir un nuevo término: el de *Vectores Unitarios, Versores* o *Vectores Canónicos*. En efecto, se trata de dos vectores de magnitud[4] unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x e y (Ver **Figura 6**), y, que se representan como $\breve{i}$ y $\breve{j}$, respectivamente.

---

[3] Ver Proyección de Fuerzas en la Sección 2.2.2.
[4] Magnitud Unitaria refiere a un vector de módulo uno (Ver Sección 2.2.2).

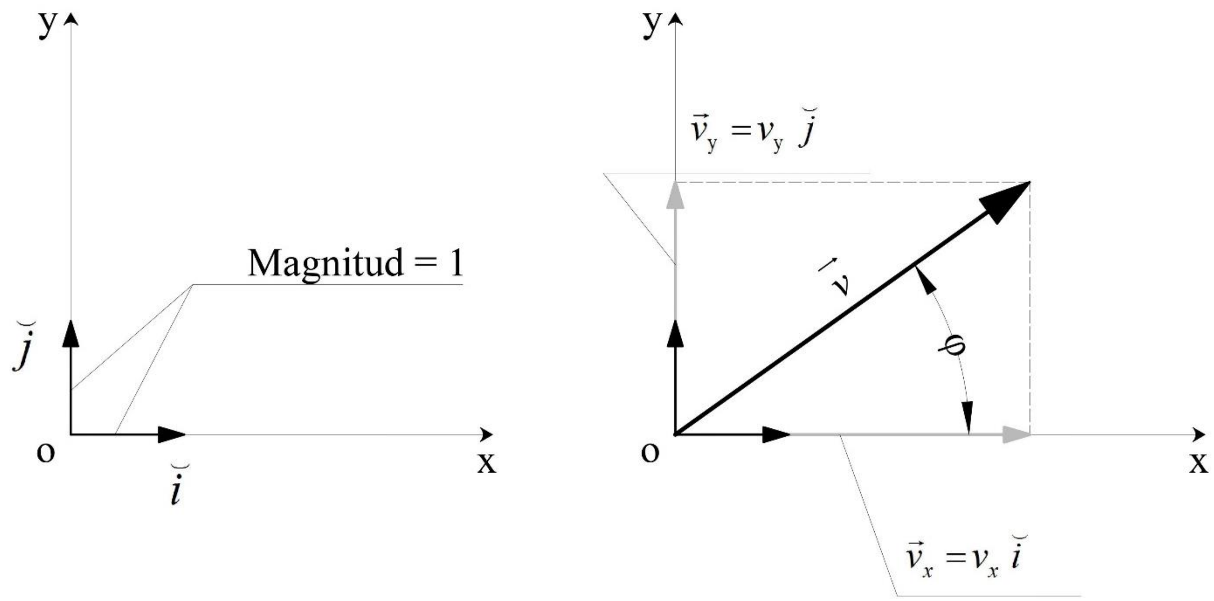


Figura 6. Versores Unitarios y Componentes Rectangulares en el Plano (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector se observa que las componentes rectangulares $\vec{v}_{\mathrm{x}}$ y $\vec{v}_{\mathrm{y}}$ de un vector $\vec{v}$ pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios $\breve{i}$ y $\breve{j}$, por escalares apropiados como se muestra en la Ec. (1) y en la figura anterior.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\mathrm{x}} &= v_{\mathrm{x}} \times \breve{i} \quad \text{o simplemente:} \quad \vec{v}_{\mathrm{x}} = v_{\mathrm{x}}\ \breve{i} \\ \vec{v}_{\mathrm{y}} &= v_{\mathrm{y}} \times \breve{j} \quad \text{o simplemente:} \quad \vec{v}_{\mathrm{y}} = v_{\mathrm{y}}\ \breve{j} \end{aligned} \qquad (1)$$

En la anterior v_{x} es una magnitud escalar que coincide numéricamente con el módulo de la componente x del vector, es decir: $v_{\mathrm{x}} = \left\|\vec{v}_{\mathrm{x}}\right\|$. Análogamente, $v_{\mathrm{y}} = \left\|\vec{v}_{\mathrm{y}}\right\|$.

Si ahora se toma en consideración el ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con el semieje positivo de las x (Ver Figura 5) las componentes v_{x} y v_{y} se pueden expresar como sigue. Ver Ec. (2).

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{x}} &= \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\varphi \\ v_{\mathrm{y}} &= \left\|\vec{v}\right\| \times sen\varphi \end{aligned} \qquad (2)$$

Donde $\|\vec{v}\|$ es el módulo del vector $\vec{v}$. Se observa, además, que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo entre 0 y 360° y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares.

Finalmente, y con todos los conceptos analizados, se presenta en la Ec. (3) las distintas formas en que un vector puede expresarse analíticamente para que estos queden completamente definidos.

$$\begin{aligned}
&a)\quad \vec{v} = (v_{\mathrm{x}};\, v_{\mathrm{y}}) \quad \text{Como Par Ordenado}\\
&b)\quad \vec{v} = v_{\mathrm{x}}\,\breve{i} + v_{\mathrm{y}}\,\breve{j} \quad \text{En Forma Canónica o Cartesiana}\\
&c)\quad \vec{v} = (\|\vec{v}\|,\, \varphi) \quad o\ bien: \quad \vec{v} = \|\vec{v}\|_{\varphi} \quad \text{En Forma Polar}\\
&d)\quad \vec{v} = \|\vec{v}\| \times \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) \quad \text{En Forma Trigonométrica}
\end{aligned} \tag{3}$$

Las expresiones dadas en la (3) no son exhaustivas debiendo el alumno identificar del curso de álgebra vectorial otras formas como, por ejemplo, la matricial, sin embargo, son algunas de las expuestas las que se utilizan con frecuencia.

PROBLEMA RESUELTO 2.1

Objetivo. Comprender y aplicar los conceptos de *componente rectangular* (vectorial y escalar) de un vector dado atendiendo a las *notaciones vectoriales*, particularmente la *cartesiana*.

Consigna. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno A como se muestra en la **Figura 7**. Determínese las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

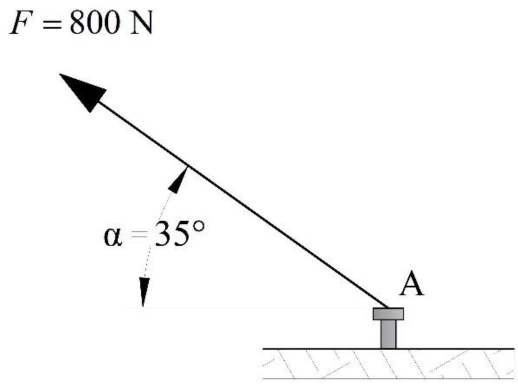


Figura 7. Situación Problemática (Fuente: Adaptado de BEER et al. 2007).

SOLUCIÓN

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y, el valor 180°-35° = 145° debe sustituirse por φ en las ecuaciones (2). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y, y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35°$. Para tal fin, se construye el *Diagrama de Cuerpo Libre* (Ver **Figura 8**) a partir del diagrama espacial anterior.

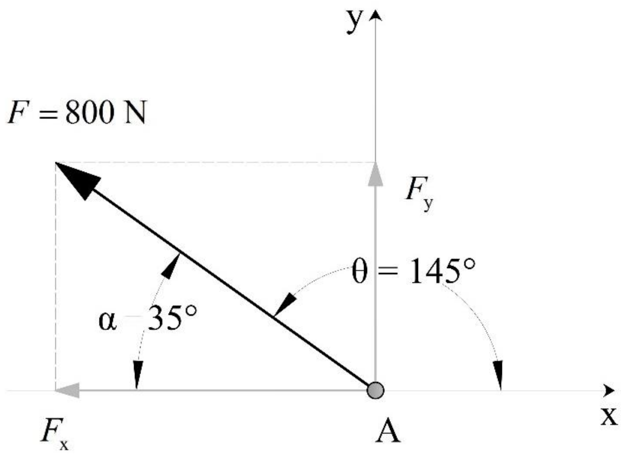


Figura 8. Diagrama de Cuerpo Libre. [1] Notar que el perno se ha modelado como una partícula (Fuente: Adaptado de BEER et al. 2007).

Por consiguiente, se puede escribir:

$$F_x = -F \times \cos\alpha = -(800\ \mathrm{N}) \times \cos 35° = -655\ \mathrm{N}$$
$$F_y = F \times sen\alpha = +(800\ \mathrm{N}) \times sen 35° = +459\ \mathrm{N}$$

Las componentes vectoriales de $\vec{F}$ (Ec. 1) son entonces:

$$\vec{F}_x = F_x \times \breve{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_x = -(655\ \mathrm{N})\ \breve{i}$$
$$\vec{F}_y = F_y \times \breve{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_y = +(459\ \mathrm{N})\ \breve{j}$$

La respuesta al problema puede consignarse según se muestra en el cálculo anterior, sin embargo, como se trata de vectores y se cuenta con las componentes es conveniente expresarla en forma cartesiana:

Respuesta $\boxed{\vec{F} = -(655\ \mathrm{N})\ \breve{i} + (459\ \mathrm{N})\ \breve{j}}$

Observaciones

- Observar que para resolver el problema se ha modelado al anclaje mostrado en el *Diagrama Espacial* como una *partícula* (A) sobre la cual actúan fuerzas. Todo el conjunto se representa luego en un *Diagrama de Cuerpo Libre* (Ver Anexo 10.1).
- Notar que en las *resoluciones trigonométricas* el alumno puede optar por utilizar los ángulos medidos en la forma convencional (desde el semieje positivo de las x y en sentido levógiro) o bien trabajar con el ángulo dato atendiendo al signo de las funciones trigonométricas en cada cuadrante como se ha hecho aquí.
- La aplicación de las *otras notaciones* mostradas en la Ec. (3) pueden verse en el Problema Resuelto 2.2.

2.2.2. Definición y Caracterización de una Fuerza

Con la introducción del concepto genérico de vector desarrollado en la sección anterior, se considera conveniente incorporar recién en esta instancia otros aspectos (también genéricos) muy importantes de los mismos, pero ya para un caso particular: el *Vector Fuerza*. Dicho orden de presentación de conceptos apunta a que el alumno asocie las definiciones que aquí se presentan directamente considerando a la *fuerza* como el *vector de estudio principal* de este curso.

Un cuerpo no puede por sí mismo variar su estado de movimiento o de reposo; es decir, si está inmóvil seguirá estando inmóvil y si está en movimiento continuará moviéndose.

Definición: Toda causa capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo, esto es, de pararlo o de variar su velocidad o su trayectoria si está en movimiento, de moverlo si está en reposo, se llama *Fuerza*. En forma simple, llámese fuerza *toda causa capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo* (DI PIETRO, 1968).

Elementos que la caracterizan: La fuerza es una magnitud vectorial, por lo tanto, se representa mediante un vector. Para individualizarla deben darse los cuatro elementos que se muestran en la **Figura 9**.

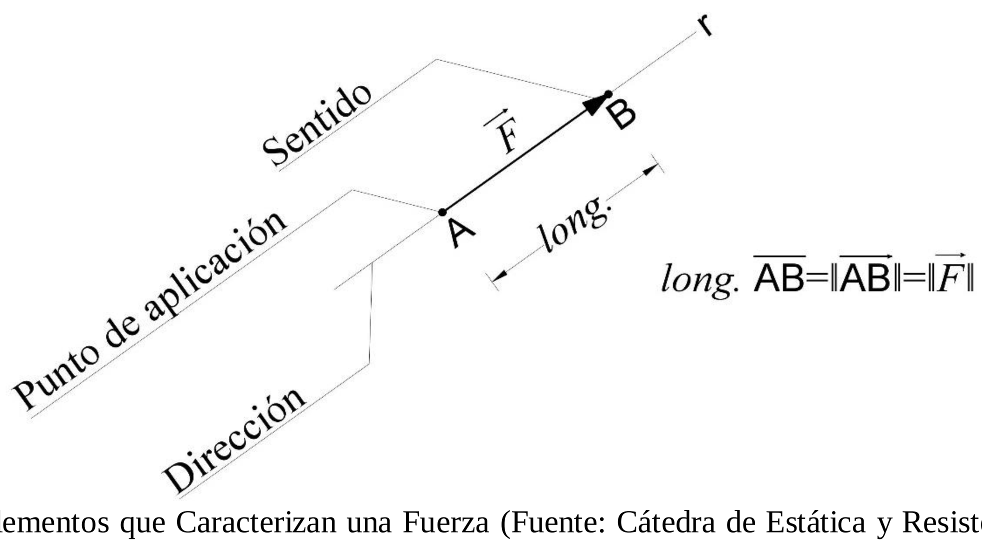


Figura 9. Elementos que Caracterizan una Fuerza (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Con referencia a la figura anterior: el *Módulo, Magnitud* o *Intensidad* es la longitud (*long.*) del segmento expresado en términos de un valor numérico y una unidad, la *Dirección* o *Recta de Acción* (dada por la recta r) es el ángulo del vector con respecto al semieje positivo de las x, el *Sentido* es la orientación del segmento, del origen al extremo del vector, puede ser positivo o negativo. Finalmente, el *Punto de Aplicación* es el punto donde la fuerza está aplicada.

Escala de Fuerzas: Es la relación entre el módulo o intensidad de la fuerza y la longitud del vector representativo de dicha fuerza, **Ec. (4)**.

$$EF = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{long.} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\right], \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}\right], \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{unidad}}\right] \tag{4}$$

Por ejemplo, dada una fuerza $\vec{F} = \left(1000\ \mathrm{N}, 35°\right)$ y elegida su longitud representativa $long. = 5\ \mathrm{cm},$ la escala de fuerza es: $EF = 1000\ \mathrm{N}/5\ \mathrm{cm} = 200\ \ \mathrm{N/cm}$. Conocida la EF y $long.$ se obtiene el módulo de la fuerza efectuando el producto entre estas dos cantidades: $\left\|\vec{F}\right\| = EF \times long. = 2500\ \ \mathrm{N/cm} \times 10\ \mathrm{cm} = 25000\ \mathrm{N}$. De la igualdad (2) puede deducirse también $long.$ si se conocen las otras dos magnitudes.

Proyección de Fuerzas: Para proyectar una fuerza sobre *un eje* se trazan desde los extremos de su vector representativo rectas perpendiculares al eje, el segmento intersección obtenido leído en la escala de fuerzas adoptada es el valor de la proyección que es la componente de la fuerza (Ver **Figura 10**).

El concepto anterior puede hacerse extensivo, por ejemplo, para dos ejes ortogonales como se indica en la **Figura 11**, y también para este caso, los valores de las proyecciones permiten obtener las componentes vectoriales $\vec{F}_{\mathrm{x}}$ y $\vec{F}_{\mathrm{y}}$, así como las componentes escalares F_{x} y F_{y} de la fuerza dada, las cuales también pueden obtenerse analíticamente como se indica en la **Ec. (5)**.

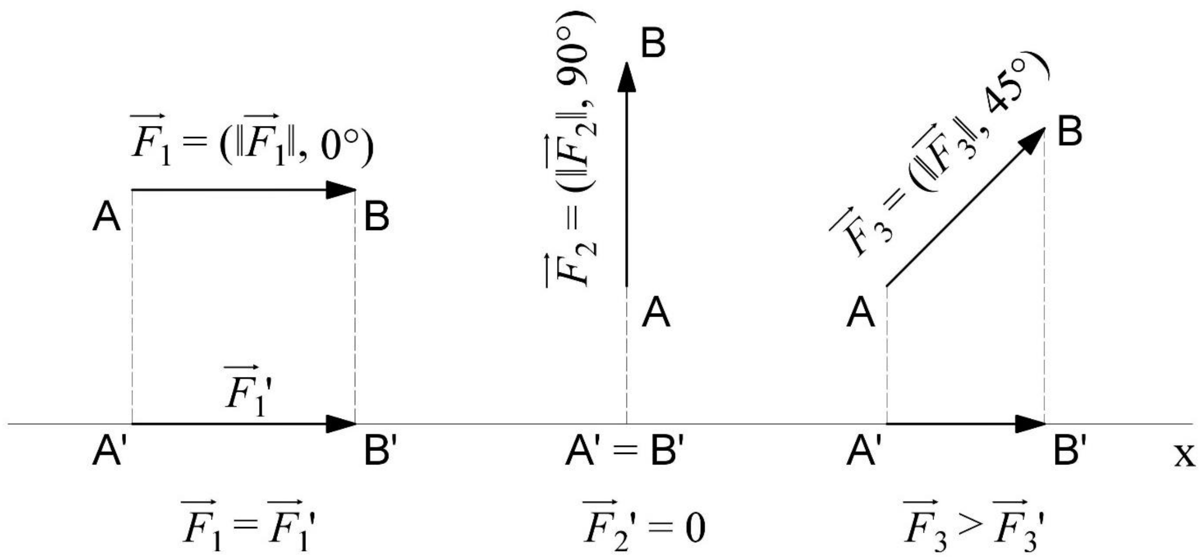


Figura 10. Proyección de Fuerzas Sobre Un Eje (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

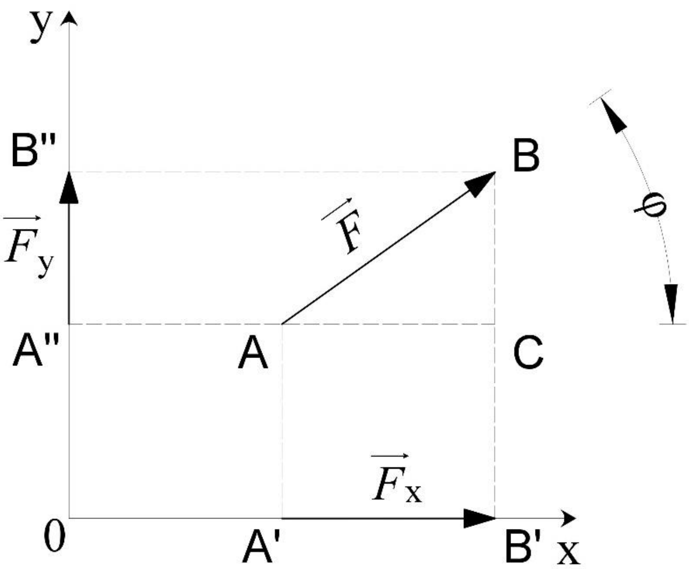


Figura 11. Proyección de Fuerzas Sobre Dos Ejes Perpendiculares (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Con módulo y argumento de cada fuerza:

$$a)\quad \cos\varphi = \frac{F_x}{\left\|\vec{F}\right\|} \Rightarrow F_x = \left\|\vec{F}\right\| \times \cos\varphi \quad [\mathrm{N}]$$

$$b)\quad \sin\varphi = \frac{F_y}{\left\|\vec{F}\right\|} \Rightarrow F_y = \left\|\vec{F}\right\| \times \sin\varphi \quad [\mathrm{N}]$$

(5)

Con las componentes escalares:

$$c)\quad tg\varphi = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{F_y}{F_x} \quad [°]$$

$$d)\quad \left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} \quad [\mathrm{N}]$$

El análisis anterior se puede generalizar para *n* fuerzas ubicadas en un sistema de coordenadas, de modo tal que si se conocen el módulo y argumento de cada fuerza se constituye en un procedimiento analítico conocido como *Teorema de las Proyecciones* (PANSERI, 1978) que se utiliza para resolver sistemas de fuerza. Dicho teorema se trata en la sección 2.2.3.2 porque es en ella donde se incorporan conceptos previos que se deben considerar tal como la composición de fuerzas.

2.2.3. Composición de Fuerzas

Según RAFFO (2007): "Los dos problemas fundamentales de la Estática son los siguientes: *1)* Composición o Reducción de Fuerzas (determinación de resultantes); *2)* Descomposición de Fuerzas (determinación de componentes)". La solución a estos problemas se estudia en esta y en la sección siguiente.

En la introducción de este documento se especifica que la totalidad de los *sistemas de fuerza* analizados en el curso son principalmente *coplanares*, esto quiere decir que están formados por fuerzas cuyas rectas de acción se encuentran todas en un mismo plano.

En esta sección se desarrollan los *métodos gráfico y analítico* recurrentemente utilizados para resolver dichos sistemas. Sin embargo, los tipos de sistemas de fuerza en los que se aplican dichos métodos se analizan desde la Sección 3 en adelante. Además, en esta parte también se busca dejar claro ciertos conceptos que se desprenden del anterior como los son la *Fuerza Resultante* y la *Fuerza Equilibrante*.

2.2.3.1. Fuerza Resultante y Fuerza Equilibrante

Componer un sistema cualquiera de fuerzas coplanares es hallar su resultante que por supuesto se encuentra en el mismo plano que sus componentes. Se llama *Fuerza Resultante* o simplemente **Resultante** $\vec{R}$ de un sistema de fuerzas a una fuerza única cuyo efecto es equivalente al de las fuerzas dadas, que se llaman componentes.

La determinación de la resultante permite simplificar los problemas y pone en evidencia los efectos que producirían la acción conjunta de las componentes. La *suma vectorial* o composición de fuerzas (vale decir, la determinación de la resultante) obedece a las mismas propiedades fundamentales de la suma de números, es decir, que puede alterarse el orden de los sumandos o asociarlos como convenga.

Es importante aclarar que, la resultante de un sistema de fuerzas está asociada a las *solicitaciones* de la estructura, vale decir, a las *cargas* (Ver Sección 10.1) que sobre esta actúan. Estas cargas hacen las veces de componentes siendo de aplicación exterior a la estructura y se trasladan a través de esta hasta el suelo dónde se producen las reacciones.

Estas reacciones, por su parte, consisten en *fuerzas reactivas* (que también son exteriores) y *equilibran la estructura*[5]. Por lo tanto, llámese *Fuerza Equilibrante* o simplemente **Equilibrante** $\vec{E}$ a la fuerza que tiene el mismo módulo y dirección que la resultante (cuando $\vec{R} \neq 0$), pero sentido opuesto. En la **Figura 12** se explicitan las componentes tanto de la resultante como de la equilibrante.

---

[5] Tercera Ley de Newton del Movimiento.

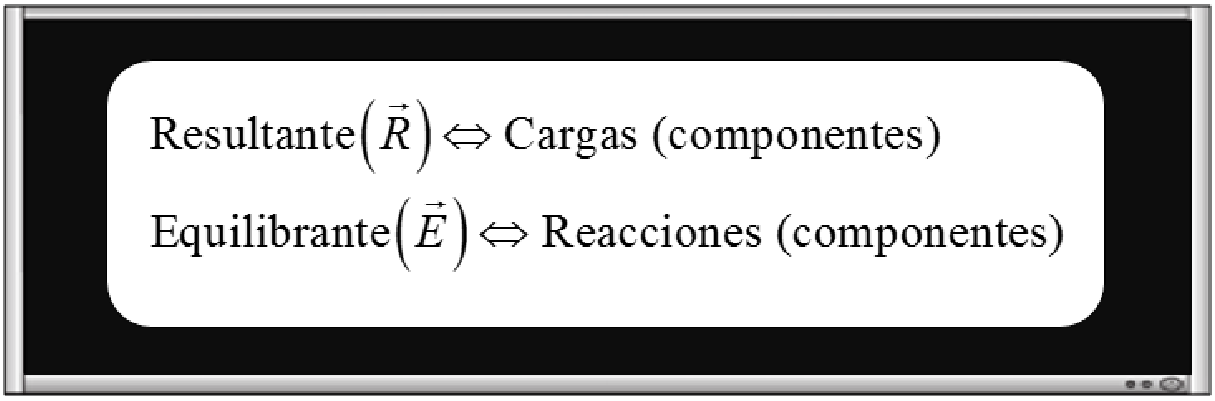


Figura 12. Componentes de la Resultante y Equilibrante de un Sistema de Fuerzas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por otra parte, como se ha dicho en el Capítulo 1, el objetivo de la Estática Gráfica es averiguar si una estructura se halla en equilibrio, si esto se verifica, entonces $\vec{R} = 0$, en caso contrario es $\vec{R} \neq 0$ y, por lo tanto, es necesario incorporar la equilibrante al sistema (recordar esto para las resoluciones gráficas y analíticas). Esta circunstancia resulta ser *una* de las condiciones de equilibrio de los sistemas de fuerza que se analizan en detalle a partir de la Sección 3.

Teniendo en consideración los párrafos anteriores, se puede formalizar los siguientes conceptos a saber; **Fuerzas Exteriores e Interiores**: Cuando en un cuerpo actúan fuerzas exteriores se generan como consecuencia fuerzas interiores que tienden a equilibrar a las aplicadas exteriormente. Al equilibrio de las fuerzas exteriores exclusivamente se lo llama *Equilibrio Estático o Externo*, y al equilibrio entre las fuerzas interiores y exteriores *Equilibrio Elástico o Interno* (Ver **Figura 13**). Las fuerzas interiores se estudian a partir de la Sección 6.

Figura 13. Fuerzas Exteriores e Interiores (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Hasta aquí se han definido conceptos que son importantes, pero, no se ha dicho como se calculan, justamente, la sección siguiente se encarga de presentar el procedimiento gráfico y analítico que permite hallar la resultante (y, por lo tanto, la equilibrante) de un sistema de *n* fuerzas quedando la determinación de las reacciones para el capítulo 5.

2.2.3.2. Determinación de la Resultante

La resultante de un sistema de *n* fuerzas se determina según un procedimiento gráfico y uno analítico. El primero consiste en un método denominado (según el autor) *Polígono de Fuerzas, Polígono Vectorial*, *Regla del Polígono o Poligonal,* mientras que el método analítico se conoce como *Teorema de las Proyecciones*.

El polígono de fuerzas mencionado es aplicable a cualquier tipo de sistemas de fuerzas, sin embargo, existe otro procedimiento gráfico[6] muy importante en Estática denominado *Polígono Funicular* el cual se aplica a los sistemas no concurrentes que se analizan en la Sección 3.3.3, este polígono también se analiza aquí.

1ro. Método Gráfico: Polígono Vectorial

En la Sección 3.3.2.1 se analiza que las fuerzas, *por definición*, deben sumarse de acuerdo con la *Ley del Paralelogramo* presentando para el caso de dos fuerzas concurrentes[7]. A partir de esta ley se derivan otros dos métodos más directos aplicables a la solución gráfica de los problemas: la *Regla del Triángulo* para la suma de dos fuerzas y la *Regla del Polígono* para la adición de tres o más fuerzas (BEER *et al.* 2007). Todo esto se resume en la **Figura 14**.

[6] Complementario al polígono de fuerzas.
[7] La regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo.

$$\text{Solución Gráfica}\begin{cases} n=2 \rightarrow \begin{cases}\text{Regla del Paralelogramo}\\ \text{Triángulo de Fuerzas}\end{cases} \\ n \geq 3 \rightarrow \{\text{Polígono Vectorial} \end{cases}$$

Figura 14. Solución Gráfica para Obtener la Resultante de un Sistemas de Fuerzas Coplanares. n es el número de fuerzas del sistema (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

La regla del triángulo también se analiza en la Sección 3.3.2.1. En lo que refiere a la construcción del polígono vectorial, en efecto, en la **Figura 15** se presenta un ejemplo de construcción para un sistema conformado por dos fuerzas $\vec{F}_1 = (\|\vec{F}_1\|, \varphi_1)$ y $\vec{F}_2 = (\|\vec{F}_2\|, \varphi_2)$. Entonces: *Primero* se define una escala de fuerzas; *Segundo*: se hallan los vectores representativos ($\overline{\mathsf{AB}}$ y $\overline{\mathsf{BC}}$) de las fuerzas dadas; *Tercero*: a partir de un punto, por ejemplo, A, se lleva el vector representativo de $\vec{F}_1$ y, a continuación, el de $\vec{F}_2$ construyendo la poligonal (siendo indistinto el orden en que se lleva cada fuerza). El segmento $\overline{\mathsf{AC}}$ que une el origen del primer vector con el extremo del último es el vector representativo de la resultante $\vec{R}$. Este segmento multiplicado por la escala de fuerzas da el módulo del vector.

$$EF = x\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$\overline{\mathsf{AB}} = \frac{\|\vec{F}_1\|}{EF} \qquad [\text{cm}]$$

$$\overline{\mathsf{BC}} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{EF} \qquad [\text{cm}]$$

$$\|\vec{R}\| = \overline{\mathsf{AC}} \times EF \qquad [\text{N}]$$

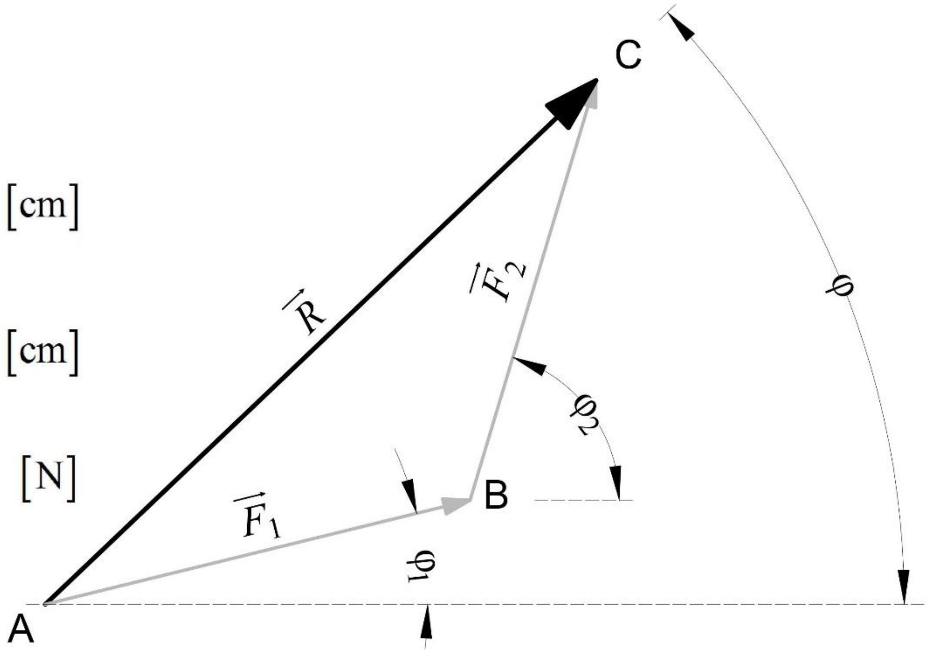


Figura 15. Construcción del Polígono Vectorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Ahora bien, de la resultante se tiene el *módulo* (como se indica en el párrafo y figura anteriores), la *dirección* (dada por su argumento φ) y el sentido (del origen al extremo), solamente resta definir la ubicación de la misma en el sistema, pues bien, ello depende del sistema de fuerzas que se esté resolviendo, a saber: para *fuerzas colineales* la resultante tiene la misma recta de acción que las fuerzas; para las *concurrentes* es el punto de concurrencia, para *fuerzas no concurrentes y paralelas* está determinado por el *polígono funicular*. Todo esto se ve en detalle en el Capítulo 3.

2do. Método Analítico: Teorema de las Proyecciones

Para la solución analítica se consideran las dos fuerzas de la Figura 15 ubicadas en un sistema de ejes cartesianos ortogonales Oxy llevadas una a continuación de la otra formando el polígono vectorial, obteniéndose, por tanto, su resultante, como se muestra en la **Figura 16**.

La proyección de los vectores fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{R}$ sobre dichos ejes son las componentes de los mismos según las dos direcciones x e y a las que se han colocado los subíndices correspondientes.

Se puede observar que *la componente en x (vectorial o escalar) del vector resultante es igual a la suma de las componentes en x de las fuerzas dadas*, análogamente para el eje y. Se puede escribir entonces la Ec. (6).

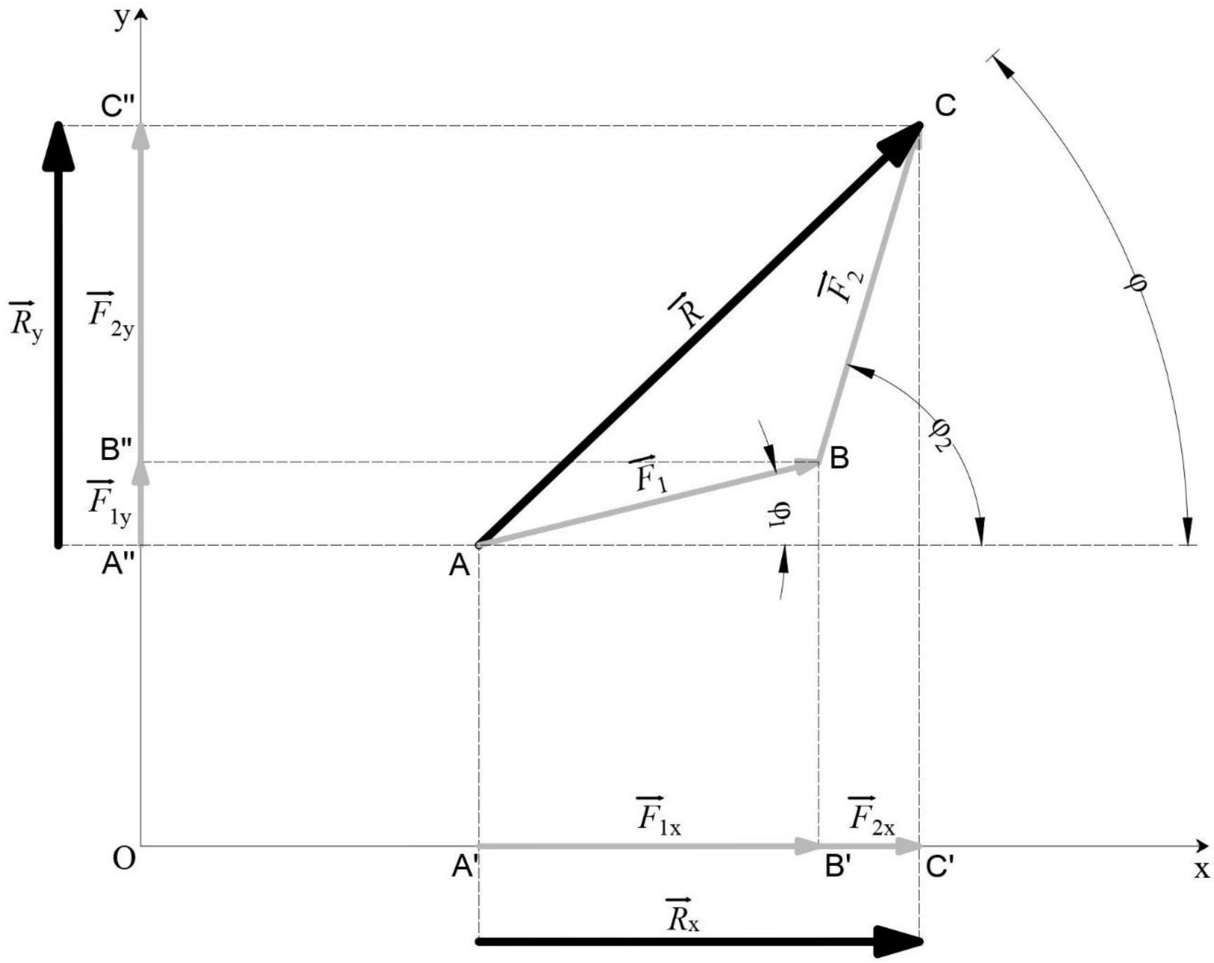


Figura 16. Teorema de la Proyecciones (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

$$
\begin{aligned}
&a) \quad R_x = F_{1x} + F_{2x} \quad [\mathrm{N}] \quad donde \begin{cases} F_{1x} = \left\|\vec{F}_1\right\| \times \cos\varphi_1 & [\mathrm{N}] \\ F_{2x} = \left\|\vec{F}_2\right\| \times \cos\varphi_2 & [\mathrm{N}] \end{cases} \\
&b) \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} \quad [\mathrm{N}] \quad donde \begin{cases} F_{1y} = \left\|\vec{F}_1\right\| \times sen\varphi_1 & [\mathrm{N}] \\ F_{2y} = \left\|\vec{F}_2\right\| \times sen\varphi_2 & [\mathrm{N}] \end{cases} \\
&c) \quad tg\varphi = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x} \quad [°] \\
&d) \quad \left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} \qquad [\mathrm{N}]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Del mismo modo se procede con un número diferente de fuerzas obteniéndose el mismo resultado, de modo tal que la ecuación anterior se puede generalizar para *n* fuerzas de un sistema cualquiera como se muestra en la **Ec. (7)**.

Teorema de las Proyecciones

$$
\begin{aligned}
&a) \quad R_{\mathrm{x}} = \sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{ix}} \quad [\mathrm{N}] \quad donde: \quad F_{\mathrm{ix}} = \left\|\vec{F}_i\right\| \times \cos\varphi_i \quad [\mathrm{N}] \\
&b) \quad R_{\mathrm{y}} = \sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{iy}} \quad [\mathrm{N}] \quad donde: \quad F_{\mathrm{iy}} = \left\|\vec{F}_i\right\| \times sen\varphi_i \quad [\mathrm{N}] \\
&c) \quad tg\varphi = \frac{R_{\mathrm{y}}}{R_{\mathrm{x}}} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{R_{\mathrm{y}}}{R_{\mathrm{x}}} \quad [^\circ] \\
&d) \quad \left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{R_{\mathrm{x}}^{\ 2} + R_{\mathrm{y}}^{\ 2}} \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(7)}
$$

Ahora bien, en Estática se deben identificar y obtener las condiciones para que un cuerpo se encuentre en equilibrio, por lo tanto, si el sistema anterior fuera una situación problemática que se plantea, lo correcto es dibujar la *equilibrante* dado que $\vec{R} \neq 0$ y, por supuesto, expresar esto también analíticamente. Sin embargo, por cuestiones de claridad esto no siempre se exige salvo que la consigna sea indicativa de ello. Seguidamente se presentan dos problemas de aplicación y posteriormente se aborda la construcción del *polígono funicular*.

PROBLEMA RESUELTO 2.2

Objetivo: Aplicar el uso de la escala de fuerzas. Identificar los elementos de una fuerza. Representar y proyectar fuerzas en el sistema cartesiano. Obtener la resultante y equilibrante gráfica y analíticamente (aplicación del polígono vectorial y teorema de las proyecciones).

Consigna: Teniendo en cuenta las fuerzas que se consignan en la **Tabla 1**: a) Represéntelas en un sistema cartesiano. b) Determine la resultante gráfica y analíticamente.

Tabla 1. Sistema de Fuerzas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

	Coordenadas Polares		**Punto de Aplicación**		**Escala de Fuerza**
	$\lVert\vec{F}\rVert\,[\mathrm{kgf}]$	$\varphi[°]$	x	y	$EF\,[\mathrm{kgf/unidad}]$
$\vec{F}_1$	800,0	0	1	1	100
$\vec{F}_2$	1000	30	0	3	100
$\vec{F}_3$	600,0	45	-2	-4	100
$\vec{F}_4$	600,0	60	-6	2	100
$\vec{F}_5$	700,0	120	-6	-4	100
$\vec{F}_6$	900,0	150	-9	6	100
$\vec{F}_7$	1000	210	10	15	100

SOLUCIÓN

a) **Representación en un Sistema Cartesiano**. El primer paso es hallar los vectores representativos de las fuerzas dadas, para ello debe adoptarse una escala de fuerzas, la misma ya se ha establecido en la tabla precedente, luego:

$$\overline{AB} = \frac{800\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 8\ \text{unidad}$$

$$\overline{CD'} = \frac{1000\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 10\ \text{unidad}$$

$$\overline{EF'} = \frac{600\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 6\ \text{unidad}$$

$$\overline{GH'} = \frac{600\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 6\ \text{unidad}$$

$$\overline{IJ'} = \frac{700\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 7\ \text{unidad}$$

$$\overline{KL'} = \frac{900\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 9\ \text{unidad}$$

$$\overline{MN'} = \frac{1000\ \text{kgf}}{100\,\frac{\text{kgf}}{\text{unidad}}} = 10\ \text{unidad}$$

Lo segundo es ubicar los puntos de aplicación de cada fuerza en el plano cartesiano y trazar los segmentos representativos de dichas fuerzas cuyas longitudes se han obtenido en el paso anterior. El resultado es el que se indica en la **Figura 17**.

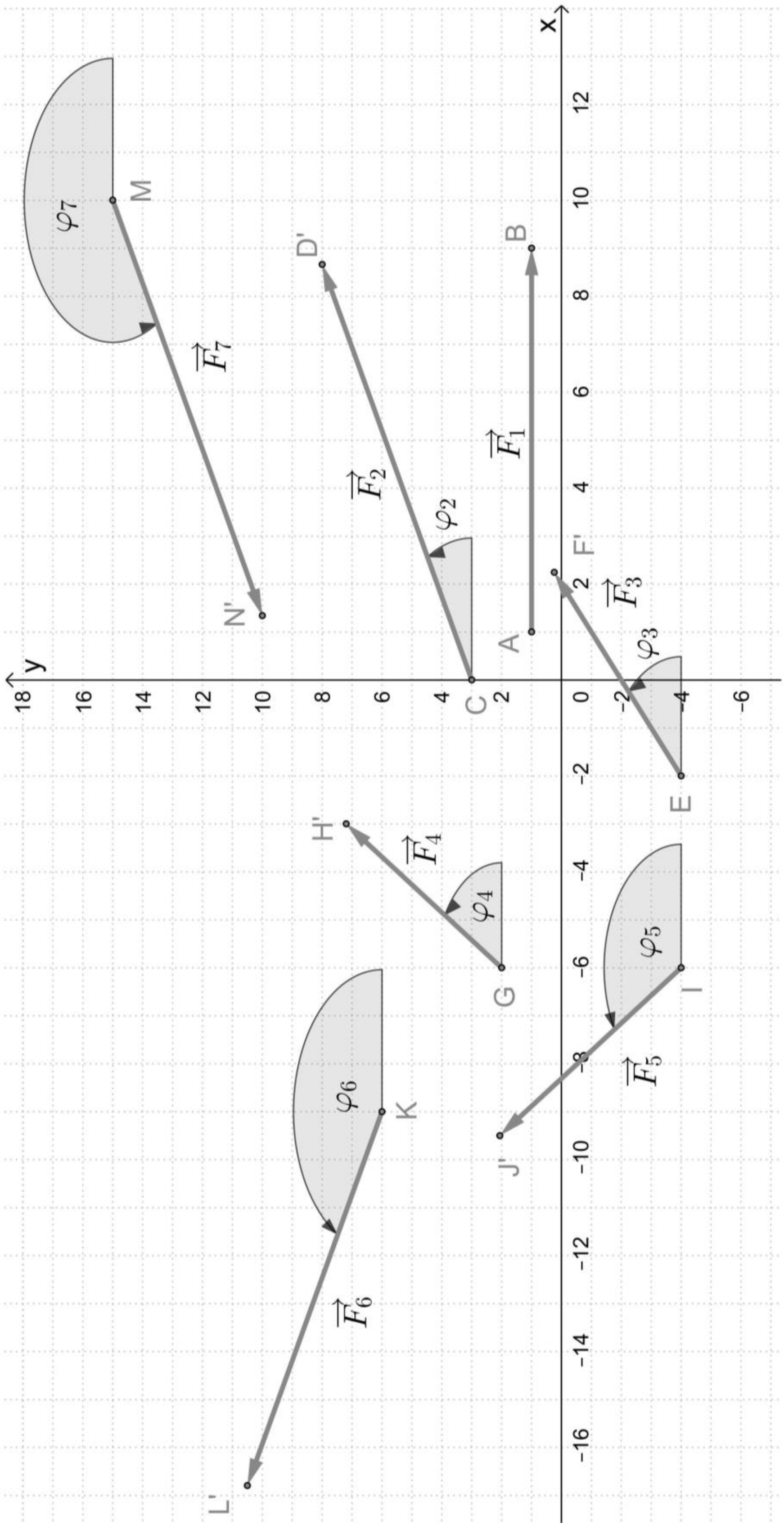


Figura 17. Representación de Fuerzas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

b) **Obtención Gráfica de la Resultante**. Para hallar la resultante se procede primero con la resolución gráfica que consiste en la construcción del polígono vectorial según se ha explicado anteriormente. En efecto, del ítem anterior se tienen las longitudes de los vectores representativos, resta solamente llevar uno a continuación del otro[8] dichos vectores a partir de un punto arbitrario (por ejemplo, A), **Figura 18**.

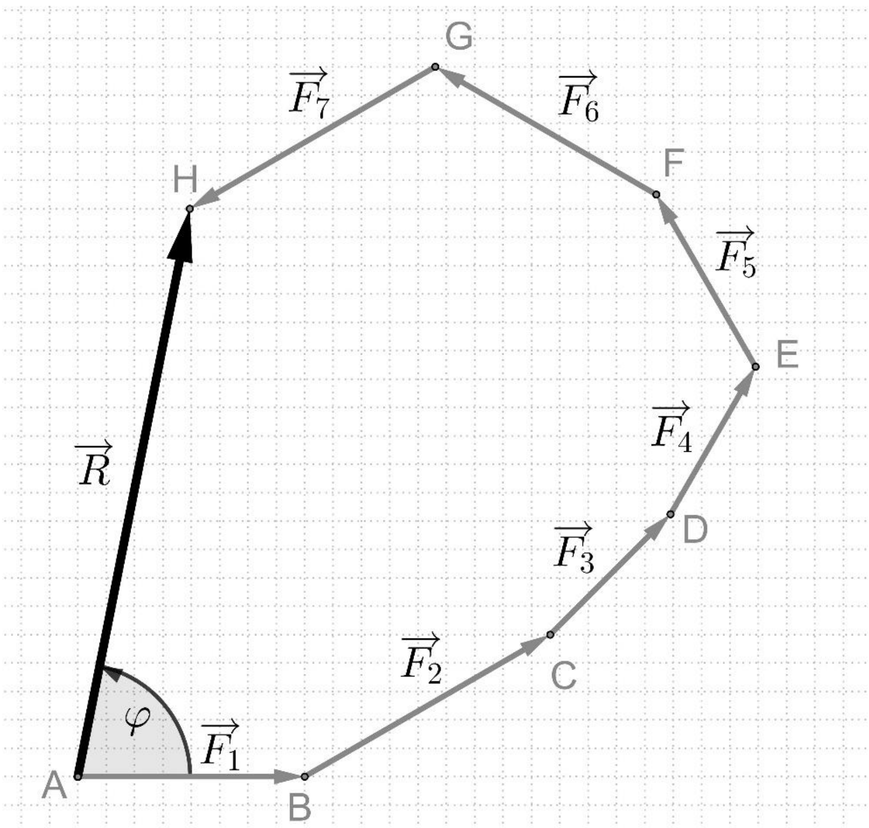


Figura 18. Polígono Vectorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Concluida la construcción de la poligonal, el valor del módulo de la resultante se calcula como: $\left\|\vec{R}\right\| = \overline{\mathsf{AH}} \times EF$, pero aquí se ha obtenido mediante software un valor de $2038,70\ \mathrm{kgf}$. Mientras que el argumento se mide directamente sobre el dibujo. De nuevo, el resultado

[8] Recordar que el orden en que se llevan los vectores es indistinto dado que la suma vectorial goza de la propiedad conmutativa. Sin embargo, por una cuestión de organización suele respetarse el orden correlativo de las fuerzas.

mediante software es $\varphi \cong 78{,}83°$. Por tanto, la respuesta final se puede consignar según las formas indicadas en la ecuación (1), para este caso se opta por la forma polar:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (2039\ \text{kgf},\ 78{,}9°)}$

Note que el módulo se ha redondeado a cuatro cifras significativas y el argumento a 3. Ello está acorde con las cifras significativas con las que están presentados los datos (Ver Anexo 10.3).

Obtención Analítica de la Resultante. Se aplica el teorema de las proyecciones como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}
F_{1x} = 800\ \text{kgf} \times \cos 0° = 800{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{2x} = 1000\ \text{kgf} \times \cos 30° = 866{,}0254\ \text{kgf} \\
F_{3x} = 600\ \text{kgf} \times \cos 45° = 424{,}2641\ \text{kgf} \\
F_{4x} = 600\ \text{kgf} \times \cos 60° = 300{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{5x} = 700\ \text{kgf} \times \cos 120° = 350{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{6x} = 900\ \text{kgf} \times \cos 150° = 779{,}4229\ \text{kgf} \\
F_{7x} = 1000\ \text{kgf} \times sen 210° = 866{,}0254\ \text{kgf}
\end{array}\right\} \Rightarrow R_x = \sum_{i=1}^{7} F_{ix} = 394{,}8412\ \text{kgf}$$

$$\left.\begin{array}{l}
F_{1y} = 800\ \text{kgf} \times sen 0° = 0{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{2y} = 1000\ \text{kgf} \times sen 30° = 500{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{3y} = 600\ \text{kgf} \times sen 45° = 424{,}2641\ \text{kgf} \\
F_{4y} = 600\ \text{kgf} \times sen 60° = 519{,}6152\ \text{kgf} \\
F_{5y} = 700\ \text{kgf} \times sen 120° = 606{,}2178\ \text{kgf} \\
F_{6y} = 900\ \text{kgf} \times sen 150° = 450{,}0000\ \text{kgf} \\
F_{7y} = 1000\ \text{kgf} \times sen 210° = 500{,}0000\ \text{kgf}
\end{array}\right\} \Rightarrow R_y = \sum_{i=1}^{7} F_{iy} = 2.000{,}0971\ \text{kgf}$$

$$\varphi = tg^{-1} \frac{2.000{,}0971\ \text{kgf}}{394{,}8412\ \text{kgf}} = 78{,}8328°$$

$$\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{\left(394{,}8412\ \text{kgf}\right)^2 + \left(2.000{,}0971\ \text{kgf}\right)^2} = 2038{,}6976\ \text{kgf}$$

Se observa que, la respuesta, redondeada también a cifras significativas acordes, coincide con la hallada gráficamente, y, además, como ahora que se conocen las componentes de la resultante es práctico expresar el resultado también en las otras formas (haciéndose esto por única vez para mostrar las variantes).

Respuesta

$$\boxed{\vec{R} = (2039 \text{ kgf},\ 78{,}9°)}$$

$$\boxed{\vec{R} = (394{,}8,\ 2.000) \text{ kgf}}$$

$$\boxed{\vec{R} = (394{,}8 \text{ kgf})\breve{i} +\ (2.000 \text{ kgf})\ \breve{j}}$$

$$\boxed{\vec{R} = 2039 \text{ kgf} \times \left(\cos 78{,}9° + \sin 78{,}9°\right)}$$

Observaciones

- *Convención de signos*. Notar que los ángulos se miden desde el semieje positivo de las x y en sentido antihorario siendo esta la convención a utilizar.
- En la *forma canónica*, cada componente se coloca con su signo, esto está asociado a la inclinación de la resultante y su consecuente ubicación en el primer cuadrante. Este detalle es importante cuando la resultante se ubica en el segundo o tercer cuadrante como se analiza en el problema siguiente.

PROBLEMA RESUELTO 2.3

Objetivo: Calcular analíticamente el argumento del vector resultante según su posición relativa con respecto a un sistema de ejes cartesianos. Conceptualizar los resultados arrojados por la calculadora.

Consigna: Dados dos polígonos vectoriales, determinar analíticamente; $a)$ El argumento del vector resultante del polígono A (Ver **Figura 19**); y, $b)$ El argumento del vector resultante del polígono B (Ver **Figura 21**).

SOLUCIÓN

$a)$ **Polígono Vectorial A**.

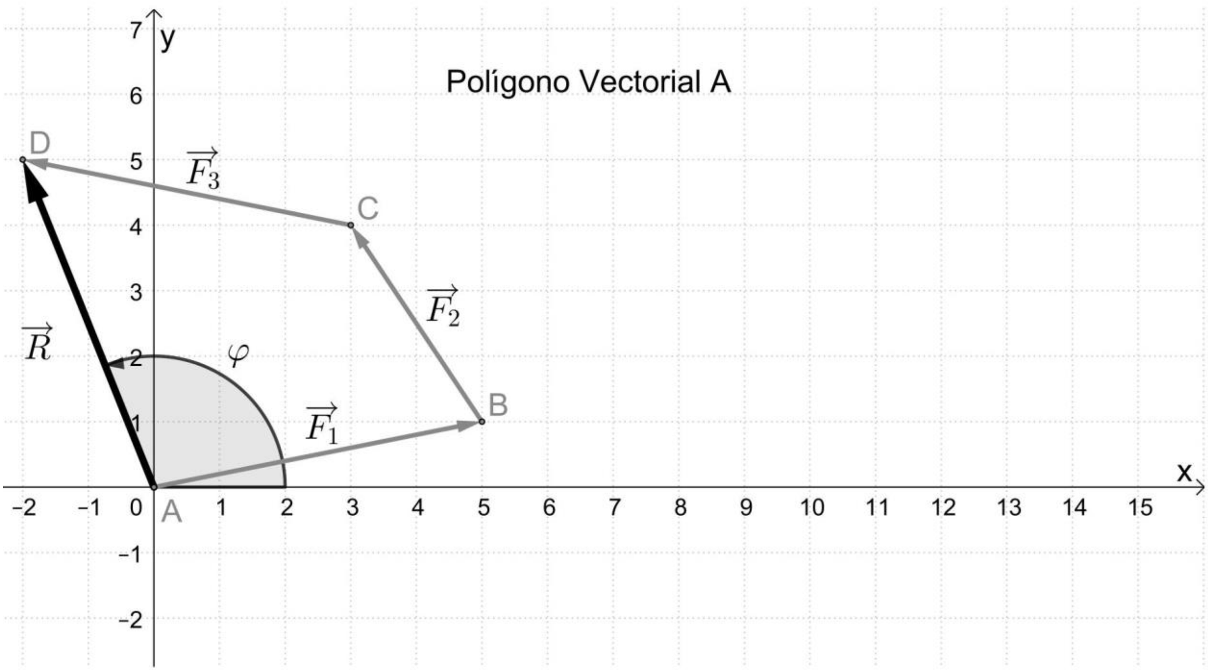


Figura 19. Polígono Vectorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como se observa, la resultante se ubica en el segundo cuadrante. Una medición gráfica arroja que $\varphi \cong 111,8°$. Si ahora se calcula este ángulo analíticamente:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{-2}{5} \cong -21,8014°$$

Se observa que $-21,8014° \neq 111,8°$. Es decir, la calculadora da un valor de ángulo en el cuarto cuadrante como se ve en la **Figura 20**. A este ángulo lo designamos con α (letra griega *Alpha*).

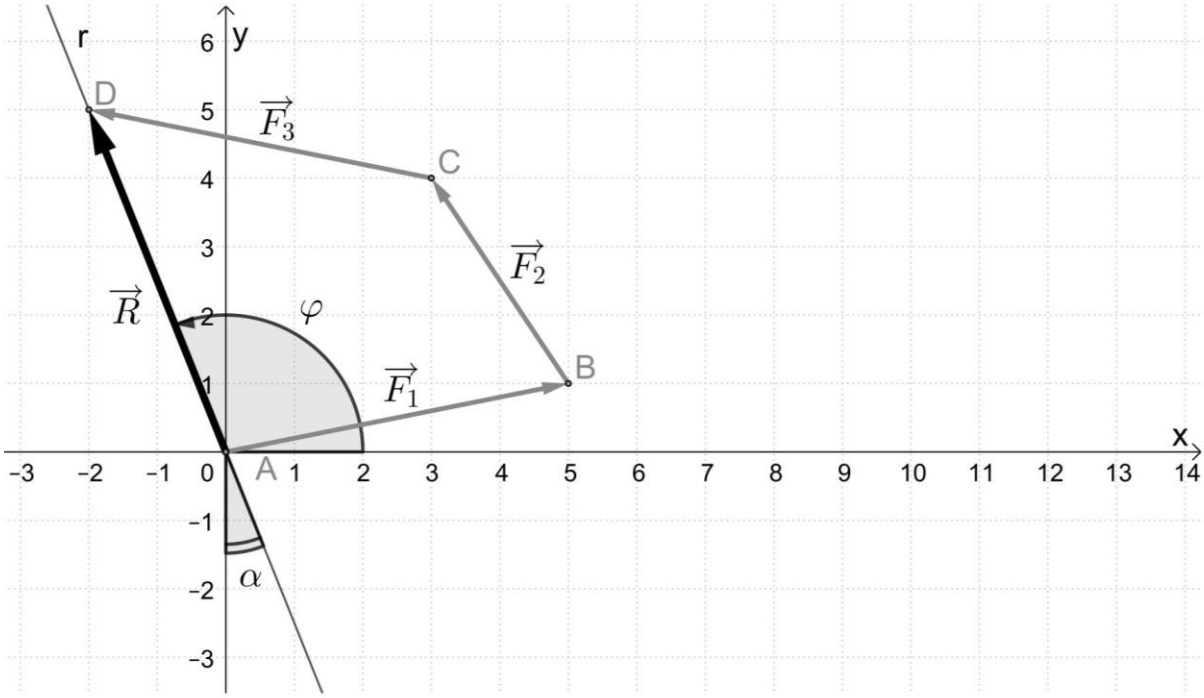


Figura 20. Argumento de la Resultante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por lo tanto, se necesita una operación intermedia para calcular el argumento correcto; así:

$$\varphi = 90° + \alpha$$
$$\varphi \cong 90° + 21{,}8014°$$
$$\varphi \cong 111{,}8014°$$

En este caso no se cuenta con las cifras significativas de los datos de las fuerzas componentes, con lo cual se opta por expresar la respuesta con tres cifras significativas (Ver Anexo 10.3).

Respuesta $\boxed{\varphi \cong 112°}$

b) **Polígono Vectorial B**.

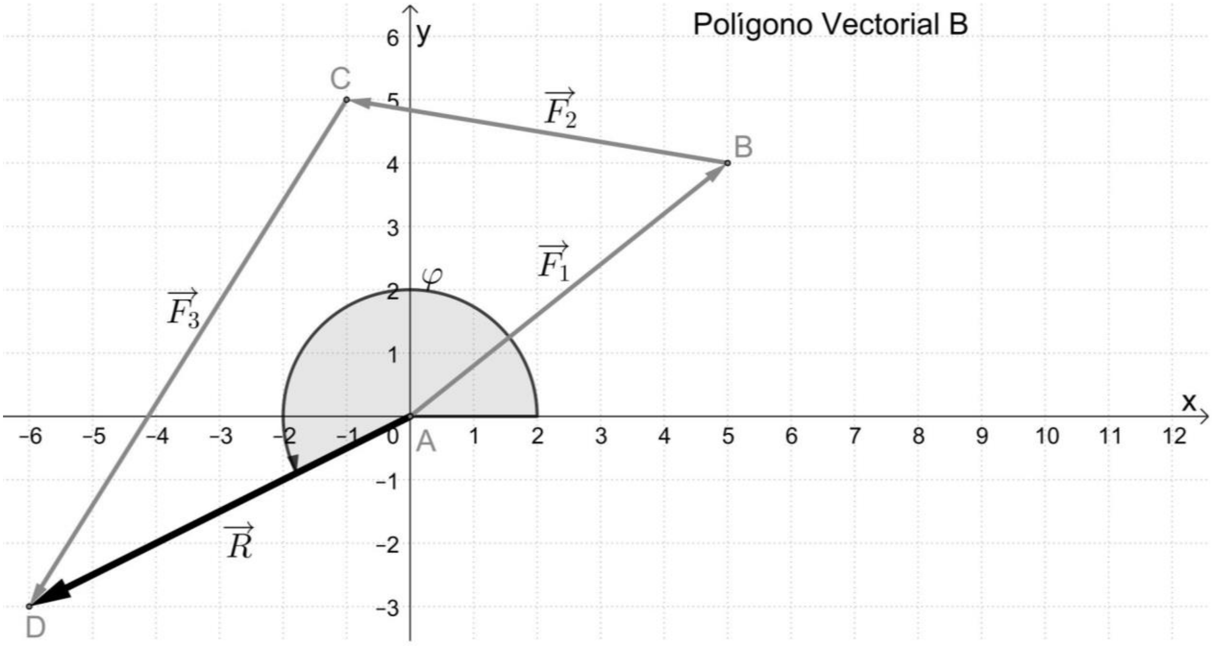


Figura 21. Polígono Vectorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como se observa, la resultante se ubica en el cuarto cuadrante. Una medición gráfica arroja que $\varphi \cong 206,6°$. Si ahora se calcula este ángulo analíticamente:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{-3}{-6} = 26,5650°$$

Se observa que $26,5650° \neq 206,6°$. Es decir, la calculadora da un valor de ángulo en el primer cuadrante como se ve en la **Figura 22**. A este ángulo lo designamos con α.

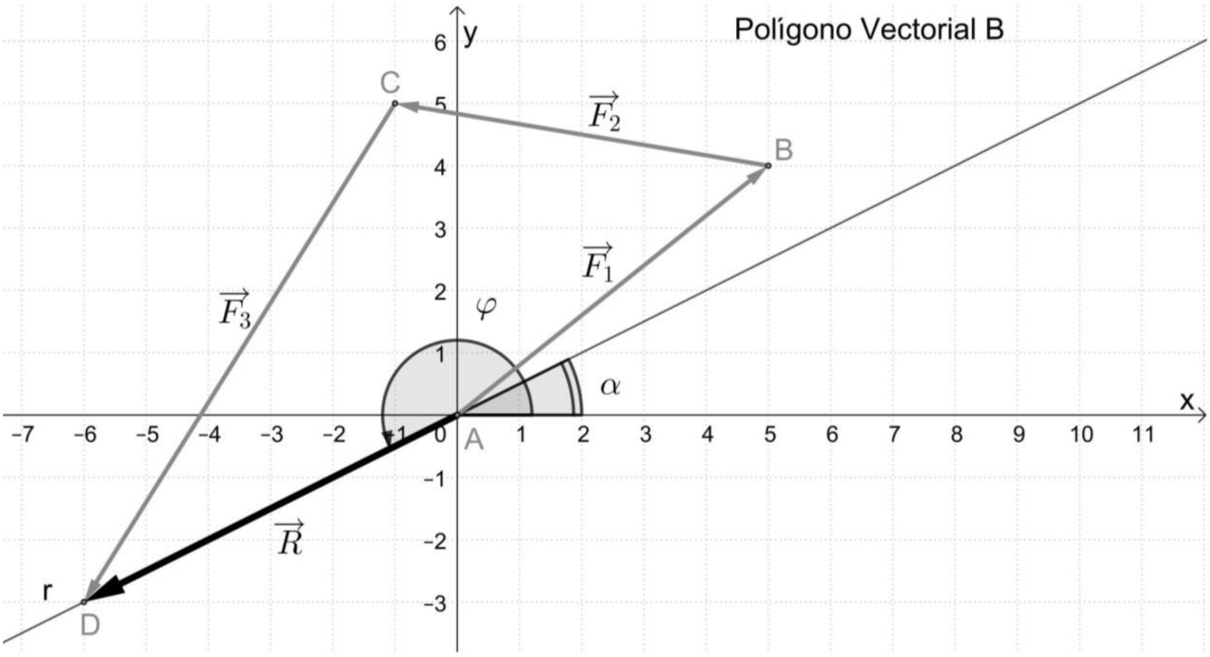


Figura 22. Argumento de la Resultante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por lo tanto, se necesita una operación intermedia para calcular el argumento correcto; así:

$$\varphi = \alpha + 180°$$
$$\varphi \cong 26,5650° + 180°$$
$$\varphi \cong 206,5650°$$

En este caso no se cuenta con las cifras significativas de los datos de las fuerzas componentes, con lo cual se opta por expresar la respuesta con tres cifras significativas (Ver Anexo 10.3).

Respuesta $\boxed{\varphi \cong 207°}$

Observaciones

- El $arctg\alpha = tg^{-1}\alpha$, vale decir, la inversa de la función tangente, devuelve valores de ángulo solamente en el primer y cuarto cuadrante ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$) esto explica los cálculos adicionales vistos.
- Por una cuestión pedagógica se ha definido que el punto de aplicación de la primera fuerza del polígono vectorial coincida con el origen de coordenadas, pero esto no

necesariamente debe ser así[9]. De hecho, si en la construcción de la poligonal se hubiera adoptado un orden distinto para las fuerzas, la resultante ya no estaría ubicada en el origen de coordenadas, sin embargo, el análisis visto seguiría siendo válido.

---

[9] Propiedad conmutativa de la suma de vectores.

3ro. Polígono Funicular

Se llama polígono funicular a la figura que adopta un hilo en equilibrio fijado por sus extremos y sometido a diversas fuerzas en puntos intermedios (GÁLVEZ *et. al*, 1998). El polígono funicular tiene varias aplicaciones importantes, algunas de ellas exceden este curso. Pero; la *composición gráfica de fuerzas no concurrentes*, la *determinación gráfica de reacciones de vínculo* y el *cálculo gráfico del baricentro de figuras planas* son algunas de las aplicaciones de interés abordadas en el curso.

Para iniciar la construcción del polígono funicular se consideran cuatro fuerzas no concurrentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.y $\vec{F}_4$ actuando en sus rectas de acción representadas en la **Figura 23**. Se ha de definir en primer lugar una escala de fuerzas, hallando luego los vectores representativos de las fuerzas dadas. Seguidamente se traza el polígono de las fuerzas y se halla la resultante del sistema.

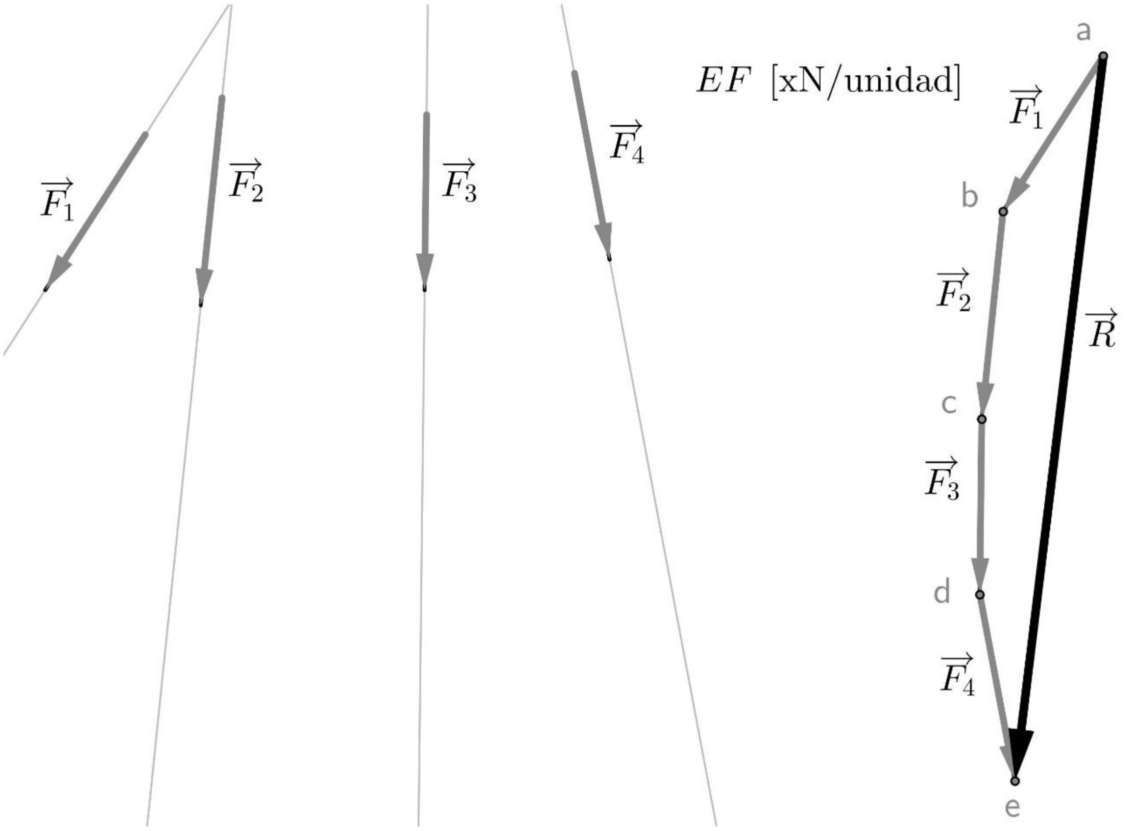


Figura 23. Sistema de Fuerzas No Concurrentes (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Armada la poligonal de fuerzas, el paso siguiente es definir un *Polo O* en cualquier punto del plano ubicado a una *Distancia Polar h* más conveniente, *h* es la distancia perpendicular a la recta de acción de $\vec{R}$ (DI PIETRO, 1968). Seguido se trazan los *rayos polares* (también llamados *radios polares*) i, ii, iii, iv y v uniendo el origen y el extremo de cada fuerza con el polo, esta construcción se denomina *Polígono Polar*, **Figura 24**.

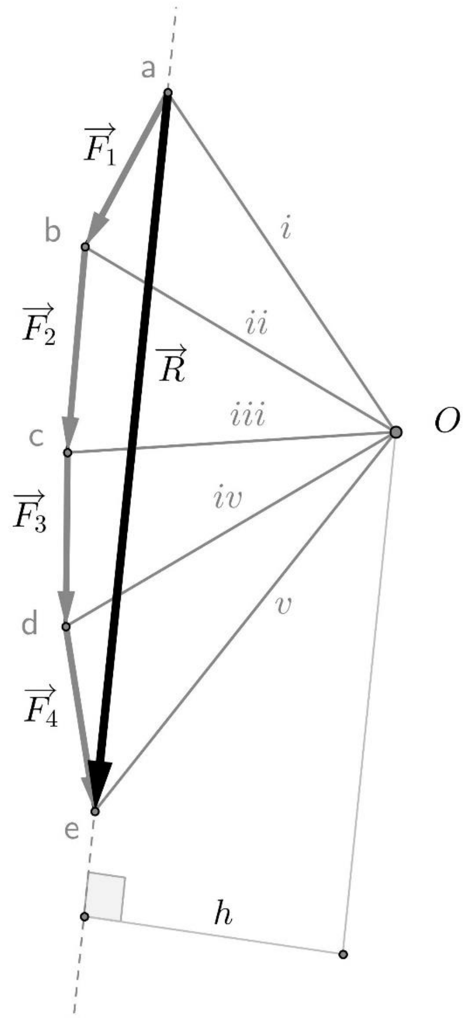


Figura 24. Construcción del Polígono Polar (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

A partir de un punto A cualquiera se traza una paralela al rayo i que corta a $\vec{F_1}$ en A_1, **Figura 25**. Por A_1 se traza una paralela al rayo ii que corta a $\vec{F_2}$ en A_2. Por A_2 una paralela al rayo iii que corta a $\vec{F_3}$ en A_3. Por A_3 una paralela a iv que corta a $\vec{F_4}$ en A_4, y, finalmente, por A_4 una paralela al rayo v.

En la intersección de las extensiones del primer y último rayo se obtiene el punto L que es un punto de la recta de acción de la resultante. Solo resta trazar una paralela a la recta de acción de la resultante por dicho punto y representar luego sobre esta recta un vector equipolente de $\vec{R}$.

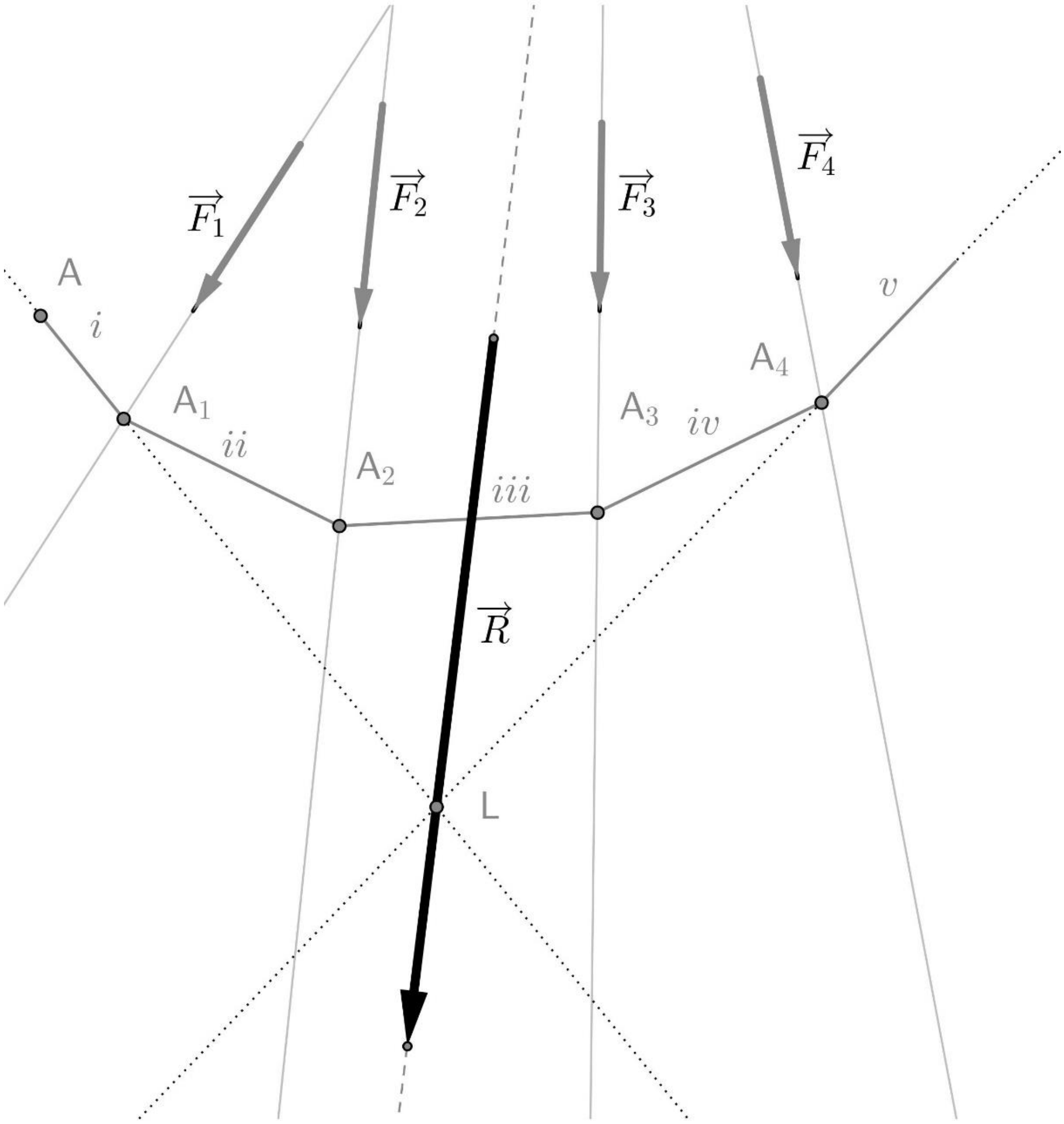


Figura 25. Construcción del Polígono Funicular (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En todo el conjunto de operaciones efectuadas hasta aquí se presentan **tres polígonos**, a saber: **1-Poligono Vectorial**: el abcdea que ya se ha analizado; **2-Poligono Polar**: el constituido por los rayos polares i a v siendo O el polo elegido libremente. Los rayos polares se numeran sucesivamente siguiendo el orden de presentación de las fuerzas en el vectorial. **3-Poligono**

Funicular: es el formado por las paralelas a los rayos polares y que intersecan a las rectas de acción de cada fuerza del sistema.

Se deben mencionar algunas *connotaciones* más, también importantes, en este tema: a) Notar que el procedimiento de construcción del polígono funicular permite ubicar un punto de la recta de acción de la resultante en el sistema de fuerzas, en otras palabras, permite emplazar la resultante en el sistema; b) La ubicación del punto de la recta de acción es independiente del polo O y del punto A elegidos, por lo tanto; c) El polo O y el punto A (punto de inicio del funicular) se pueden definir arbitrariamente en cualquier punto del plano, d) Por el principio de transmisibilidad se puede omitir el punto de aplicación de una fuerza, por tanto, para construir el polígono funicular basta con que los rayos polares intersequen a las rectas de acción de las fuerzas; y, e) A nivel práctico, otros aspectos de interés se ilustran en la Sección 3.3 mediante problemas resueltos; f) Se sugiere al lector que complemente este desarrollo del polígono funicular con la lectura comprensiva del RAFFO (2007).

Hasta aquí se ha dado solución a la obtención de la resultante (: composición) tanto gráfica como analíticamente, en la sección siguiente se dan las soluciones para el proceso inverso: la descomposición de fuerzas.

2.2.4. Descomposición de Fuerzas en sus Componentes

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula.

A estas fuerzas se les llama componentes de la fuerza original $\vec{F}$, y al proceso de sustituirlas en lugar de $\vec{F}$ se le llama descomposición de la fuerza $\vec{F}$ en sus componentes. En este sentido, para cada fuerza $\vec{F}$ existe un número infinito de conjuntos de componentes.

2.2.4.1. En Dos Direcciones Concurrentes con Ella

Para descomponer una fuerza en dos direcciones concurrentes con ella se tienen dos procedimientos, uno gráfico y uno analítico, a saber:

1ro. Procedimiento Gráfico: Dada la fuerza $\vec{F}$ (Ver **Figura 26**), se fija una escala de fuerzas, se halla el vector $\overrightarrow{AB}$ representativo de la fuerza dada y por cada uno de sus extremos se trazan paralelas a las direcciones consideradas. El punto C de intersección da la solución buscada, tal como se indica en la **Figura 27**.

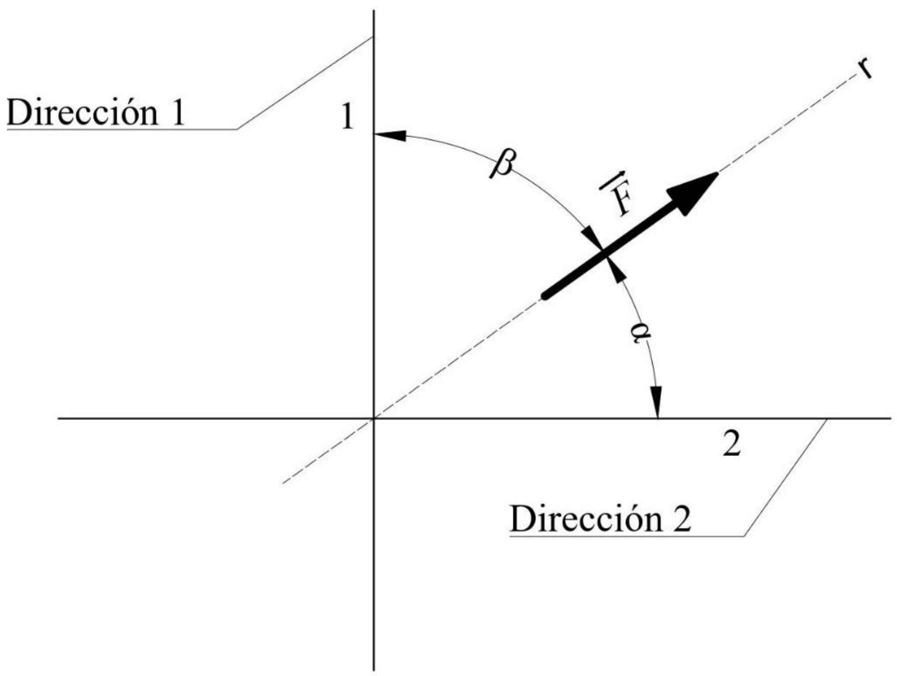


Figura 26. Descomposición de una Fuerza en Dos Direcciones Concurrentes con Ella (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

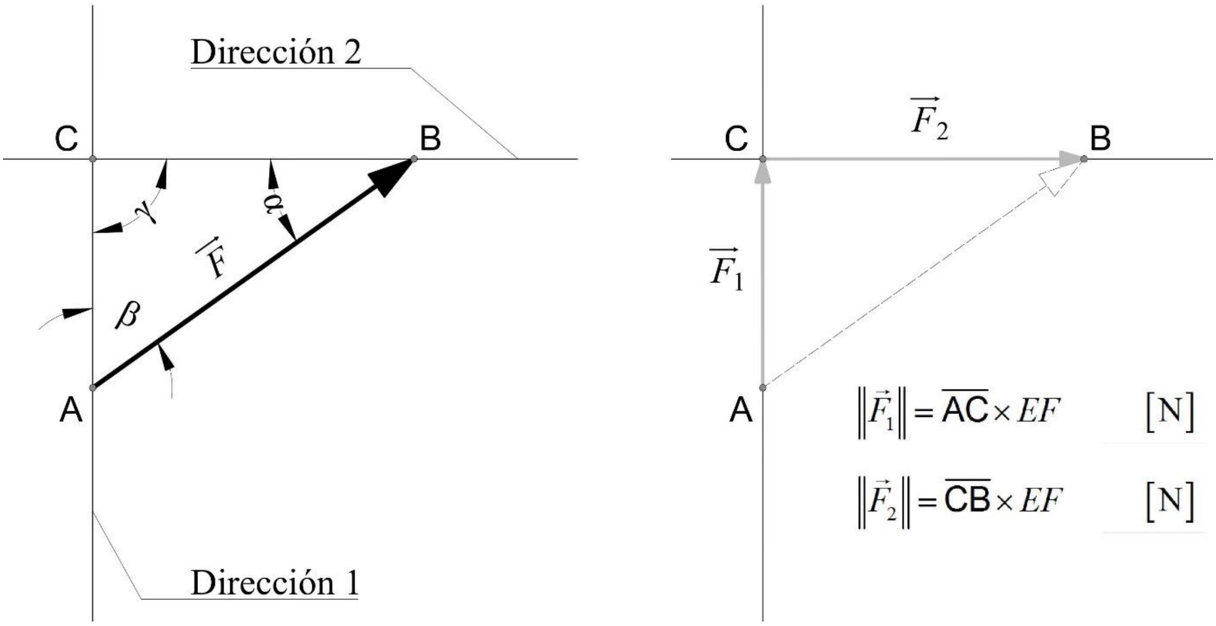


Figura 27. Descomposición de una Fuerza en Dos Direcciones Concurrentes con Ella (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En la figura anterior se explicita la obtención del módulo de las componentes. Para el caso del argumento de las mismas se obtienen por inspección de la gráfica.

Cabe aclarar, además, que en la Figura 27 (*der.*) el polígono vectorial que forman las componentes debe ser abierto dado que lo que se quiere es reemplazar la fuerza $\vec{F}$ por $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ manteniendo el efecto. Sin embargo, en algunas aplicaciones se busca reemplazar la fuerza $\vec{F}$ pero buscando el equilibrio, en este caso la *poligonal* debe ser *cerrada* tal como se muestra en la **Figura 28**.

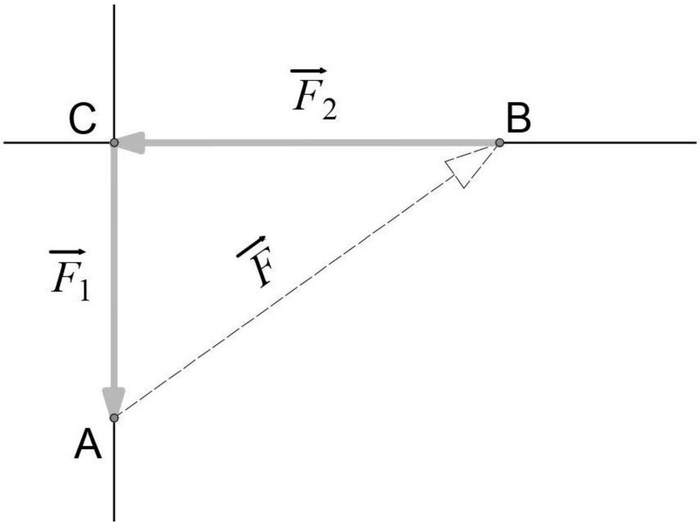


Figura 28. Descomposición de una Fuerza Buscando el Equilibrio (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Cuando la poligonal es cerrada el extremo del último vector coincide con el origen del primero. En otras palabras, se debe terminar en donde se inicia.

2do. Procedimiento Analítico: El procedimiento analítico es esencialmente la aplicación de propiedades geométricas y leyes trigonométricas, **Ec. (8)**.

$$\begin{aligned}
&a) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \text{Suma de ángulos interiores de un triángulo} \\
&b) \quad \frac{\vec{F}_1}{sen\alpha} = \frac{\vec{F}_2}{sen\beta} = \frac{\vec{F}}{sen\gamma} \quad \text{Teorema del Seno} \\
&c) \quad \vec{F}_1 = \frac{\vec{F}}{sen\gamma} \times sen\alpha \quad [\mathrm{N}] \\
&d) \quad \vec{F}_2 = \frac{\vec{F}}{sen\gamma} \times sen\beta \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned} \tag{8}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.4

Objetivo: Aplicar los procedimientos gráfico y analítico para la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes con ella.

Consigna: Descomponga la fuerza horizontal $F = 600\,\text{lbf}$ que se muestra en la **Figura 29** en componentes que actúan a lo largo de los ejes *u* y *v*, y determine las magnitudes de estas componentes.

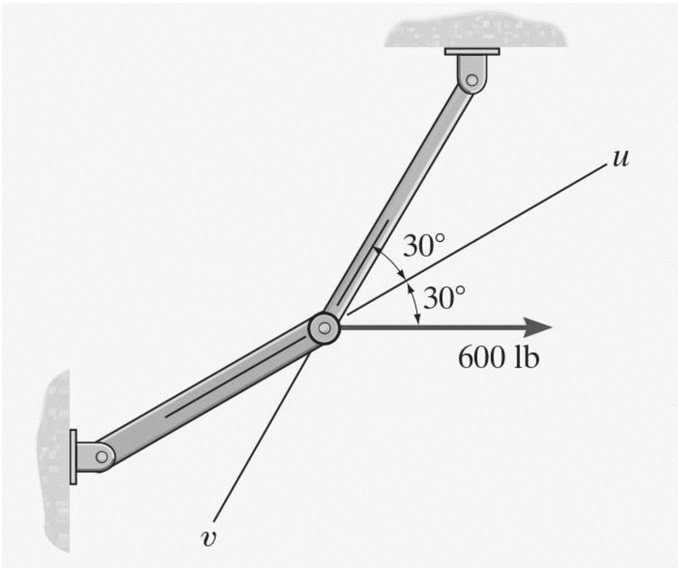


Figura 29. Descomposición de Fuerzas. [(1)] Este problema corresponde al ejemplo 2.2 del autor citado (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

SOLUCIÓN

1ro. Método Gráfico: En primer lugar, se debe definir una escala de fuerzas y trazar el vector representativo de $\vec{F}$ como se muestra en la **Figura 30**.

Luego se traza por el extremo A del vector una paralela a *u* y por extremo B una paralela a *v*. En este caso las dos fuerzas $\vec{F}_u$ y $\vec{F}_v$ deben generar el mismo efecto que $\vec{F}$ por tanto, la poligonal deber ser abierta, esta condición define el sentido de las componentes.

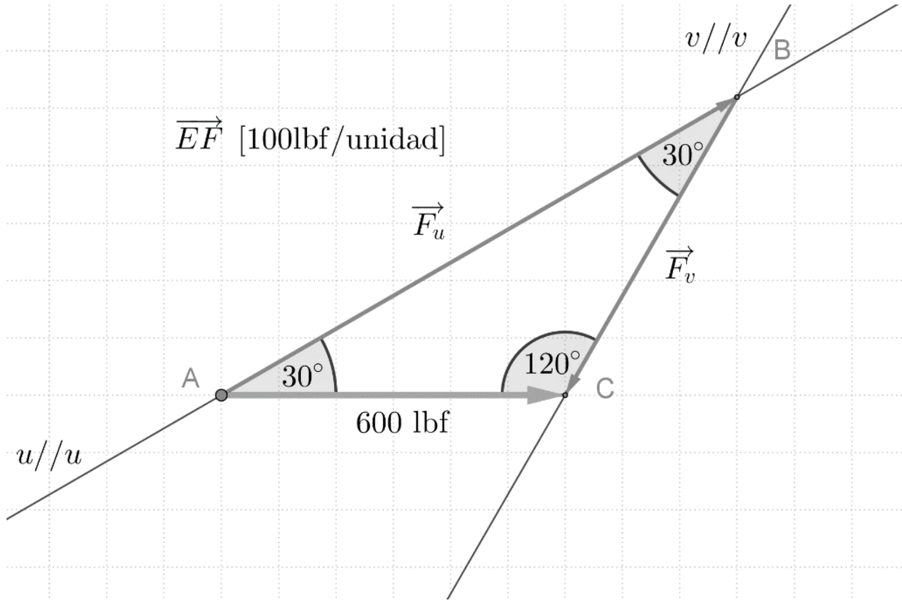


Figura 30. Descomposición de Fuerzas: Diagrama de Cuerpo Libre (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Las longitudes $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ medidos en la escala de fuerzas dan el módulo de las componentes. Su argumento se obtiene por medición directa o inspección gráfica. En efecto:

$$F_u = \overline{\mathrm{AB}} \times EF = 10,4\ \text{unidad} \times \frac{100\text{lbf}}{\text{unidad}} \cong 1040\ \text{lbf}$$

$$F_v = \overline{\mathrm{BC}} \times EF = 6\ \text{unidad} \times \frac{100\text{lbf}}{\text{unidad}} \cong 600\ \text{lbf}$$

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_u = (1040\ \text{lbf},\ 30{,}0°) \\ \vec{F}_v = (600{,}0\ \text{lbf},\ 240°) \end{array}}$

2do. Método Analítico: Con base en la figura precedente, y, aplicando el Teorema del Seno:

$$F_u = \frac{600\ \text{lbf}}{sen30°} \times sen120° = 1039\ \text{lbf}$$

$$F_v = \frac{600\ \text{lbf}}{sen30°} \times sen30° = 600\ \text{lbf}$$

De nuevo, a la respuesta correcta es indicando módulo y ángulo. Para que el valor de las componentes sea correcto (en cuanto a las cifras significativas) se debe considerar que el dato de la fuerza dada tiene 4 cifras significativas.

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l}\vec{F}_u = (1039 \text{ lbf}, 30{,}0°) \\ \vec{F}_v = (600{,}0 \text{ lbf}, 240°)\end{array}}$

Observaciones

- El resultado para $\vec{F}_u$ muestra que en ocasiones una componente puede tener una mayor magnitud que la resultante.
- La diferencia entre los resultados gráfico y analítico para $\vec{F}_u$ es debido al error (menor exactitud) en la medición del segmento $\overline{AB}$, error que por supuesto depende de la persona que realiza la medición y del instrumento que utilice para hacerlo (regla en gral.). Pero el análisis de este tema le corresponde a la Metrología y en esta Cátedra basta con que ambos resultados sean coherentemente próximos.

2.2.4.2. En Dos Direcciones Paralelas

El tema que se desarrolla en esta sección puede ser comprendido sin mayor inconveniente cuando se analiza el *cálculo gráfico de reacciones de vínculo* en la Sección 5.5[10]. Sin embargo, es conveniente exponerlo aquí ya que su simpleza permite comprender luego con mayor facilidad su aplicación a un sistema más complejo (*proceso de aprendizaje inductivo*).

La descomposición de una fuerza en dos direcciones paralelas a su recta de acción puede presentar dos variantes simples que se han de designar como *primer y segundo caso* y en los cuales están implícitos otros conceptos como la construcción del *polígono polar* y del *polígono funicular*.

Primer Caso: *La fuerza dada se encuentra entre las dos direcciones.*

Se considera una fuerza $\vec{F}$ ubicada a una distancia d_1 de la dirección 1, y, a una distancia d_2 de la dirección 2, como se muestra en la **Figura 31** (*izq.*). En la misma d es la distancia entre ambas direcciones y r la recta de acción de $\vec{F}$.

1ro. Solución Gráfica. Para la solución gráfica se define una escala de fuerzas, se halla el vector $\overrightarrow{AB}$ representativo de la fuerza dada y se construye el polígono de las fuerzas. El siguiente paso es construir el *polígono polar*, para ello se define un punto arbitrario del plano denominado *polo* designado con la letra O y a partir de este punto se trazan los radios polares *I* y *II*, todo ello se indica en la **Figura 31** (*der.*).

[10] En dicha sección se generaliza el método gráfico.

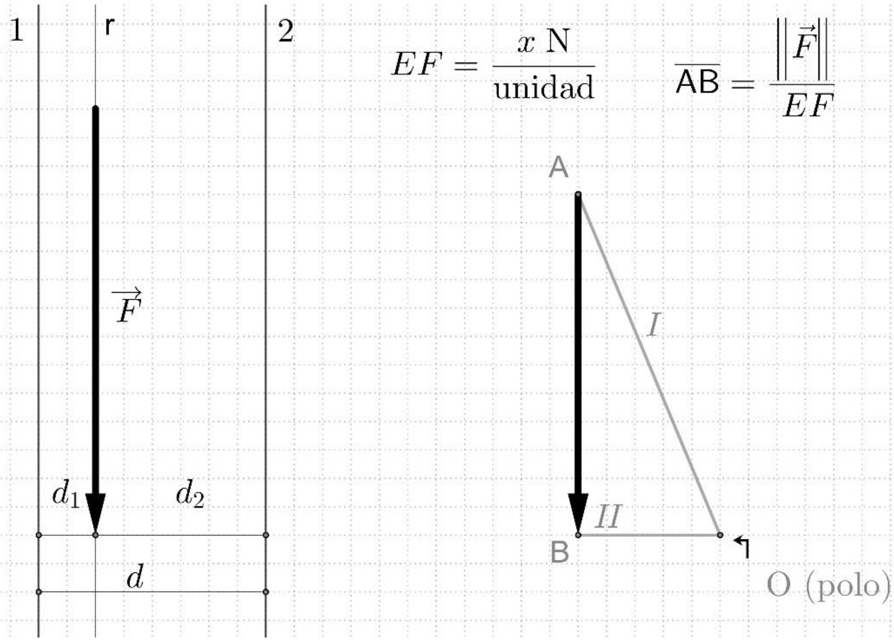


Figura 31. Primer Caso: Esquema Posicional (*izq.*) y Polígono Vectorial y Polar (*der.*) (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Seguidamente, se debe construir el *polígono funicular*, para ello, a partir de un punto cualquiera "a" de la recta de acción de $\vec{F}$ se traza una paralela al radio polar *I* que corta a la dirección 1 en a_1 y una paralela al radio polar *II* que corta a la dirección 2 en a_2, **Figura 32** (*izq.*).

Uniendo a_1 con a_2 se obtiene el segmento denominado *Línea de Cierre* (*LC*). Trazando una paralela a la *LC* por el polo O, **Figura 32** (*der.*), se obtiene el punto de intersección C que define los segmentos $\overline{\mathsf{AC}}$ y $\overline{\mathsf{CB}}$ que leídos en la escala de fuerza determinan las magnitudes de las componentes[11] $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, **Ec. 9**.

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \left\|\vec{F}_1\right\| = \overline{\mathsf{AC}} \times EF \quad [\mathrm{N}] \\
b)\quad & \left\|\vec{F}_2\right\| = \overline{\mathsf{CB}} \times EF \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(9)}
$$

[11] Por una cuestión de claridad se han representado las componentes fuera de su recta de acción.

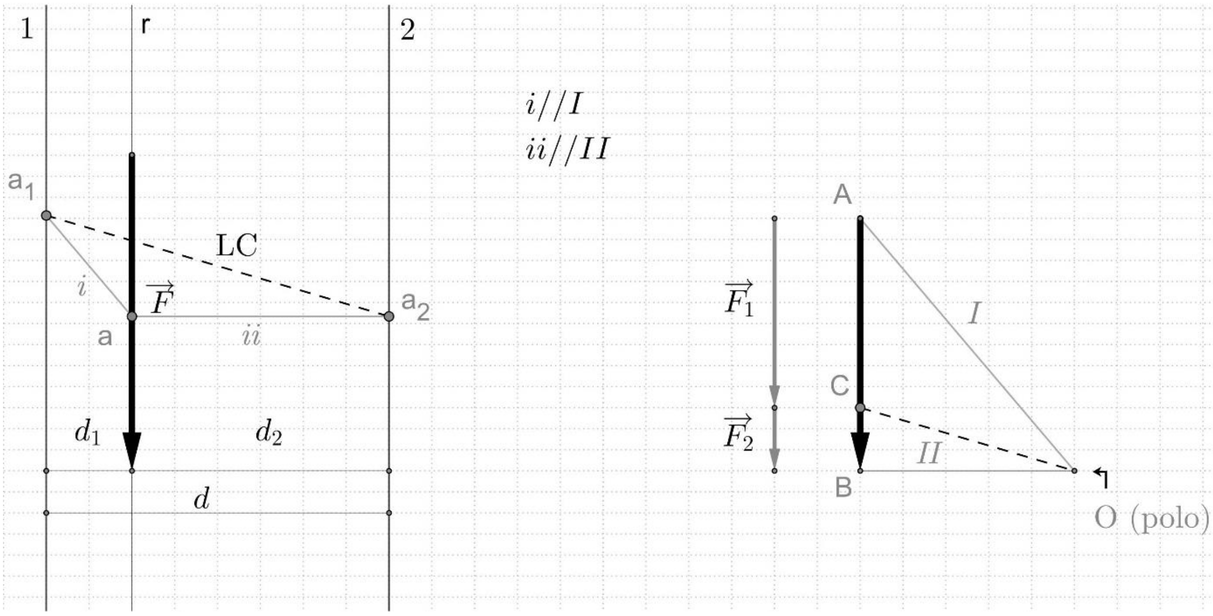


Figura 32. Primer Caso: Polígono Funicular (*izq.*) y Determinación de las Componentes (*der.*) (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por lo tanto, una vez determinadas las componentes un posible esquema posicional del sistema es el que se muestra en la **Figura 33**. La dirección y el sentido de las componentes coinciden con la dirección y sentido de la fuerza dada.

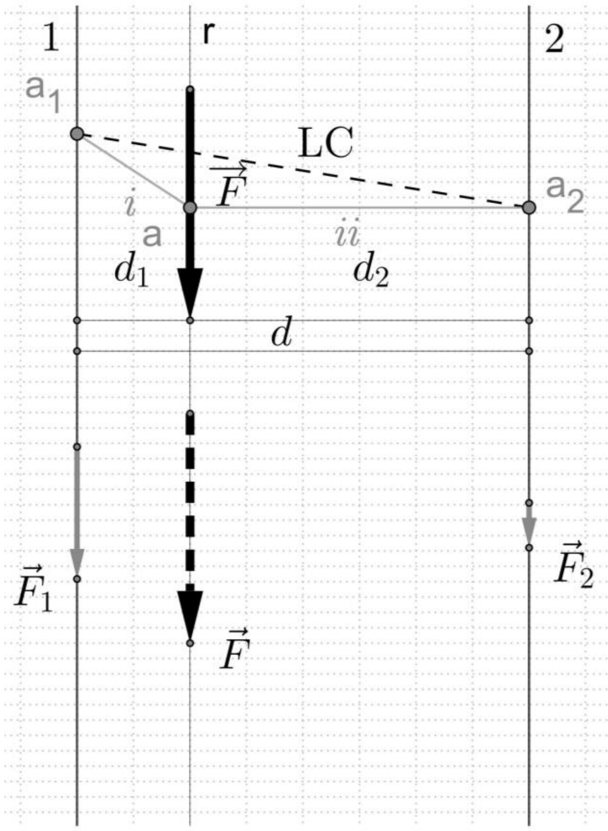


Figura 33. Componentes de la Fuerza Dada (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2do. Solución Analítica. Aprovechando la condición que el efecto de rotación que provoca la resultante respecto de un punto del plano es equivalente al efecto que provocan sus componentes respecto del mismo punto (Teorema de Varignon, Sección 2.2.5.5), la solución analítica se plantea con momentos en puntos estratégicos como se muestra en la **Ec. (10)**.

Como convención se considera que los *momentos* son *positivos* cuando provocan giros en el sentido de las agujas del reloj; siendo este el criterio que se ha de adoptar en este curso (Ver Sección 2.2.5).

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{a_2}: \quad \left\|\vec{F}\right\| \times d_2 = \left\|\vec{F}_1\right\| \times d + \left\|\vec{F}_2\right\| \times 0 \\
&b) \quad \left\|\vec{F}_1\right\| = \frac{\left\|\vec{F}\right\| \times d_2}{d} \quad [\mathrm{N}] \\
&c) \quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{a_1}: \quad \left\|\vec{F}\right\| \times d_1 = \left\|\vec{F}_1\right\| \times 0 + \left\|\vec{F}_2\right\| \times d \\
&d) \quad \left\|\vec{F}_2\right\| = \frac{\left\|\vec{F}\right\| \times d_1}{d} \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10)}
$$

Esta manera de calcular el momento de una fuerza tiene una *formulación escalar* y es la que el lector ha aprendido en su primer curso de Física. Sin embargo, hay que remarcar que el momento de una fuerza es una magnitud vectorial que se analiza en detalle en la Sección 2.2.5. Además, independientemente de los posibles valores que pueden adoptar los *brazos de palanca* d_1 y d_2, debe verificarse en todo momento lo que se indica en la **Ec. (11)**.

$$
\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad \textbf{(11)}
$$

Segundo Caso: *La fuerza dada no se encuentra entre las dos direcciones*.

1ro. Solución Gráfica. Para este caso se inicia el análisis directamente con la presentación del esquema posicional y los polígonos vectorial, polar y funicular, **Figura 34**, dado que el procedimiento de construcción de estos es el mismo que el explicado para el caso anterior. Observe que la $\vec{F}$ no se encuentra entre las direcciones 1 y 2, entonces, determinadas las componentes, un posible esquema posicional del sistema se presenta en la **Figura 35**.

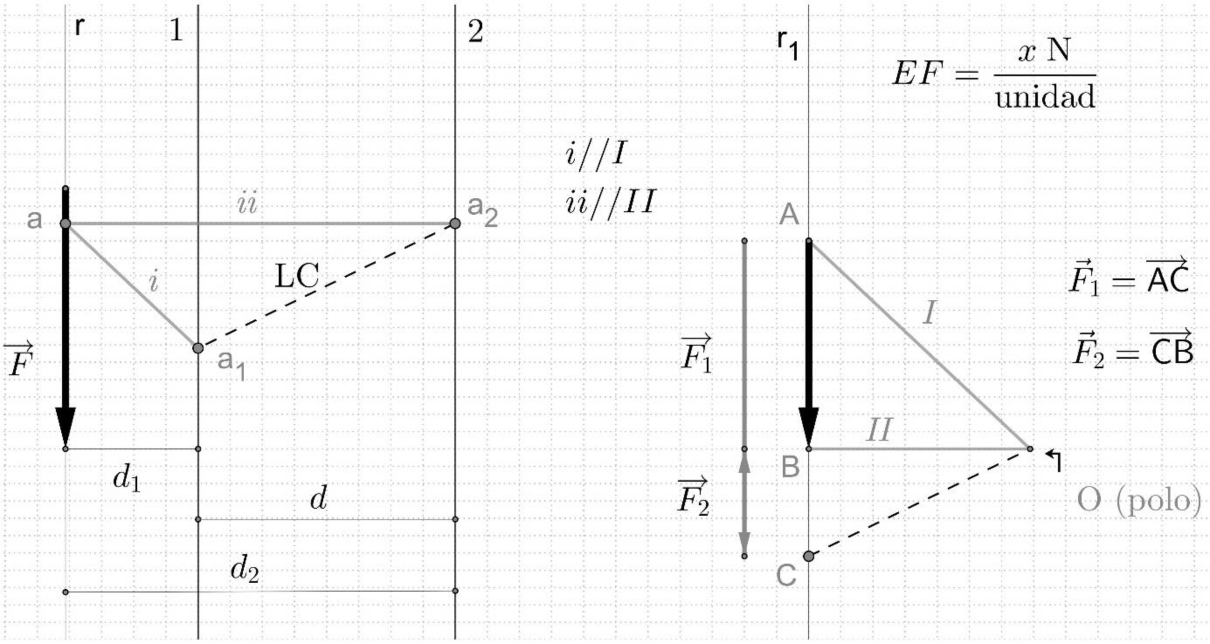


Figura 34. Segundo Caso: Polígono Funicular (*izq.*) y Determinación de las Componentes (*der.*) (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

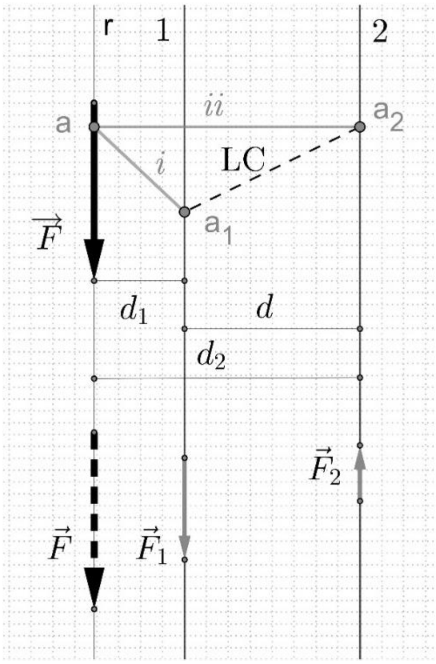


Figura 35. Componentes de la Fuerza Dada (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2do. Solución Analítica. Con un procedimiento análogo al caso uno, la **Ec. (12)** expone las expresiones analíticas que resuelven el problema.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{a}_2}: \quad \left\|\vec{F}\right\| \times d_2 = \left\|\vec{F}_1\right\| \times d + \left\|\vec{F}_2\right\| \times 0 \\
&b) \quad \left\|\vec{F}_1\right\| = \frac{\left\|\vec{F}\right\| \times d_2}{d} \quad [\mathrm{N}] \\
&c) \quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{a}_1}: \quad \left\|\vec{F}\right\| \times d_1 = \left\|\vec{F}_1\right\| \times 0 + \left\|\vec{F}_2\right\| \times d \\
&d) \quad \left\|\vec{F}_2\right\| = \frac{\left\|\vec{F}\right\| \times d_1}{d} \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned} \tag{12}
$$

Así mismo, independientemente de los posibles valores que pueden adoptar los *brazos de palanca* d_1 y d_2, debe verificarse en todo momento lo que se indica en la **Ec. (13)**.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \tag{13}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.5

Objetivo: Descomponer una fuerza en dos direcciones paralelas aplicando los métodos gráfico y analítico analizados.

Consigna: Dada la fuerza de módulo $F = 6000\,\text{kgf}$ actuante, determinar las componentes $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ según las direcciones homólogas 1 y 2 mostradas en el esquema posicional de la **Figura 36**.

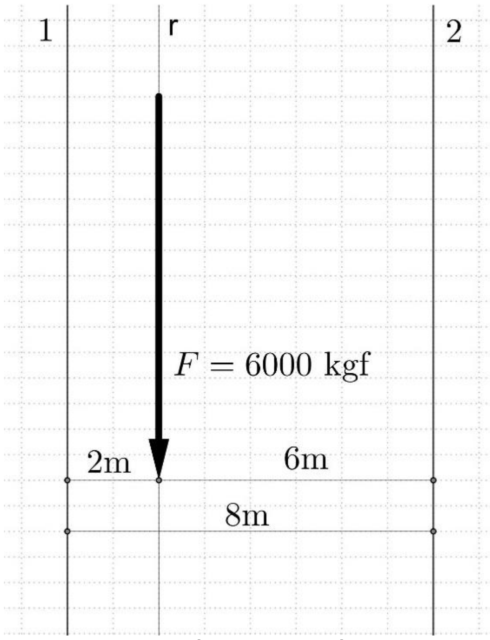


Figura 36. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Definida la escala de fuerzas, se traza el vector $\vec{F}$ y se construye los polígonos vectorial y funicular como indica en la **Figura 37**.

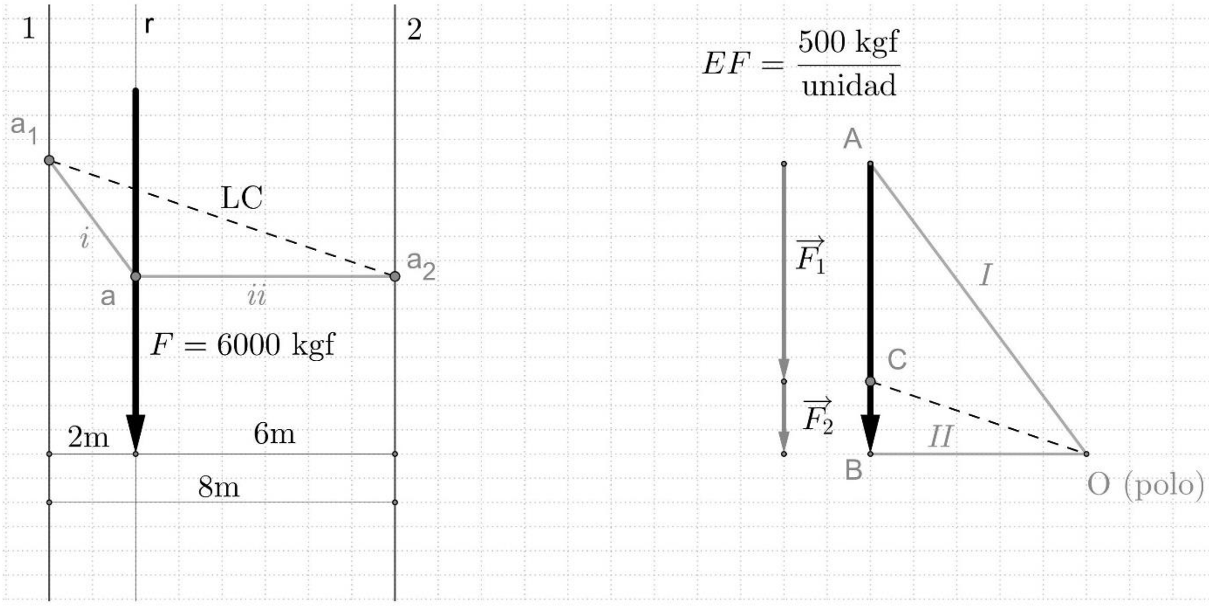


Figura 37. Componentes de $\vec{F}$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Entonces; si se miden los segmentos $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{AB}}$:

$$\left\|\vec{F}_1\right\| = \overline{\mathrm{AC}} \times EF = 9 \text{ unidad} \times 500 \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} = 4500 \text{ kgf}$$

$$\left\|\vec{F}_2\right\| = \overline{\mathrm{CB}} \times EF = 3 \text{ unidad} \times 500 \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} = 1500 \text{ kgf}$$

La suma de las componentes debe ser igual a la fuerza, por tanto, de la ecuación (11):

$$F = F_1 + F_2 = 4500 \text{ kgf} + 1500 \text{ kgf} = 6000 \text{ kgf}$$

Notar que en este caso la suma de los vectores componentes se puede realizar simplemente como una suma de escalares, dado que tienen la misma dirección. También recordar de la ecuación (1) que el módulo de un vector se puede representar con las barras verticales o sin ellas; por lo tanto, la expresión anterior podría haberse expresado como: $\left\|\vec{F}\right\| = \left\|\vec{F}_1\right\| + \left\|\vec{F}_2\right\|$ como se ha hecho en otras ocasiones.

Por lo tanto, la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_1 = (4500 \text{ kgf}, 270°) \\ \vec{F}_2 = (1500 \text{ kgf}, 270°) \end{array}}$

2do. Solución Analítica.

$$F_1 = \frac{F \times d_2}{d} = \frac{6000 \text{ kgf} \times 6 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 4500 \text{ kgf}$$

$$F_2 = \frac{F \times d_1}{d} = \frac{6000 \text{ kgf} \times 2 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 1500 \text{ kgf}$$

Por lo tanto, la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_1 = (4500 \text{ kgf, } 270°) \\ \vec{F}_2 = (1500 \text{ kgf, } 270°) \end{array}}$

Observaciones

- Notar que $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$ dado que $d_1 < d_2$ para compensar los momentos y mantener el equilibrio del sistema. En otras palabras, existe una relación de proporcionalidad conocida como *Relación de Stevin* que se analiza cuando se presentan los sistemas de fuerzas paralelas en la Sección 3.3.3.3.

PROBLEMA RESUELTO 2.6

Objetivo: Descomponer una fuerza en dos direcciones paralelas aplicando los métodos gráfico y analítico analizados.

Consigna: Dada la fuerza cuyo módulo es $F = 4000\,\text{kgf}$ actuante, determinar las componentes $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ según las direcciones homólogas 1 y 2 mostradas en el esquema posicional de la **Figura 38**.

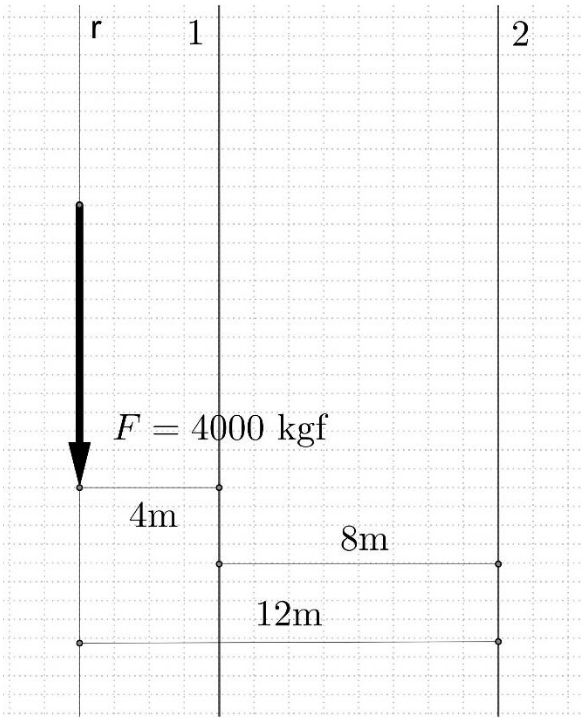


Figura 38. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Definida la escala de fuerzas, se traza el vector $\vec{F}$ y se construye los polígonos polar, vectorial y funicular como indica la **Figura 39**.

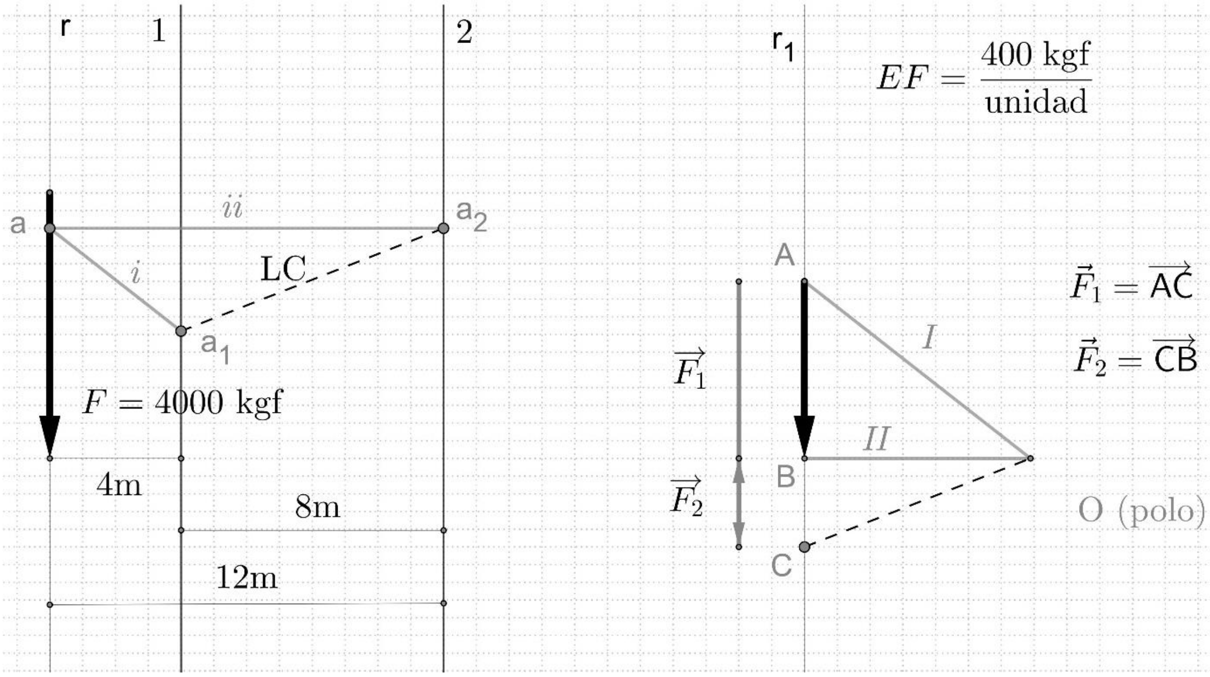


Figura 39. Componentes de $\vec{F}$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Entonces; si se miden los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$:

$$\left\|\vec{F}_1\right\| = \overline{AC} \times EF = 15 \text{ unidad} \times 400 \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} = 6000 \text{ kgf}$$

$$\left\|\vec{F}_2\right\| = \overline{CB} \times EF = 5 \text{ unidad} \times 400 \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} = 2200 \text{ kgf}$$

Siendo:

$$F = F_1 - F_2 = 6000 \text{ kgf} - 2000 \text{ kgf} = 4000 \text{ kgf}$$

Por lo tanto, la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_1 = (6000 \text{ kgf}, 270°) \\ \vec{F}_2 = (2000 \text{ kgf}, 270°) \end{array}}$

2do. Solución Analítica.

$$F_1 = \frac{F \times d_2}{d} = \frac{4000 \text{ kgf} \times 12 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 6000 \text{ kgf}$$

$$F_2 = \frac{F \times d_1}{d} = \frac{4000 \text{ kgf} \times 4 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 2000 \text{ kgf}$$

Por lo tanto, la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l}\vec{F}_1 = (6000\ \text{kgf},\ 270°) \\ \vec{F}_2 = (2000\ \text{kgf},\ 270°)\end{array}}$

Observaciones

- En este problema es conveniente representar cada vector componente en la *notación cartesiana* a fin remarcar ciertos aspectos. En efecto, primero se calculan las componentes rectangulares de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$:

$$F_{1x} = F_1 \times \cos\alpha = (6000\ \text{kgf}) \times \cos 270° = 0{,}000\ \text{kgf}$$
$$F_{1y} = F_1 \times sen\alpha = (6000\ \text{kgf}) \times sen 270° = -6000\ \text{kgf}$$

$$F_{2x} = F_2 \times \cos\alpha = (2000\ \text{kgf}) \times \cos 270° = 0{,}000\ \text{kgf}$$
$$F_{2y} = F_2 \times sen\alpha = (2000\ \text{kgf}) \times sen 270° = -2000\ \text{kgf}$$

Por lo tanto:

$$\vec{F}_1 = -(6000\ \text{kgf})\ \breve{j}$$
$$\vec{F}_2 = -(2000\ \text{kgf})\ \breve{j}$$

Observar la notación cuando una de las componentes es igual a cero, en este caso las componentes en x.

2.2.4.3. En Tres Direcciones

Se ha analizado la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes con ella y en dos direcciones paralelas a ella. En este sentido, RAFFO (2007) menciona que el problema de descomponer una fuerza en tres o más fuerzas concurrentes es indeterminado, es decir, no existe solución única. En cambio, si las fuerzas componentes son tres fuerzas no concurrentes, el problema admite solución única, mediante el procedimiento *gráfico de Culmann* o *analítico de Ritter*.

El primero ideado por el Ing. Estructural Carl Culmann (1821-1881), mientras que al físico Johann Wilhelm Ritter (1776-1810) se le atribuye el segundo. Cabe destacar que más adelante en el documento se han de ver aplicaciones prácticas de estos dos métodos; por ejemplo, en el cálculo de esfuerzos en *estructuras reticuladas* (Capítulo 7).

Método Gráfico de Culmann

Sea $\vec{F}$ la fuerza a descomponer; y, 1, 2 y 3 las rectas de acción (direcciones) de las tres componentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ a determinar, **Figura 40**.

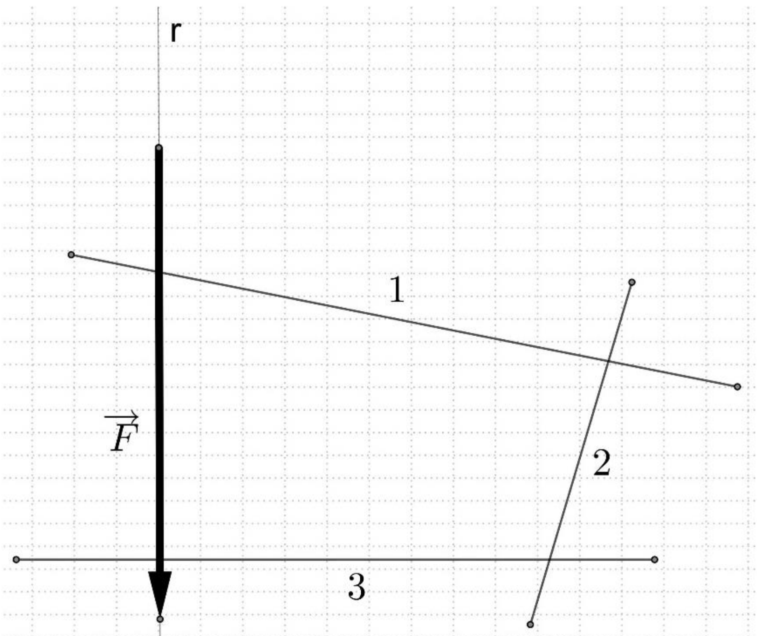


Figura 40. Método Gráfico de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Para resolver este problema se fija un punto M en la intersección de dos direcciones y un punto N en la intersección de la recta de acción de la fuerza y de la otra dirección. Luego se unen estos puntos para obtener el segmento $\overline{MN} = \mu$ llamado *auxiliar de Culmann* como se muestra en la **Figura 41**.

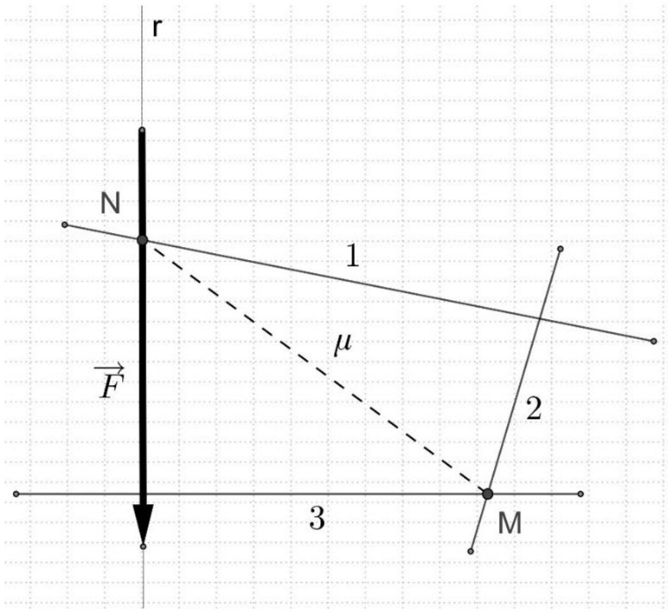


Figura 41. Línea Auxiliar de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Enseguida, se fija una escala de fuerzas, se define el vector $\overrightarrow{AB}$ representativo de la fuerza $\vec{F}$ y se descompone $\vec{F}$ en la dirección 1 y en la dirección μ obteniendo las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_\mu$, respectivamente, **Figura 42** (*izq.*). Del mismo modo, se descompone $\vec{F}_\mu$ en las direcciones 2 y 3 obteniendo las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, respectivamente, **Figura 42** (*der.*).

Es de vital importancia definir correctamente los *sentidos de las fuerzas componentes* y ello depende explícitamente de como este formulado el problema (tal como se ha explicado 2.2.4.1). Además, observe que este método consiste en aplicar dos veces el procedimiento analizado en dicha sección.

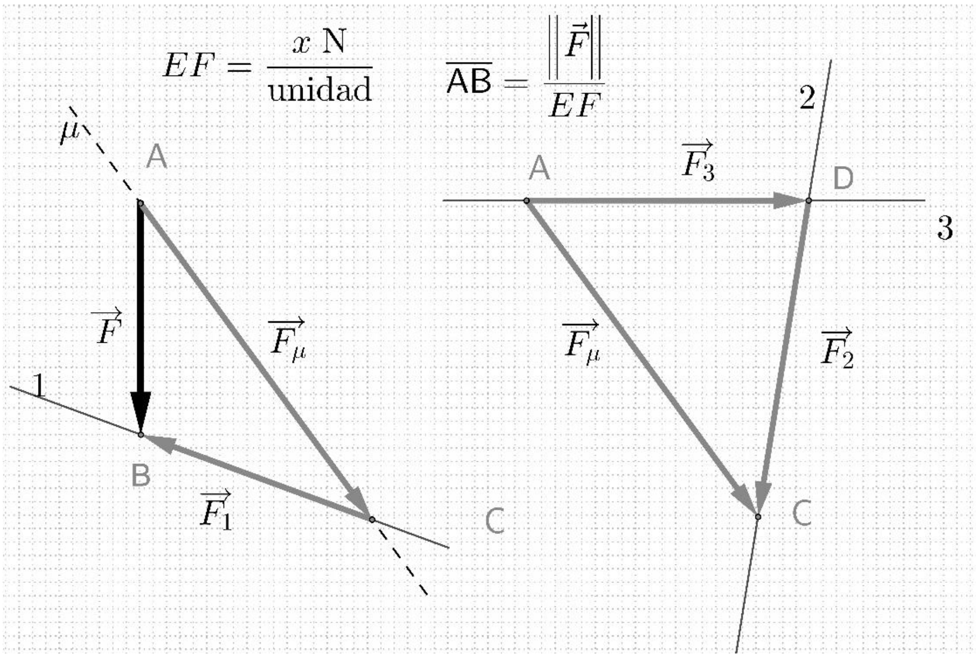


Figura 42. Método Gráfico de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Lo que sigue es medir los segmentos $\overline{\mathsf{AD}}, \overline{\mathsf{DC}}$ y $\overline{\mathsf{CB}}$ los cuales leídos en la escala de fuerza determinan las magnitudes de las componentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ resolviendo el problema, Ec. 14.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \left\|\vec{F}_1\right\| = \overline{\mathsf{AD}} \times EF \quad [\mathrm{N}] \\
&b) \quad \left\|\vec{F}_2\right\| = \overline{\mathsf{DC}} \times EF \quad [\mathrm{N}] \\
&c) \quad \left\|\vec{F}_2\right\| = \overline{\mathsf{CB}} \times EF \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

En la figura precedente se ha hecho la resolución en dos gráficos, pero el lector puede optar por realizar la primera descomposición en un gráfico y aprovechar el mismo gráfico para concluir con el problema, como se muestra en la **Figura 43**.

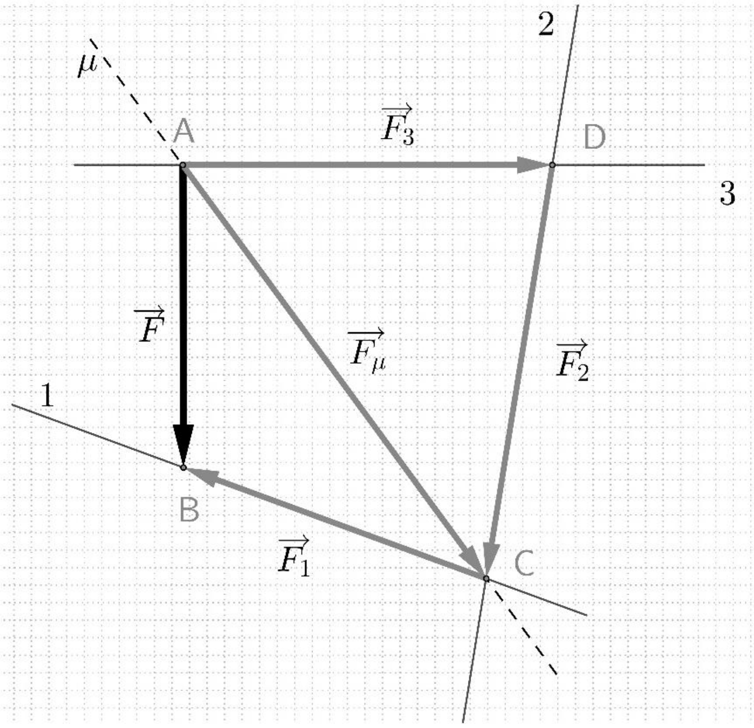


Figura 43. Método Gráfico de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

PROBLEMA RESUELTO 2.7

Objetivo: Aplicar el método gráfico de Culmann para descomponer una fuerza en tres direcciones no concurrentes.

Consigna: Con base en los datos siguientes:

$\vec{F} = (40.000\ \text{N}; 90°)$ aplicado en $(6, 2)$
Dirección A: $\alpha_A = 0°;\ (0,1)$
Dirección B: $\alpha_B = 90°;\ (2,0)$
Dirección C: $\alpha_C = 30°;\ (0,3)$

Determinar: 1) Las componentes de $\vec{F}$; y, 2) Equilibrar $\vec{F}$ con tres fuerzas según las mismas direcciones.

SOLUCIÓN

1) **Determinación de Componentes**. Con los datos proporcionados se representa el esquema posicional en la **Figura 44**.

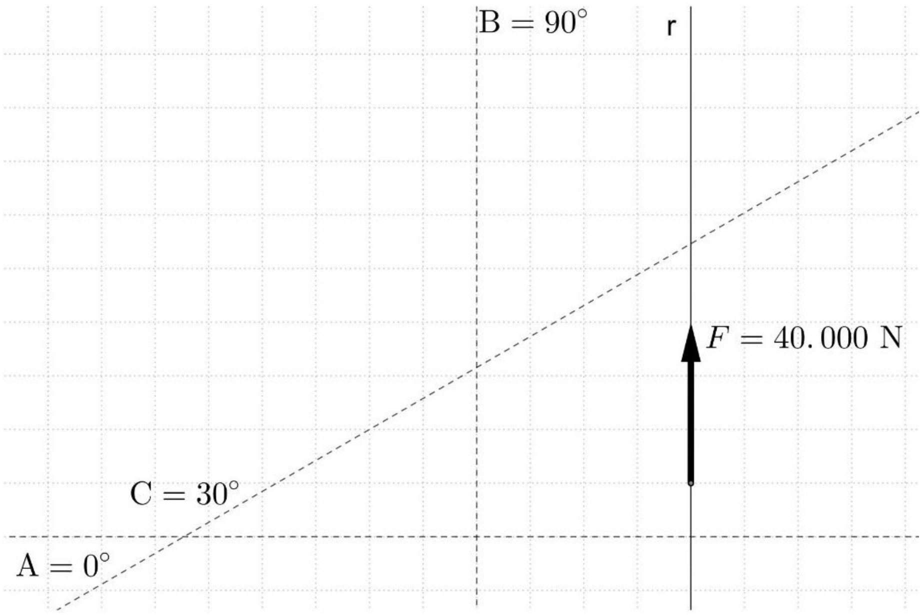


Figura 44. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El paso siguiente escoger un punto de intersección M entre dos direcciones y otro N entre la recta de acción de la fuerza y la dirección restante como se muestra en la **Figura 45**. El segmento $\overline{\text{MN}} = \mu$ determina la línea auxiliar de Culmann.

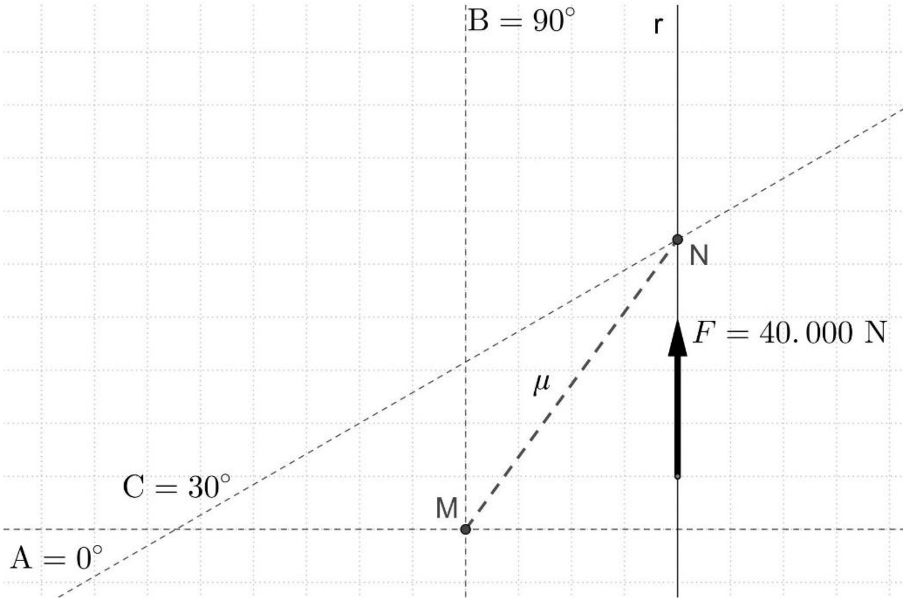


Figura 45. Línea Auxiliar de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Ahora, en otro gráfico y escogiendo una escala de fuerzas apropiada se dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$ representativo de la fuerza dada y se descompone $\vec{F}$ en las direcciones C y μ, y, luego se descompone μ en las direcciones A y B, **Figura 46**.

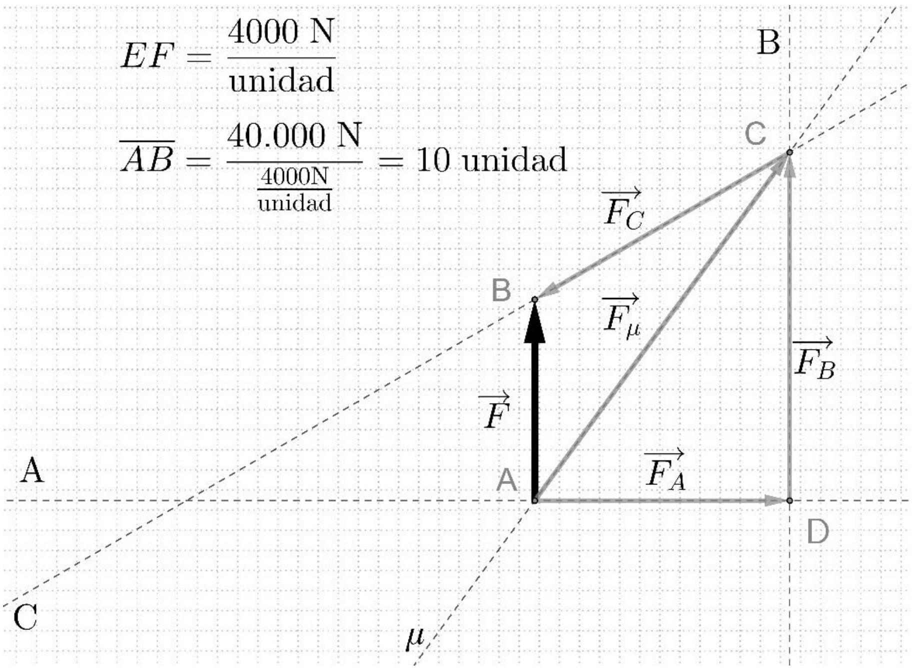


Figura 46. Método Gráfico de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por lo tanto, el módulo de cada uno de las componentes está dado por:

$$\left\|\vec{F}_A\right\| = \overline{\mathsf{AD}} \times EF = 12{,}7 \text{ unidad} \times \frac{4000 \text{ N}}{\text{unidad}} = 50.800 \text{ N}$$

$$\left\|\vec{F}_B\right\| = \overline{\mathsf{DC}} \times EF = 17{,}3 \text{ unidad} \times \frac{4000 \text{ N}}{\text{unidad}} = 69.200 \text{ N}$$

$$\left\|\vec{F}_C\right\| = \overline{\mathsf{CB}} \times EF = 14{,}6 \text{ unidad} \times \frac{4000 \text{ N}}{\text{unidad}} = 58.400 \text{ N}$$

Y la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_A = (50.800 \text{ N}; 0°) \\ \vec{F}_B = (69.200 \text{ N}; 90°) \\ \vec{F}_C = (58.400 \text{ N}; 210°) \end{array}}$

Finalmente, ahora que se conocen las componentes pueden incluirse en el esquema posicional (Ver **Figura 47**). Recordar que en Estática las fuerzas son vectores deslizantes (Ver Anexo 10.1) que pueden actuar sobre cualquier punto de su línea de acción.

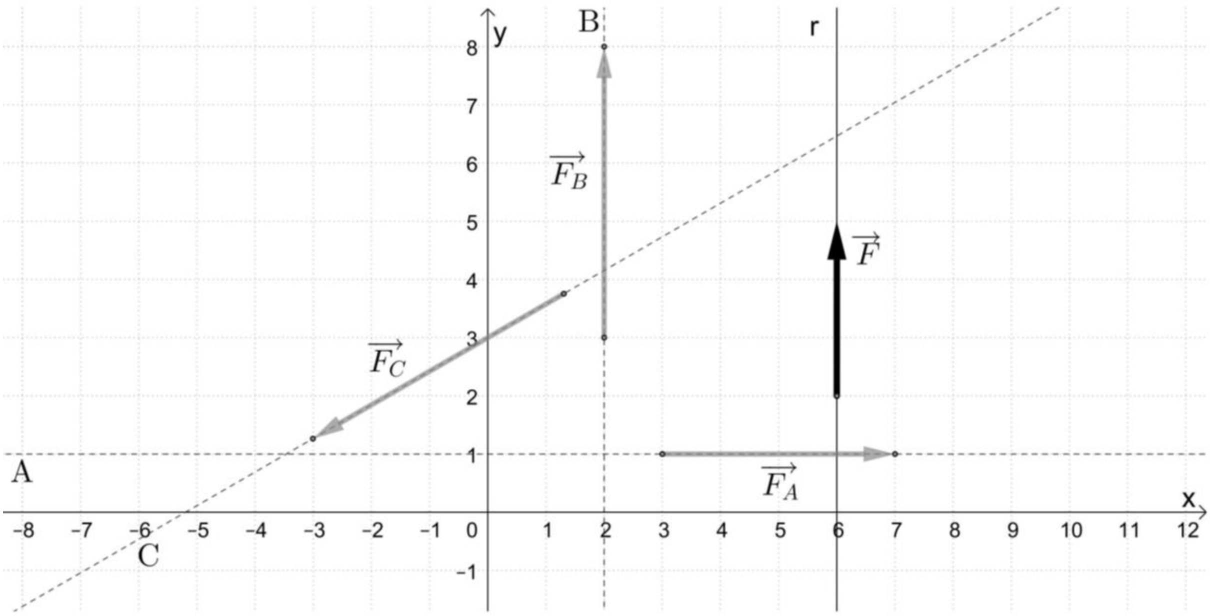


Figura 47. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2) **Determinación de las Fuerzas Equilibrantes**. El equilibrio se tendrá cerrando el vectorial de la Figura 46 es decir, cambiando el sentido de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$. Sin duda que esta nueva condición podría representarse gráficamente, pero, para dar respuesta al ítem basta simplemente con un enunciado coloquial:

Respuesta

Para equilibrar $\vec{F}$ con tres fuerzas según las mismas rectas de acción, basta con cambiar el sentido a las componentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$.

Observaciones

- Los argumentos de cada componente se miden directamente en el gráfico.
- Recordar que una fuerza, para una misma recta de acción, tiene solo dos posibles sentidos.

Método Analítico de Ritter

Este método resuelve el problema con la realización de sumatoria de momentos, tomando centros de momento estratégicos, de modo tal, que las ecuaciones que se originan tengan una sola incógnita: la fuerza componente buscada.

La base de este procedimiento se conoce como *Principio de Momentos* o *Teorema de Varignon*. Dicho teorema (que se analiza en la sección siguiente) establece que *el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al mismo punto*. Sin más preámbulo, se presenta el esquema posicional de la **Figura 48**.

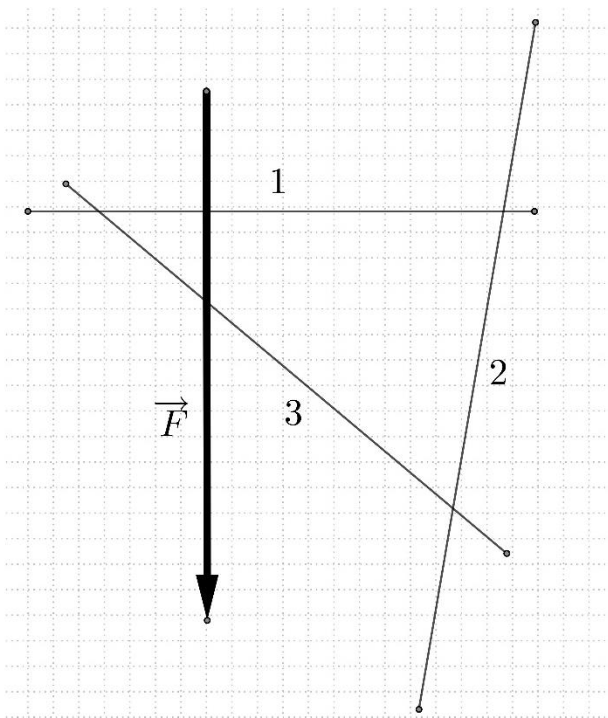


Figura 48. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Donde $\vec{F}$ la fuerza a descomponer; y, 1, 2 y 3 las rectas de acción (direcciones) de las tres componentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ a determinar. Conocido el esquema posicional, el paso siguiente es determinar los centros de momento estratégicos que en este caso se indican con A, B y C, **Figura 49**.

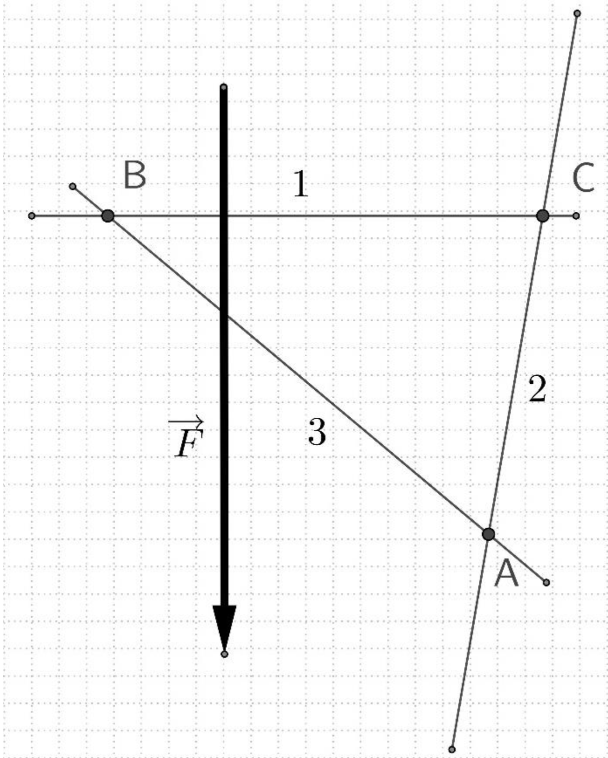


Figura 49. Centros de Momento A, B y C (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Notar que los centros de momento se toman en la intersección de dos direcciones lo que ha de anular luego dos incógnitas las correspondientes a las fuerzas que corresponden a esas direcciones. Por ejemplo, en B se anulan $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$.

Ahora bien, se sabe que $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ actúan en las direcciones 1, 2 y 3 respectivamente, lo que se desconoce son sus sentidos los cuales son necesarios para plantear los momentos de dichas fuerzas. Por ende, se debe *suponer un sentido para cada fuerza componente*, estos, junto con las distancias a los centros de momento se indican en la **Figura 50**.

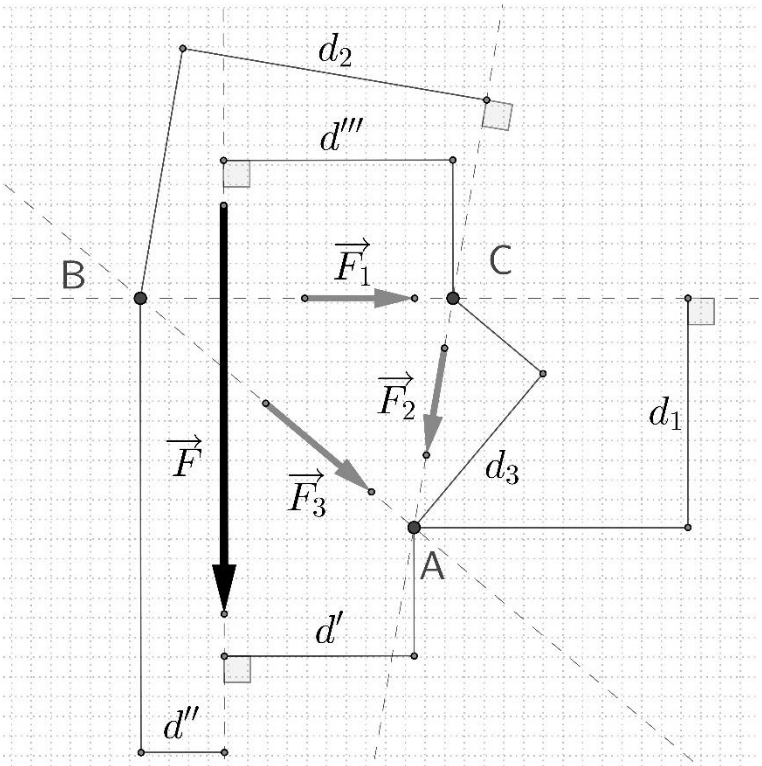


Figura 50. Principio de Momentos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Lo que sigue es el cálculo analítico de momentos de las fuerzas del esquema anterior, pero, aquí debe hacerse una aclaración: *el método de Ritter no es exclusivamente analítico* dado que si no es factible medir las distancias (brazos de palanca) por medios trigonométricos o geométricos, la medición se realiza directamente sobre el esquema (el cual debe estar a escala).

Entonces, si se consideran los momentos en el sentido de las manecillas del reloj como positivos, y se aplica el principio de momentos se tiene la **Ec. (15)** de la cual se puede despejar el módulo de las componentes. *Si el valor de un módulo resulta negativo significa que el sentido real es distinto al adoptado*.

Momento de $\vec{F}$ respecto de A

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{A}} \Rightarrow -\left\|\vec{F}\right\| \times d' = \left\|\vec{F}_1\right\| \times d_1 \\
&b)\quad \left\|\vec{F}_1\right\| = \frac{-\left\|\vec{F}\right\| \times d'}{d_1} \quad [\mathrm{N}] \rightarrow \text{El sentido real es } \neq \text{al adoptado}
\end{aligned}
$$

Momento de $\vec{F}$ respecto de B

$$
\begin{aligned}
&c)\quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{B}} \Rightarrow \left\|\vec{F}\right\| \times d'' = \left\|\vec{F}_2\right\| \times d_2 \\
&d)\quad \left\|\vec{F}_2\right\| = \frac{\left\|\vec{F}\right\| \times d''}{d_2} \quad [\mathrm{N}] \rightarrow \text{El sentido real es } \equiv \text{al adoptado}
\end{aligned} \qquad \textbf{(15)}
$$

Momento de $\vec{F}$ respecto de C

$$
\begin{aligned}
&e)\quad \overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{C}} = -\left\|\vec{F}\right\| \times d''' = -\left\|\vec{F}_3\right\| \times d_3 = 0 \\
&f)\quad \left\|\vec{F}_3\right\| = \frac{-\left\|\vec{F}\right\| \times d'''}{-d_3} \quad [\mathrm{N}] \rightarrow \text{El sentido real es } \equiv \text{al adoptado}
\end{aligned}
$$

PROBLEMA RESUELTO 2.8

Objetivo. Aplicar el método gráfico/analítico de Ritter para determinar las componentes de una fuerza dada.

Consigna. Hallar las componentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ del Problema Resuelto 2.7 aplicando Ritter. Comparar los resultados con los obtenidos en el método de Culmann.

SOLUCIÓN

El esquema posicional se presenta en la **Figura 51**. Los puntos de intersección son A entre las direcciones A y C, B entre las direcciones B y A y C entre B y C. Para este problema no es necesario suponer un sentido para las fuerzas componentes puesto que ya son conocidas. Sin embargo, esto nunca es así siendo el lector quien debe definirlos. Luego, para los cálculos que siguen, referirse a la **Figura 52**.

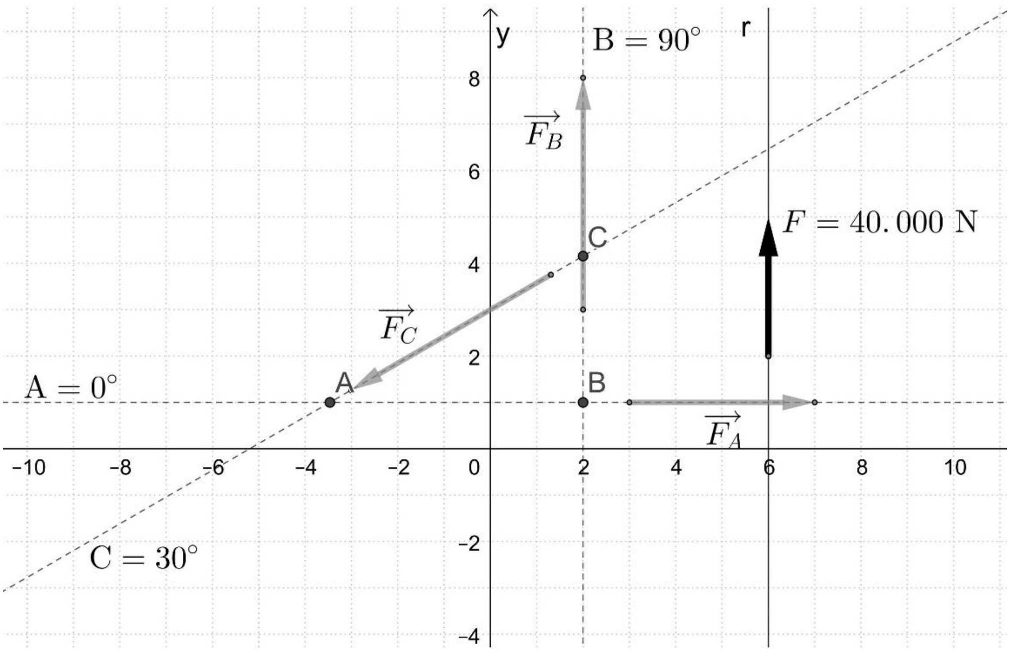


Figura 51. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

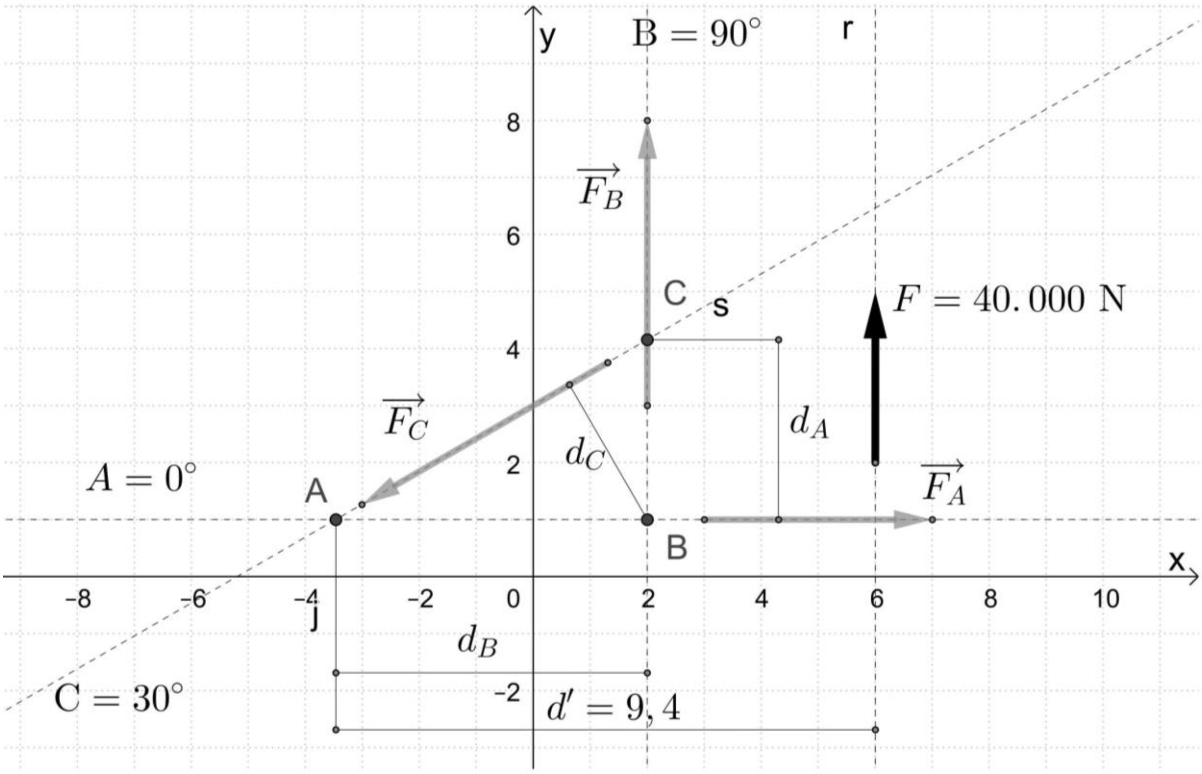


Figura 52. Cálculo de Momentos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Se calcula primero el momento de las fuerzas respecto de A. Aplicando el teorema de Varignon se tiene:

$$\overset{\frown}{+} M_{\mathrm{A}} \Rightarrow -40.000\ \mathrm{N} \times d' = -\left\|\vec{F}_B\right\| \times d_B$$

$$\left\|\vec{F}_B\right\| = \frac{-40.000\ \mathrm{N} \times d'}{-d_B} \quad [\mathrm{N}]$$

Se necesitan hallar los brazos de palanca d' y d_B; si se inspecciona el gráfico se observa que no es factible aplicar métodos geométricos o trigonométricos para calcular las distancias buscadas, por lo tanto, se miden directamente sobre el dibujo.

$$d' \cong 9,4\ \text{unidad} \therefore$$
$$d_B \cong 9,4\ \text{unidad} - 4\ \text{unidad} \cong 5,4\ \text{unidad}$$

Entonces:

$$\overset{\frown}{+} M_{\mathrm{A}} \Rightarrow -40.000\ \mathrm{N} \times d' = -\left\|\vec{F}_B\right\| \times d_B$$

$$\left\|\vec{F}_B\right\| = \frac{-\left\|40.000\ \mathrm{N}\right\| \times 9,4\ \text{unidad}}{-5,4\ \text{unidad}} = 69.629,6\ \mathrm{N}$$

Ahora se procede considerando el centro de momentos en B:

$$\overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{B}} \Rightarrow -40.000 \text{ N} \times 4 \text{ unidad} = -\left\|\vec{F}_C\right\| \times d_C$$
$$\left\|\vec{F}_C\right\| = \frac{-\left\|40.000 \text{ N}\right\| \times 4 \text{ unidad}}{-d_C} [\text{N}]$$

Para calcular d_C hay datos suficientes como para aplicar la ley del seno (teorema del seno) aunque; también hay otras opciones de cálculo:

$$\frac{sen30°}{d_C} = \frac{sen90°}{d_B} \Rightarrow d_C = \frac{sen30° \times d_B}{sen90°} = \frac{sen30° \times 5,4 \text{ unidad}}{sen90°} = 2,7 \text{ unidad}$$
$$\left\|\vec{F}_C\right\| = \frac{-\left\|40.000 \text{ N}\right\| \times 4 \text{ unidad}}{-2,7 \text{ unidad}} = \quad 59.259,3 \text{ N}$$

Finalmente:

$$\overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{C}} \Rightarrow -40.000 \text{ N} \times 4 \text{ unidad} = -\left\|\vec{F}_A\right\| \times d_A$$
$$\left\|\vec{F}_A\right\| = \frac{-\left\|40.000 \text{ N}\right\| \times 4 \text{ unidad}}{-d_A} [\text{N}]$$

d_A puede calcularse por trigonometría:

$$\cos 30° = \frac{d_C}{d_A} \Rightarrow d_A = \frac{d_C}{\cos 30°} = \frac{2,7 \text{ unidad}}{\cos 30°} = 3,1 \text{ unidad}$$

Entonces:

$$\overset{\curvearrowright}{+} M_{\mathrm{C}} \Rightarrow -40.000 \text{ N} \times 4 \text{ unidad} = -\left\|\vec{F}_A\right\| \times d_A$$
$$\left\|\vec{F}_A\right\| = \frac{-\left\|40.000 \text{ N}\right\| \times 4 \text{ unidad}}{-3,1 \text{ unidad}} = 51.613 \text{ N}$$

Y la respuesta es:

Respuesta
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_A = (51.613 \text{ N}; 0°) \\ \vec{F}_B = (69.630 \text{ N}; 90°) \\ \vec{F}_C = (59.259 \text{ N}; 210°) \end{array}}$$

Observaciones

- En la **Tabla 2** se comparan los valores obtenidos mediante Culmann y Ritter:

Tabla 2. Comparación de Valores entre los Métodos de Culmann y Ritter (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

	Culmann	**Ritter**
F_A	50.800	51.613
F_B	69.200	69.630
F_C	58.400	59.259

Se observa que los valores obtenidos con el método de Ritter son más precisos. Se ha utilizado el punto como separador de miles y claro, la coma como separador de decimales.

2.2.5. Momento de una Fuerza

Ya se ha aplicado el momento de una fuerza en el análisis de la descomposición de fuerzas. En este capítulo se busca formalizar algunos aspectos de este concepto mediante dos enfoques según lo plantea HIBBELER (2010): una formulación escalar y otra vectorial. De hecho, el lector ha de comprobar que en todos los cálculos de nuestro curso interesa únicamente el módulo del momento.

Por otra parte, se han de explicar también otros aspectos del momento de una fuerza como su interpretación y determinación gráfica. El momento es llamado algunas veces como *momento estático de una fuerza* (PANSERI, 1978), pero el alumno no debe confundir momento estático de una fuerza con *momento estático de área* el cual se analiza en el Capítulo 4. Sin embargo, ambos están incluidos dentro de los momentos de primer orden.

2.2.5.1. Momento de Una Fuerza Formulación Escalar

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta produce una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el *momento de una fuerza* o simplemente el *momento*.

Por ejemplo, considere una llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la **Figura 53 (a)**, si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tiende a girar el perno alrededor del punto *O* (o el eje z). La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de $\vec{F}$ y a la *distancia perpendicular* o brazo de momento d.

Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Observe que si se aplica la fuerza $\vec{F}$ a un ángulo $\theta \neq 90°$ **Figura 53 (b)**, entonces será más difícil girar el perno puesto que el brazo de momento $d' = d \times sen\theta$ es menor que d.

Si se aplica $\vec{F}$ a lo largo de la llave, **Figura 53 (c)**, su brazo de momento será igual a cero puesto que la línea de acción de $\vec{F}$ interseca el punto *O* (el eje z). En consecuencia, el momento de $\vec{F}$ respecto de *O* también es cero y no puede ocurrir el giro.

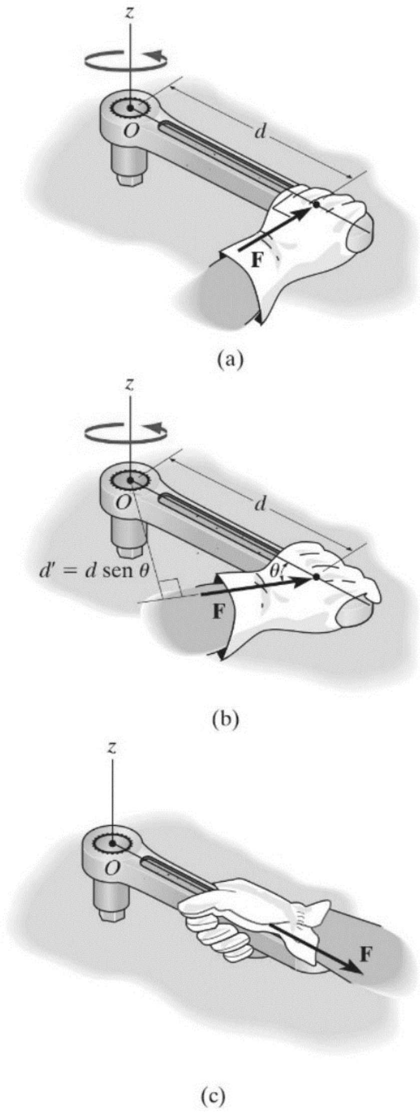


Figura 53. Aplicación de Momento de una Fuerza (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Ahora se puede generalizar el análisis anterior y considerar la fuerza $\vec{F}$ y el punto *O* que se encuentran en un plano sombreado como se muestra en la **Figura 54 (a)**.

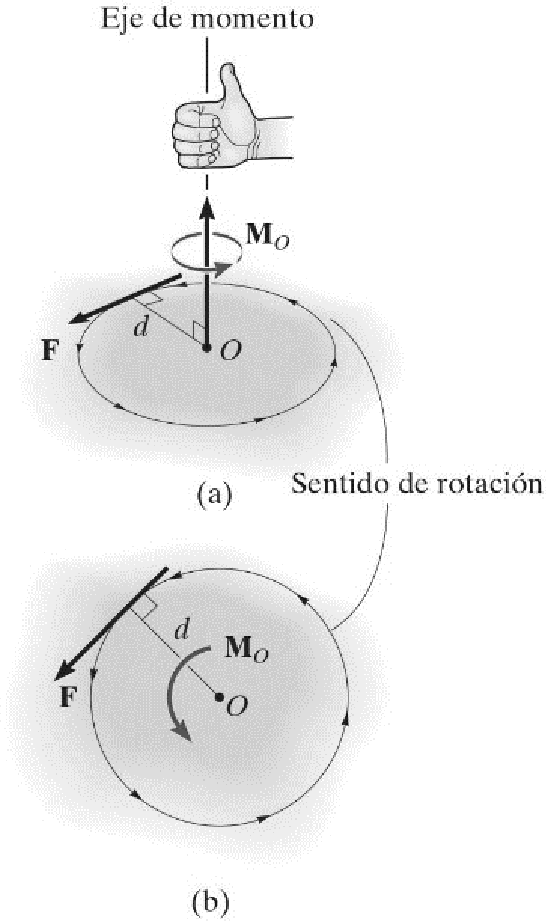


Figura 54. Representación Tridimensional y Bidimensional de $\vec{M}$ (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

El momento $\vec{M}$ con respecto al punto *O*, o con respecto a un eje que pase por *O* y sea perpendicular al plano, es una cantidad vectorial puesto que tiene magnitud y dirección específicas. El cálculo de la **magnitud** se indica en la **Ec. (16)**.

$$\left\|\vec{M}_O\right\| = M_O = F \times d \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}] \tag{16}$$

Donde d es el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto *O* hasta la línea de acción de la fuerza y F es el módulo o intensidad de la fuerza.

La **dirección** de M_O está definida por su eje de momento, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza $\vec{F}$ y por su brazo de momento d. Para establecer el sentido de dirección de M_O se utiliza la *regla de la mano derecha*. De acuerdo con esta regla, el curveo natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación causada por el momento.

Cuando se realiza esta acción, el pulgar de la mano derecha da el sentido de la dirección de M_O (Ver Figura 51-a). Observe que, en tres dimensiones, el vector de momento se ilustra mediante una flecha curva alrededor de una flecha. En dos dimensiones, este vector se representa sólo con la flecha curva como en la **Figura 54 (b)**. Como en este caso el momento tenderá a causar una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el vector de momento se dirige en realidad hacia fuera de la página.

Momento Resultante (M_R). Para problemas bidimensionales, donde todas las fuerzas se encuentran en el plano x-y, **Figura 55**, el momento resultante con respecto al punto *O* (el eje z) puede determinarse al encontrar la suma algebraica de los momentos causados por todas las fuerzas en el sistema.

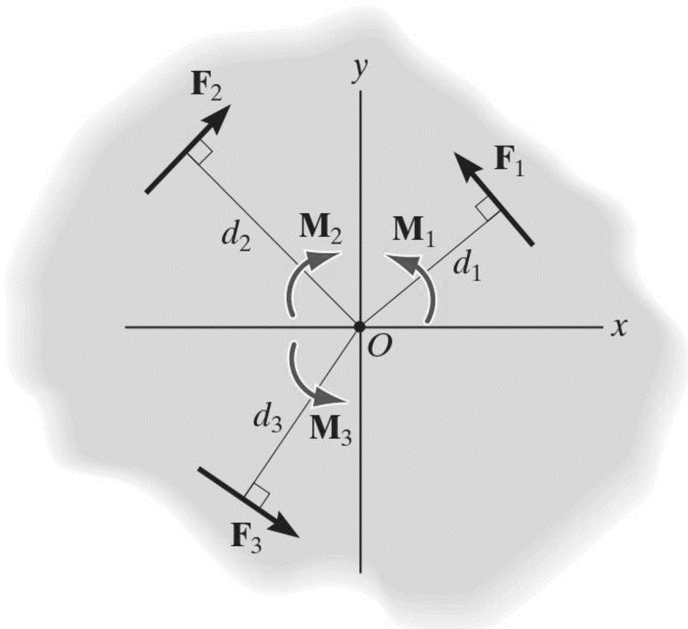


Figura 55. Momento Resultante de Fuerzas Coplanares (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Como **convención** se considera de manera general los momentos negativos como en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Los momentos en el sentido de las manecillas del reloj son positivos. Al hacer esto, el sentido de dirección de cada momento puede representarse mediante un signo de más o de menos. Por lo tanto, si se utiliza esta convención de signos, el momento resultante en la figura anterior está dado por la **Ec. (17)**.

$$\overset{\curvearrowright}{+}(M_R)_O = \sum F \times d; \quad (M_R)_O = -F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 \quad [\mathrm{N \cdot m}] \tag{17}$$

Si el resultado numérico de esta suma es un escalar positivo, $(M_R)_O$ será un momento en sentido de las manecillas del reloj (entrante a la página); y si el resultado es negativo, $(M_R)_O$ será un momento en sentido contrario a las manecillas del reloj (saliente de la página).

2.2.5.2. Momento de una Fuerza Formulación Vectorial

Esta sección no pretende ser extensa, solo se desarrollan aquellos conceptos que se consideran de interés no solo como un contraste con el enfoque anterior sino como herramienta para comprender la interpretación geométrica del momento de una fuerza.

El momento de una fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto *O*, o realmente con respecto al eje del momento que pasa por *O* y es perpendicular al plano que contiene a *O* y a $\vec{F}$, **Figura 56**, puede expresarse por el producto cruz vectorial, a saber (Ver Ec. 18).

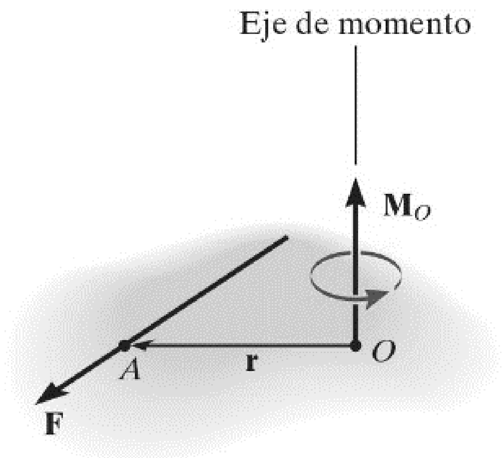


Figura 56. Momento: Análisis Vectorial (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$\vec{M}_O = \vec{r} \otimes \vec{F} \tag{18}$$

Aquí $\vec{r}$ representa un vector posición trazado desde O hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de $\vec{F}$. Como en el enfoque anterior, es necesario determinar la magnitud, dirección y sentido.

Magnitud. Del curso de álgebra vectorial, la magnitud del producto cruz se define como $M_O = r \times F \times sen\theta$, donde el ángulo θ se mide entre las colas de $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Para establecer este ángulo, se debe tratar a $\vec{r}$ como un vector deslizante, de manera que θ se pueda construir correctamente; **Figura 57**. Como el brazo de momento $d = r \times sen\theta$, se puede escribir la Ec. (19). Notar que la (19) concuerda con la (16).

$$M_O = r \times F \times sen\theta = F \times (r \times sen\theta) = F \times d \quad [\mathrm{N \cdot m}] \tag{19}$$

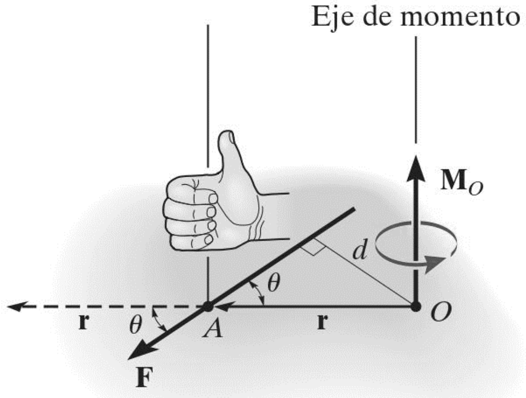


Figura 57. Momento: Análisis Vectorial (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Dirección. La dirección y el sentido de $\vec{M}_O$ en la ecuación 18 están determinados mediante la regla de la mano derecha, tal como se aplica ésta al producto cruz. Así, al deslizar $\vec{r}$ a la posición de la línea discontinua y cerrar los dedos de la mano derecha de $\vec{r}$ hacia $\vec{F}$, "$\vec{r}$ cruz $\vec{F}$", el pulgar está dirigido hacia arriba o perpendicularmente al plano que contiene a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$ esto es, en la misma dirección que $\vec{M}_O$, el momento de la fuerza respecto al punto O.

Observe que el "curveo" de los dedos como el curveo alrededor del vector momento, indica el sentido de rotación causado por la fuerza. Como el producto cruz no obedece la ley conmutativa, es importante conservar el orden de $\vec{r} \otimes \vec{F}$ para producir el sentido correcto de la dirección para $\vec{M}_O$.

2.2.5.3. Interpretación Geométrica del Momento

La formulación vectorial del momento de una fuerza permite definir una nueva manera de calcular el módulo de esta magnitud. Esta nueva manera es de carácter gráfico e implica una *descripción geométrica del producto cruz vectorial*, **Figura 58**.

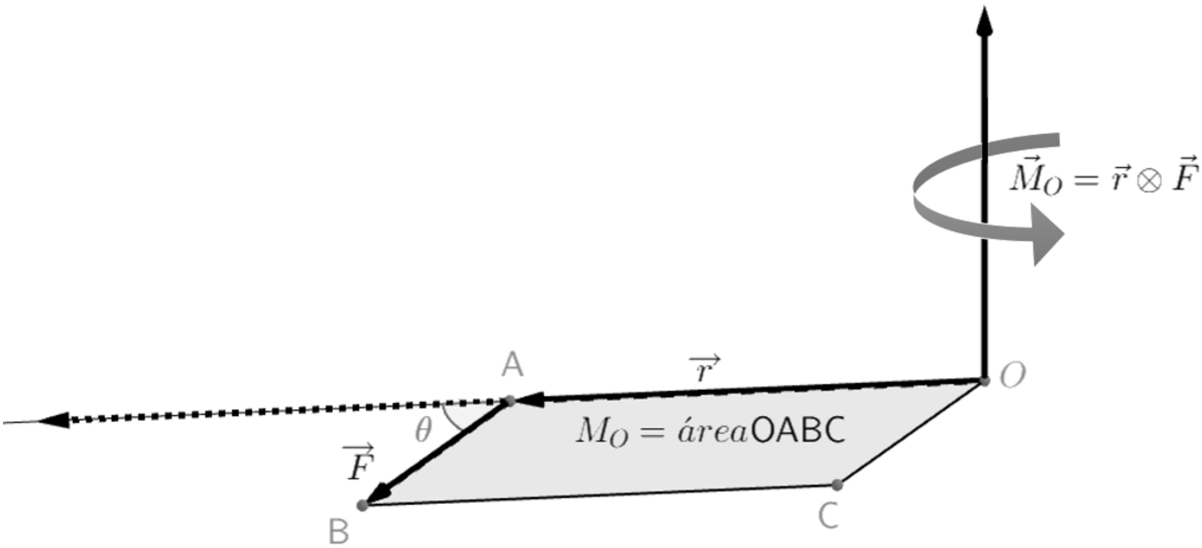


Figura 58. Interpretación Geométrica del Módulo del Vector Momento de una Fuerza (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El módulo $\|\vec{M}_O\| = M_O$ del vector momento de una fuerza $\vec{F}$ con respecto al centro *O*, está dado por la *superficie del paralelogramo* determinado por la fuerza y el vector posición $\vec{r}$ como se muestra en la Figura 58[12]. Si $\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{F}$, entonces, $\vec{r}$ representa directamente

[12] Siendo esta una propiedad propia del producto cruz vectorial.

el brazo de palanca $\vec{d}$ y el paralelogramo anterior es un rectángulo denominado *Rectángulo de Momento*, cuya área da el valor del momento, es decir: $M_O = F \times d \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}]$.

Escala de Momentos. Queda claro que, dado un área determinada como el del rectángulo mencionado, el valor del momento se obtiene multiplicando el valor de dicha área por la escala de momentos EM. La EM se define multiplicando la *Escala de Longitud* EL (en la que fue dibujada el brazo de palanca) por la *Escala de Fuerzas* EF (en la que fue dibujado el vector fuerza). En símbolos, **Ec. (20)**.

$$\begin{array}{l} EM = EL \times EF \quad \left[\dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{cm}^2}\right] \\ donde: \begin{cases} EL & \left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}\right] \\ EF & \left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\right] \end{cases} \end{array} \qquad \textbf{(20)}$$

La unidad de momento depende pues, de las unidades adoptadas para medir las distancias y las fuerzas que en el ejemplo están dados en m y N, respectivamente, por tanto, en este caso el momento se ha de expresar en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Triángulo de Momento. Así como el rectángulo de momento, el triángulo de momento es también un análisis con enfoque geométrico. En efecto, si desde el centro de momento *O*, **Figura 59**, se proyectan los extremos del vector representativo de la fuerza, queda formado un triángulo cuya superficie es igual a la mitad del momento de la fuerza[13] $\vec{F}$ con respecto al centro *O* (superficie que leída en la escala de momentos da el valor de este).

[13] Esta es también una propiedad propia del producto cruz vectorial.

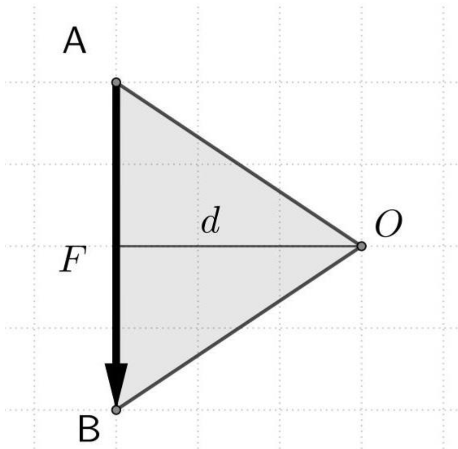


Figura 59. Triángulo de Momento (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En efecto, $M_O = F \times d$ y siendo d la altura del triángulo entonces, *el momento de la fuerza es igual al doble del área del triángulo*; en símbolos, **Ec. (21)**.

$$\overset{\curvearrowright}{+} M_O = F \times d = 2 \times \text{área } O\text{AB} \tag{21}$$

Esta última interpretación geométrica se utiliza algunas veces para demostrar el Teorema de Varignon.

PROBLEMA RESUELTO 2.9

Objetivo. Comprender el concepto de momento de una fuerza en su formulación vectorial y escalar mediante un ejemplo simple. Identificar que en los problemas del presente curso se utiliza generalmente la formulación escalar dado que solo se consideran sistemas de fuerzas coplanares.

Consigna. Dado el vector fuerza $\vec{F}$ y el vector posición $\vec{r}$ coplanares y distanciados un ángulo θ como se muestra en la **Figura 60**. Determinar $a)$ El momento estático de la fuerza respecto del punto *O* en módulo, dirección y sentido; y, $b)$ El módulo del momento de la fuerza geométricamente. Comparar con el ítem $a)$.

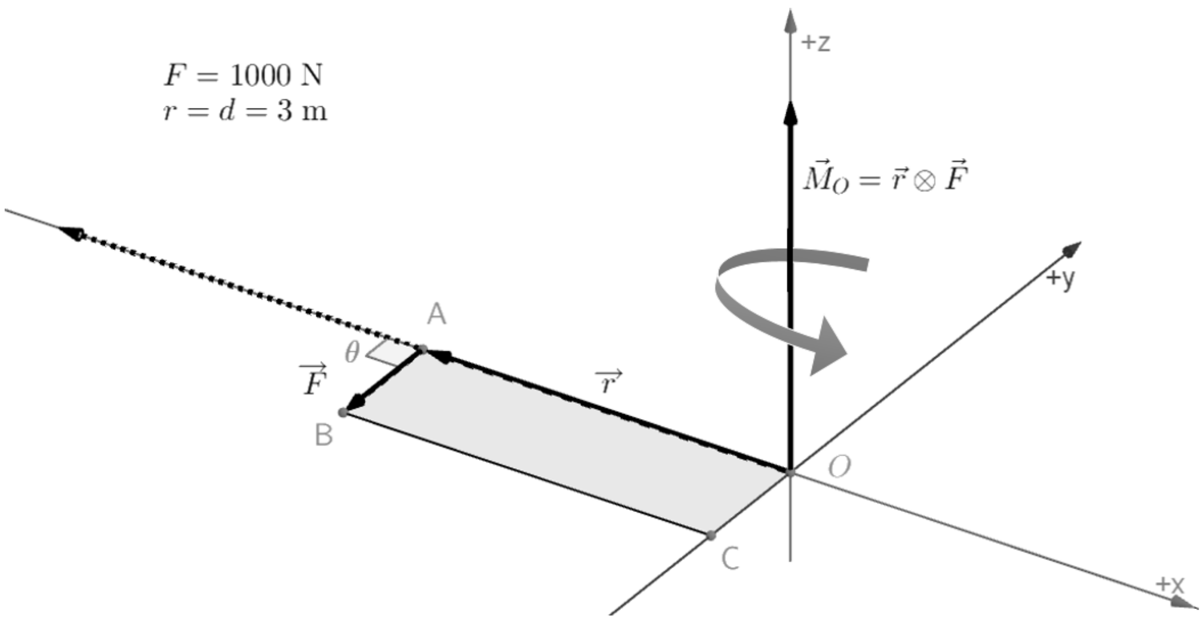


Figura 60. Esquema Posicional (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

$a)$ **El vector momento** $\vec{M}_O$ ya se ha representado gráficamente, para ello ha sido necesario trasladar el vector $\vec{r}$ sobre su recta de acción para que sea válido aplicar el producto cruz vectorial. Además, por inspección se observa que el ángulo θ entre los vectores es de 90°, por lo tanto, $\vec{r}$ coincide con el brazo de palanca $\vec{d}$. Entonces, de la (19) se calcula el **módulo** del momento como el producto del módulo de la fuerza por el módulo del brazo de palanca:

$\overset{\frown}{+} M_O = -1000\ \mathrm{N} \times 3\ \mathrm{m} = -3000\ \mathrm{N \cdot m}$

Notar que el momento es negativo dado que el giro se produce en sentido antihorario. Para percibir esto observe la **Figura 61** en la cual se representa la situación a escala en el plano x-y que es como usualmente se ha de analizar.

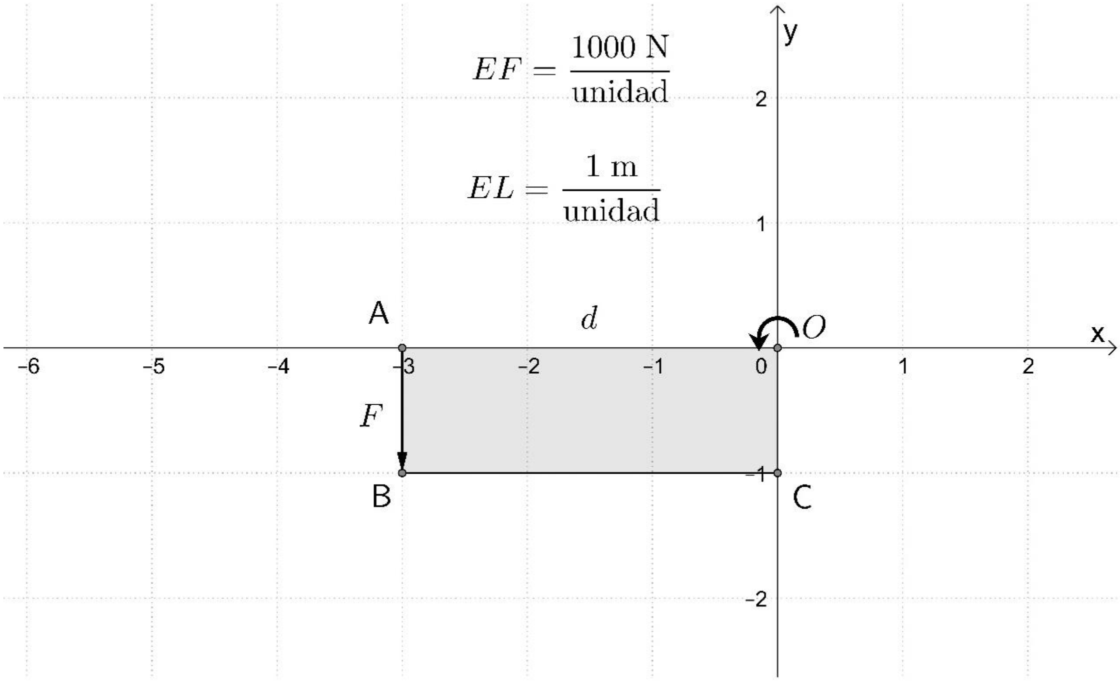


Figura 61. Representación Bidimensional del Problema (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

La **dirección** de $\vec{M}_O$ es según un eje perpendicular al plano que contiene a $\vec{F}$ y $\vec{r}$ y pasa por *O*. El **sentido** está dado por la aplicación de la regla de la mano derecha cuando se realiza el producto vectorial $\vec{r} \otimes \vec{F}$, en ese orden. Si en cambio, se hiciera $\vec{F} \otimes \vec{r}$ el sentido sería opuesto al que se indica en la Figura 59.

Como el análisis que se realiza es en tres dimensiones es más práctico consignar la respuesta con notación cartesiana. Como $\vec{F}$ y $\vec{r}$ están contenidos en el plano x-y, $\vec{M}_O$ es coincidente con el eje z positivo, y, por tanto, solo tiene componente en este eje. Entonces, el vector momento en la forma cartesiana es: $\vec{M}_O = (0\ \mathrm{N \cdot m})\breve{i} + (0\ \mathrm{N \cdot m})\breve{j} + (3000\ \mathrm{N \cdot m})\breve{k}$, pero como las componentes x e y son nulas:

Respuesta $\boxed{\vec{M}_O = (3000\ \text{Nm})\ \breve{k}}$

En esta respuesta $\breve{k}$ es el versor canónico en el eje z análogo a los versores canónicos presentados para x e y en la Sección 2.2.1.2.

$b)$ Para el **cálculo geométrico del módulo** de $\vec{M}_O$ se debe medir el área (Ver Figura 61) del rectángulo y multiplicarla por la escala de momento *EM*:

$$\text{\textit{área} } O\text{ABC} = 3\ \text{unidad} \times 1\ \text{unidad} = 3\ \text{unidad}^2$$

$$EM = EF \times EL = \frac{1000\ \text{N}}{\text{unidad}} \times \frac{1\ \text{m}}{\text{unidad}} = \frac{1000\ \text{N} \cdot \text{m}}{\text{unidad}^2} \quad \therefore$$

$$M_O = 3\ \text{unidad}^2 \times \frac{1000\ \text{N} \cdot \text{m}}{\text{unidad}^2} = 3000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Cuyo resultado coincide con el hallado en el ítem $a)$.

2.2.5.4. Determinación Gráfica de Momentos

El momento estático de fuerzas coplanares desarrollado en la sección anterior también puede determinarse con métodos gráficos. En esta parte del documento se describe el procedimiento gráfico para el caso de una fuerza, luego, se extrapola el concepto a un sistema de fuerzas.

Determinación Gráfica: Una Fuerza

Considere la fuerza $\vec{F}$ y el centro de momentos *O* ubicado a una distancia d según una escala de longitud *EL* (Ver Anexo 10.1) adoptada como se muestra en la **Figura 62** (*izq.*). La línea punteada que pasa por *O* es paralela a la recta de acción de $\vec{F}$. Para hallar gráficamente el momento estático de $\vec{F}$ se define una escala de fuerzas, se halla el vector representativo de la fuerza dada y se construye la poligonal para $\vec{F}$. Luego se define una distancia polar h y un polo O_1 cualquiera, y se traza un polígono polar según la **Figura 62** (*der.*), en la cual se ha sombreado el triángulo $\mathsf{AB}O_1$.

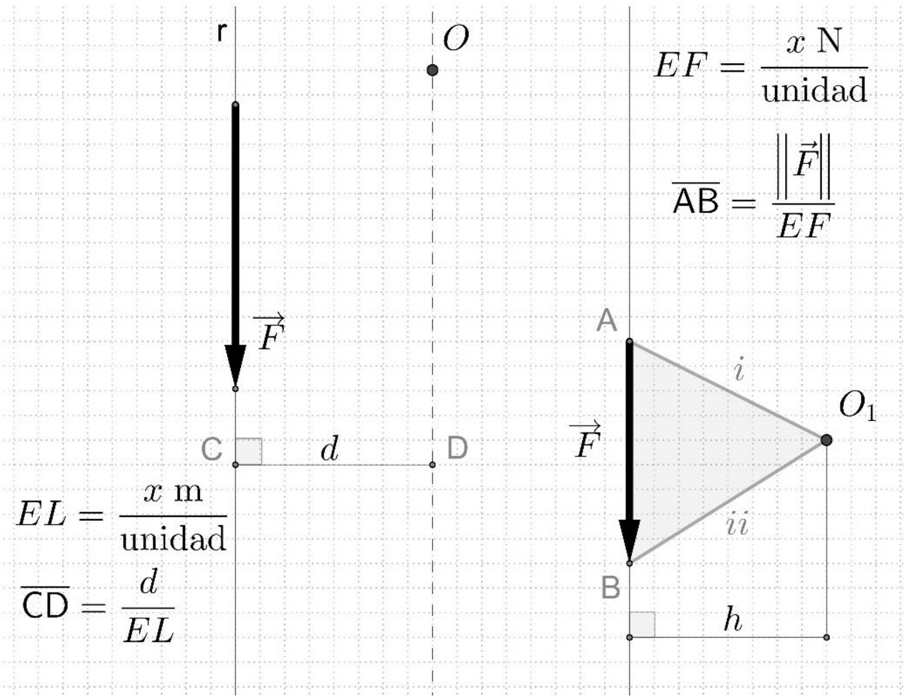


Figura 62. Determinación Gráfica de Momentos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Ahora se traza el polígono funicular correspondiente (Ver **Figura 63**). Los puntos de intersección E, F y G obtenidos definen el triángulo EFG semejante a ABO_1 por tener todos sus lados paralelos. Cabe aclarar que G se obtiene extendiendo el rayo i.

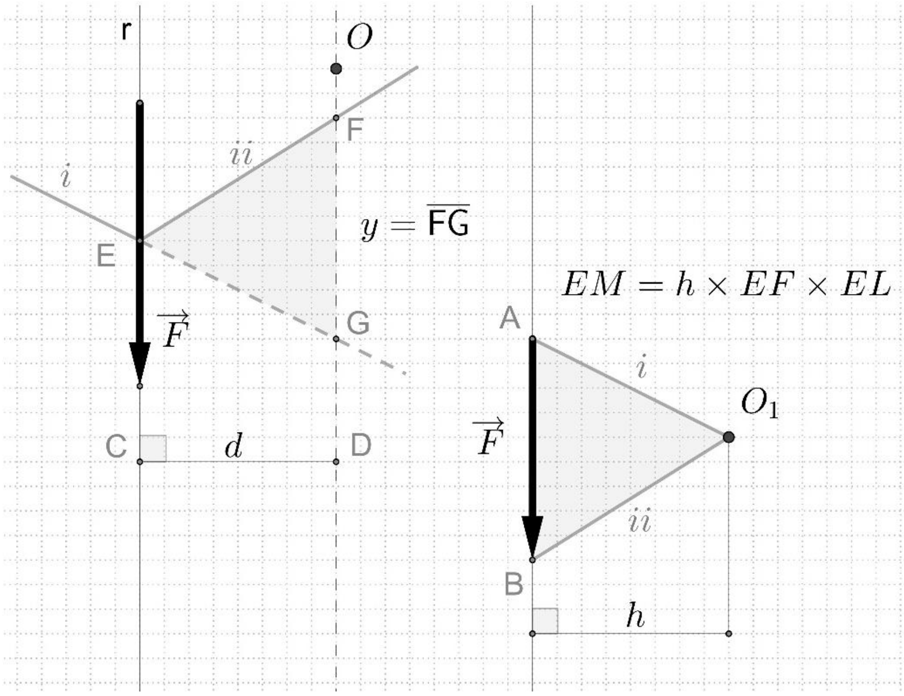


Figura 63. Segmento Proporcional (y) del Momento Estático (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Por lo tanto, la condición geométrica entre los triángulos mencionados permite establecer la proporción indicada en la Ec. (22).

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \overset{\Delta}{ABO_1} \sim \overset{\Delta}{EFG} \therefore \\
&b) \quad \frac{d}{h} = \frac{y}{F} \\
&c) \quad y \times h = F \times d = M_O
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Es decir, las relaciones anteriores demuestran que el segmento y, medido en una cierta escala, es directamente proporcional al módulo del momento estático de la fuerza (M_O) con respecto al punto *O*. El segmento y se mide en la escala de fuerzas adoptada y h en la escala de longitudes. Ver Ec. (23).

$$\overset{\curvearrowright}{+}M_O = y \times h \times EF \times EL \quad [\mathrm{N \cdot m}] \tag{23}$$

En la anterior y y h se miden en cm, EF en N/cm y EL en m/cm por lo tanto, las unidades del módulo del momento son dimensionalmente correctas.

Escala de Momentos. Queda claro que, medida una longitud y determinada, el valor del momento se obtiene multiplicando el valor de dicha longitud por la escala de momentos EM. La EM se define para este caso como la multiplicación la *Escala de Longitud* EL (en la que fue dibujada el brazo de palanca) por la *Escala de Fuerzas* EF (en la que fue dibujado el vector fuerza) por la *Distancia Polar* h. Por ende, la (23) puede escribirse como lo indica la **Ec. (24)**.

$$\begin{aligned} &a) \quad \overset{\curvearrowright}{+}M_O = y \times EM \quad [\mathrm{N \cdot m}] \\ &donde: \\ &b) \quad EM = h \times EF \times EL \quad \left[\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{cm}}\right] \end{aligned} \tag{24}$$

Determinación Gráfica: Caso General

Considere ahora un sistema de cuatro fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.y $\vec{F}_4$ y un centro de momentos O como el de la **Figura 64**. El objetivo es determinar el momento estático de la fuerza resultante y de las fuerzas componentes respecto del punto O aplicando el método que se ha analizado. Para ello es necesario trazar un polígono funicular cualquiera y ubicar la resultante en el sistema. Claro está, que previamente ha sido necesario adoptar las escalas de fuerza y de longitud más convenientes.

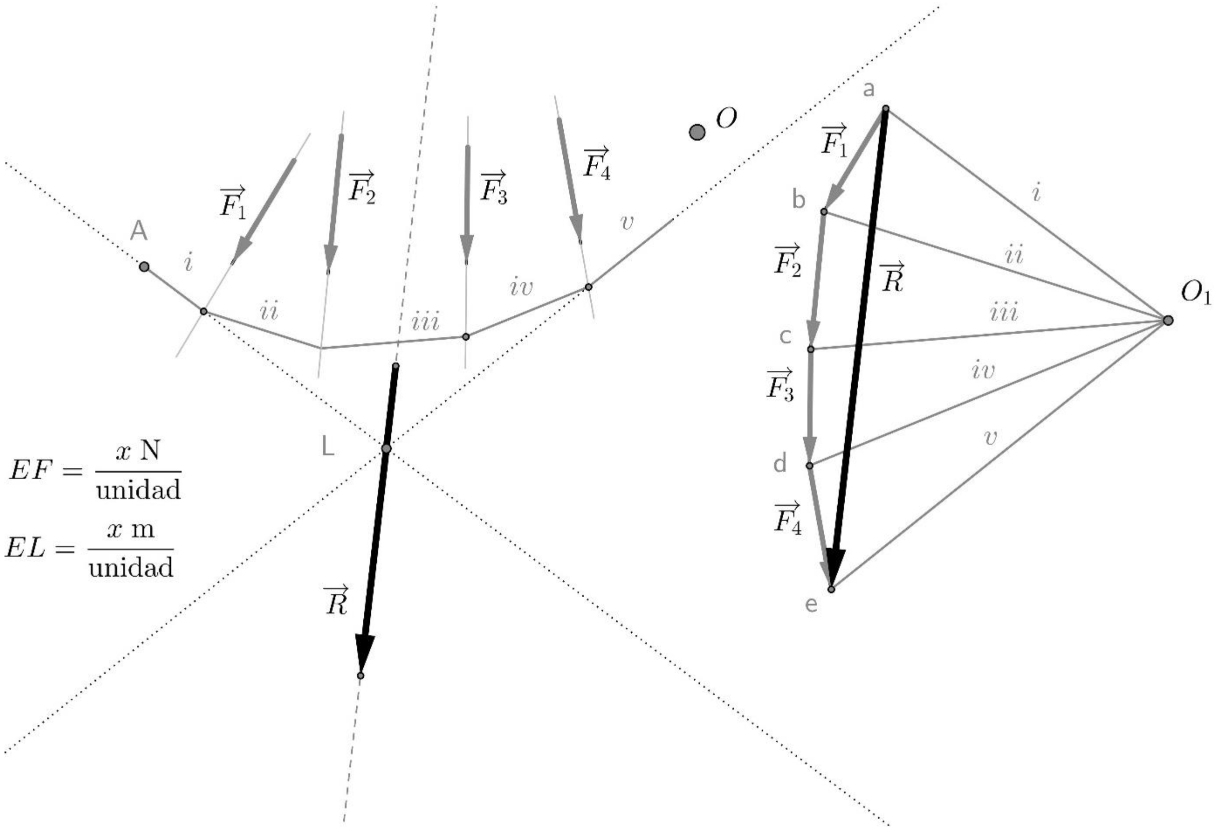


Figura 64. Determinación Gráfica de Momentos: Caso General (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Momento Estático de la Fuerza Resultante. Si se inicia con el cálculo del momento estático de la resultante $\vec{R}$, es necesario trazar una paralela a la recta de acción de $\vec{R}$ por el centro de momentos *O*. Luego, los dos rayos del funicular asociados a la resultante son el rayo i y el rayo v según el método que se ha analizado para el caso de una fuerza. Por tanto, estos rayos determinan el segmento $y_R = \overline{\mathsf{BC}}$ que leído en la escala de momentos da el valor del momento M_O como se observa en la Ec. (25). Recordar que M_O es el módulo del vector momento $\vec{M}_O$.

$$\overset{\frown}{+}\left(M_R\right)_O = y_R \times EM \quad \left[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\right] \tag{25}$$

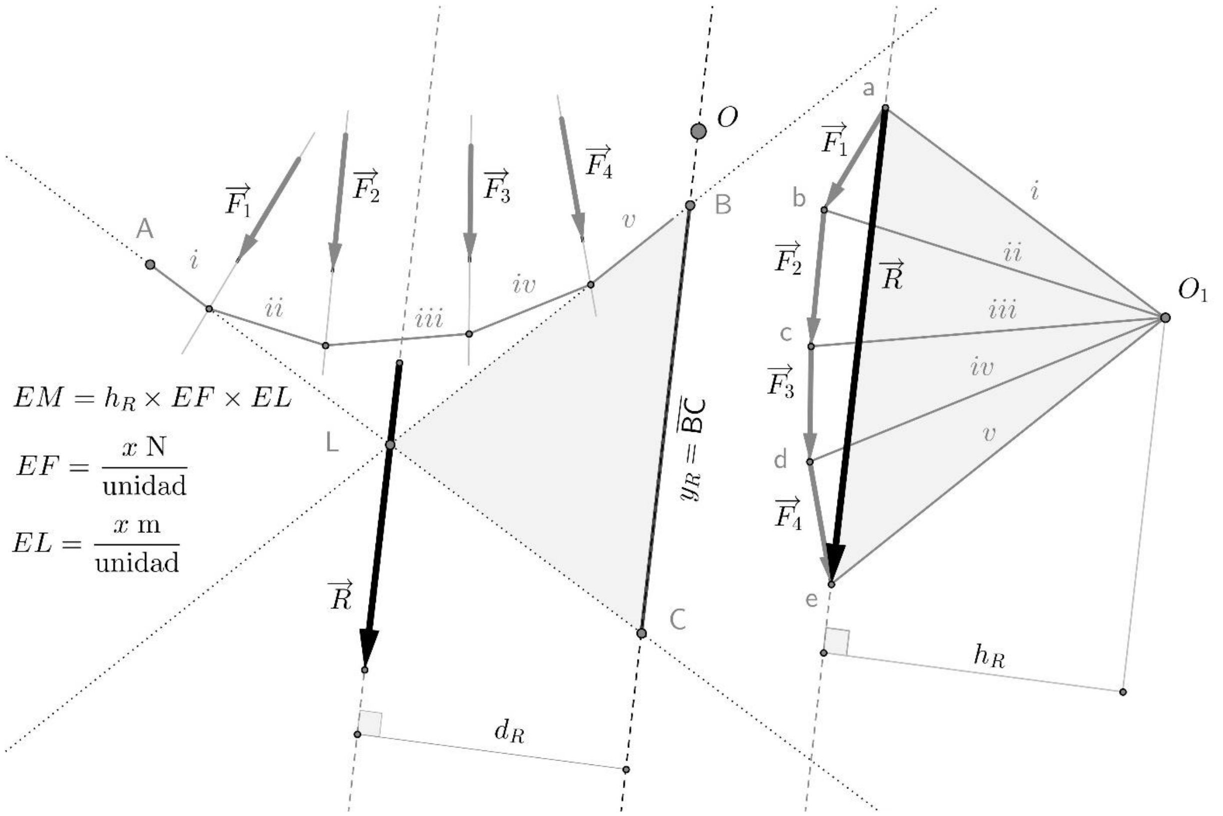


Figura 65. Momento Estático de $\vec{R}$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Observe que el triángulo formado por los puntos LBC es semejante al triángulo $\overset{\Delta}{O_1 ae}$ del polígono polar, lo que es la base de este análisis (comparar con la Figura 63). En la sección siguiente se ha de demostrar que el momento estático de la resultante es igual al momento estático del sistema de fuerzas.

Momento Estático de Una Fuerza Componente. Se puede en igual forma obtener el momento estático para cualquiera de las fuerzas del sistema o para una resultante parcial. Por ejemplo, el momento estático de $\vec{F}_2$ respecto de *O*, está dado por la Ec. (26) e indicada en la **Figura 66**.

$$\overset{\curvearrowright}{+}\left(M_{F_2}\right)_O = y_{F_2} \times EM \quad [\mathrm{Nm}] \tag{26}$$

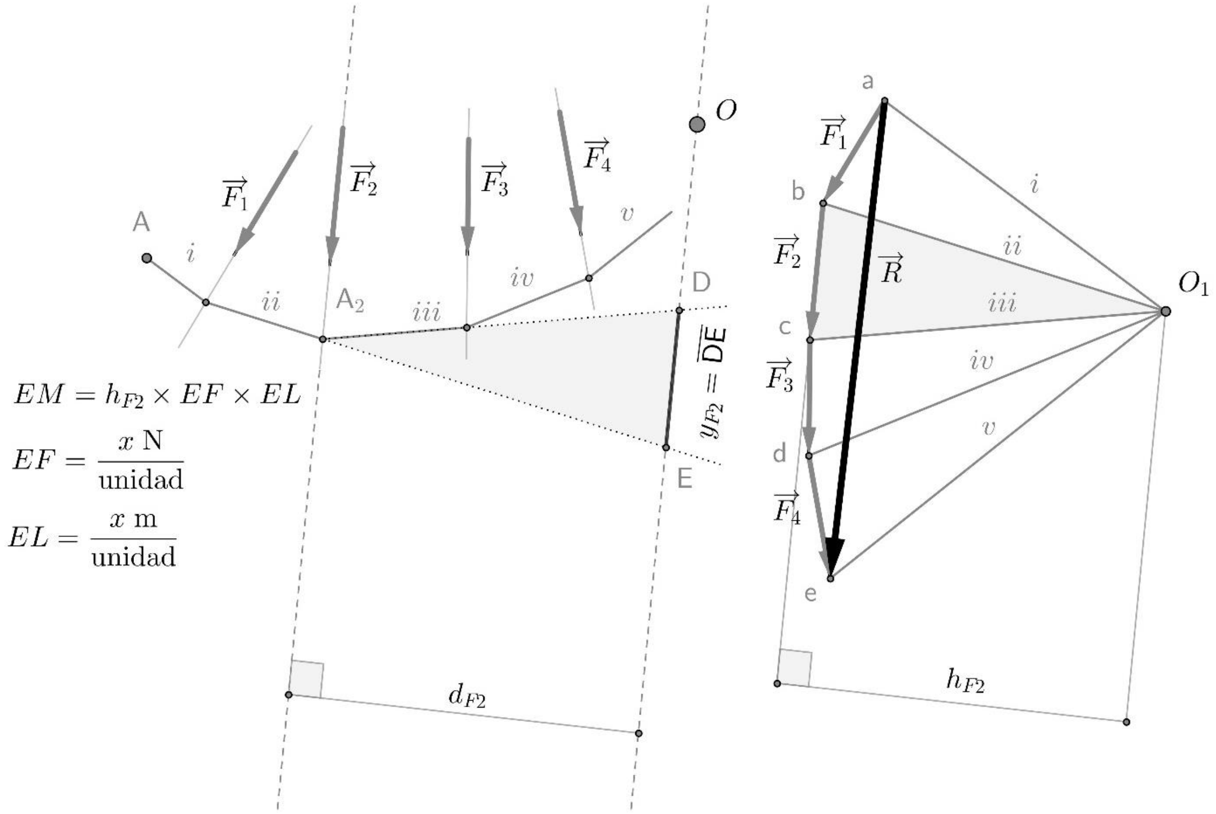


Figura 66. Momento Estático de $\vec{F}_2$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Observe nuevamente que $\overset{\Delta}{A_2DE} \sim \overset{\Delta}{O_1bc}$. Estas construcciones gráficas indicadas se basan en el teorema de Varignon (PANSERI, 1978) el cual se analiza en la sección siguiente. Por otra parte, ejemplos ilustrativos de este método grafico se realizan cuando se abordan los sistemas no concurrentes a fin de contrastar con el método analítico.

2.2.5.5. Teorema de Varignon

Según HIBBELER (2010) un concepto que se usa a menudo en Mecánica es el *Principio de Momentos*, al cual también se le llama a veces *Teorema de Varignon* puesto que originalmente lo desarrolló el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722). El Principio establece que el *momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al mismo punto*.

En efecto, para un sistema de fuerzas, se puede enunciar como: *la suma de los momentos estáticos de cada una de las fuerzas componentes de un sistema respecto a un centro O dado, es igual al momento de la resultante de dicho sistema con respecto al mismo centro* (PANSERI, 1978). Ver **Ec. (27)**.

$$\overset{\curvearrowright}{+}\left(M_R\right)_O = \sum_{i=1}^{n}(\pm)F_i \times d_i = F_1 \times d_1 + \ldots + F_n \times d_n = R \times d_R \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}] \tag{27}$$

Donde d_i representa la distancia perpendicular a las rectas de acción de las F_i al centro de momentos. Del mismo modo d_R es la distancia perpendicular desde la recta de acción de $\vec{R}$ al centro de momentos. Como se analizado y como se observa en la (27) la suma de los momentos de las componentes es una suma algebraica respetando la convención de momentos positivos $\overset{\curvearrowright}{+}M$.

Continuando con este principio, PANSERI (1978) amplia: este *teorema* en realidad puede considerarse simplemente como consecuencia de la definición de resultante (Ver Sección 2.2.3.1) pues, desde el momento en que la *resultante* de un sistema de fuerzas es equivalente al sistema dado lo es en todos sus *efectos* y la consideración de momento estático no es más que un caso particular de estos efectos.

El teorema de Varignon se puede demostrar de varias maneras, sin embargo, aquí se utiliza por conveniencia, el concepto de determinación gráfica de momentos que se ha analizado (Ver **Figura 67**).

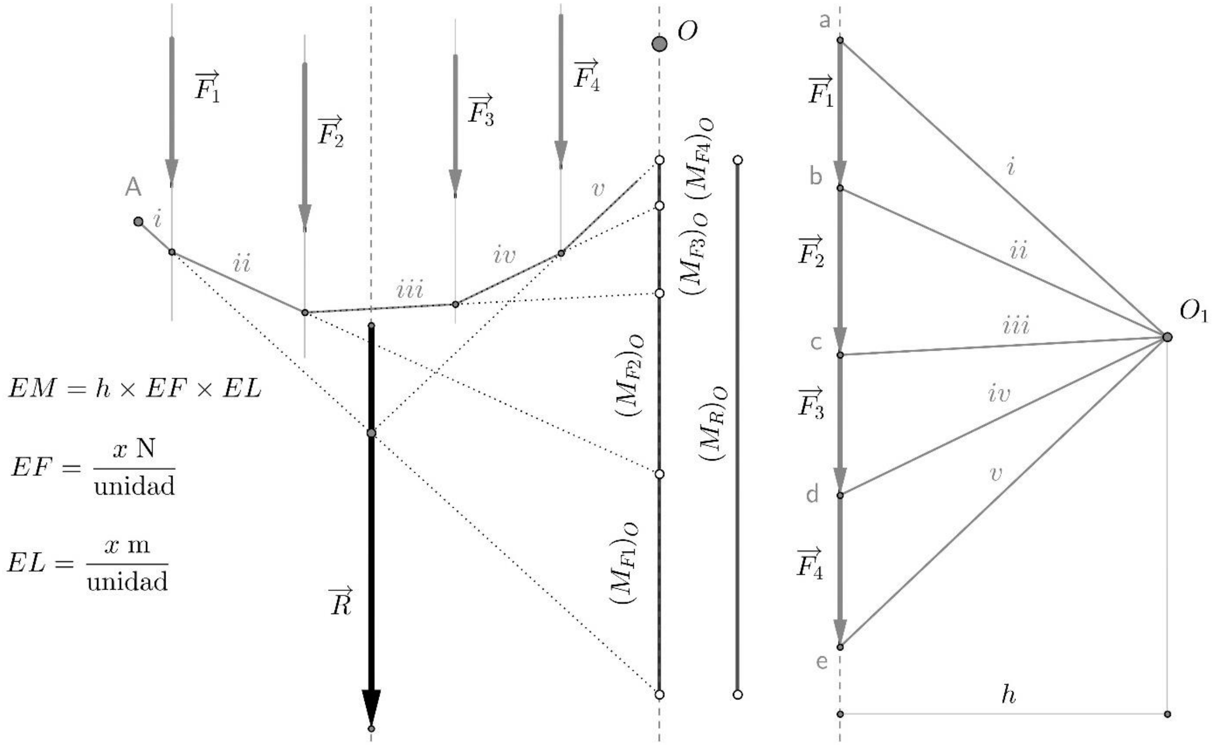


Figura 67. Demostración del Teorema de Varignon (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En la figura anterior se ha optado por un sistema de fuerzas paralelas por una cuestión pedagógica, sin embargo, la demostración puede llevarse a cabo con cualquier tipo de sistema de fuerzas. En efecto, trazando por *O* una paralela a dirección de las fuerzas, se ha visto que el segmento interceptado por dos rayos consecutivos del funicular, mide en una cierta escala el momento estático de la fuerza.

Ahora bien: el segmento interceptado por los rayos i y v da el momento estático de $\vec{R}$ respecto a *O* y como se ve, es la suma de todos los segmentos representativos de los momentos estáticos de las fuerzas dadas o lo que es lo mismo, de las componentes de $\vec{R}$ quedando demostrado lo deseado.

Para problemas en dos dimensiones, **Figura 68**, se puede descomponer la fuerza en sus componentes rectangulares y después determinar el momento de la fuerza aplicando el principio de momentos con un análisis escalar como se muestra en la **Ec. (28)**.

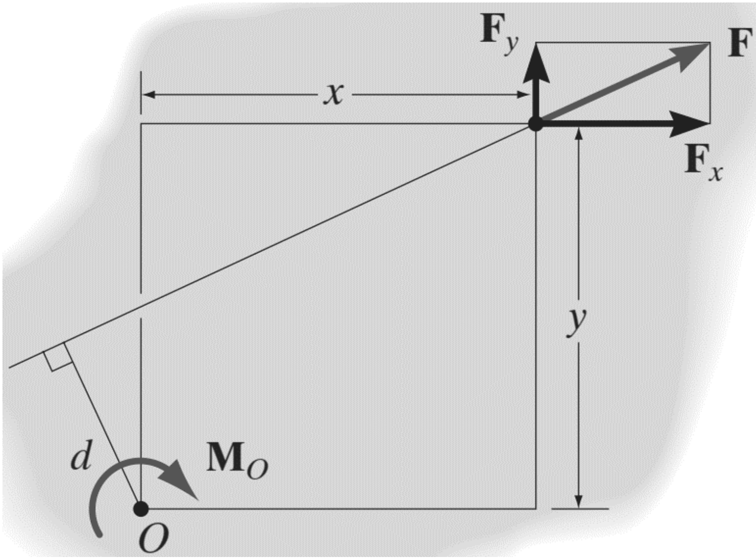


Figura 68. Teorema de Varignon utilizando las Componentes Rectangulares de la Fuerza dada (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$\overset{\curvearrowright}{+} M_O = \quad F_x \times y - F_y \times x \quad [\mathrm{N \cdot m}] \tag{28}$$

Por lo general, este método es más sencillo que determinar el mismo momento con $M_O = \quad F \times d$. En lo que respecta a la aplicación del teorema visto no se incorporan aquí problemas resueltos dado que estos han de estar implícitos en temas como sistemas de fuerzas no concurrentes y baricentro de figuras planas (remitirse a esas secciones).

2.2.6. Cupla de Fuerzas o Par de Fuerzas

Esta sección busca que el lector comprenda el concepto de par de fuerzas y sus posibles *aplicaciones*, además, como en el caso del momento de una fuerza, mostrar el carácter vectorial del *momento de una cupla*. Sin duda que los distintos autores citados desarrollan con más profundidad otros aspectos también interesantes pero que aquí se nombran solamente como un listado bajo el titulo *Propiedades de un Par de Fuerzas* por no ser estos aspectos propios de los problemas típicos de la cátedra. Queda, por lo tanto, como tarea del alumno ahondar en ellos.

Dicho lo anterior, un par se define como dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud, con sentidos opuestos, y están separadas por una distancia perpendicular d, **Figura 69** (*der.*).

Como la fuerza resultante es cero, el *único efecto* de un par es producir una *rotación* o tendencia a rotar en una dirección específica. Por ejemplo, imagine que usted conduce un automóvil con ambas manos en el volante y está haciendo un giro. Una mano empujará el volante mientras que la otra lo jalará, con esto el volante girará, **Figura 69** (*izq.*).

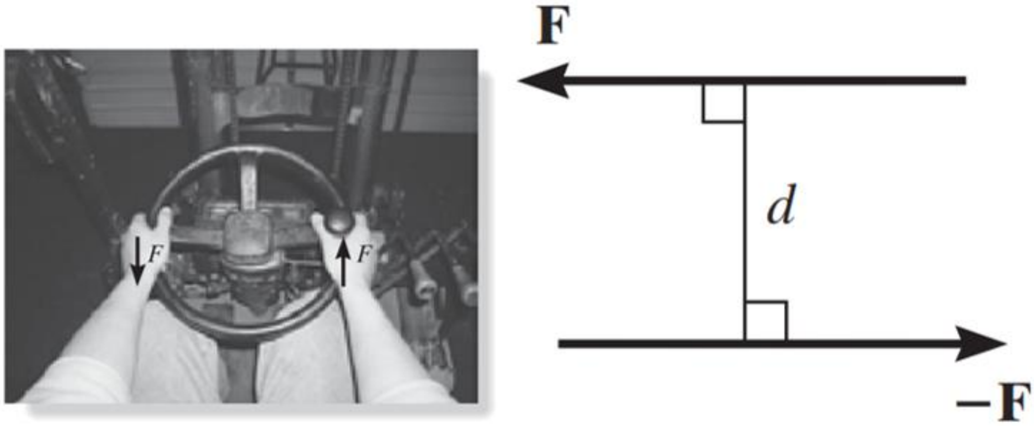


Figura 69. Cupla o Par de Fuerzas (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Momento de un Par de Fuerzas. El momento producido por un par se denomina momento de par. Se puede demostrar fácilmente que el momento de par es un *vector libre* (Ver **Figura 70**), es decir, puede actuar en cualquier punto. Por lo tanto, este concepto es diferente al momento de una fuerza, que requiere un punto (o eje) de aplicación definido con respecto al cual se determinan los momentos (comparar la Figura 70 con la 54-a).

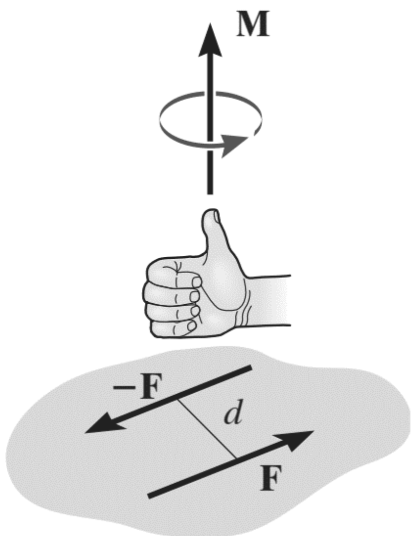


Figura 70. Representación del Momento de un Par de Fuerzas (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Formulación Escalar del Momento de Un Par de Fuerzas. Como en el caso del cálculo del momento de una fuerza, el momento de un par puede calcularse con un enfoque escalar y otro vectorial, sin embargo, a los efectos del curso se presenta solo el primer enfoque; como sigue.

Magnitud. El módulo o magnitud M del momento de una par $\vec{M}$ (o ***M***, según este autor, Figura 70), se define como lo indica la **Ec. (29)**. Si el giro de las fuerzas es en el sentido de las agujas del reloj el momento del par es positivo, así el momento del par de la Figura 69 es negativo.

$$\overset{\curvearrowright}{+}\left\|\vec{M}\right\| = M = F \times d \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}] \tag{29}$$

Donde F es la magnitud de una de las fuerzas y d la distancia perpendicular o brazo de momento entre las fuerzas. La *dirección* y el *sentido* del momento de par se determinan mediante la *regla de la mano derecha*, donde el pulgar indica la dirección cuando los dedos se cierran con el sentido de rotación causado por las dos fuerzas. En todos los casos, $\vec{M}$ actúa perpendicularmente al plano que contiene estas fuerzas.

Propiedades de Un Par de Fuerzas. **1-**Una cupla de fuerzas *no puede ser reducida* a una sola fuerza resultante, sino que ya está en su forma más simple; **2-**En una cupla de fuerzas se puede modificar el módulo de las fuerzas y el del brazo de palanca manteniendo el momento constante sin alterar su efecto; **3-**Una cupla de fuerzas *puede desplazarse en su plano* sin alterar su efecto; **4-**Una cupla de fuerzas *puede desplazarse paralelamente a su plano* sin alterar su efecto; **5-***Pares equivalentes*. Se dice que dos pares son equivalentes si producen un momento con la misma magnitud, dirección y sentido. Por ejemplo, los dos pares mostrados en la **Figura 71** son equivalentes porque cada momento de par tiene una magnitud de

$M = 40 \text{ N} \times 0{,}3 \text{ m} = 30 \text{ N} \times 0{,}4 \text{ m} = 12 \text{ Nm}$, y cada uno de ellos está dirigido hacia el plano de la página.

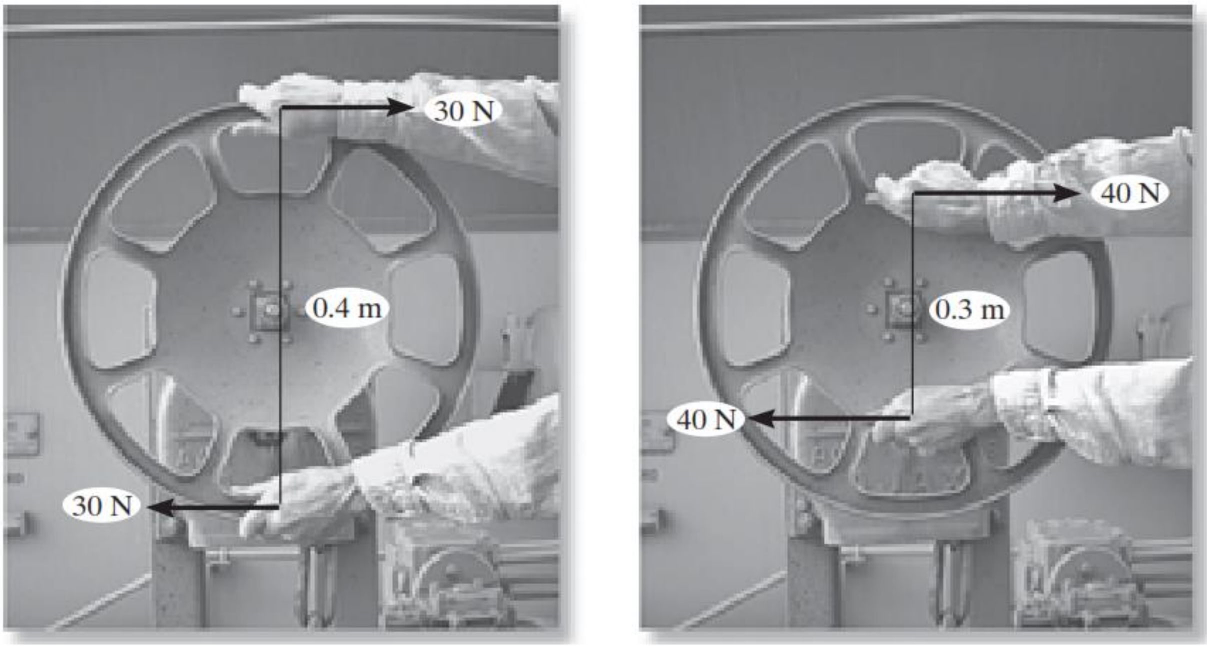


Figura 71. Par de Fuerzas Equivalentes (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observe que en el segundo caso se requieren fuerzas más grandes para crear el mismo efecto de giro, debido a que las manos están colocadas más cerca una de la otra. Además, si la rueda estuviera conectada al eje en un punto distinto de su centro, ésta giraría de igual forma al aplicar cada uno de los pares porque el par de 12 Nm es un *vector libre*; **6-**El módulo del momento de una cupla es dado gráficamente por el área del paralelogramo que tiene como lados opuestos los segmentos representativos de las fuerzas de la cupla (Ver **Figura 72**). Deben tenerse en cuenta, naturalmente, las escalas de longitudes y de fuerzas. Refiriéndonos a la figura citada se tiene: $M = F_1 [\text{cm}] \times EF \times b[\text{cm}] \times EL$. Donde b es el brazo de momento o brazo de cupla (anteriormente denominada con d).

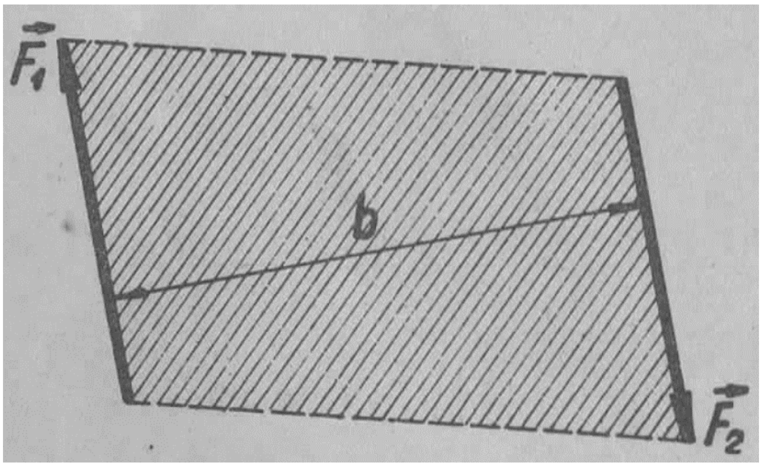


Figura 72. Interpretación Geométrica del Módulo del Momento de una Cupla (Fuente: Adaptado de (DI PIETRO, 1968).

7-El *Momento de Par Resultante*. Como los momentos de par son vectores libres, su resultante pueden determinarse mediante la suma de vectores. Por ejemplo, considere los momentos de cupla $\boldsymbol{M}_1$ y $\boldsymbol{M}_2$ que actúan sobre el tubo de la **Figura 73** (a).

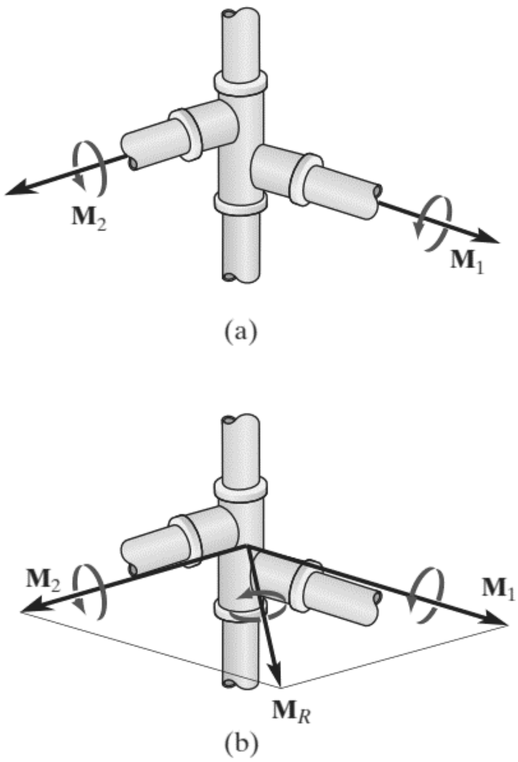


Figura 73. Momento de Par Resultante (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

En efecto, como cada momento de par es un vector libre, se puede unir sus colas en cualquier punto arbitrario y encontrar el momento de par resultante, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$ como se muestra en la **Figura 73** (b). Si sobre el cuerpo actúan más de dos momentos de par, se puede generalizar este concepto. **8-***Composición de Cuplas*. Componer dos o más cuplas situadas en el mismo plano o en planos paralelos significa encontrar otra cupla, llamada resultante, cuyo efecto sea igual a la suma algebraica de los momentos de las cuplas componentes (DI PIETRO, 1968); **9-** *Composición de Una Fuerza y Una Cupla Coplanares*. La composición de una fuerza con un par de fuerzas provoca un desplazamiento de la fuerza (DI PIETRO, 1968), esta fuerza es la resultante del sistema. Luego, la composición de una cupla y una fuerza se reduce a una fuerza.

3. SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES

3.1. Introducción

Dos o más fuerzas constituyen un sistema de fuerzas. Se llaman fuerzas coplanares a aquellas cuyas rectas de acción se encuentran todas en un mismo plano. Los sistemas que se analizan en este curso son coplanares y según una clasificación tradicional son los que se indican en la **Figura 74**.

$$\text{Sistemas Coplanares}\begin{cases} \textbf{\textit{Colineales}} \\ \textbf{\textit{Concurrentes}}\begin{cases}\text{Caso } 2 \text{ Fuerzas} \\ \text{Caso } \boldsymbol{n} \text{ Fuerzas}\end{cases} \\ \textbf{\textit{No Concurrentes}}\begin{cases}\text{Fuerzas Cualesquiera} \\ \text{Fuerzas Paralelas}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 74. Sistemas de Fuerzas Coplanares (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Las características propias de cada sistema se presentan en detalle en la Sección 3.3, de ellos interesa que el alumno tenga dominio de los siguientes aspectos: 1) La interpretación de las *condiciones de equilibrio* del sistema, tanto gráficas como analíticas, Sección 3.2; 2) La reducción de dichos sistemas (*composición*), Sección 3.3; y, 3) La resolución de *problemas de equilibrio* simples mediante las ecuaciones de equilibrio; Sección 3.4.

3.2. Condiciones de Equilibrio de Sistemas de Fuerzas

Si se recuerda el objeto de la *Estática Gráfica* presentado al inicio del material, es necesario, también, que el estudiante interprete las condiciones gráficas y analíticas que se deben cumplir para que un sistema se halle en *equilibrio estático*.

En este sentido, se debe mencionar que el *efecto cinemático* de las fuerzas se manifiesta por una *traslación* o por una *rotación*, y que es propósito de la Estática contrarrestar aquellos desplazamientos para obtener el equilibrio estático del sistema. Este último problema se denomina: *Equilibrio de un Sistema de Fuerzas*.

Para poder enunciar las condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas es necesario entender las diferentes características constructivas que pueden adoptar tanto el polígono vectorial como el polígono funicular. En función a estas características el cuerpo rígido tiene uno, ninguno o todos los efectos cinemáticos mencionados como se analiza a continuación.

3.2.1. Interpretación Cinemática de los Polígonos Vectorial y Funicular

Antes de presentar los casos que se pueden dar cabe aclarar que por una cuestión de conveniencia en esta ocasión se ha de respetar la nomenclatura del autor citado en el análisis de los mismos.

Caso N.º 1: Polígono Vectorial Abierto y Funicular Abierto

Sea un sistema de fuerzas no concurrentes $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ (Ver **Figura 75**) y sus correspondientes polígonos vectorial, polar y funicular. La presencia de una resultante $\boldsymbol{R}$ indica que la chapa C está sometida a una traslación[14]. El vectorial se presenta abierto y el funicular ofrece la característica que su primer y último rayos son concurrentes en A. Un funicular en tales condiciones se denomina funicular abierto.

[14] El concepto de chapa plana se analiza en la Sección 5.

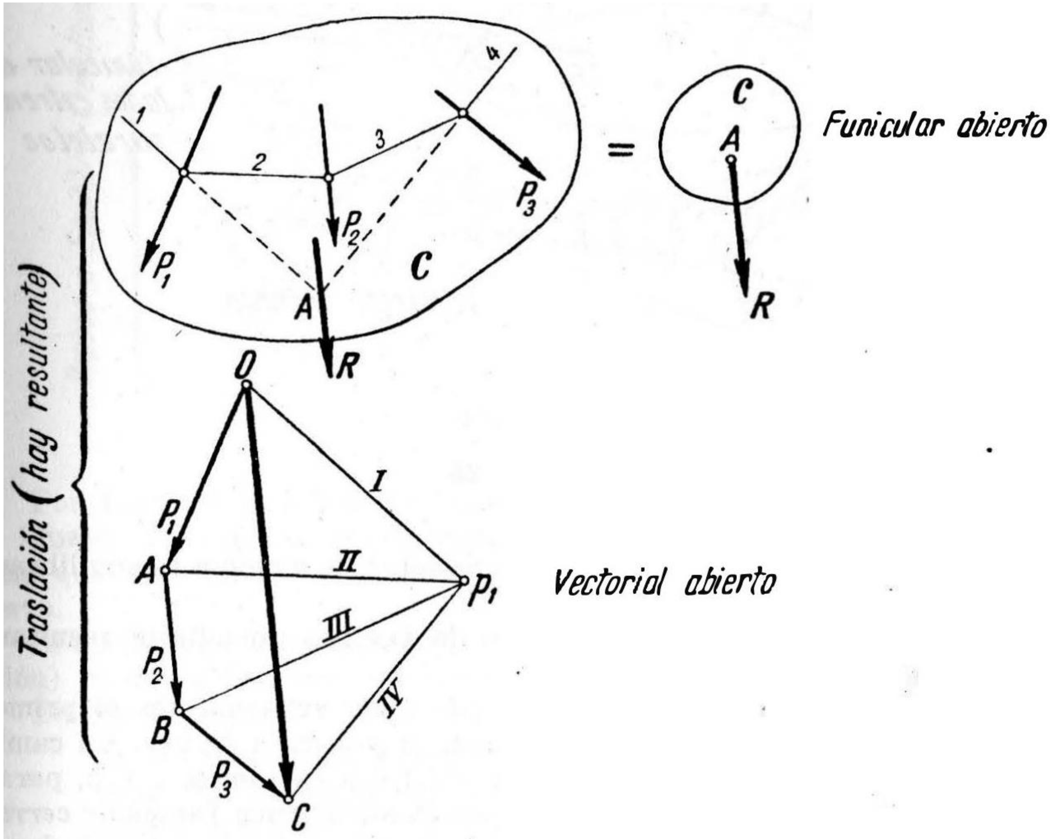


Figura 75. El Sistema es Equivalente a una Resultante: Existe sólo Traslación (Fuente: RAFFO, 2007).

En consecuencia, puede decirse: *Si un sistema de fuerzas admite resultante (traslación) sus correspondientes polígonos vectorial y funicular son abiertos*.

Caso N.º 2: Polígono Vectorial Cerrado y Funicular Abierto

Sea un sistema de fuerzas no concurrentes $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ (Ver **Figura 76**) que presenta un vectorial cerrado. En consecuencia, el sistema dado no admite resultante (ausencia de traslación). El polígono polar se caracteriza por tener superpuestos el primer y el último radio polares que lo forman: 1 y 5.

En cambio, el polígono funicular se presenta con sus lados extremos, 1 y 5, paralelos. Se denomina un funicular en estas condiciones funicular cerrado (en un *punto impropio* o sea en el infinito) o también funicular de lados extremos paralelos.

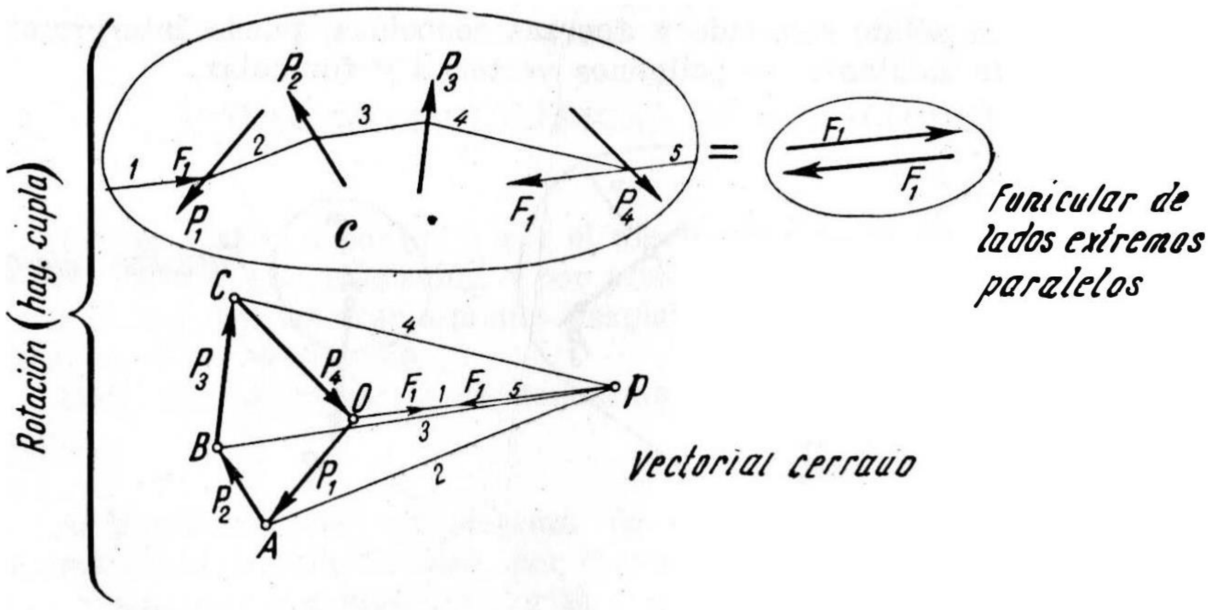


Figura 76. El Sistema es Equivalente a una Cupla: Existe sólo Rotación (Fuente: RAFFO, 2007).

Por consiguiente: *Si un sistema de fuerzas se reduce a una cupla (rotación) el correspondiente polígono vectorial es cerrado y el funicular tiene sus lados extremos paralelos*.

La inversa siempre se verifica; es decir: si el funicular es de lados extremos paralelos y el vectorial cerrado, el sistema correspondiente se reduce a una cupla (rotación).

Caso N.º 3: Polígono Vectorial Cerrado y Funicular Cerrado

Por último, considerar el sistema de la **Figura 77**, cuyo vectorial resulta cerrado. Construido el funicular correspondiente se observa que el primer rayo (1) y el último (5), están superpuestos. Un funicular en estas condiciones se dice *funicular cerrado*.

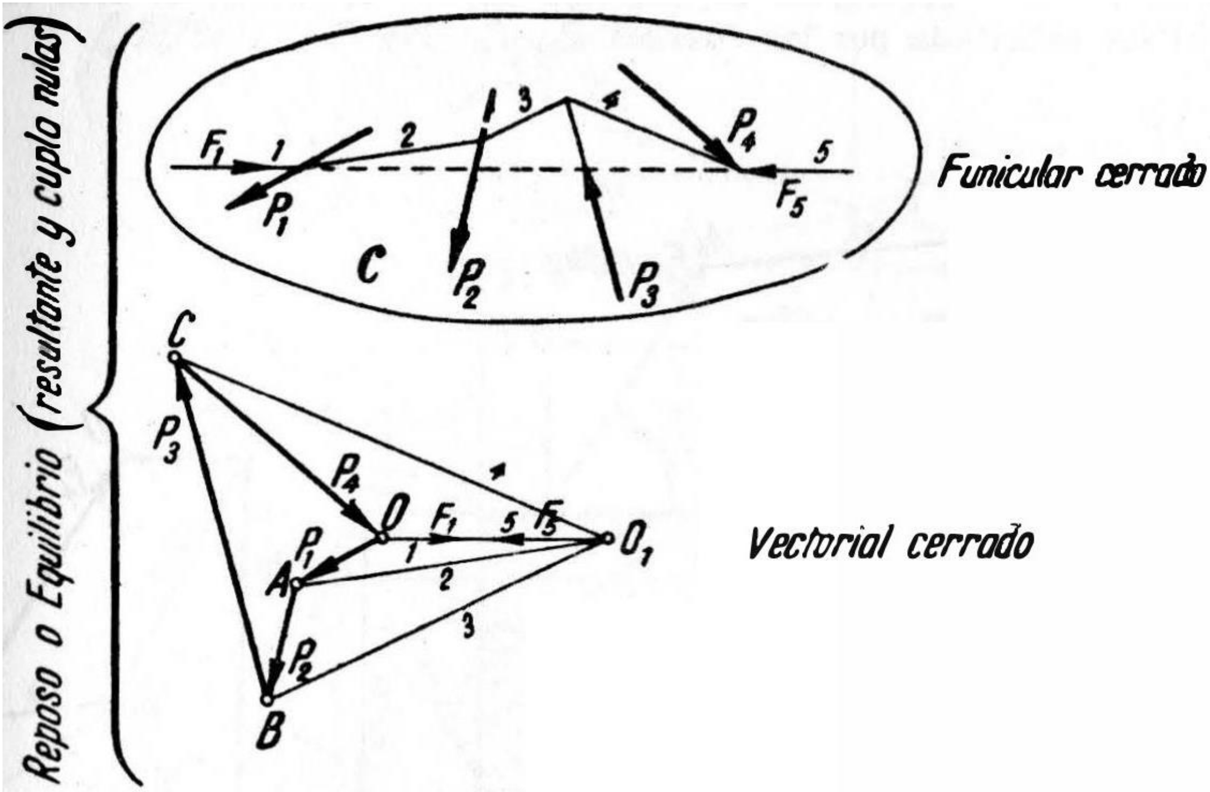


Figura 77. El Sistema está en Equilibrio: No Existe Rotación ni Traslación (Fuente: RAFFO, 2007).

El sistema dado de fuerzas, no admite pues resultante (no hay traslación) ni cupla (no hay rotación): está en equilibrio, o sea en reposo.

En conclusión: *Si un sistema de fuerzas carece de resultante y de cupla (reposo) los correspondientes polígonos vectorial y funicular son ambos cerrados*.

De lo dicho en los tres casos anteriores se deduce que un polígono vectorial traduce gráficamente la existencia de traslación debido a la presencia de una resultante; en cambio el polígono funicular señala, con la presencia de una cupla, un movimiento de rotación.

3.2.2. Condiciones Gráficas de Equilibrio

Comprendido el tema anterior, solo resta enunciar las condiciones gráficas de equilibrio para los distintos tipos de sistemas de fuerza como se observa en la **Figura 78**. Cabe aclarar, que se denominan condiciones gráficas de equilibrio por cuanto hacen referencia a los polígonos vectorial y funicular.

$$\text{Condiciones Gráficas de Equilibrio}\begin{cases} \textbf{\textit{Colineales}} \Leftrightarrow \text{Polígono Vectorial Cerrado} \\ \textbf{\textit{Concurrentes}} \Leftrightarrow \text{Polígono Vectorial Cerrado} \\ \textbf{\textit{No Concurrentes}} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Polígono Vectorial Cerrado} \\ \text{Polígono Funicular Cerrado} \end{cases} \end{cases}$$

Figura 78. Condiciones Gráficas de Equilibrio (Adaptado de RAFFO, 2007).

La figura anterior expone las condiciones *necesarias y suficientes* ($\Leftrightarrow$) para el reposo de un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas coplanares, por ejemplo: *si el sistema colineal está en equilibrio implica que el polígono vectorial sea cerrado, o bien, si el polígono vectorial es cerrado implica que el sistema colineal está en equilibrio*.

3.2.3. Condiciones Analíticas de Equilibrio

Las condiciones analíticas de equilibrio deben enunciarse también para los distintos sistemas de fuerzas presentados. Estos enunciados se presentan naturalmente, en términos de ecuaciones que se denominan *Ecuaciones de Equilibrio*.

1ro. Sistemas de Fuerzas Concurrentes.

En este caso las fuerzas aplicadas solo pueden generar un efecto cinemático de traslación del cuerpo (modelado como una partícula), por lo tanto, para anular el efecto traslatorio hay que anular la resultante del sistema. No es necesario exigir aquí que la sumatoria de momentos sea cero ya que toda rotación de la partícula queda descartada por ser imposible la presencia en ella de un brazo de palanca, luego:

Un sistema de fuerzas concurrentes está en equilibrio estático, cuando la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre cada uno de dos ejes cualesquiera es cero.

Lo expresado en los dos párrafos anteriores se traduce simbólicamente en dos ecuaciones de equilibrio según se indica en la **Ec. (30)**.

Las 2 *Ecuaciones de Equilibrio* de un Sistema de *Fuerzas Concurrentes*

$$a) \quad \sum F_{x} = 0 \qquad \textbf{(30)}$$
$$b) \quad \sum F_{y} = 0$$

En otras palabras, la sumatoria de las componentes (escalares o vectoriales) en x tiene que ser cero ($\boldsymbol{F}_{x} = 0$) y la sumatoria de las componentes en y tiene que ser cero ($\boldsymbol{F}_{y} = 0$). Lo anterior también es válido para los **Sistemas Colineales**, por lo tanto, no es necesario repetir ecuaciones.

2do. Sistemas de Fuerzas No Concurrentes

En este caso las fuerzas aplicadas pueden originar una traslación o una rotación del cuerpo. Por lo tanto, para anular el efecto traslatorio hay que anular la resultante del sistema; y, para eliminar toda posible rotación es preciso anular el momento del sistema de fuerzas respecto de cualquier punto del plano, luego:

Un sistema de fuerzas no concurrentes está en equilibrio estático, cuando la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre cada uno de dos ejes cualesquiera es nula, como así también nula la suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto de cualquier punto del plano.

Lo expresado en los dos parágrafos anteriores se traduce simbólicamente en tres ecuaciones de equilibrio según se indica en la **Ec. (31)**.

Las 3 *Ecuaciones de Equilibrio* de Un Sistema de *Fuerzas No Concurrentes*

$$a) \quad \sum F_{x} = 0$$
$$b) \quad \sum F_{y} = 0 \qquad \textbf{(31)}$$
$$c) \quad \sum M_{O} = 0$$

Hasta aquí el análisis de los sistemas de fuerza ha sido netamente teórico a fin de lograr una comprensión de todos los conceptos necesarios que permitan abordar distintas *situaciones problemáticas*, es decir, resolver el sistema, de esto último se ocupa la sección siguiente.

3.3. Resolución de Sistemas de Fuerzas

Ya se ha hecho mención de los tipos de sistemas de fuerzas de interés, a saber: *colineales, concurrentes* y *no concurrentes*, particularmente, las concurrentes suelen enmarcarse dentro del estudio de la *Estática de Partículas*, mientras que las no concurrentes dentro del estudio del *Cuerpo Real* [15](BEER *et al.* 2007).

En otras palabras, cuando se trate con fuerzas concurrentes se sobreentiende que estas actúan sobre un cuerpo cuyo tamaño y forma puede modelarse como una partícula y que todas las fuerzas ejercidas sobre él se suponen aplicadas en un mismo punto.

Específicamente, la *resolución* de un sistema de fuerzas implica la *composición* del mismo, es decir, hallar la resultante en módulo, dirección y sentido tanto gráfica como analíticamente; y ubicarla en el sistema también con métodos gráficos y analíticos, como se resume en la **Figura 79**.

Figura 79. Resolución de un Sistema de Fuerzas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

---

[15] Implica necesariamente considerar al cuerpo con su forma física real (: no es posible tratarlo como una partícula).

La comprensión de lo anterior permite analizar cada uno de los sistemas con un *enfoque más bien práctico* exponiendo específicamente el método gráfico y analítico pertinente a cada caso e incorporando solamente aquellos conceptos necesarios que aún no han sido desarrollados.

3.3.1. Fuerzas Colineales

Un *sistema de fuerzas colineales* es aquella en que todas las fuerzas actúan sobre la misma recta de acción (Ver **Figura 80**). Se pueden encontrar diversos casos en los que esta situación se presenta y la mayoría de ellos no presentan grandes inconvenientes resolutivos.

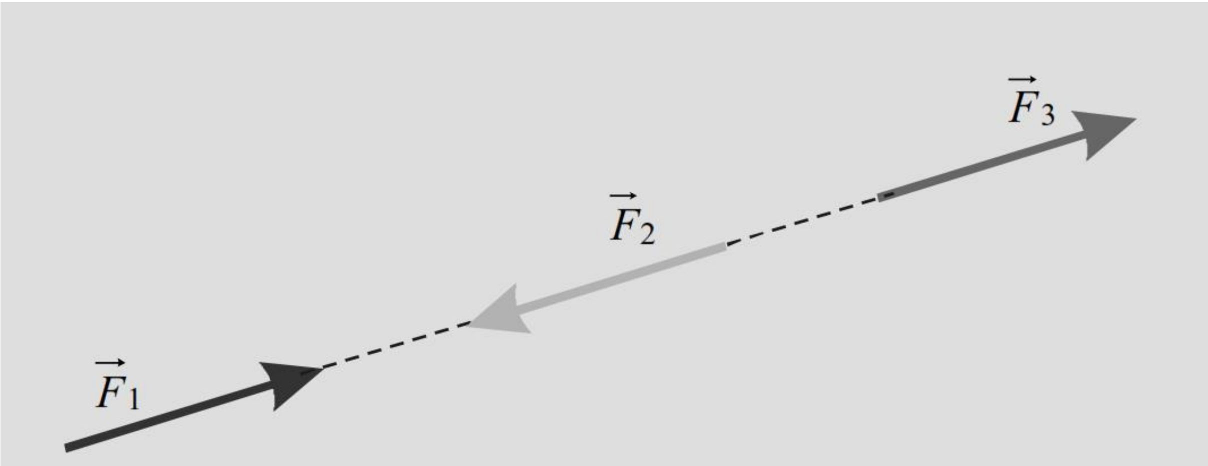


Figura 80. Fuerzas Colineales (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

PROBLEMA RESUELTO 3.1

Objetivo. Resolver un sistema de fuerzas colineales gráfica y analíticamente.

Consigna. Sea un sistema de fuerzas colineales $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, **Figura 81**. Determinar la fuerza resultante en módulo, dirección y sentido según un método gráfico y uno analítico.

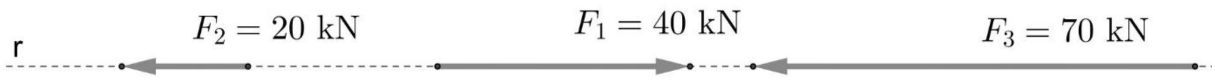


Figura 81. Sistema de Fuerzas Colineales (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Para la solución gráfica se construye el polígono vectorial de fuerzas. Para ello se define una escala de fuerzas, se hallan los vectores representativos de las fuerzas componentes y se lleva una a continuación de otra por lo que es conveniente ubicar el origen del sistema en el origen de coordenadas y orientar uno de los ejes en dirección de la recta de acción común (Ver **Figura 82**).

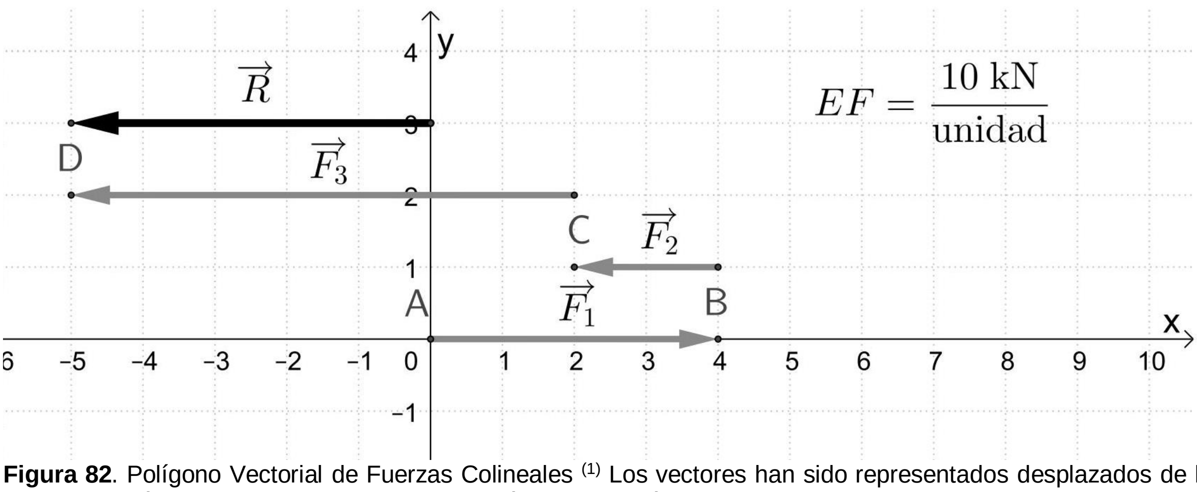


Figura 82. Polígono Vectorial de Fuerzas Colineales [(1)] Los vectores han sido representados desplazados de la recta de acción para mayor claridad (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Concluida la construcción de la poligonal, el valor del módulo de la resultante se calcula como: $R = \overline{\text{AD}} \times EF$, esto es:

$$R = 5 \text{ unidad} \times \frac{10 \text{ kN}}{\text{unidad}} = 50 \text{ kN}$$

Mientras que el argumento se mide directamente sobre el dibujo, por inspección se observa un ángulo $\varphi = 180°$. Por tanto, la respuesta final se puede consignar como:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (50\text{ kN},\ 180°)}$

2do. Solución Analítica. Para la solución analítica se debe asignar a las fuerzas de un sentido el signo positivo y a las de signo contrario el negativo. La intensidad de la resultante se obtiene, por tanto, como la *suma algebraica* de las intensidades de las componentes y su sentido está dado por el signo de la suma algebraica.

En el curso se adopta, en general, el sentido positivo coincidente con el semieje positivo considerado, para este caso con el semieje x positivo; por lo tanto, la suma algebraica queda:

$$\overset{+}{\rightarrow} = \sum F = +40\text{ kN} - 20\text{ kN} - 70\text{ kN} = -50\text{ kN}$$

Del mismo modo que en el método gráfico la respuesta se consigna como:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (50\text{ kN},\ 180°)}$

Observaciones

- Siendo este el primer sistema de fuerzas resuelto cabe aclarar un aspecto no menos importante respecto a la redacción de las consignas. En efecto, siendo que, resolver un sistema significa obtener la resultante, Sección 2.2.3, las consignas pueden tener los siguientes formatos: **1)** Encontrar el *sistema equivalente más simple*, del sistema de fuerzas que actúa en la porción de la armadura que se indica en la figura; **2)** Sobre una placa rectangular homogénea y rígida, actúan las fuerzas que se indican en el croquis. Obtener el *sistema equivalente* más simple; **3)** Determinar las *características de la resultante del sistema* de fuerzas que se aplica a la armadura de la figura; **4)** Llevar el siguiente sistema de fuerzas a su forma irreductible; etc.

- La característica de la resultante para este sistema se puede resumir así: El *módulo* o intensidad se obtiene por suma algebraica, la *dirección* coincidente con la recta de acción de las fuerzas, el *sentido* según el signo de dicha suma algebraica y el argumento según los ejes considerados.
- Para la resolución analítica de todo sistema de fuerzas coplanares se deben ubicar los ejes ortogonales Oxy convenientemente respecto al sistema. Esto se fundamenta, principalmente, en la necesidad de la proyección de los vectores componentes sobre dichos ejes, es decir, hallar las componentes rectangulares. Por conveniencia para este sistema siempre se ha de hacer coincidir uno de los ejes ortogonales Oxy con la recta de acción común.

3.3.2. Fuerzas Concurrentes

Un sistema de fuerzas concurrentes es aquel en el que las líneas de acción de todas las fuerzas se intersecan en un punto común *O* como se muestra en la **Figura 83** (a). Dicho punto se denomina *Punto de Concurrencia* y por el mismo también pasa la resultante del sistema (denotada en por este autor como $\mathbf{F_R}$), **Figura 83** (b).

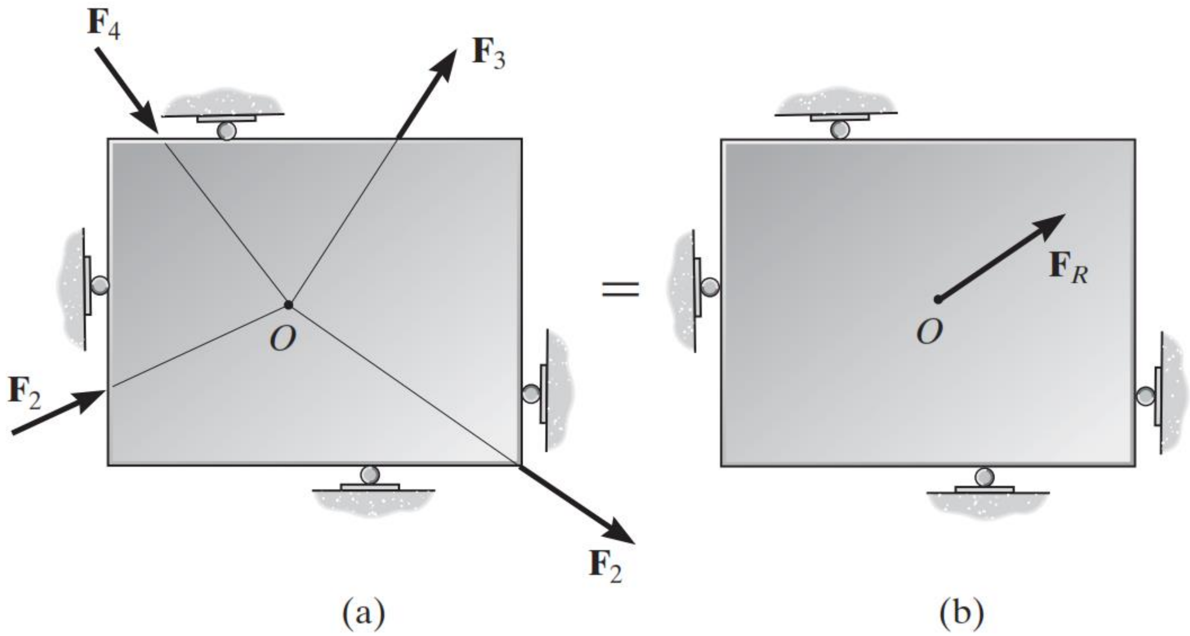


Figura 83. Sistema de Fuerzas Concurrentes (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Para la solución de estos sistemas se consideran dos casos a saber: 1) Dos Fuerzas Concurrentes; y, 2) *n* Fuerzas Concurrentes como se desarrolla a continuación.

3.3.2.1. Caso N.º 1: Dos Fuerzas Concurrentes

Se analizan seguidamente los métodos gráficos y analíticos de reducción de estos sistemas. En este sentido cabe aclarar que, si bien el método del paralelogramo se presenta en el contexto de fuerzas concurrentes el lector debe tener presente que este es un método general para sumar vectores según se ha analizado en la Sección 2.2.3.2.

1ro. Método Gráfico

Ley del Paralelogramo: Todas las cantidades vectoriales obedecen la ley del paralelogramo para la suma. A manera de ilustración, los dos vectores componentes **A** y **B** de la **Figura 84** (a) se suman para formar un vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ mediante el siguiente procedimiento:

1-Primero, se unen las colas de las componentes en un punto de manera que se hagan concurrentes, **Figura 84** (b).

2-Desde la cabeza de **B**, se dibuja una línea paralela a **A**. se dibuja otra línea desde la cabeza de **A** que sea paralela a **B**. Estas dos líneas se intersecan en el punto *P* para formar los lados adyacentes de un paralelogramo.

3-La diagonal de este paralelogramo que se extiende hasta *P* forma **R**, la cual representa al vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, **Figura 84** (c).

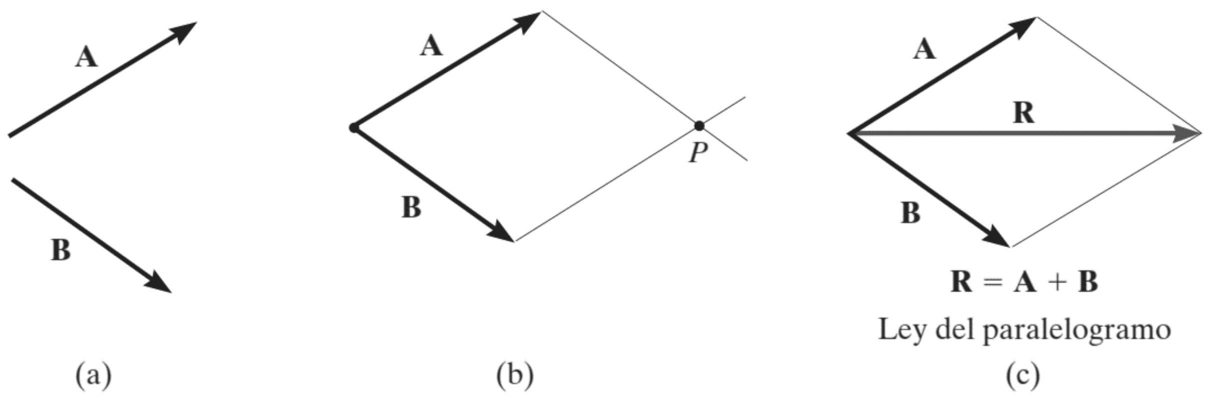


Figura 84. Ley del Paralelogramo (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

También se puede sumar **B** a **A**, **Figura 85** (a), mediante la *Regla del Triángulo*, que es un caso especial de la ley del paralelogramo, donde el vector **B** se suma al vector **A** en una forma de “cabeza a cola”, es decir, se conecta la cabeza de **A** a la cola de **B**, **Figura 85** (b). La resultante **R** se extiende desde la cola de **A** hasta la cabeza de **B**. De la misma manera, **R** también se puede obtener al sumar **A** y **B**, **Figura 85** (c).

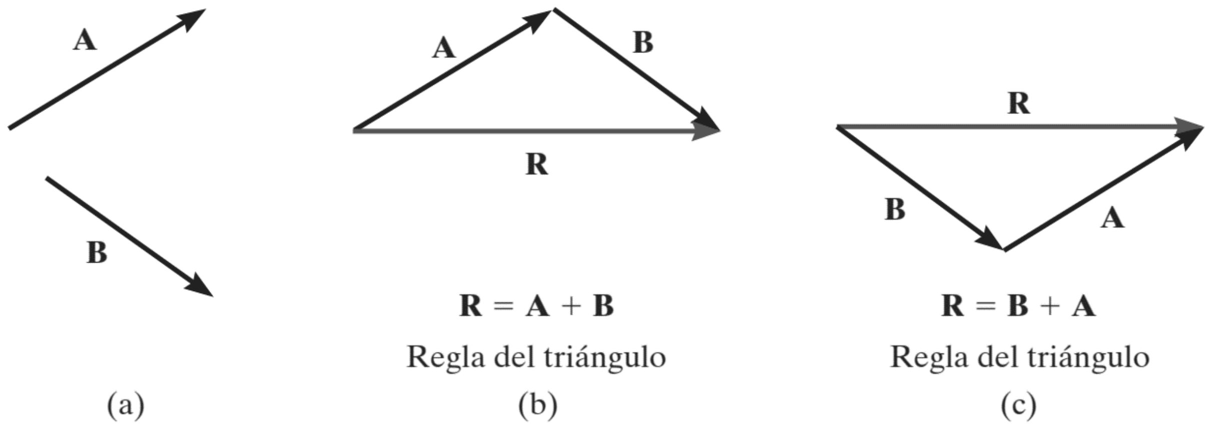


Figura 85. Regla del triángulo (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Por comparación, se ve que la suma vectorial es conmutativa; en otras palabras, los vectores pueden sumarse en cualquier orden, es decir, $\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2do. Método Analítico

El método analítico es en esencia trigonométrico, en efecto, la resultante en módulo y dirección se puede hallar mediante la *Ley del Seno* y la *Ley del Coseno*, **Figura 86**, como se ilustra luego en los problemas resueltos. Sin embargo, también es válido aplicar el *teorema de las proyecciones* analizado en la Sección 2.2.3.2.

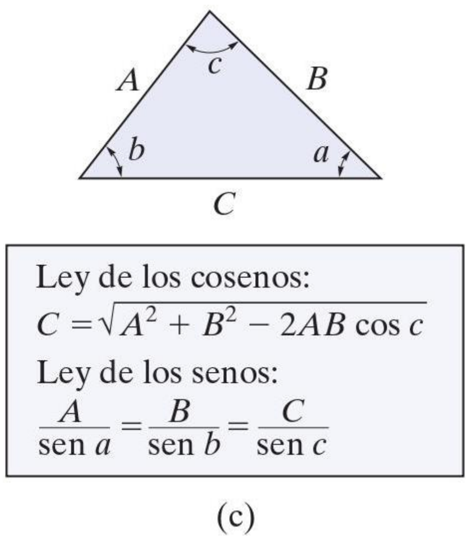


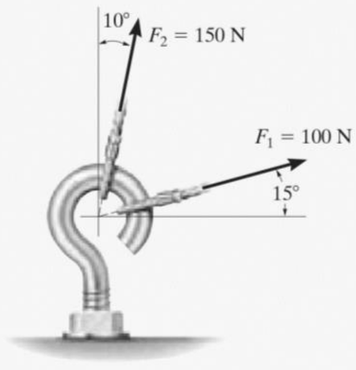
Figura 86. Ley del Seno y la Ley del Coseno para la Solución Analítica de Dos Fuerzas Concurrentes (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

PROBLEMA RESUELTO 3.2

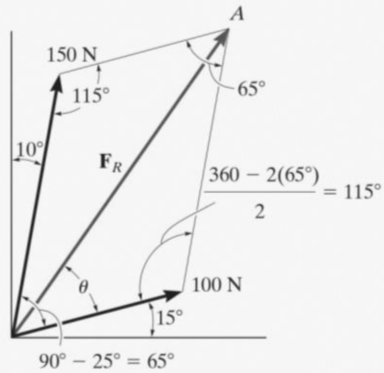
Objetivo. Resolver un sistema de dos fuerzas concurrentes gráfica y analíticamente, **Figura 87**.

EJEMPLO 2.1

La armella roscada de la figura 2-11*a* está sometida a dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



(a)



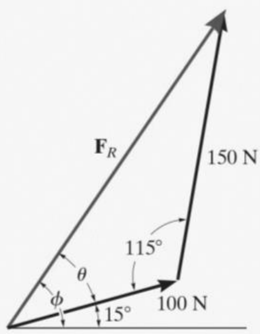
(b)

SOLUCIÓN

Ley del paralelogramo. El paralelogramo se forma al dibujar una línea desde la cabeza de $\mathbf{F}_1$ que sea paralela a $\mathbf{F}_2$, y otra línea desde la cabeza de $\mathbf{F}_2$ que sea paralela a $\mathbf{F}_1$. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ se extiende hacia el lugar donde estas líneas se intersecan en el punto A, figura 2-11*b*. Las dos incógnitas son la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y el ángulo θ (teta).

Trigonometría. A partir del paralelogramo, se construye el triángulo vectorial, figura 2-11*c*. Mediante la ley de los cosenos

$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115°}$$
$$= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6\text{ N}$$
$$= 213\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 2-11

El ángulo θ se determina al aplicar la ley de los senos,

$$\frac{150\text{ N}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\operatorname{sen}115°} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}}(\operatorname{sen}115°)$$
$$\theta = 39.8°$$

Así, la dirección ϕ (fi) de $\mathbf{F}_R$, medida desde la horizontal, es

$$\phi = 39.8° + 15.0° = 54.8° \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: los resultados parecen razonables, puesto que la figura 2-11*b* muestra que $\mathbf{F}_R$ tiene una magnitud más grande que sus componentes y una dirección que se encuentra entre éstas.

Figura 87. Problema Resuelto 3.2 (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

De la Solución Gráfica

- En la Figura 87 el autor brinda una solución gráfica parcial. En efecto, solo presenta el paralelogramo ya construido, pero en este curso se debe proceder así: se define una escala de fuerzas, a partir de un punto común (punto de concurrencia) trazar los vectores representativos y luego proceder con el método geométrico para obtener el paralelogramo.
- El segmento determinado por el punto de concurrencia y el punto *A*, Fig. 2-11 (b), leído en la escala de fuerzas da el módulo de la resultante. Mientras que el argumento se obtiene por medición directa.

De la Solución Analítica

- También para el método analítico, este problema puede resolverse utilizando el teorema de las proyecciones; queda como tarea para el alumno verificar que la resultante hallada por este teorema coincide con la hallada por la ley de los cosenos.

PROBLEMA RESUELTO 3.3

Objetivo. Resolver un sistema de dos fuerzas concurrentes gráfica y analíticamente, **Figura 88**.

EJEMPLO 2.3

Determine la magnitud de la fuerza componente **F** en la figura 2-13*a* y la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ si $\mathbf{F}_R$ está dirigida a lo largo del eje positivo *y*.

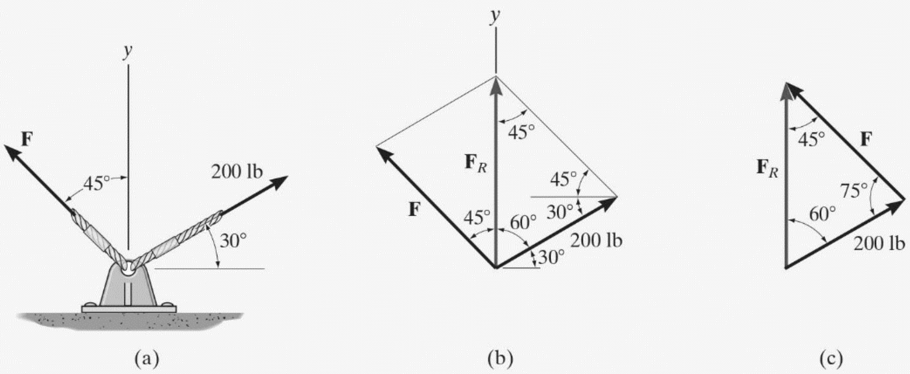


Fig. 2-13

SOLUCIÓN

En la figura 2-13*b* se muestra la ley del paralelogramo para la suma, y en la figura 2-13*c* la regla del triángulo. Las magnitudes de $\mathbf{F}_R$ y **F** son las dos incógnitas. Éstas pueden determinarse mediante la aplicación de la ley de los senos.

$$\frac{F}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$F = 245 \text{ lb} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

$$\frac{F_R}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$F_R = 273 \text{ lb} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Figura 88. Problema Resuelto 3.3 (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

De la Solución Gráfica

- Dado que se conocen el módulo (200 lb) de una de las componentes y el ángulo de la otra, es factible resolver el problema también gráficamente; basta con trazar a escala la fuerza dato y luego trazar por un extremo la paralela a la recta de acción de la resultante ($\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$) y por el otro extremo una paralela a la recta de acción de la componente incógnita ($\boldsymbol{F}$).
- Notar que, la solución grafica sugerida es la *descomposición de una fuerza* en dos direcciones concurrentes con ella, por lo tanto, bastaría solamente medir los segmentos determinados y multiplicarlos por la escala adoptada.

3.3.2.2. Caso N.º 2: *n* Fuerzas Concurrentes

Como este caso es solo una generalización del caso anterior para hallar la resultante de un sistema de *n* fuerzas concurrentes, existen también dos métodos; uno grafico que consiste en la construcción del *polígono de las fuerzas* y uno analítico que es la aplicación del *teorema de las proyecciones*.

No está demás volver a aclarar que también es válido aplicar sucesivamente la ley del paralelogramo (para la solución grafica) y la ley del coseno (para la solución analítica) pero está claro que esto es poco práctico.

PROBLEMA RESUELTO 3.4

Objetivo. Resolver un sistema de *n* fuerzas concurrentes gráfica y analíticamente.

Consigna. Las cuatro fuerzas de los cables son concurrentes en el punto *O* que se encuentra en la torre de este puente, **Figura 89**. En consecuencia, no producen un momento resultante ahí, sólo una fuerza resultante. Determinar las *características de la resultante del sistema* de fuerzas que se aplica a la torre del puente.

El diagrama de cuerpo libre correspondiente se presenta en la **Figura 90** y por conveniencia se ha hace coincidir el origen de coordenadas con el punto de concurrencia. Las cargas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son simétricas a sus homologas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ respecto del eje y.

Figura 89. Diagrama Espacial del Problema (Fuente: HIBBELER, 2010).

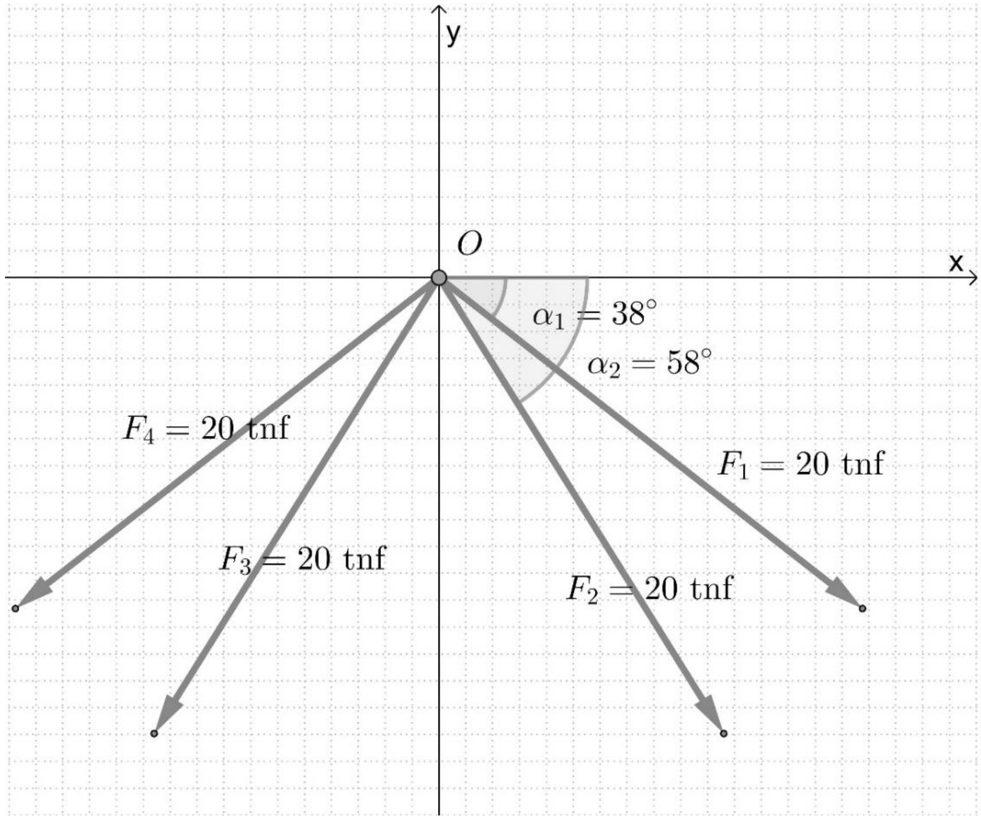


Figura 90. Diagrama de Cuerpo Libre (1) tnf significa toneladas fuerza (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Para la solución gráfica se debe construir un polígono de fuerzas como se indica en la **Figura 91**.

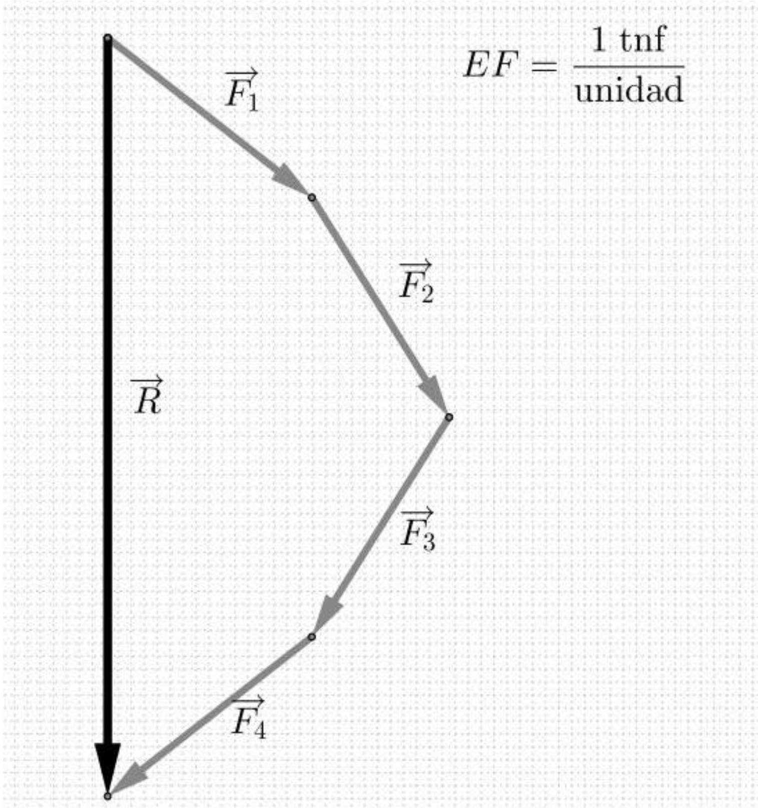


Figura 91. Polígono Vectorial (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Como siempre el valor de magnitud se obtiene multiplicando el segmento representativo de la resultante por la escala de fuerzas. La dirección, por su parte, se obtiene por medición directa del ángulo según convención, y, el sentido por inspección.

Solo resta trazar una paralela al vector representativo de la resultante por el punto de concurrencia para que la consigna este respondida, **Figura 92**, luego, se consigna la respuesta.

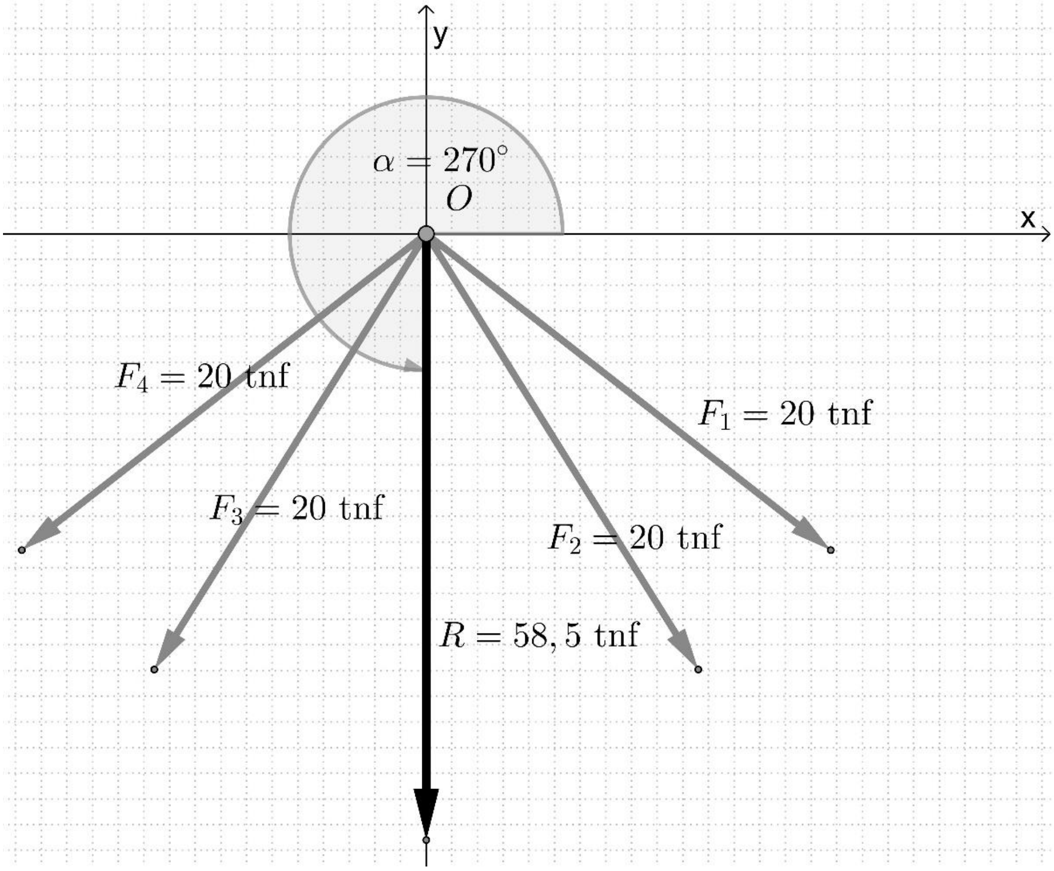


Figura 92. Resultante del Sistema (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (58,5 \text{ tnf}, 270°)}$

2do. Solución Analítica. Para la solución analítica se aplica el teorema de las proyecciones (referirse a la Figura 90). En este caso es conveniente trabajar con los ángulos tal como están presentados e inspeccionar el signo de la función trigonométrica según el cuadrante:

$$F_{1x} = (20\ \text{tnf}) \times \cos 38° = +15,76\ \text{tnf}$$
$$F_{2x} = (20\ \text{tnf}) \times \cos 58° = +10,60\ \text{tnf}$$
$$F_{3x} = -(20\ \text{tnf}) \times \cos 58° = -10,60\ \text{tnf}$$
$$F_{4x} = -(20\ \text{tnf}) \times \cos 38° = -15,76\ \text{tnf}$$
$$R_x = \sum F_x = 15,76\ \text{tnf} + 10,60\ \text{tnf} + \left(-10,60\ \text{tnf}\right) + \left(-15,76\ \text{tnf}\right) = 0\ \text{tnf}$$

$$F_{1y} = -(20\ \text{tnf}) \times sen 38° = -12,31\ \text{tnf}$$
$$F_{2y} = -(20\ \text{tnf}) \times sen 58° = -16,96\ \text{tnf}$$
$$F_{3y} = -(20\ \text{tnf}) \times sen 38° = -12,31\ \text{tnf}$$
$$F_{4y} = -(20\ \text{tnf}) \times sen 58° = -16,96\ \text{tnf}$$
$$R_y = \sum F_y = -12,31\ \text{tnf} - 16,96\ \text{tnf} - 12,31\ \text{tnf} - 16,96\ \text{tnf} = -58,54\ \text{tnf}$$

$$R = \sqrt{\left(0\ \text{tnf}\right)^2 + \left(-58,54\ \text{tnf}\right)^2} = 58,54\ \text{tnf}$$

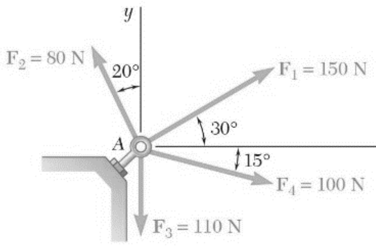
Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} \vec{R} = (58,5\ \text{tnf},\ 270°) \\ \vec{R} = -(58,5\ \text{tnf})\ \breve{j} \end{array}}$

Observaciones

- Observe que los diseñadores han colocado los cables de manera que la resultante esté dirigida a lo largo de la torre del puente y directamente hacia el apoyo, de modo que no cause ninguna flexión de la torre.
- Como en este caso $R_x = 0$ el cálculo analítico del argumento α de la resultante no es posible dado a que no está definida la división por cero, sin embargo, para justificar analíticamente la respuesta basta con inspeccionar los valores de las componentes (catetos) de la resultante.
- Para la resolución analítica de este ejercicio se puede optar también por el uso de un cuadro para organizar los datos (magnitudes, ángulos, componentes, etc.) como se ve en el problema resuelto siguiente.

PROBLEMA RESUELTO 3.5

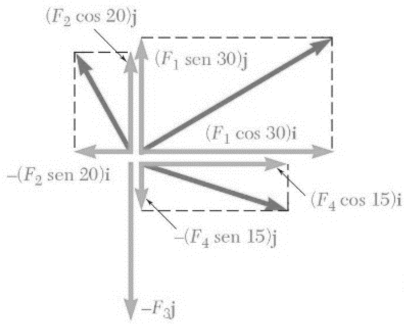
Objetivo. Resolver un sistema de *n* fuerzas concurrentes gráfica y analíticamente, **Figura 93**.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno *A* como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.

SOLUCIÓN



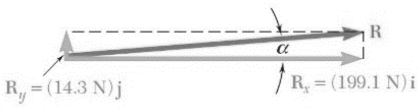
Las componentes *x* y *y* de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.7, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes *x* que actúan a la derecha y las componentes *y* que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud, N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante **R** de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199.1\ \text{N})\mathbf{i} + (14.3\ \text{N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3\ \text{N}}{199.1\ \text{N}} \qquad \alpha = 4.1°$$

$$R = \frac{14.3\ \text{N}}{\text{sen}\ \alpha} = 199.6\ \text{N} \qquad \mathbf{R} = 199.6\ \text{N} \measuredangle 4.1° \quad \blacktriangleleft$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de R_y se almacena en la memoria al introducirse, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre sen α. (Véase también la nota al pie de la página 29.)

Figura 93. Problema Resuelto 3.5 (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Observaciones

- **De la Solución Gráfica**. La solución del autor es netamente analítica, por lo tanto, es necesario también dejar explicitado la solución gráfica, para ello se define una escala de fuerzas y se traza el polígono vectorial, **Figura 94**.

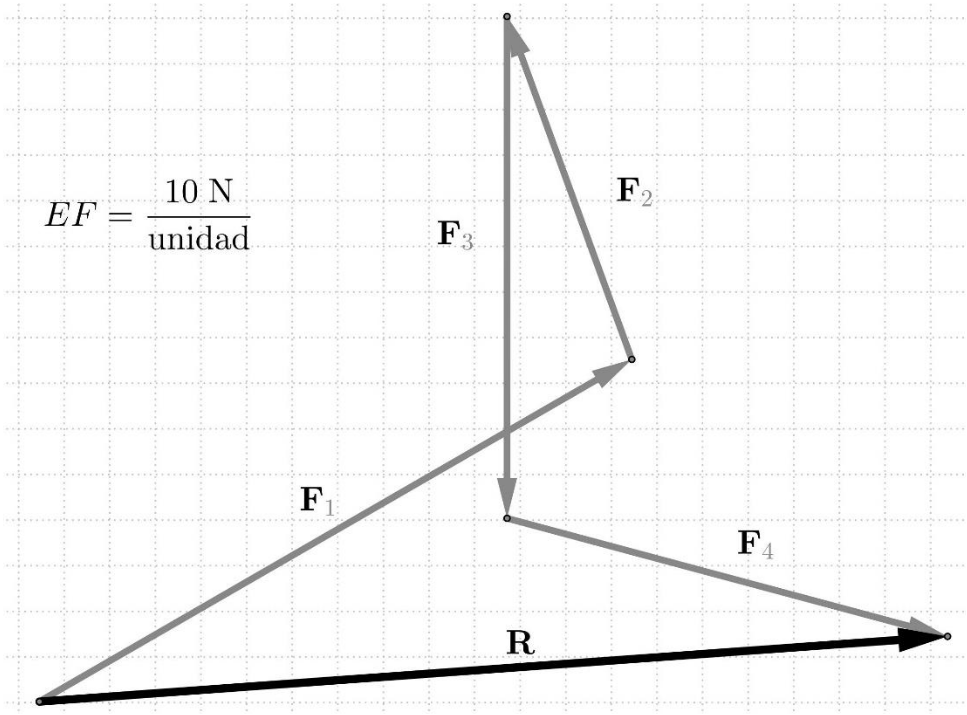


Figura 94. Polígono Vectorial (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Luego, el segmento representativo del vector resultante leído en la escala de fuerzas da el valor de magnitud. La dirección, por su parte, se obtiene por medición directa del ángulo según convención, y, el sentido por inspección. Solo resta trazar por el punto de concurrencia una paralela a la línea de acción de $\mathbf{R}$ para finalizar el problema, **Figura 95**.

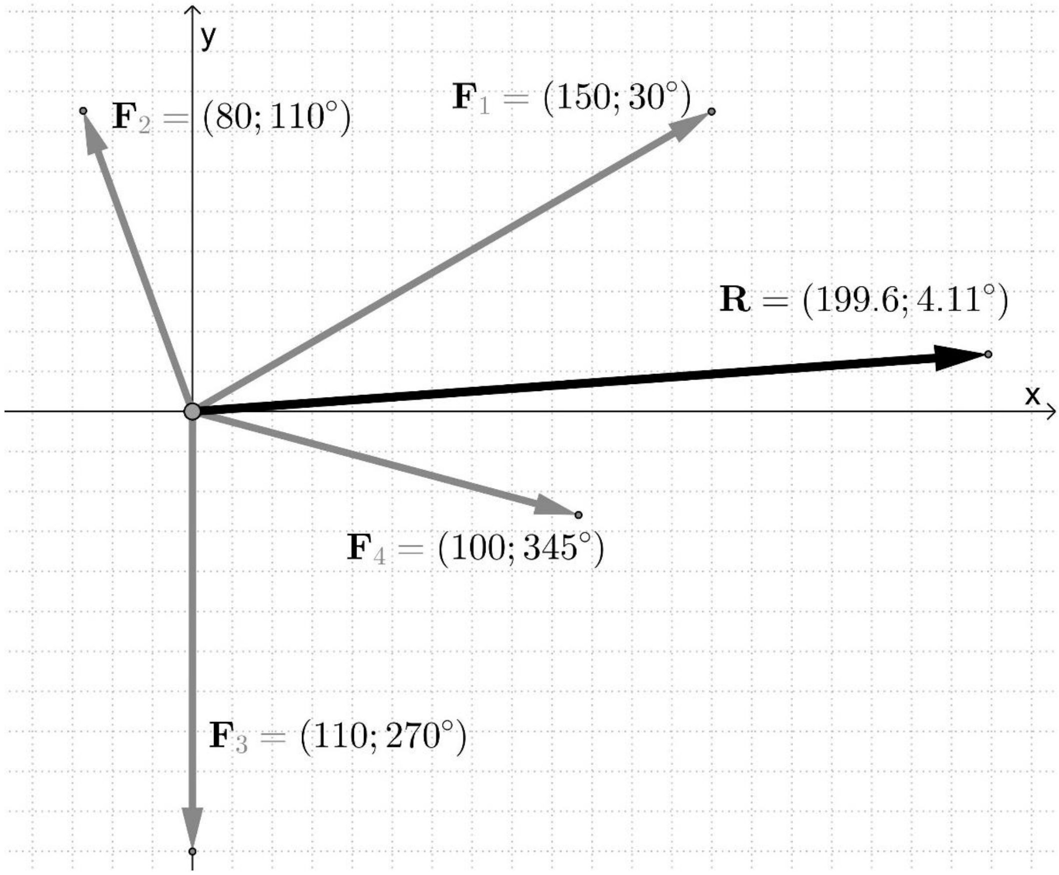


Figura 95. Ubicación de la Resultante en el Sistema (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

- Notar además que el autor calcula el módulo de la resultante utilizando la función seno; y no el teorema de Pitágoras como se ha trabajado.

3.3.3. Fuerzas No Concurrentes

3.3.3.1. Introducción

En las Sección 3.3.2 se ha supuesto que cada uno de los cuerpos considerados podían ser tratados como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. Tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación (BEER *et al.* 2007). Estas fuerzas conforman sistemas *No Concurrentes*. Los sistemas no concurrentes que se analizan en el curso son de *fuerzas cualesquiera* y de *fuerzas paralelas*.

Para fuerzas no concurrentes, además de hallar la resultante y ubicarla en el sistema por métodos gráficos (como se ha visto para las concurrentes), también es necesario determinar su posición analíticamente. Esto se realiza con el cálculo de la longitud d_R medida desde la recta de acción de la resultante hasta un punto de referencia arbitrario como se muestra en la **Figura 96**.

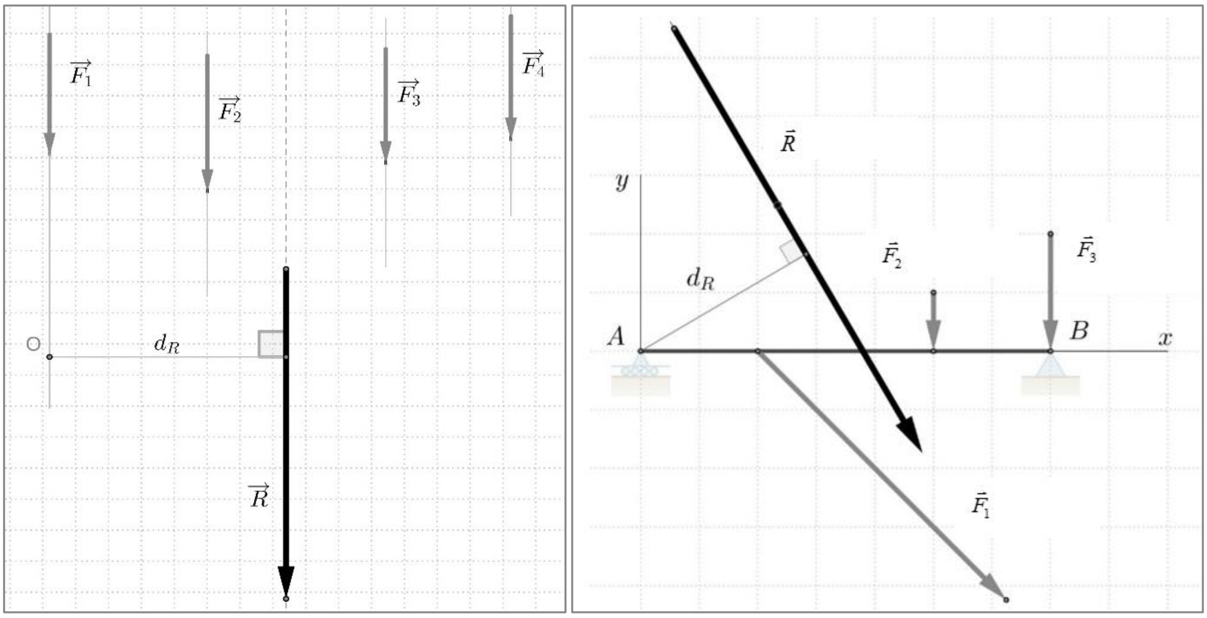


Figura 96. Posición de la Resultante en Sistemas de Fuerzas No Concurrentes (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Hay que enfatizar que el cálculo de d_R es necesario porque en estos tipos de sistemas existe una posición relativa entre la resultante y las fuerzas componentes lo que no ocurre con las fuerzas concurrentes. Como se ha de ver, la distancia d_R se calcula aplicando el teorema de Varignon, por lo tanto, esta representa la menor distancia, es decir, es el brazo de palanca.

3.3.3.2. Fuerzas Cualesquiera

Este tipo de sistemas, también llamado *Caso General*, se caracteriza porque no todas las líneas de acción de las fuerzas componentes se intersecan en un mismo punto (: *no hay punto de concurrencia*). Realmente, basta con resolver una situación problemática para lograr una comprensión más simple de este tipo de sistemas.

PROBLEMA RESUELTO 3.6

Objetivo: Resolver un sistema de fuerzas cualesquiera gráfica y analíticamente.

Consigna. Reduzca el sistema de fuerzas mostrado en la **Figura 97** a una sola fuerza equivalente.

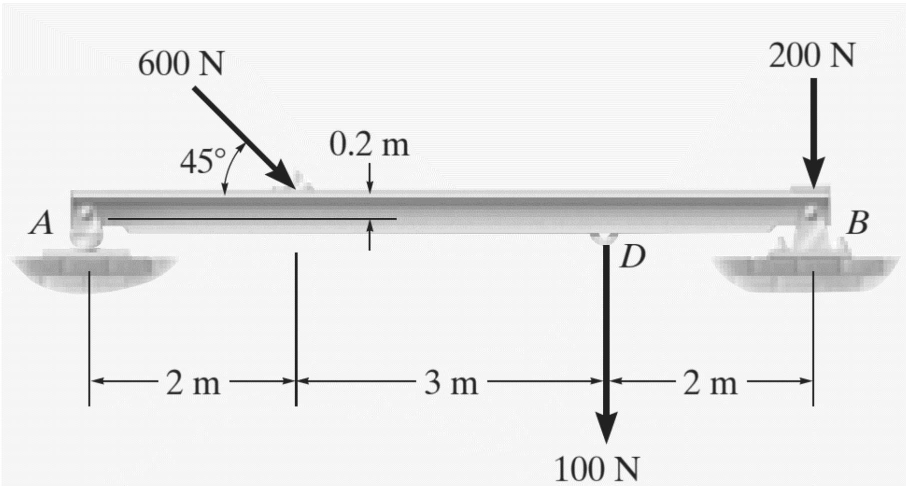


Figura 97. Sistema de Fuerzas Cualesquiera (1) Del ejemplo 5.5 del autor citado (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. En primer lugar, es necesario definir una escala de longitud (EL) para representar correctamente el esquema posicional de la situación, **Figura 98**.

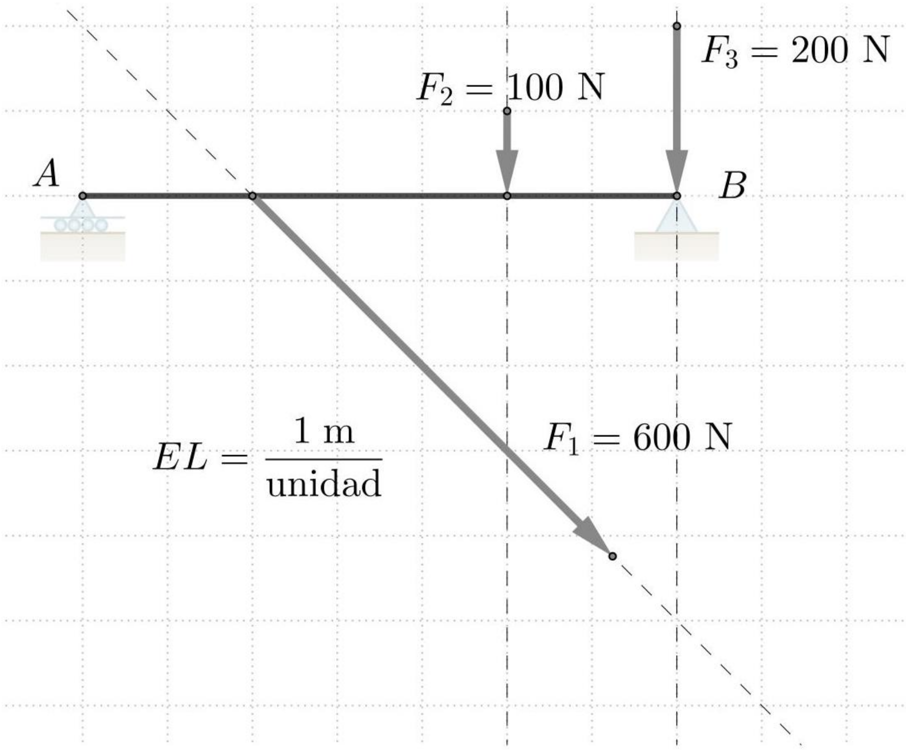


Figura 98. Esquema Posicional (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Luego, se define una escala de fuerzas y se trazan los polígonos vectorial y polar, **Figura 99**. Finalmente, se traza el polígono funicular para ubicar la resultante en el sistema, **Figura 100**.

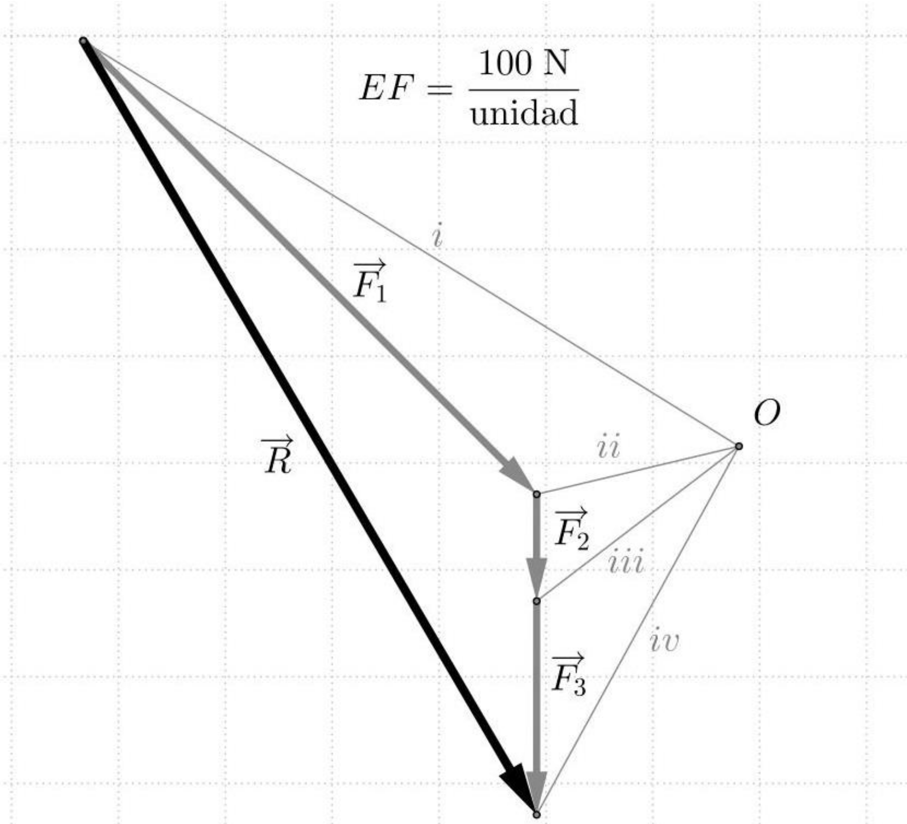


Figura 99. Polígonos Vectorial y Polar (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

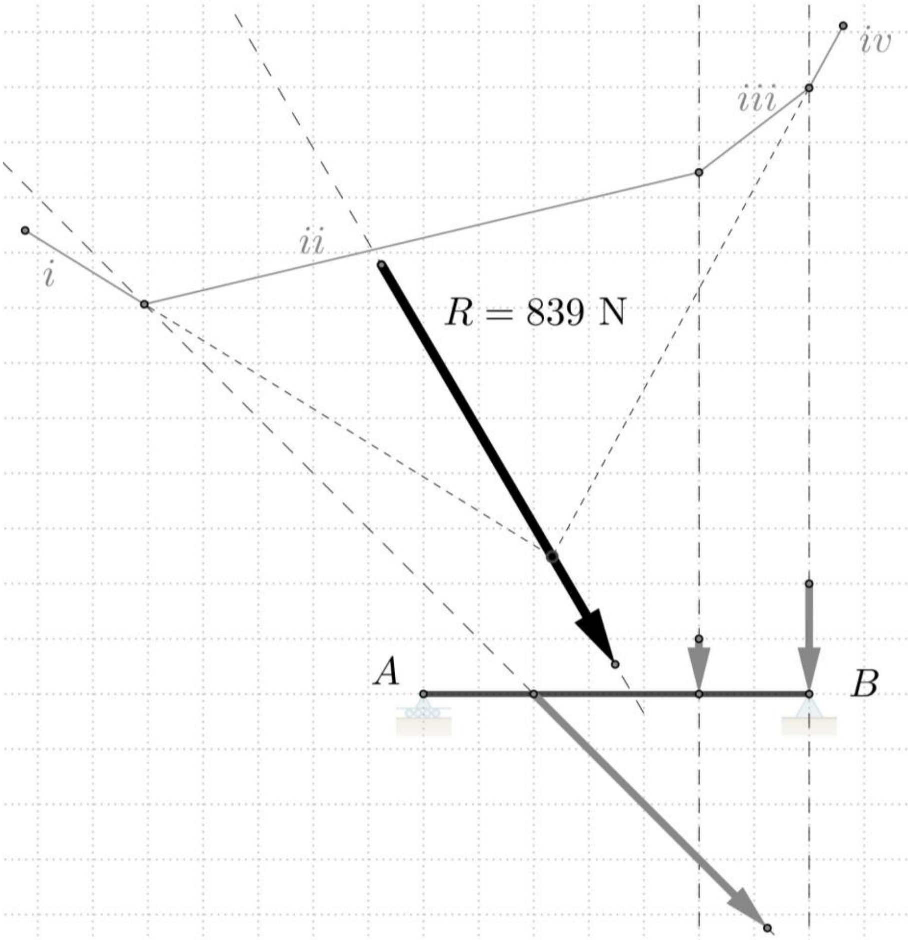


Figura 100. Fuerzas Cualesquiera: Solución Gráfica (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Medida la longitud representativa de la resultante y multiplicada por la escala de fuerzas y, medido su argumento en el sentido convencional considerando el eje x coincidente con el eje longitudinal de la viga, la respuesta al problema es:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (839\ \text{N},\ 300{,}3°)}$

2do. Solución Analítica. Se aplica el teorema de las proyecciones, **Tabla 3**.

Tabla 3. Componentes Rectangulares (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Fuerza	*Componente* x [N]	*Componente* y [N]
$\vec{F}_1$	424,26	-424,26
$\vec{F}_2$	0,00	-100,00
$\vec{F}_3$	0,00	-200,00
	424,26	-724,26
	R_x	R_y

Luego, el módulo y el ángulo del vector resultante se obtienen como:

$$R = \sqrt{\left(424,26\ \text{N}\right)^2 + \left(-724,26\ \text{N}\right)^2} \cong 839,37\ \text{N}$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{-724,26\ \text{N}}{424,26\ \text{N}} \cong -59,64°$$

Pero el ángulo medido en el sentido convencional debe ser:

$$\alpha = 360° - 59,64° = 300,36°$$

Como siempre observar que con el cálculo analítico se obtiene un resultado más preciso, entonces:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (839,37\ \text{N},\ 300{,}36°)}$

Finalmente, para concluir con la solución analítica es necesario determinar la **distancia de la resultante** d_R respecto a un punto del plano. Algunas veces dicho punto (arbitrario) se da como dato, en caso contrario debe escogerse convenientemente en función del ejercicio.

En efecto, para este caso se ubica el origen de coordenadas en el punto A y se aplica el Teorema de Varignon para resolver el problema, **Figura 101**.

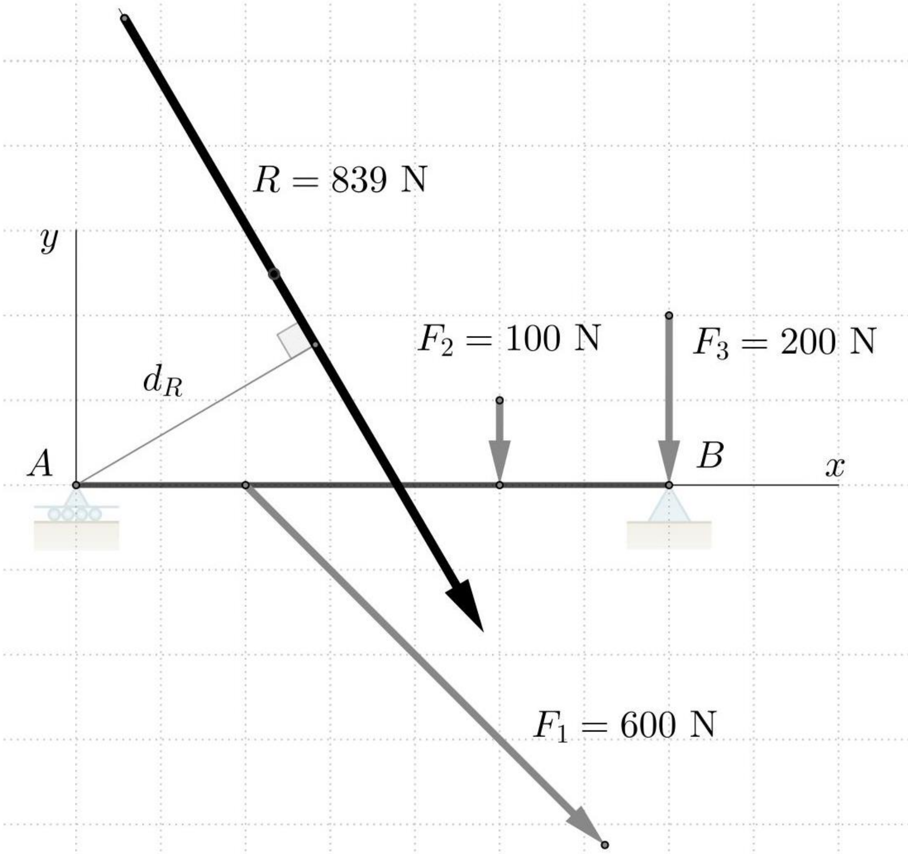


Figura 101. Ubicación Analítica de la Resultante (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$\overset{\curvearrowright}{+}(M_R)_A = R \times d_R = +F_{1y} \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 \quad [\mathrm{N \cdot m}]$$

$$d_R = \frac{+F_{1y} \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3}{R}$$

$$d_R = \frac{+600 \times sen315° \times 2 + 100 \times 5 + 200 \times 7}{839,37} \quad [\mathrm{m}]$$

Respuesta $\boxed{d_R = 3,27 \text{ m}}$

Recordar que F_{1y} es el módulo de la componente de la fuerza considerada (por definición de momento de una fuerza) y, por lo tanto, debe tomarse positivo ya que si se calcula $600 \times sen315°$ da un valor negativo y el resultado para d_R no sería correcto.

En ocasiones, la ubicación analítica de la resultante puede calcularse en términos de sus componentes rectangulares. En efecto, considere la **Figura 102** en la cual se han ilustrado la resultante y sus componentes partiendo de la Figura 101 (se han omitido algunos valores por razones de claridad).

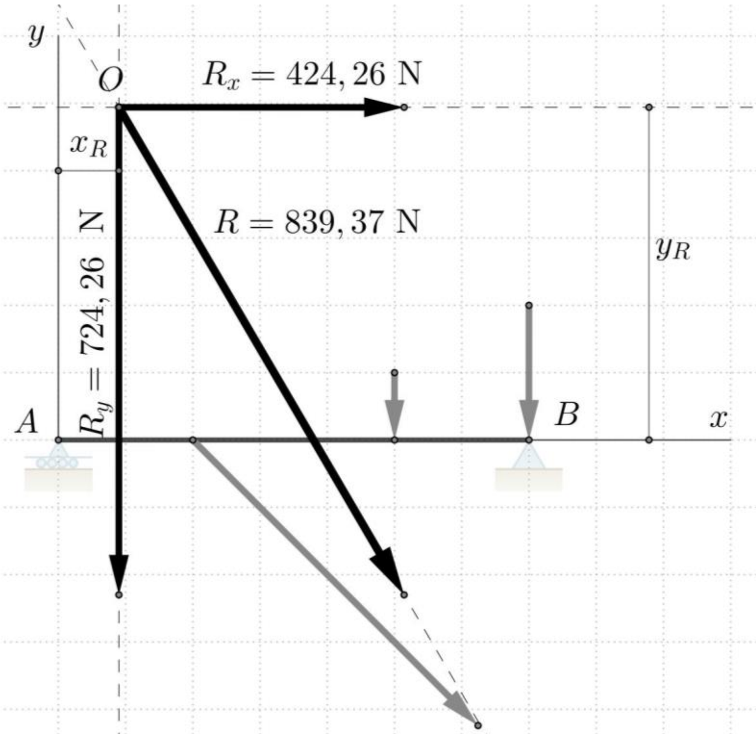


Figura 102. Momento de las Componentes de la Resultante (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Siendo que la resultante es un vector deslizante (*Principio de Transmisibilidad*, Sección 2.1) su punto de aplicación *O* puede omitirse. Teniendo en cuenta esto se pueden obtener infinitos puntos $O = (x_\mathrm{R}, y_\mathrm{R})$ de la recta de acción de la resultante para ubicarla en el sistema. La solución a esto es aplicar el teorema de Varignon para definir la *ecuación de la recta de acción* de $\vec{R}$:

$$\overset{\curvearrowright}{+}(M_R)_A = R_\mathrm{y} \times x_\mathrm{R} + R_\mathrm{x} \times y_\mathrm{R} = +F_{1\mathrm{y}} \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}]$$

Y reemplazando en la anterior por sus valores numéricos se obtiene la ecuación de la recta de acción de la resultante que es la solución buscada:

Respuesta $\boxed{724,26x_\mathrm{R} + 424,26y_\mathrm{R} = 2744,74}$

Para el caso particular[16] donde $y_{\mathrm{R}} = 0$:

$$x_{\mathrm{R}} = \frac{2744,74}{724,26} = 3,79 \text{ m}$$

Por lo tanto, un punto de la recta de acción de la resultante es:

$(3,79; 0,00)$ m

Observaciones

- Una propiedad clave del equilibrio estático es qué, el que cambie el punto de aplicación de las fuerzas no modifica el estado de equilibrio del sólido siempre que las rectas se mantengan en su recta de acción original. Por eso el *Álgebra de Vectores Deslizantes* es la herramienta básica a emplear cuando se trata de analizar el equilibrio de un cuerpo. En este ejercicio se evidencia ello cuando se calcula analíticamente la posición del vector resultante en el sistema.
- Como las *reacciones en los apoyos* no están incluidas en el sistema de fuerzas dado (Figura 97) el sistema no mantendrá la viga en equilibrio. Las reacciones en los apoyos se analizan en la sección siguiente.
- El alumno puede optar por hallar la distancia de la resultante d_R o bien, hallar la ecuación de la recta de acción de la resultante para la solución de un problema.

Problemas resueltos complementarios sugeridos

El problema anterior incluye todos los aspectos prácticos de los ejercicios que se han de ver en el curso, sin embargo, es conveniente que el lector examine cuidadosamente los ejemplos

[16] Cuando se analicen las fuerzas internas en una estructura como la viga presentada en este ejercicio se ha de ver que la resultante esta aplicada en el baricentro de la sección transversal de la misma, con lo cual, considerar $y_{\mathrm{R}} = 0$ es un caso de interés.

8 y 9 de las páginas 37 y 38 respectivamente, del RAFFO, (2007) en los cuales se plantean ejercicios similares.

3.3.3.3. Fuerzas Paralelas

Un sistema de fuerzas paralelas es aquel en el que las rectas de acción de todas las fuerzas componentes son paralelas. Así, por facilidad, se suele ubicar el origen de coordenadas sobre alguna de las fuerzas y se hace coincidir uno de los ejes con la línea de acción de cualquiera de las fuerzas.

Se han de analizar dos casos 1) Sistemas de n (con $n > 2$) fuerzas paralelas y, 2) Sistemas de *dos* fuerzas paralelas. Para el primer caso se analiza directamente mediante un problema resuelto.

PROBLEMA RESUELTO 3.7

Objetivo. Determinar gráfica y analíticamente la resultante de un sistema de *n* fuerzas paralelas.

Consigna. Encontrar el *sistema equivalente más simple* del sistema de fuerzas que actúa en la viga que se indica en la **Figura 103**.

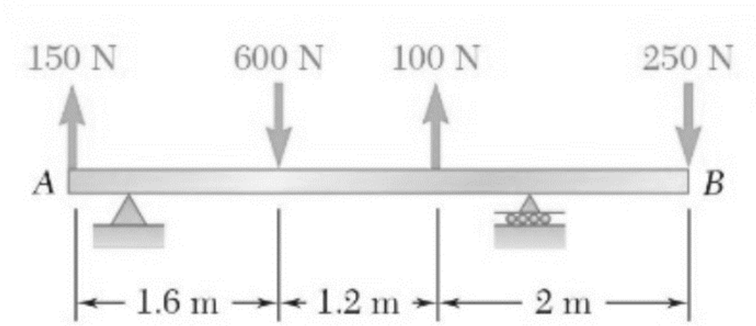


Figura 103. Sistema de Fuerzas Paralelas [(1)] Del problema resuelto 3.8 del autor citado (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

SOLUCION

1ro. Solución Gráfica. En primer lugar, es necesario definir una escala de longitud (EL) para representar correctamente el esquema posicional de la situación, **Figura 104**.

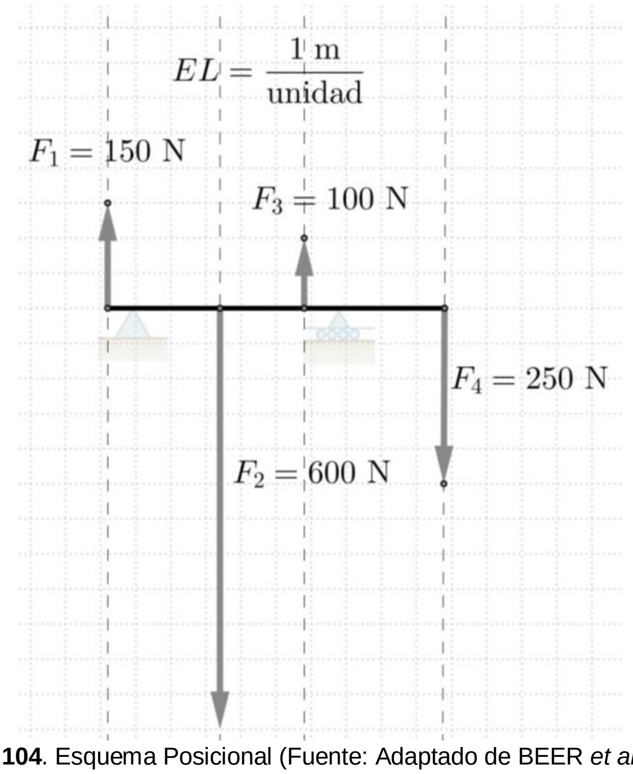


Figura 104. Esquema Posicional (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Luego se define una escala de fuerzas y se trazan los polígonos vectorial y polar, **Figura 105**. Por una cuestión de claridad, cuando se trata con fuerzas paralelas o colineales es conveniente construir el polígono vectorial con las fuerzas desfasadas unas de otras. En este sentido, conviene trazar una recta r paralela a cualquiera de las fuerzas y proyectar sobre esta los puntos extremos de cada vector (C_1, D_1, E_1, G_1 *y* H_1) para construir el polígono polar. Finalmente, se traza el polígono funicular para ubicar la resultante en el sistema, **Figura 106**.

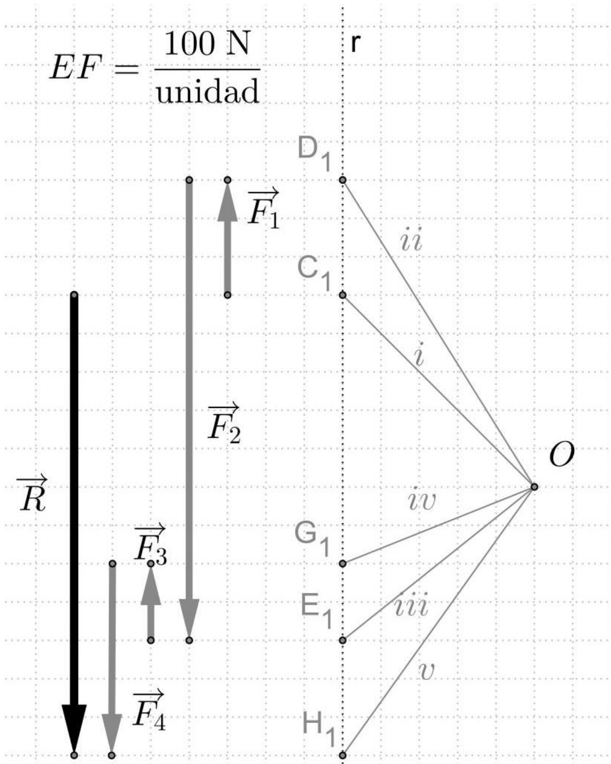


Figura 105. Polígonos Vectorial y Polar (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

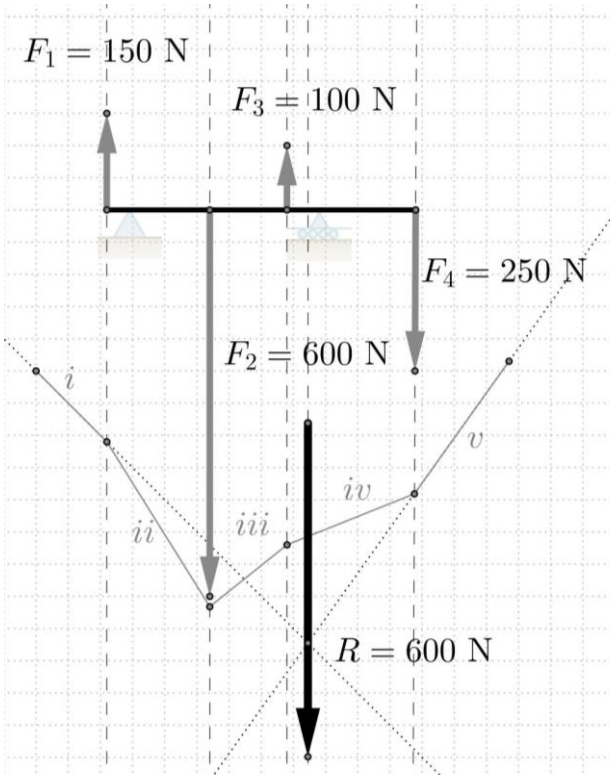


Figura 106. Sistemas de Fuerzas Paralelas: Solución Grafica (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Medida la longitud representativa de la resultante y multiplicada por la escala de fuerzas, y, medido su argumento en el sentido convencional considerando el eje x coincidente con el eje longitudinal de la viga, la respuesta al problema es:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (600 \text{ N}, 270°)}$

2do. Solución Analítica. Recuerde que para la solución analítica deben hallarse módulo, dirección, sentido y ubicación de la $\vec{R}$ en el sistema.

Si bien para el caso del módulo y el argumento puede aplicarse el teorema de las proyecciones, para este tipo de sistemas resulta ser más práctico sumar algebraicamente todas las fuerzas tomando los ejes convenientemente como se observa en la Figura 107 mientras que el argumento se obtiene por inspección.

De esta manera el módulo se calcula por suma algebraica:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$
$$R = 150 \text{ N} - 600 \text{ N} + 100 \text{ N} - 250 \text{ N}$$
$$R = -600 \text{ N} \Rightarrow R = 600 \text{ N}$$

Como el signo de la suma algebraica es negativo puede deducirse entonces el sentido de la resultante la cual coincide, en efecto, con el sentido del semieje negativo de las y. De la dirección se debe decir que es paralela a las fuerzas, luego:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (600\ \text{N},\ 270°)}$

Finalmente, para concluir es necesario determinar la **distancia de la resultante** d_R respecto a un punto del plano, para este caso se toma el punto O_1. Aplicando teorema de Varignon se resuelve el problema, **Figura 107**.

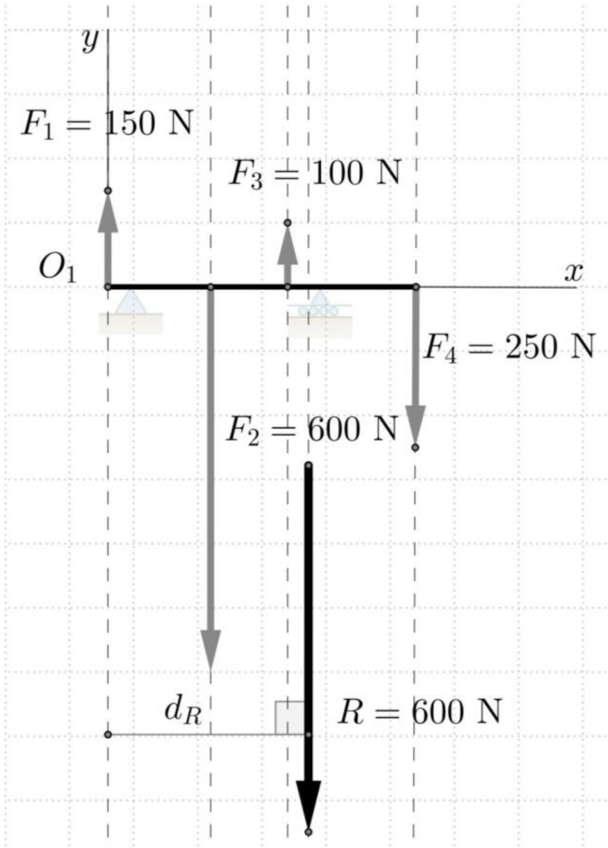


Figura 107. Ubicación Analítica de la Resultante (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

$$\overset{\curvearrowright}{+}(M_R)_{O_1} = R \times d_R = F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4 \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$d_R = \frac{F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4}{R}$$

$$d_R = \frac{+600 \times 1,6 - 100 \times 2,8 + 250 \times 4,8}{600} \quad [\text{m}]$$

Respuesta $\boxed{d_R = 3{,}13\ \mathrm{m}}$

Observaciones

- La característica de la resultante para estos sistemas se puede resumir así: la *dirección* de $\vec{R}$ es paralela a las componentes, su *módulo* o intensidad se obtiene por suma algebraica de los módulos de las componentes, esto es $R = \sum_{i=1}^{n} F_i$, el *sentido* según el signo de dicha suma algebraica y el argumento según los ejes considerados.

La composición de **Dos Fuerzas Paralelas**, como casos particulares, suelen desarrollarse en cursos de Estática Gráfica y esta Cátedra no es la excepción. Se han de analizar dos sistemas a saber: sistema de *Dos Fuerzas Paralelas de Igual Sentido* y sistema de *Dos Fuerzas Paralelas de Sentido Contrario*.

En lo que refiere a la **solución** de este tipo de sistemas deben mencionarse algunas connotaciones, en efecto: además de la *solución gráfica* desarrollada anteriormente se incorpora también una *solución geométrica*. La *solución analítica*, por su parte, es complementada asociando las distancias e intensidades entre las fuerzas según una proporción conocida como *Relación de Stevin* en honor al matemático y físico (entre otras profesiones) Simón Stevin (1548-1620). Todos estos aspectos se han de entender perfectamente con ejercicios de aplicación.

PROBLEMA RESUELTO 3.8

Objetivo. Resolver un sistema de dos fuerzas paralelas de igual sentido mediante los métodos: gráfico, geométrico y analítico. Comprender la *Relación de Stevin* para estos sistemas.

Consigna. Considere la estructura mostrada en la **Figura 108** solicitada por las cargas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Por cuestiones de diseño la viga está sometida a un sistema de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido. Conocidos los valores de las cargas y la longitud que debe tener la viga, se desea determinar la ubicación de la columna de modo tal que la resultante del sistema esté anulada por la reacción en el apoyo *A*.

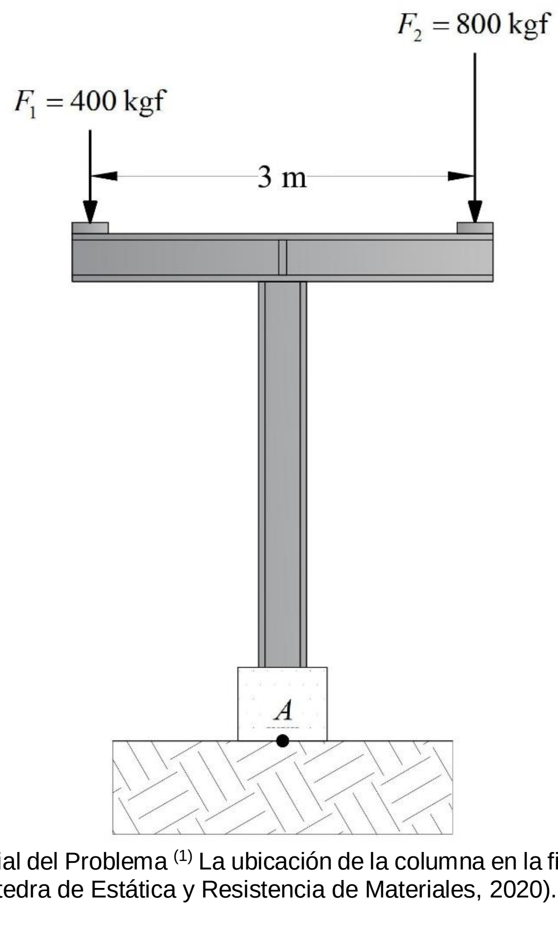


Figura 108. Diagrama Espacial del Problema [1] La ubicación de la columna en la figura es ilustrativa no representa la ubicación real (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica Para resolver el problema es necesario determinar la ubicación de la resultante en el sistema. Entonces, definida una escala de longitudes, la situación anterior puede representarse como lo indica la **Figura 109** en la cual, además, se ha ubicado la resultante construyendo el polígono funicular.

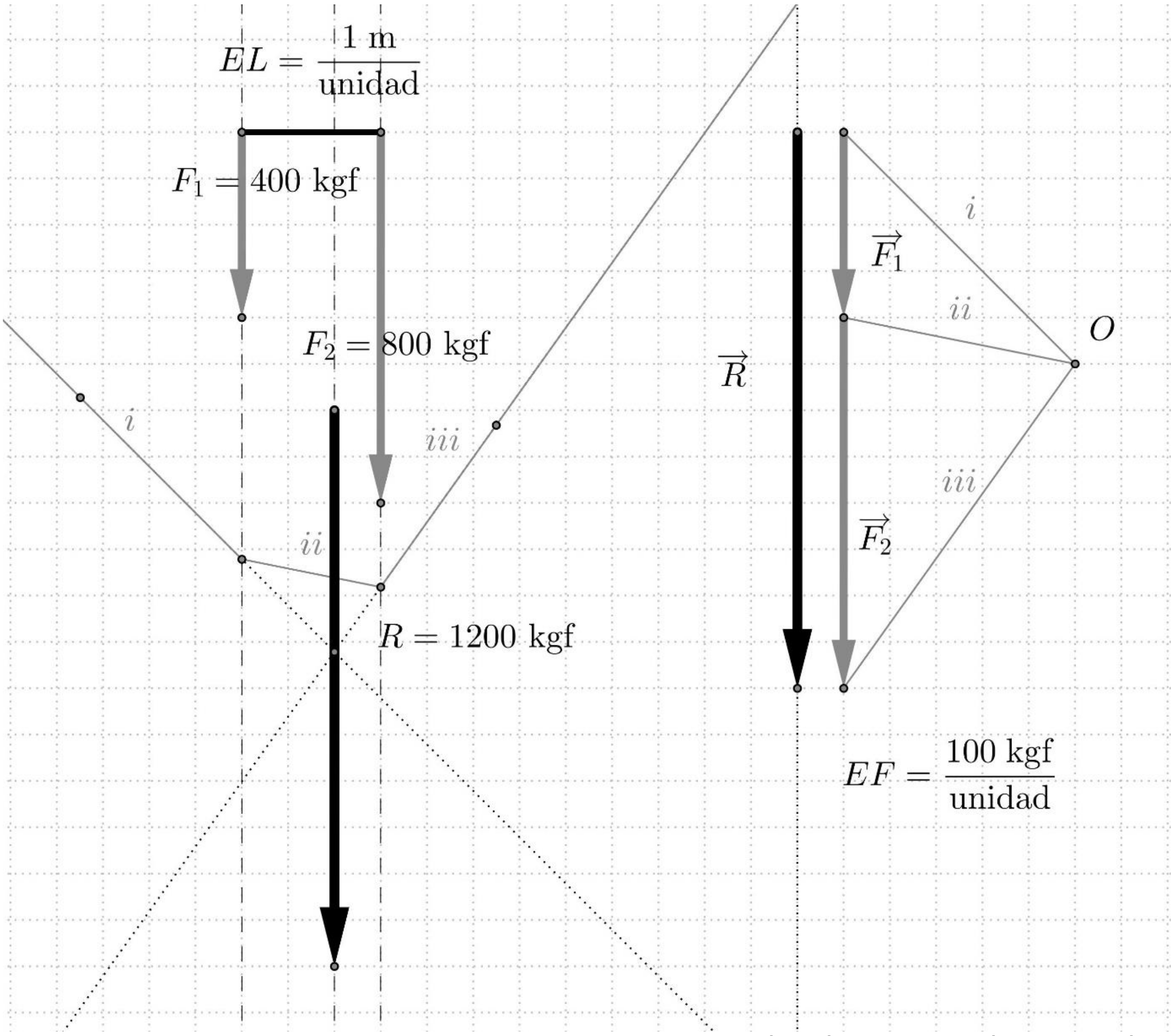


Figura 109. Sistema de Dos Fuerzas Paralelas del Mismo Sentido: Solución Gráfica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como se observa la resultante se ubica entre las dos fuerzas y más cercana a la fuerza de mayor magnitud, por lo tanto, la situación supuesta en la Figura 108 es errónea y lo correcto es lo que se indica en la **Figura 110** en la cual también se han indicado las distancias relativas entre las fuerzas y la resultante que luego se han de utilizar en la solución analítica.

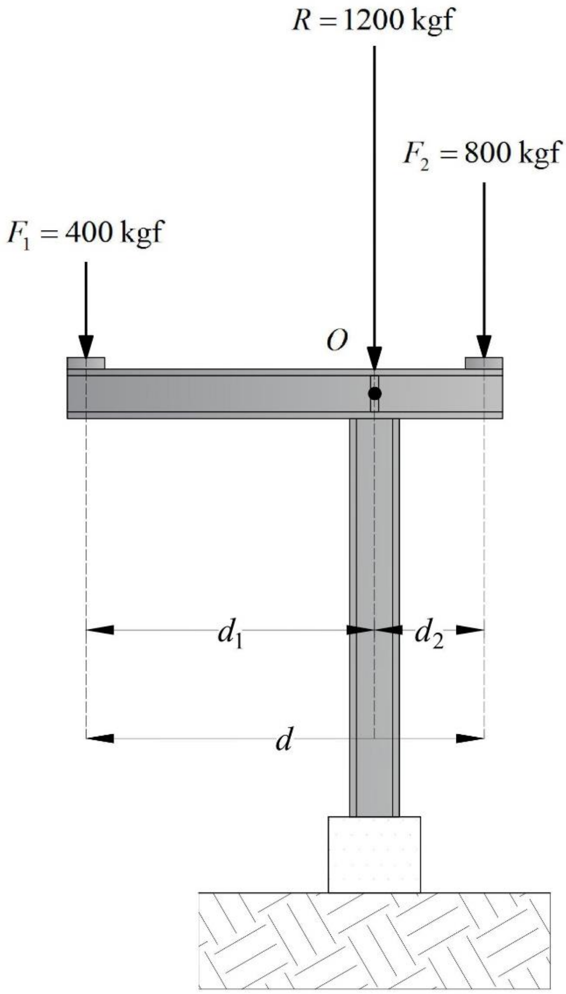


Figura 110. Reubicación de la Columna Soporte (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Luego, para este tipo de solución solo resta medir el vector representativo de la resultante y multiplicarla por la escala de fuerzas adoptada, en efecto:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (1200 \text{ kgf}, 270°)}$

2do. Solución Geométrica. Este método permite hallar un punto de la recta de acción de la resultante para ubicarlo en el sistema. Para ello es necesario, naturalmente, definir una escala de fuerzas y una escala de longitudes (se adoptan las mismas que se han utilizado para la resolución anterior). Luego, el *procedimiento* consiste en (Ver **Figura 111**):

1. Trazar el esquema posicional dibujando las distancias y las fuerzas a escala;

2. Trazar el segmento $\overline{HI}$ representativo de $\vec{F}_1$ sobre la línea de acción de $\vec{F}_2$;

3. Trazar el segmento $\overline{DE}$ representativo de $\vec{F}_2$ sobre la línea de acción de $\vec{F}_1$;

4. Trazar los segmentos $\overline{DI}$ y $\overline{HE}$. Su punto de intersección J es un punto de la recta de acción de $\vec{R}$.

5. Trazar el vector representativo de $\vec{R}$ por el punto J.

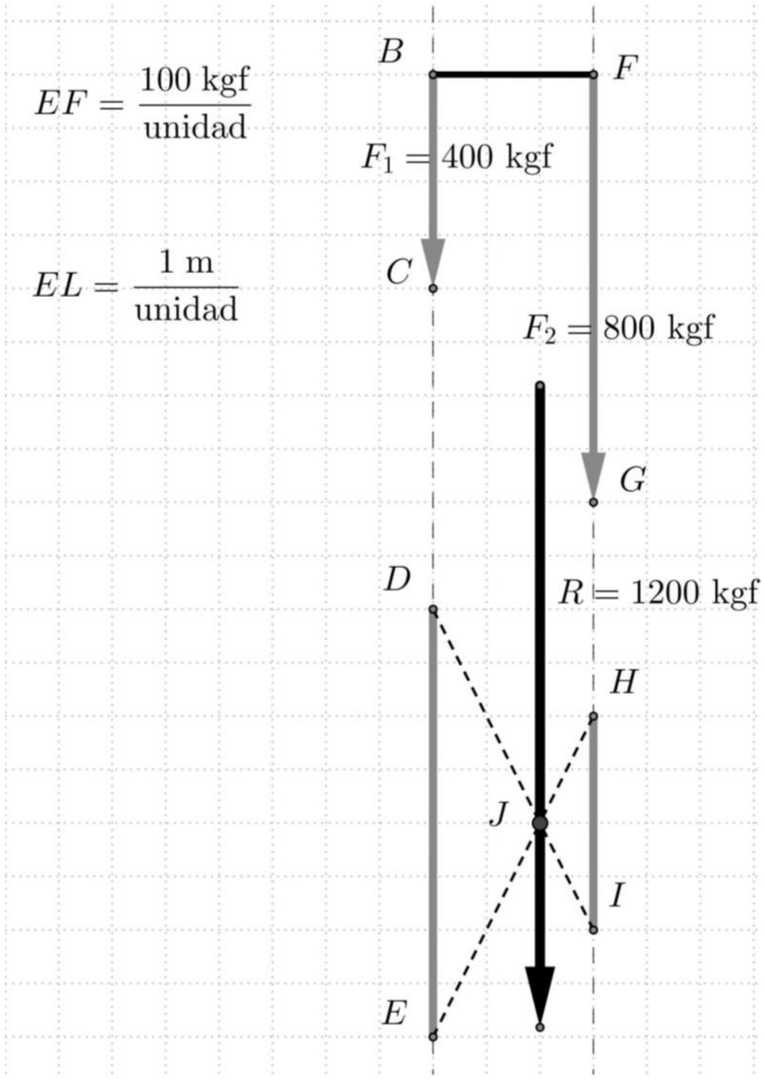


Figura 111. Solución Geométrica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El punto de intersección de la recta de acción de la resultante y el segmento $\overline{BF}$ (representativo de la viga) es, este caso, el punto de aplicación de la resultante. Debe recordarse, sin embargo, que en Estática se puede omitir el punto de aplicación, pero, para el caso de una viga este punto puede suponerse aplicado en el baricentro de la sección transversal de la misma. El procedimiento descrito y resuelto representa la solución completa para este método.

3ro. Solución Analítica

Para fuerzas paralelas se ha visto que para $\vec{R}$ el módulo se obtiene por suma algebraica, el argumento por medición directa y el sentido por el signo de dicha suma. La novedad aquí es que la ubicación de $\vec{R}$ en el sistema puede realizarse aplicando la relación de Stevin (o bien, el ya analizado teorema de Varignon). Por lo tanto, solo se han de exponer los dos métodos mencionados para el emplazamiento de la resultante. Se inicia con Stevin.

a) **Relación de Stevin**. De la Figura 110 se observa que el efecto que produce $\vec{F}_1$ es una rotación de la viga alrededor del punto de apoyo *O*; el de $\vec{F}_2$, una rotación en sentido opuesto. De modo que para que haya equilibrio, las dos rotaciones deben compensarse, por lo tanto (se prescinde de los signos porque solo interesan los valores absolutos):

$$F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$$

La igualdad anterior puede escribirse en forma de proporción:

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1}$$

De esta última igualdad puede obtenerse una relación sumamente útil; en efecto: *como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente*:

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{F_1 + F_2}{d_2 + d_1}$$

De la cual se observa:

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{R}{d}$$

La última expresión representa la **Relación de Stevin** que puede enunciarse como: *Cada fuerza es directamente proporcional al segmento determinado por lo puntos de aplicación de las otras dos*.

La relación precedente permite calcular las distancias que existen entre la resultante y las fuerzas en todo sistema de fuerzas paralelas. Para este ejercicio, en efecto:

$$\frac{400\ \text{kgf}}{d_2} = \frac{800\ \text{kgf}}{d_1} = \frac{1200\ \text{kgf}}{3\ \text{m}}$$

$$\frac{800\ \text{kgf}}{d_1} = \frac{1200\ \text{kgf}}{3\ \text{m}}$$

$$d_1 = \frac{800\ \text{kgf}}{1200\ \text{kgf}} \times 3\ \text{m} = 2\ \text{m}$$

Habiendo hallado d_1 ya está completa la solución analítica, sin embargo, para cumplimentar el ejercicio se ha de hallar también d_2.

$$d_2 = \frac{400\ \text{kgf}}{1200\ \text{kgf}} \times 3\ \text{m} = 1\ \text{m}$$

Respuesta $\begin{cases} \boxed{d_1 = 2\ \text{m}} \\ \boxed{d_2 = 1\ \text{m}} \\ \boxed{d = 3\ \text{m}} \end{cases}$

b) **Teorema de Varignon**. Para aplicar Varignon se elige un punto arbitrario conveniente, en este caso, *B*, **Figura 112**:

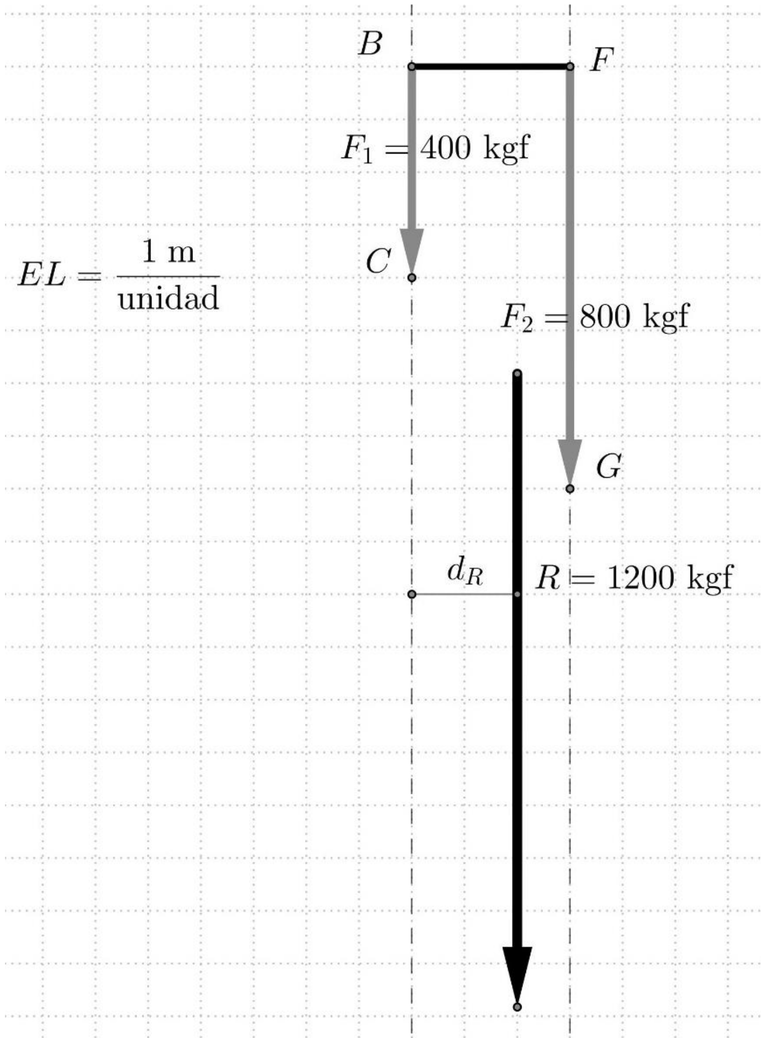


Figura 112. Distancia d_R de la Resultante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

$$\overset{\curvearrowright}{+}(M_R)_B = R \times d_R = F_2 \times 3 \quad [\text{kgf} \cdot \text{m}]$$

$$d_R = \frac{F_2 \times 3}{R}$$

$$d_R = \frac{+800 \times 3}{1200} \quad [\text{m}]$$

Respuesta $\boxed{d_R = 2 \text{ m}}$

Resultado que verifica lo realizado por el método de Stevin.

Observaciones

- En resumen, la *resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido* tiene las mismas *características* en módulo, dirección y sentido que las ya mencionadas para el caso de *n* fuerzas paralelas. La particularidad, sin embargo, es que, un punto de la recta de acción de la resultante, es un punto tal, que se cumple la relación de Stevin.

- Con la Relación de Stevin se puede obtener un punto de la recta de acción de la resultante o de las fuerzas o bien las distancias entre estas en función a los datos del problema. Para fuerzas de igual sentido esta relación suele enunciarse (Ver Figura 110): *El punto de aplicación de la resultante divide al segmento que une a los puntos de aplicación de ambas fuerzas en dos partes inversamente proporcionales a las intensidades de las fuerzas adyacentes*, matemáticamente: $F_1 \propto \frac{1}{d_1}$ y $F_2 \propto \frac{1}{d_2}$, esto significa que: la resultante esta entre las dos componentes; y, está más cerca de la mayor.

- Las designaciones *solución geométrica* y *solución gráfica* se utilizan en este material para diferenciar ambos métodos. Otros autores, sin embargo, designan a ambas como solución gráfica.

- El método geométrico analizado también se puede aplicar a un sistema de *n* fuerzas paralelas, simplemente con aplicaciones sucesivas del mismo.

PROBLEMA RESUELTO 3.9

Objetivo. Resolver un sistema de dos fuerzas paralelas de sentido contrario mediante los métodos: gráfico, geométrico y analítico. Comprender la *Relación de Stevin* para estos sistemas.

Consigna. Considere la situación mostrada en la **Figura 113**. Caracterice la resultante y determine sobre que punto de la viga esta aplicada.

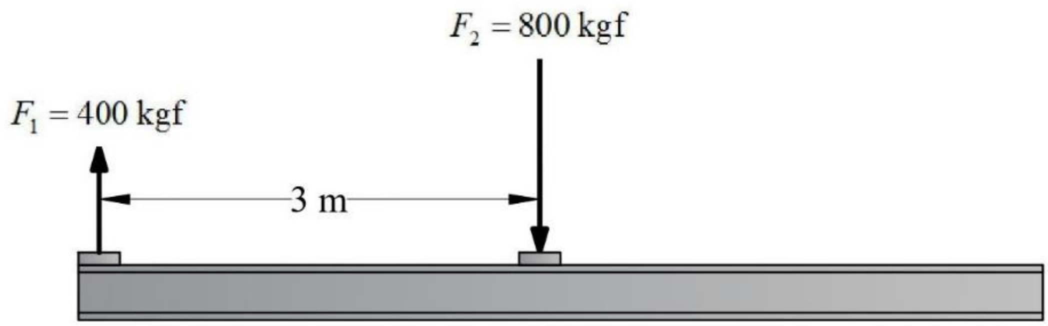


Figura 113. Diagrama Espacial del Problema [1] La situación problemática planteada es solo ilustrativa para fines comparativos con el Problema 2.17 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica Definida una escala de longitudes, la situación anterior puede representarse como lo indica la **Figura 114** en la cual, además, se ha ubicado la resultante mediante el polígono funicular.

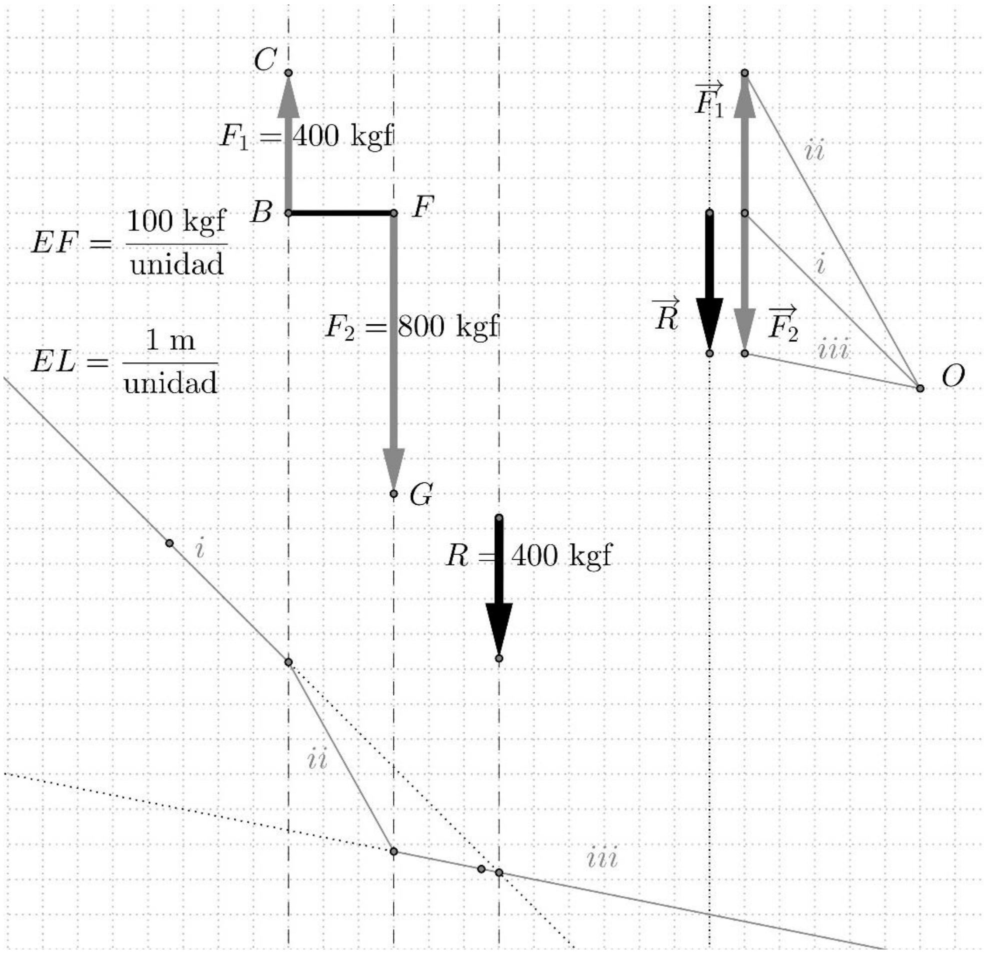


Figura 114. Sistema de Dos Fuerzas Paralelas de Sentido Contrario: Solución Gráfica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como se observa la resultante se ubica fuera del sistema y más cercana a la fuerza de mayor magnitud. Esto se indica esquemáticamente en la **Figura 115** en la cual también se muestran las distancias relativas entre las fuerzas y la resultante que luego se han de utilizar en la solución analítica.

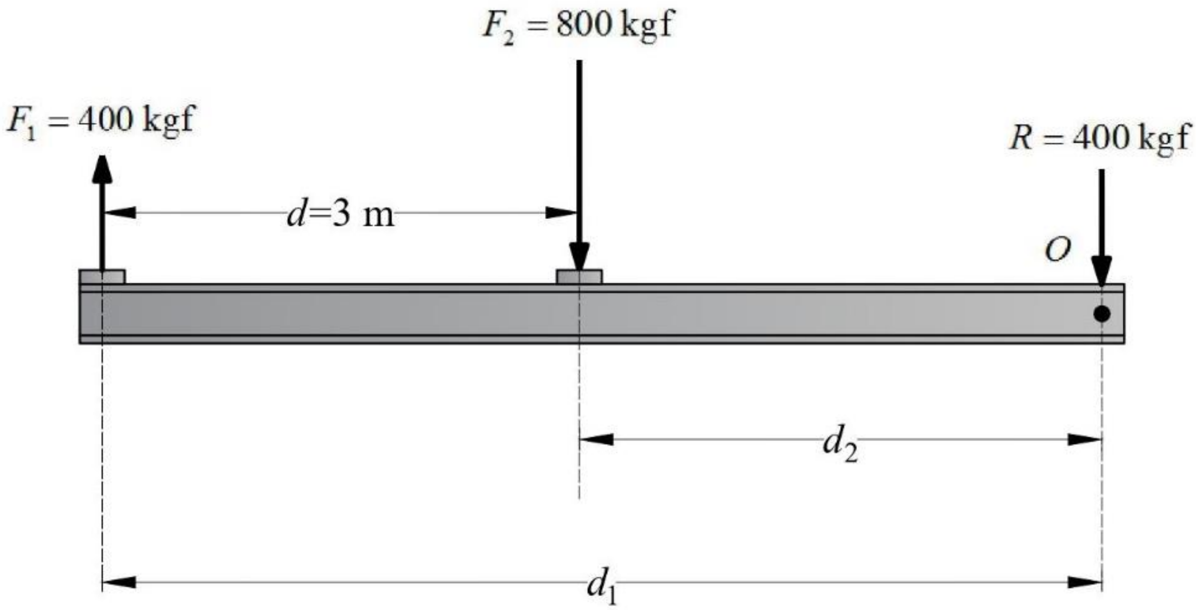


Figura 115. Ubicación de la Resultante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Luego, para este tipo de solución solo resta medir el vector representativo de la resultante y multiplicarla por la escala de fuerzas adoptada, en efecto:

Respuesta $\boxed{\vec{R} = (400 \text{ kgf}, 270°)}$

2do. Solución Geométrica. Este método permite hallar un punto de la recta de acción de la resultante para ubicarlo en el sistema. Para ello es necesario, naturalmente, definir una escala de fuerzas y una escala de longitudes (se adoptan las mismas que se han utilizado para la resolución anterior). Luego, el *procedimiento* consiste en (Ver **Figura 116**):

1. Trazar el esquema posicional dibujando las distancias y las fuerzas a escala;

2. Trazar el segmento $\overline{HI}$ representativo de $\vec{F}_1$ sobre la línea de acción de $\vec{F}_2$;

3. Trazar el segmento $\overline{DE}$ representativo de $\vec{F}_2$ sobre la línea de acción de $\vec{F}_1$;

4. Trazar la semirrecta que pasa por los puntos *D* y *H*. Lo propio para la semirrecta que pasa por los puntos *E* y *I*. Su punto de intersección J es un punto de la recta de acción de $\vec{R}$.

5. Trazar el vector representativo de $\vec{R}$ por el punto J.

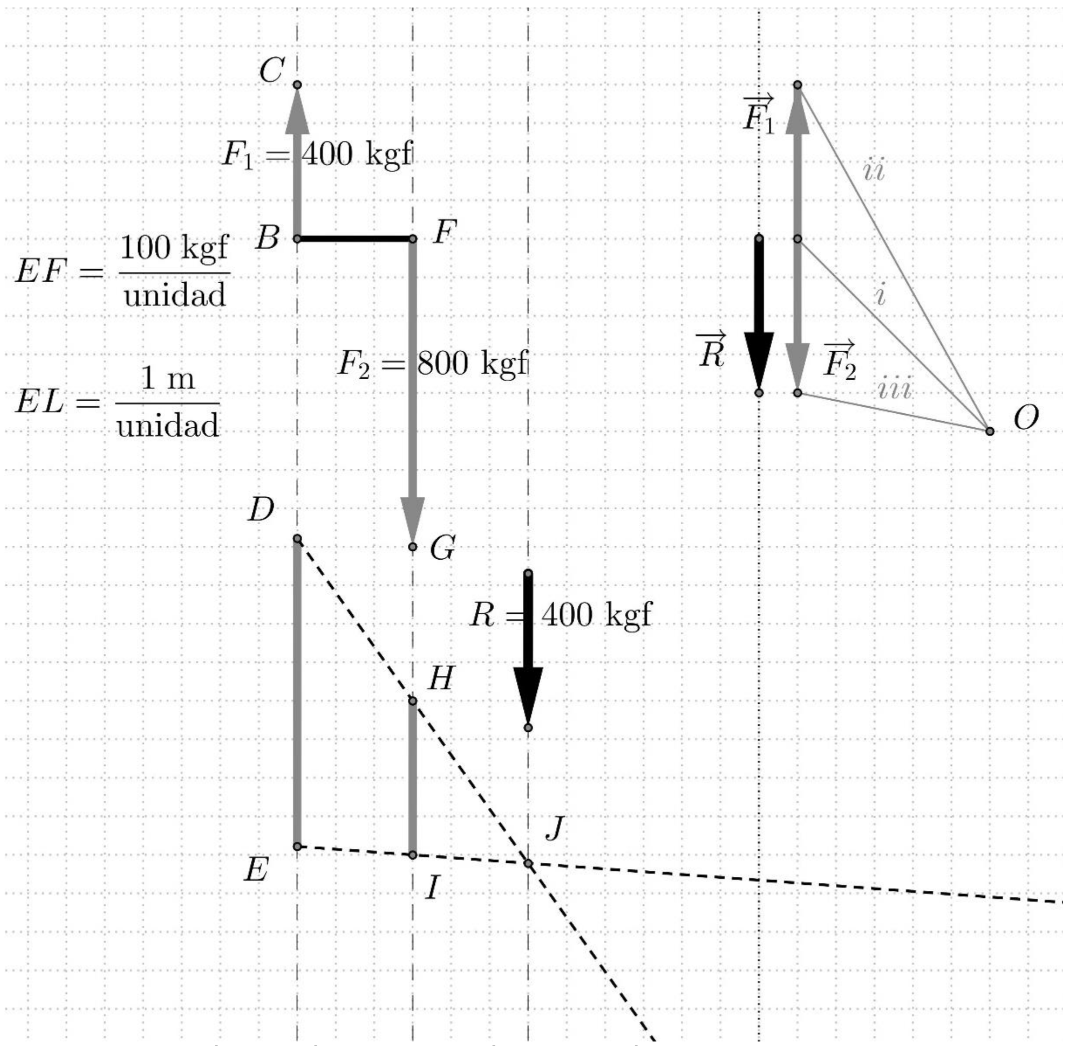


Figura 116. Solución Geométrica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El procedimiento descrito y resuelto representa la solución completa de este método, se sugiere comparar con el sistema anterior.

3ro. Solución Analítica

Para fuerzas paralelas ya se ha visto que para $\vec{R}$ el módulo se obtiene por suma algebraica, el argumento por medición directa y el sentido por el signo de dicha suma. La novedad aquí es que la ubicación de $\vec{R}$ en el sistema puede realizarse aplicando la relación de Stevin (o bien, el ya analizado teorema de Varignon). Se inicia con Stevin.

a) **Relación de Stevin**. La relación de Stevin se cumple también en este caso, entonces se puede escribir:

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{F_2 - F_1}{d_1 - d_2}$$

De la cual se observa:

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{R}{d}$$

La relación precedente permite calcular las distancias que existen entre la resultante y las fuerzas en todo sistema de fuerzas paralelas. Para este ejercicio es necesario hallar d_1 o d_2 ya que d es dato, en efecto:

$$\frac{400\text{ kgf}}{d_2} = \frac{800\text{ kgf}}{d_1} = \frac{400\text{ kgf}}{3\text{ m}}$$

$$\frac{800\text{ kgf}}{d_1} = \frac{400\text{ kgf}}{3\text{ m}}$$

$$d_1 = \frac{800\text{ kgf}}{400\text{ kgf}} \times 3\text{ m} = 6\text{ m}$$

Habiendo hallado d_1 ya está completa la solución analítica, sin embargo, para cumplimentar el ejercicio se ha de hallar también d_2.

$$d_2 = \frac{400\text{ kgf}}{400\text{ kgf}} \times 3\text{ m} = 3\text{ m}$$

Respuesta $\begin{cases} \boxed{d_1 = 6\text{ m}} \\ \boxed{d_2 = 3\text{ m}} \\ \boxed{d = 3\text{ m}} \end{cases}$

b) **Teorema de Varignon**. Para aplicar Varignon se elige un punto arbitrario conveniente, en este caso, *O*, **Figura 117**:

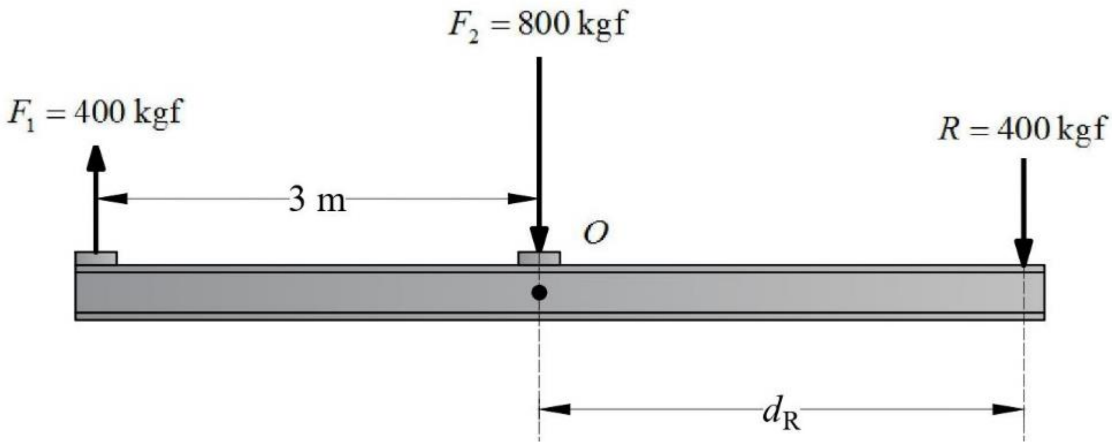


Figura 117. Distancia d_R de la Resultante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

$$\overset{\frown}{+}(M_R)_O = R \times d_\text{R} = F_1 \times 3 \quad [\text{kgf} \cdot \text{m}]$$

$$d_\text{R} = \frac{F_1 \times 3}{R}$$

$$d_\text{R} = \frac{+400 \times 3}{400} \quad [\text{m}]$$

Respuesta $\boxed{d_\text{R} = 3\,\text{m}}$

Resultado que verifica la relación de Stevin. Resta solamente enunciar las observaciones que, incluyen algunos aspectos importantes.

Observaciones

- Atendiendo a la *Relación de Stevin*, observar qué, tanto para fuerzas paralelas del mismo sentido como de sentido contrario se consideran las distancias de cada fuerza componente respecto a un punto que es un punto de la recta de acción de la resultante. A estas distancias se las denomina aquí como d_1 y d_2, mientras que la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas componentes se la denomina d. Todas ellas representan las menores distancias, es decir, son perpendiculares a las rectas de acción en cuestión.

- Otra vez, el punto de intersección entre la recta de acción de la resultante y la extensión de la recta representativa de la viga (en este caso) “representa” el *punto de aplicación* del vector resultante (recordar la implicancia de los *vectores deslizantes* en Estática Grafica).
- El *procedimiento geométrico* analizado (tanto para fuerzas de igual sentido como de sentido contrario) suele ser enunciada de una manera distinta por otros autores.

3.4. Problemas de Equilibrio en Sistemas de Fuerzas

En este apartado interesa que el alumno esté en condiciones de resolver problemas de equilibrio simples que involucren fuerzas concurrentes y no concurrentes mediante las ecuaciones de equilibrio presentadas en la Sección 3.2.

Particularmente, el *equilibrio de fuerzas concurrentes* se puede enmarcar dentro del equilibrio de una partícula, mientras que el *equilibrio de fuerzas no concurrentes* por su parte, tienen su aplicación más importante en el cálculo de reacciones de vínculo en el Capítulo 5.

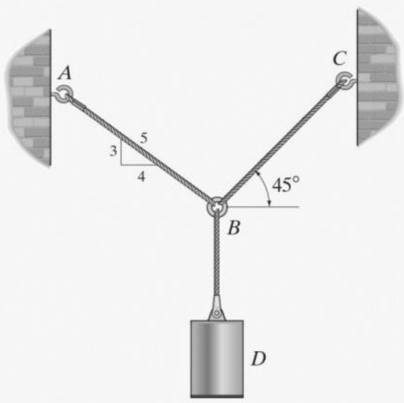
Lo mencionado en el parágrafo primero habilita a desarrollar esta sección con un *enfoque más bien práctico* resolviendo específicamente los problemas de interés como ya se ha hecho en otra oportunidad.

PROBLEMA RESUELTO 3.10

Objetivo. Mostrar cómo se resuelven los problemas de equilibrio de una partícula, mediante las ecuaciones de equilibrio, **Figura 118**.

EJEMPLO 3.2

Determine la tensión necesaria en los cables BA y BC para sostener el cilindro de 60 kg que se muestra la figura 3-6a.



(a)

(b)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Debido al equilibrio, el peso del cilindro ocasiona que la tensión en el cable BD sea $T_{BD} = 60(9.81)$ N, figura 3-6b. Las fuerzas en los cables BA y BC pueden determinarse al investigar el equilibrio del anillo B. Su diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-6c. Las magnitudes de $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_C$ se desconocen, pero sus direcciones son conocidas.

Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio a lo largo de los ejes x y y, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_C \cos 45^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right)T_A = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_C \operatorname{sen} 45^\circ + \left(\tfrac{3}{5}\right)T_A - 60(9.81)\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (1) puede escribirse como $T_A = 0.8839T_C$. Al sustituir esto en la ecuación (2) resulta

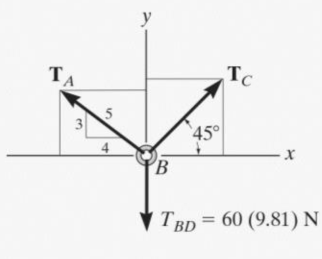
$$T_C \operatorname{sen} 45^\circ + \left(\tfrac{3}{5}\right)(0.8839T_C) - 60(9.81)\text{ N} = 0$$

De forma que

$$T_C = 475.66\text{ N} = 476\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (1) o la ecuación (2), obtenemos

$$T_A = 420\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 3-6

NOTA: por supuesto, la exactitud de esos resultados depende de la exactitud de los datos, es decir, de las medidas geométricas y de las cargas. Para la mayor parte de los trabajos de ingeniería que implican un problema como éste, los datos medidos con tres cifras significativas serían suficientes.

Figura 118. Problema Resuelto 3.10 (Fuente Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

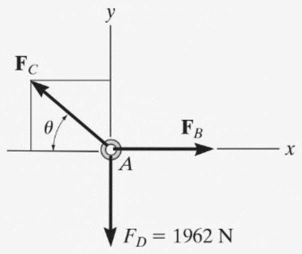
- El concepto que aparece en este problema y que es conveniente que el alumno repase es el de *Diagrama de Cuerpo Libre*.
- También recordar que este problema puede resolverse gráficamente aplicando el método de *descomposición* de una fuerza en dos direcciones concurrentes o bien la *ley del paralelogramo* de las fuerzas.

PROBLEMA RESUELTO 3.11

Objetivo. Mostrar cómo se resuelven los problemas de equilibrio de una partícula, mediante las ecuaciones de equilibrio, **Figura 119**.

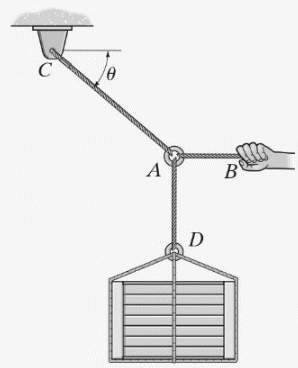
EJEMPLO 3.3

La caja de 200 kg que se muestra en la figura 3-7*a* está suspendida por las cuerdas *AB* y *AC*. Cada cuerda puede soportar una fuerza máxima de 10 kN antes de que se rompa. Si *AB* siempre permanece horizontal, determine el ángulo mínimo θ al que se puede suspender la caja antes de que una de las cuerdas se rompa.



(b)

Fig. 3-7



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Estudiaremos el equilibrio del anillo *A*. Hay tres fuerzas que actúan sobre él, figura 3-7*b*. La magnitud de $\mathbf{F}_D$ es igual al peso de la caja, es decir, $F_D = 200\,(9.81)$ N $= 1962$ N < 10 kN.

Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio a lo largo de los ejes *x* y *y*,

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -F_C\cos\theta + F_B = 0; \quad F_C = \frac{F_B}{\cos\theta} \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad F_C \operatorname{sen}\theta - 1962\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

A partir de la ecuación (1), F_C siempre es mayor que F_B puesto que $\cos\theta \le 1$. Por lo tanto, la cuerda *AC* alcanzará la fuerza de tensión máxima de 10 kN *antes* que la cuerda *AB*. Al sustituir $F_C = 10$ kN en la ecuación (2), obtenemos

$$[10(10^3)\text{ N}]\operatorname{sen}\theta - 1962\text{ N} = 0$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.1962) = 11.31^\circ = 11.3^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

La fuerza desarrollada en la cuerda *AB* puede obtenerse al sustituir los valores de θ y F_C en la ecuación (1).

$$10(10^3)\text{ N} = \frac{F_B}{\cos 11.31^\circ}$$

$$F_B = 9.81\text{ kN}$$

Figura 119. Problema Resuelto 3.11 (Fuente Adaptado de HIBBELER, 2010).

PROBLEMA RESUELTO 3.12

Objetivo. Mostrar cómo se resuelven los problemas de equilibrio de cuerpos rígidos, mediante las ecuaciones de equilibrio, **Figura 120**.

EJEMPLO 5.5

Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en la viga, causada por el pasador en B y el soporte de mecedora en A, como se muestra en la figura 5-12*a*. No tome en cuenta el peso de la viga.

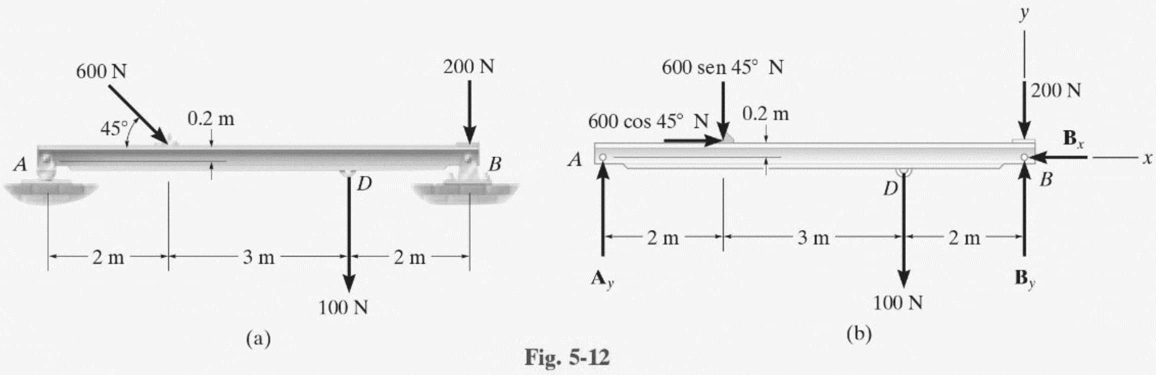


Fig. 5-12

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Identifique cada una de las fuerzas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 5-12*b*. (Vea el ejemplo 5.1). Por sencillez, la fuerza de 600 N se representa mediante sus componentes x y y como se muestra en la figura 5-12*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Al sumar las fuerzas en la dirección x se obtiene

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 600 \cos 45^\circ \text{ N} - B_x = 0$$

$$B_x = 424 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Una solución directa para $\mathbf{A}_y$ se puede obtener mediante la ecuación de momentos $\Sigma M_B = 0$ con respecto al punto B.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N})(5 \text{ m})$$

$$- (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 319 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Al sumar fuerzas en la dirección y, y usar este resultado, obtenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 319 \text{ N} - 600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0$$

$$B_y = 405 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

NOTA: podemos verificar este resultado al sumar momentos con respecto al punto A.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -(600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N})(2 \text{ m}) - (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m})$$

$$-(100 \text{ N})(5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(7 \text{ m}) + B_y(7 \text{ m}) = 0$$

$$B_y = 405 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Figura 120. Problema Resuelto 3.12 (Fuente Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

- Otros ejemplos de equilibrio de cuerpo rígido se han de analizar, principalmente, cuando se aborde el cálculo de reacciones de vinculo.
- Este mismo ejercicio, pero con otro objetivo, ya se ha resuelto en el *problema 2.15* del presente material.

4. PROPIEDADES DE SUPERFICIES PLANAS

En esta sección se introducen conceptos muy importantes que han de ser aplicados tanto en secciones siguientes del presente apunte didáctico como en la segunda parte del mismo que corresponde a Resistencia de Materiales. Dichos conceptos refieren principalmente a *Propiedades de Superficies Planas*.

Las propiedades mencionadas son: *Centro de Gravedad, Centroide* y *Centro de Masa* analizados en una primera parte, y; *Momento Estático* y *Momento de Inercia* abordados en una segunda instancia. De los mismos interesa que el alumno tenga conocimiento del concepto, cálculo y aplicaciones.

4.1. Centro de Gravedad, Centroide y Centro de Masa

Los conceptos que alude el titulo pueden ser analizados tanto para cuerpos (o sistemas de cuerpos) tridimensionales como para cuerpos (o sistemas de cuerpos) bidimensionales. Por las aplicaciones prácticas que abarca este curso se han de analizar los segundos.

Superficies Planas. Específicamente, se han de tratar cuerpos bidimensionales como el caso de *Placas Planas* que están contenidas en un plano dado. Adicionalmente se ha de considerar que el material que compone el cuerpo es *uniforme u homogéneo*[17] y tiene un espesor muy pequeño, asimilable por tanto a una *superficie plana* (RAFFO, 2007).

Por otra parte, también hay que mencionar que entre los autores citados es tópico analizar otros cuerpos bidimensionales tales como *Alambres,* pero, estos no tienen aplicación práctica a los efectos del curso, sin embargo, de su análisis pueden obtenerse connotaciones importantes.

---

[17] Homogéneo: que tiene densidad constante en todo su volumen.

4.1.1. Centro de Gravedad (Baricentro) de Superficies Planas

El *Centro de Gravedad G* también llamado *Baricentro* se puede definir como: *El punto en donde está aplicado el peso del cuerpo o Sistemas de Cuerpos*. Este punto no corresponde necesariamente a un punto material del mismo (por ejemplo, en un anillo).

Para una comprensión más precisa de este concepto y de su ubicación, considere una superficie plana horizontal como el de la **Figura 121**.

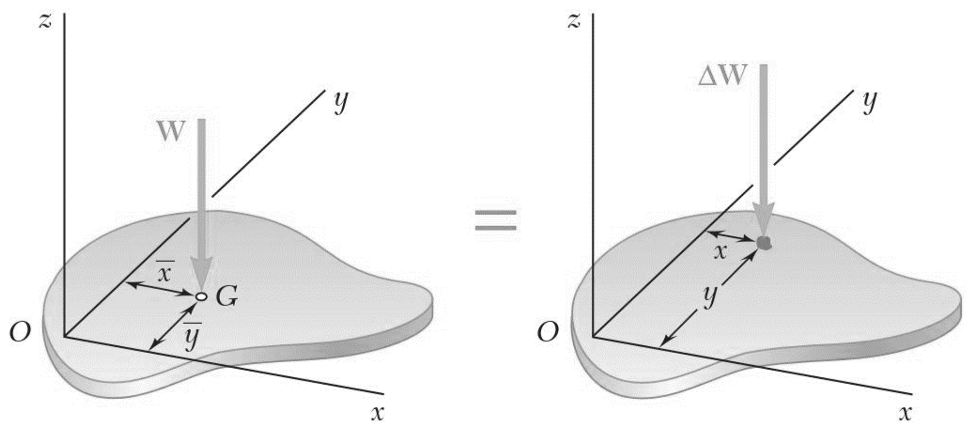


Figura 121. Baricentro de una Superficie Plana (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

La superficie puede dividirse en *n* elementos pequeños. Las coordenadas del primer elemento se representan con x_1 y y_1; las del segundo elemento se representan con x_2 y y_2, etc. A cada elemento le corresponde un peso ΔW_i en función de la aceleración de la gravedad entonces: $\Delta W_1, \Delta W_2, ..., \Delta W_n$.

A efectos prácticos, estas fuerzas o pesos forman un sistema de fuerzas paralelas[18] y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo W, la cual pasa a través de un solo punto llamado *Centro de Gravedad, G*. Ahora bien, el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir (Ec. 32):

[18] Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \mathrm{W}=\sum \Delta \mathrm{W}_i \quad [\mathrm{N}]; \qquad +\downarrow R=\sum F_{zi} \quad [\mathrm{N}]\\
&\text{Y en términos diferenciales:}\\
&b)\quad \mathrm{W}=\int d\mathrm{W} \quad [\mathrm{N}]; \qquad +\downarrow R=\int dF_{zi} \quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Donde R es el módulo de la fuerza resultante y F_{zi} es representativo de los módulos de las fuerzas componentes del sistema de fuerzas paralelas mencionado.

Determinación de Baricentros

La determinación del baricentro de superficies planas puede realizarse por *métodos analíticos*, *gráficos* y *geométricos*. En el presente material se han de desarrollar ejemplos para ilustrar estos procedimientos utilizando *figuras planas simples* y *figuras compuestas*.

1ro. Analíticamente. Hallar G analíticamente quiere decir hallar sus *coordenadas* respecto a los ejes cartesianos considerados. En este sentido y con referencia a la Figura 121, la ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y, se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y, con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje, Ec. 33 (*a*). De la misma manera, si se suman los momentos con respecto al eje x, Ec. 33 (*b*).

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \overset{\curvearrowright}{+} \quad \bar{x}\times \mathrm{W}=\sum \Delta \mathrm{W}_i \times x_i \quad [\mathrm{N}\cdot \mathrm{m}]\\
&b)\quad \overset{\curvearrowright}{+} \quad \bar{y}\times \mathrm{W}=\sum \Delta \mathrm{W}_i \times y_i \quad [\mathrm{N}\cdot \mathrm{m}]
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Para dar solución integra al problema deben despejarse las coordenadas del baricentro de las ecuaciones anteriores, Ec. (34).

$$a)\quad \bar{x} = \frac{\sum x_i \times \Delta W_i}{W} \quad [m]$$

$$b)\quad \bar{y} = \frac{\sum y_i \times \Delta W_i}{W} \quad [m] \tag{34}$$

Pero al tratarse de superficies planas suele ser más práctico expresar las ecuaciones anteriores en términos del área *A* (o superficie) en cuestión. Para ello considere la **Figura 122** que es la representación bidimensional de la Figura 121.

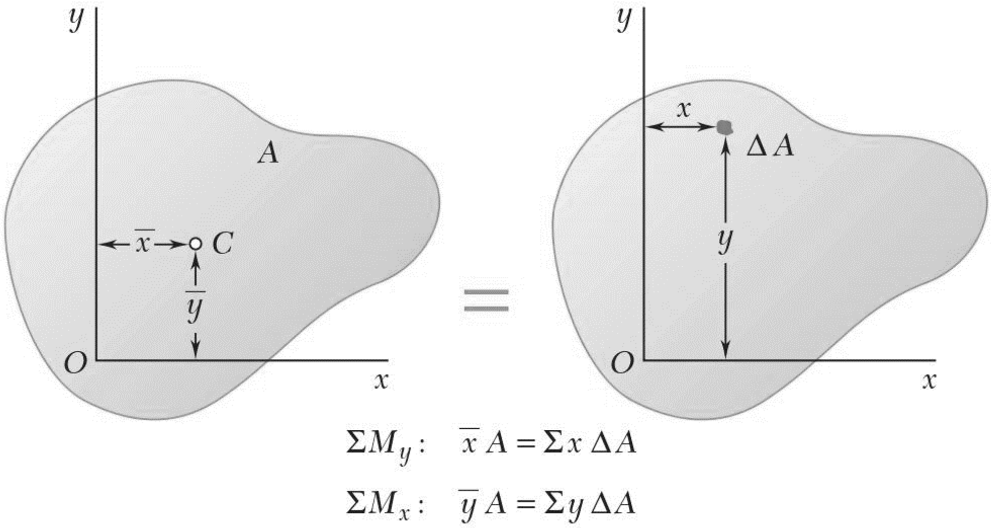


Figura 122. Baricentro de una Superficie Plana (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Teniendo en cuenta que γ; A y e son, respectivamente, el peso específico, el área y el espesor de la superficie considerada, el peso de cada elemento se puede expresar como: $\Delta W = \gamma \times \Delta A \times e$; y, por ende el peso total es: $W = \gamma \times A \times e$. Y, reemplazando ΔW y W en la (34) cambiando además convenientemente las notaciones de $\bar{x}$ por x_G y $\bar{y}$ por y_G se tiene la **Ec. (35)**.

$$a) \quad x_{\mathrm{G}} = \frac{\sum x_i \times \Delta A_i}{A} \quad [\mathrm{m}] \qquad o\, bien: \qquad x_{\mathrm{G}} = \frac{\int x \times dA}{A} \quad [\mathrm{m}]$$

(35)

$$b) \quad y_{\mathrm{G}} = \frac{\sum y_i \times \Delta A_i}{A} \quad [\mathrm{m}] \qquad o\, bien: \qquad y_{\mathrm{G}} = \frac{\int y \times dA}{A} \quad [\mathrm{m}]$$

Donde, x_{G} y y_{G} representan las *coordenadas del baricentro*, *A* el área total de la superficie, ΔA_i es el área del elemento de superficie considerado, y; x_i e y_i son las coordenadas de cada elemento de área.

De las ecuaciones (35) se desprenden algunas **connotaciones** importantes, a saber: **1-** *Si la placa no es homogénea*, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad; sin embargo, éstas aún definen al centroide[19] *C* del área (Figura 122); **2-** La integral de los numeradores se conocen como *momento estático de una superficie* (analizado más adelante en este capítulo); y, **3-** Los *baricentros de figuras planas simples* se pueden obtener sin mayor dificultad resolviendo[20] analíticamente las ecuaciones (35). En el Anexo 6 de la Sección 10.5 se adjunta una tabla con los baricentros de figuras planas comunes.

2do. Gráficamente. La solución gráfica, como se ha dicho, se ha de analizar según dos situaciones: para figuras simples y para figuras compuestas estos casos se ilustran perfectamente en los problemas resueltos.

En cualquiera de ellos, el baricentro *G* de una figura es el punto de intersección de las resultantes ($\vec{R}_{\mathrm{x}}$ y $\vec{R}_{\mathrm{y}}$) de los elementos de área considerados como sistemas de fuerzas paralelas que actúan en dos direcciones sucesivas (por conveniencia 90°), vale decir, que es el centro de un sistema de fuerzas paralelas, **Figura 123**.

---

[19] El centroide se define en la sección siguiente.
[20] En la página 64 (RAFFO, 2007) puede verse un ejemplo para el caso de un sector circular.

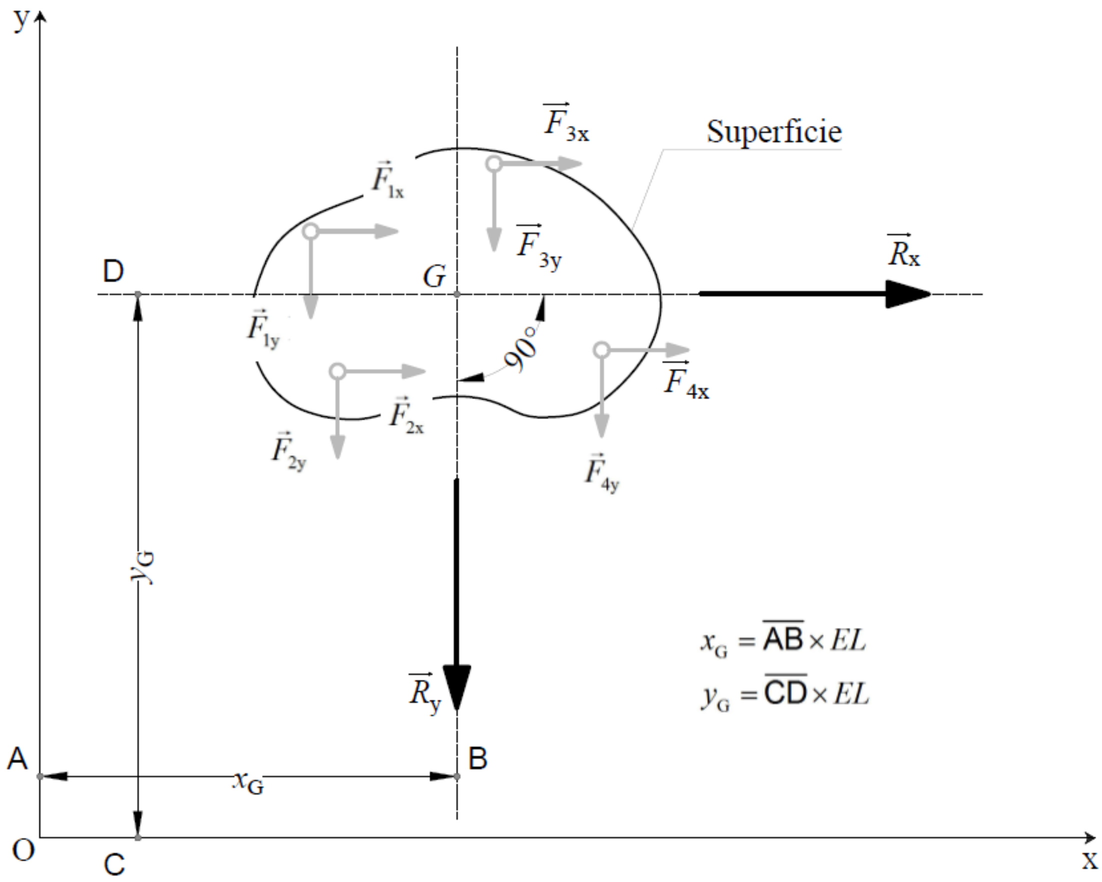


Figura 123. Determinación Gráfica del Baricentro (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Notar que, como ya se ha dicho, la superficie está referida a un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen se elige convenientemente según el caso. Por otra parte, el alumno debe recordar que los métodos gráficos para hallar y ubicar la resultante (horizontal y vertical) ya se han analizado en el Capítulo 3 al tratar los polígonos vectorial, polar y funicular.

Además, es necesario recalcar que si bien las fuerzas componentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ corresponden a los pesos de los elementos de área considerados, se ha de ver en la práctica que la aplicación de la ecuación (35) implica utilizar los valores de las áreas y no de las fuerzas. Esto se justifica debido a que el módulo de la fuerza es directamente proporcional al área y al peso específico del material que lo constituye.

El procedimiento grafico anterior no es necesario para el caso de figuras regulares simples, por ejemplo, para un rectángulo. Para estos casos se aprovechan ciertas propiedades geométricas tal como se explica a continuación.

3ro. Geométricamente. Según (RAFFO, 2007): Si una figura plana homogénea admite un eje de simetría, en él estará su baricentro. Y si admite más de uno; la intersección de estos ubica al centro de gravedad. Las figuras planas simples tienen casi todas por lo menos un eje de simetría, lo cual facilita la determinación del baricentro, **Figura 124**.

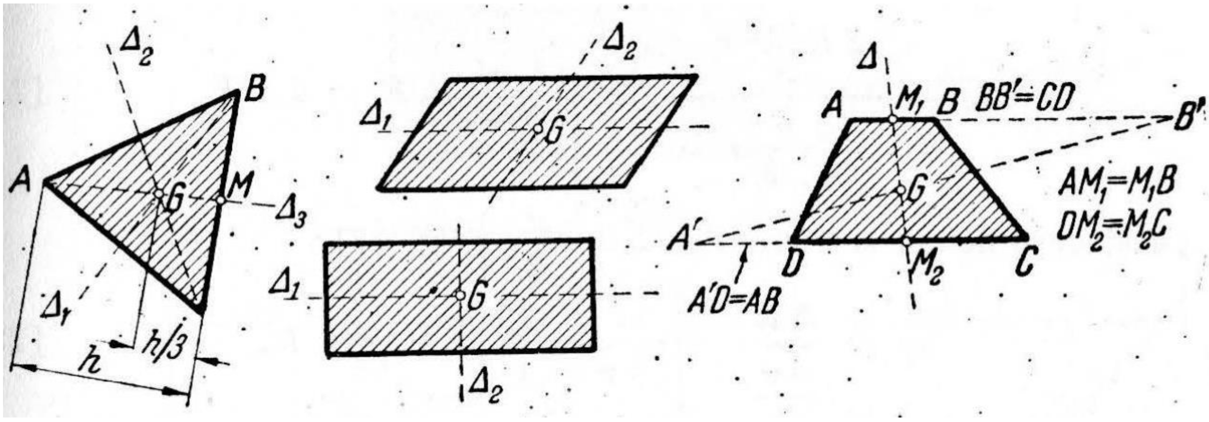


Figura 124. Determinación de Baricentros Mediante Ejes de Simetría (Fuente: RAFFO, 2007).

Cabe aclarar que existen figuras que no tienen ejes de simetría y por lo tanto no se puede hallar el baricentro mediante la intersección de ejes. Recordar que siempre se está tratando con figuras planas homogéneas.

¿Por qué interesa conocer el Centro de Gravedad? Una de las principales aplicaciones en el curso es obtener el punto de aplicación de una *carga concentrada*. Dicha carga concentrada es equivalente a una carga distribuida lo que permite resolver problemas relacionados a *vigas isostáticas*, por ejemplo, el *cálculo de reacciones* y la *construcción de diagramas de esfuerzos*. Todos estos conceptos se analizan en los Capítulos 5 y 6.

4.1.2. Centroide de Superficies Planas

El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo o Sistemas de Cuerpos. Este punto no corresponde necesariamente a un punto material del cuerpo (por ejemplo, un anillo).

Según se ha dicho en la sección anterior, s*i la placa no es homogénea*, las ecuaciones (35) no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad *G*; sin embargo, éstas aún definen al centroide *C* del área. De esta connotación se desprende que *el centroide y el centro de gravedad son conceptos distintos*, pero al tratarse de superficies planas homogéneas se suele utilizar los términos de manera intercambiable (referirse a la Figura 125).

La presente sección (4.1.2) así como la siguiente (4.1.3) no pretenden presentar expresiones de cálculo o procedimientos para la determinación del centroide y el centro de masa, en cambio buscan que el alumno tenga presente sus conceptos y su distinción del centro de gravedad para evitar confusiones. También es importante aclarar que el centroide también está relacionado con el momento estático, concepto que se analiza más adelante en el capítulo.

4.1.3. Centro de Masa de Superficies Planas

El Centro de Masa C_{m} *se puede definir como el punto donde se supone concentrada toda la masa del cuerpo o sistemas de cuerpos*. Este punto no corresponde necesariamente a un punto material del cuerpo.

Finalmente, y a modo de resumen se dejan explícitamente los puntos más importantes que el lector debe considerar de los conceptos vistos en estas tres últimas secciones, **Figura 125**.

Puntos importantes

- El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo. Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la "resultante" para el sistema.
- En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo, figura 9-7.

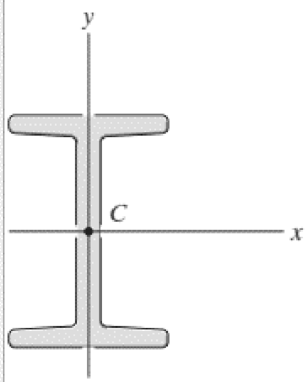


Fig. 9-7

Figura 125. Puntos Importantes [1] Para este curso la comparación es entre superficies planas homogéneas (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Se pueden hacer mención de otros aspectos también importantes del centro de masa, pero esto escapa a los límites del curso. Finalmente, a continuación, se desarrolla una aplicación práctica típica que el alumno debe comprender.

PROBLEMA RESUELTO 4.1

Objetivo. Determinar, gráfica y analíticamente, las coordenadas del centro de gravedad (: baricentro) *G* de figuras planas compuestas. Identificar que las figuras compuestas pueden descomponerse en otras simples para resolver el problema.

Consigna. Localice el baricentro de la superficie mostrada en la **Figura 126**; *a*) Gráficamente; y, *b*) Analíticamente.

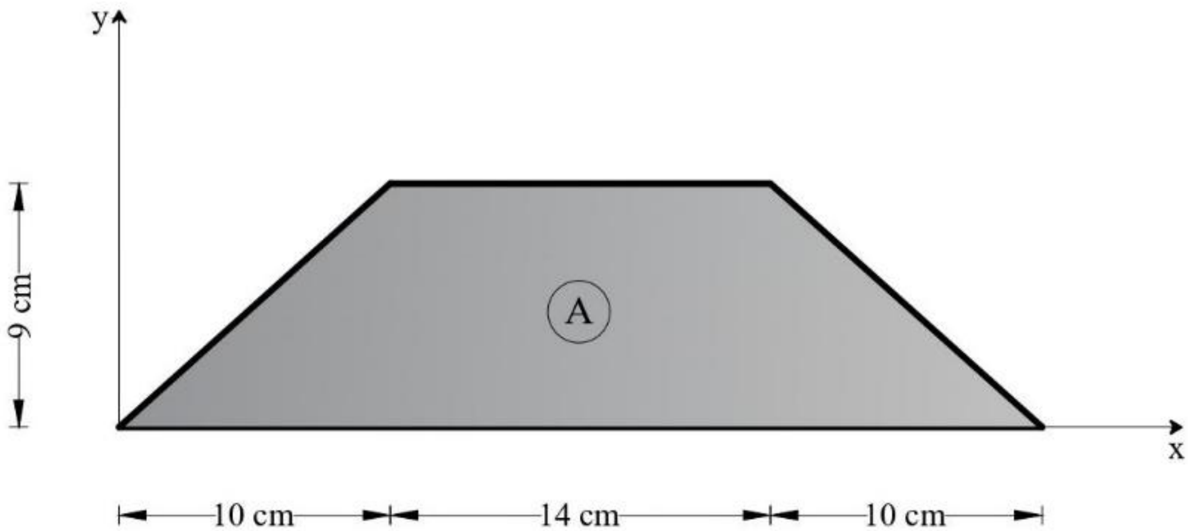


Figura 126. Superficie Plana (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

a) **Gráficamente**. El primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área total A dada, a partir de las formas comunes indicadas en el Anexo 6 Sección 10.5. En otras palabras, se debe decidir como subdividir la superficie total. Para este caso el área total A se obtiene con la suma de tres subáreas (áreas componentes): un rectángulo (A_2) y dos triángulos (A_1 y A_3), **Figura 127**.

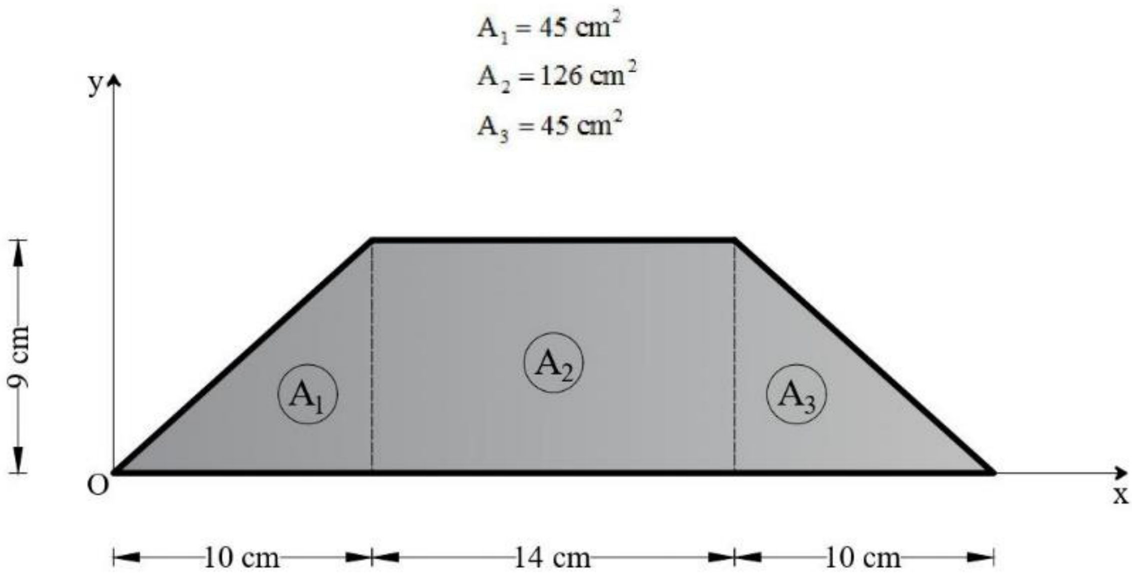


Figura 127. Áreas Componentes (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En segundo lugar, se debe definir la ubicación del sistema de ejes cartesianos (ya definido en este caso), definir una EL y representar la figura a escala, ubicar los baricentros de las subáreas y trazar por los mismos los vectores representativos de los pesos de cada área. Se ha de optar por designar a estos vectores como A_1, A_2 y A_3, dado que sus módulos están expresados en términos de sus áreas, **Figura 128**.

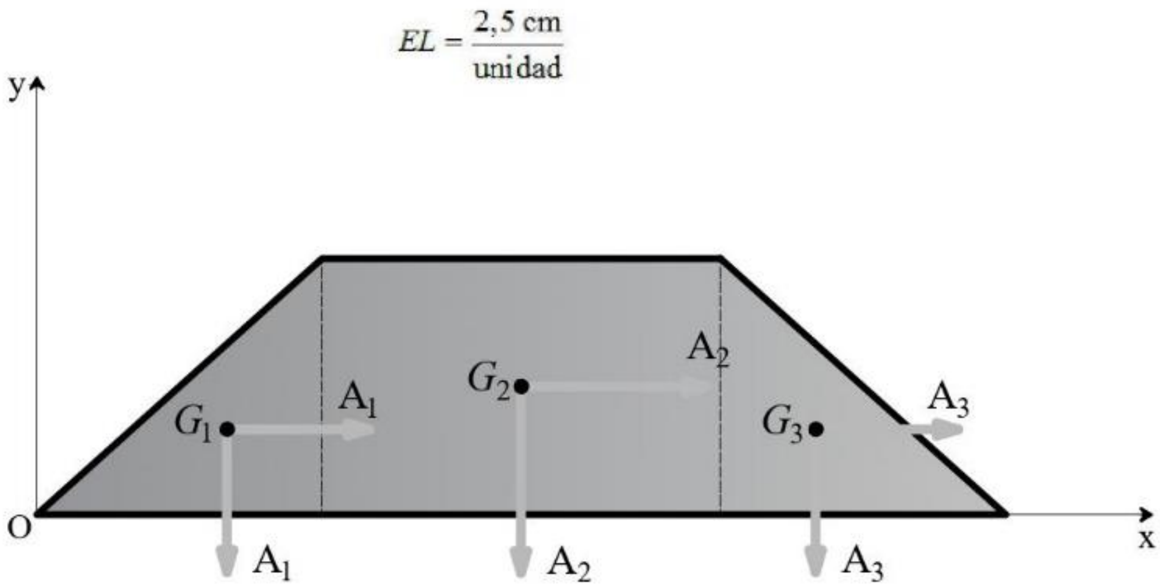


Figura 128. Baricentro de Áreas Componentes (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Finalmente se construyen los polígonos vectorial, polar y funicular para ubicar las resultantes y su punto de intersección el que en definitiva determina las coordenadas de G.

Como se ha dicho, el módulo de las fuerzas componentes está en término de las áreas por ende debe definirse una *Escala de Área* (EA) para construir el polígono vectorial. Luego, las resultantes también están en término de las áreas lo que hace conveniente designarlas como Ax y Ay (Ver **Figura 129**).

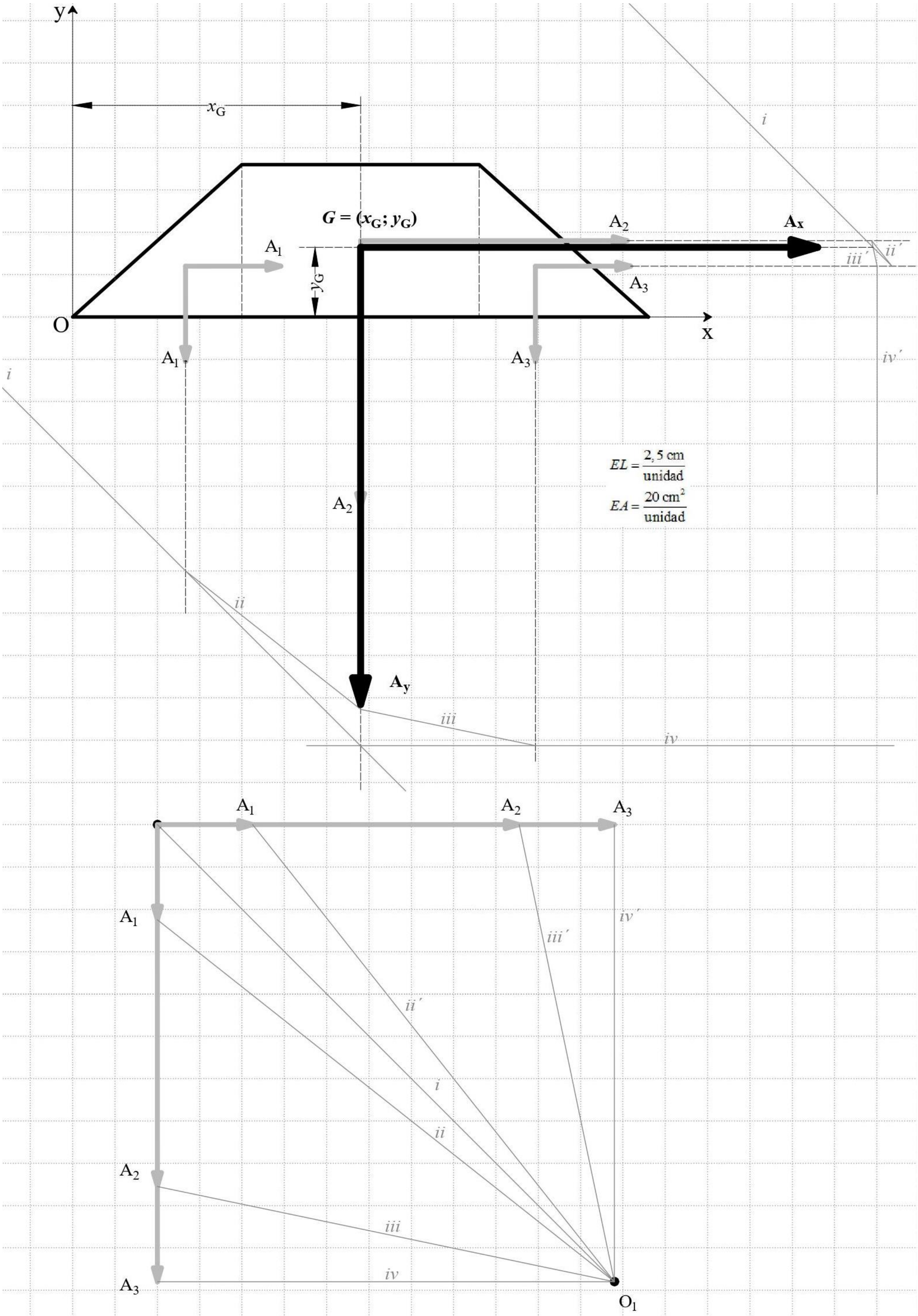


Figura 129. Determinación de Baricentros: Solución Gráfica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Finalmente, para obtener los valores de las coordenadas se mide la longitud representativa de x_G e y_G y se los multiplica por la escala:

$$x_G = 6,8\ \text{unidad} \times \frac{2,5\ \text{cm}}{\text{unidad}} \cong 17\ \text{cm}$$

$$y_G = 1,6\ \text{unidad} \times \frac{2,5\ \text{cm}}{\text{unidad}} \cong 4\ \text{cm}$$

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} x_G \cong 17\ \text{cm} \\ y_G \cong 4\ \text{cm} \end{array}}$

o bien:

Respuesta $\boxed{G = (17;\ 4)\ \text{cm}}$

b) **Analíticamente**. Para la solución analítica suele ser común ordenar los datos necesarios como se muestra en la **Tabla 4**.

Tabla 4. Determinación Analítica de las Coordenadas del Baricentro (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Figura	Área $[\text{cm}^2]$	$x[\text{cm}]$	$y[\text{cm}]$	$A \times x[\text{cm}^3]$	$A \times y[\text{cm}^3]$
A_1	45	6,67	3	300,15	135
A_2	126	17	4,5	2142	567
A_3	45	27,33	3	1229,9	135
Total	**216**			**3672**	**837**

Nota. x e y son las coordenadas del baricentro de las áreas componentes.

Aplicando las ecuaciones (35) se obtienen los resultados buscados:

$$x_G = \frac{\sum x_i \times \Delta A_i}{A} = \frac{3672\ \text{cm}^3}{216\ \text{cm}^2} = 17\ \text{cm}$$

$$y_G = \frac{\sum y_i \times \Delta A_i}{A} = \frac{837\ \text{cm}^3}{216\ \text{cm}^2} \cong 3,88\ \text{cm}$$

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} x_G \cong 17\ \text{cm} \\ y_G \cong 3,88\ \text{cm} \end{array}}$

Observaciones

- El alumno debe definir la ubicación de los ejes coordenados en el caso que no se explicite.
- Se debe reconocer que, el primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área dada, a partir de las formas comunes conocidas. Se debe reconocer que, en el caso de áreas planas, una forma en particular se puede construir de varias maneras. No debe olvidarse que, para obtener la forma deseada, es posible restar o sumar áreas.
- Se recomienda que para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas y las coordenadas respectivas de sus baricentros. Es esencial recordar que las áreas que son "removidas" (por ejemplo, los agujeros) se toman como negativas. Además, se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Por tanto, siempre debe observarse la ubicación del origen de los ejes coordenados (Ver Problemas Resueltos 4.2 y 4.3).
- Cuando sea posible, se deben utilizar consideraciones de simetría para determinar con mayor facilidad la ubicación del baricentro.
- En las fórmulas del Anexo 6 Sección 10.5 para el sector circular y para el arco del círculo, el ángulo siempre debe ser expresado en radianes.

PROBLEMA RESUELTO 4.2

Objetivo. Determinar, gráfica y analíticamente, las coordenadas del centro de gravedad (: baricentro) *G* de figuras planas compuestas. Identificar que las figuras compuestas pueden descomponerse en otras simples para resolver el problema. Comparar este ejercicio con el anterior.

Consigna. Localice el baricentro de la superficie mostrada en la **Figura 130**; *a*) Gráficamente; y, *b*) Analíticamente.

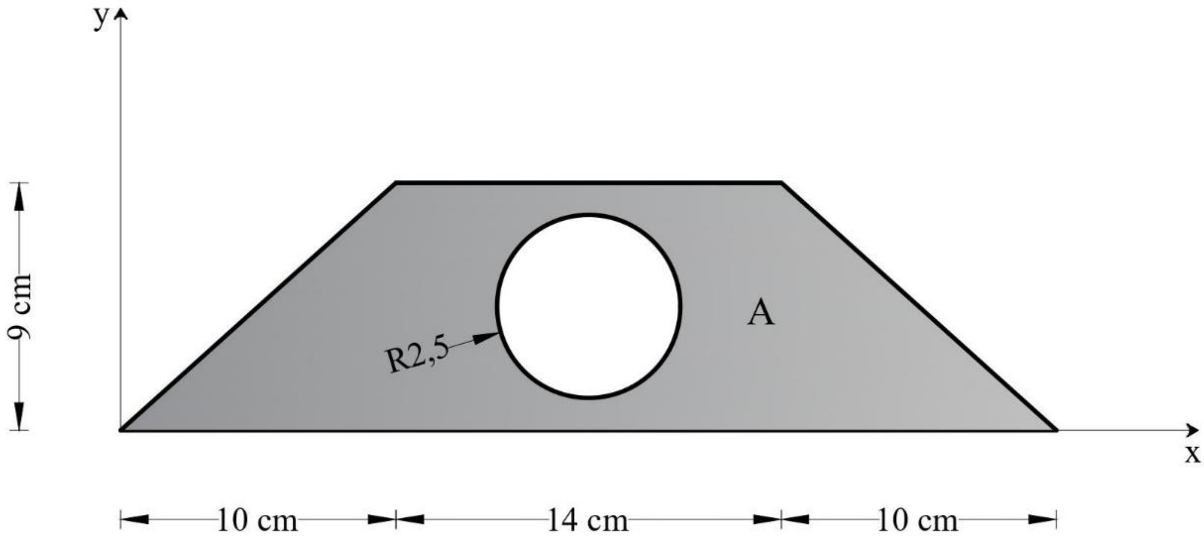


Figura 130. Superficies Planas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

a) **Gráficamente**. Para este ejercicio se tienen las tres áreas componentes definidas en el problema anterior, con el agregado de una cuarta área (A_4) que corresponde al círculo, **Figura 131** (observar el sentido de los vectores).

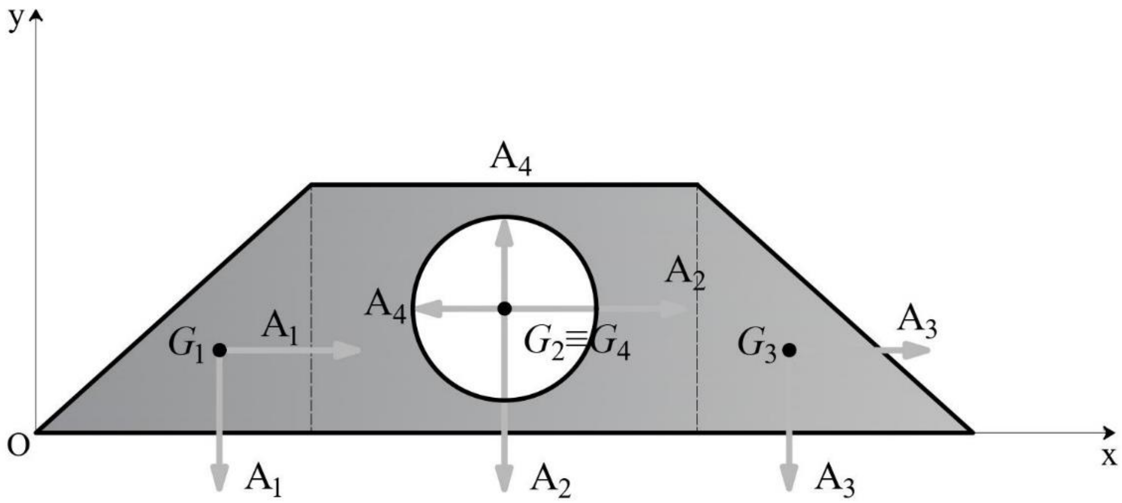


Figura 131. Baricentro de Áreas Componentes (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Definidas las escalas de longitud y de área se construye el polígono funicular que resuelve el problema, **Figura 132**.

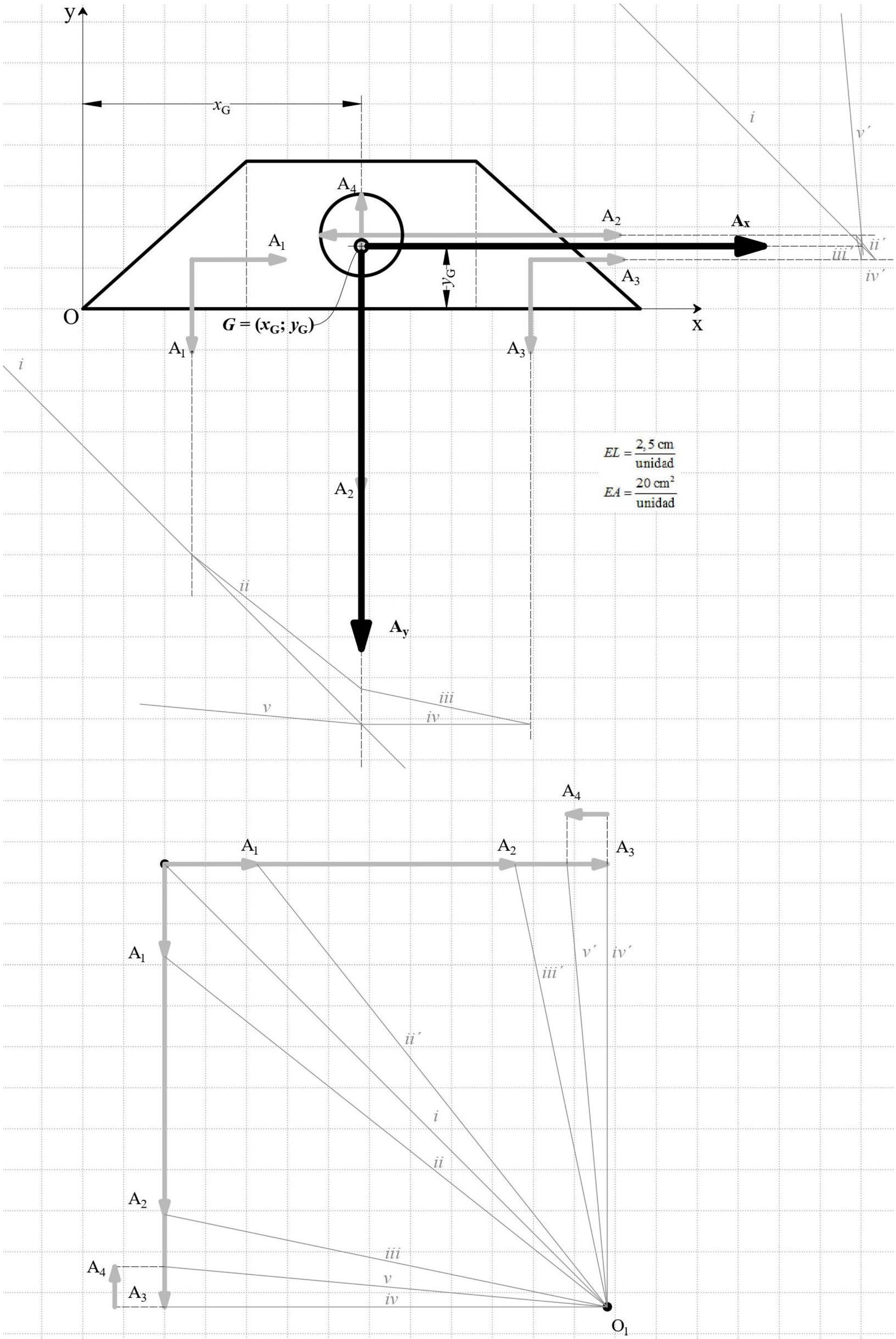


Figura 132. Determinación de Baricentros: Solución Gráfica (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Y, los valores de las coordenadas son:

$$x_G = 6{,}8\ \text{unidad} \times \frac{2{,}5\ \text{cm}}{\text{unidad}} \cong 17\ \text{cm}$$

$$y_G = 1{,}5\ \text{unidad} \times \frac{2{,}5\ \text{cm}}{\text{unidad}} \cong 3{,}75\ \text{cm}$$

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} x_G \cong 17\ \text{cm} \\ y_G \cong 3{,}75\ \text{cm} \end{array}}$

b) **Analíticamente**. Como en el caso anterior se ordenan los datos, **Tabla 5**.

Tabla 5. Determinación Analítica de las Coordenadas del Baricentro (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Figura	Área $[\text{cm}^2]$	$x[\text{cm}]$	$y[\text{cm}]$	$\text{A} \times x[\text{cm}^3]$	$\text{A} \times y[\text{cm}^3]$
A_1	45	6,67	3	300,15	135
A_2	126	17	4,5	2142	567
A_3	45	27,33	3	1229,9	135
A_4	-19,63	17	4,5	-333,8	-88,36
Total	**196,37**			**3338,2**	**748,64**

Notas. x e y son las coordenadas del baricentro de las áreas componentes.

Aplicando las ecuaciones (35) se obtienen los resultados buscados:

$$x_G = \frac{\sum x_i \times \Delta A_i}{A} = \frac{3338{,}2\ \text{cm}^3}{196{,}37\ \text{cm}^2} \cong 17\ \text{cm}$$

$$y_G = \frac{\sum y_i \times \Delta A_i}{A} = \frac{748{,}64\ \text{cm}^3}{196{,}37\ \text{cm}^2} \cong 3{,}81\ \text{cm}$$

Respuesta $\boxed{\begin{array}{l} x_G \cong 17\ \text{cm} \\ y_G \cong 3{,}81\ \text{cm} \end{array}}$

Observaciones

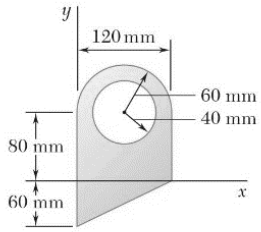
- Notar que el centro de gravedad se ha desplazado ligeramente hacia abajo.

- Como se ha mencionado anteriormente, toda área que se “remueve” se toma negativa.

En este caso corresponde al área cuatro.

PROBLEMA RESUELTO 4.3

Objetivo. Mostrar el procedimiento analítico para hallar *G* utilizado por el autor citado. Comparar con los ejercicios anteriores, **Figura 133**.

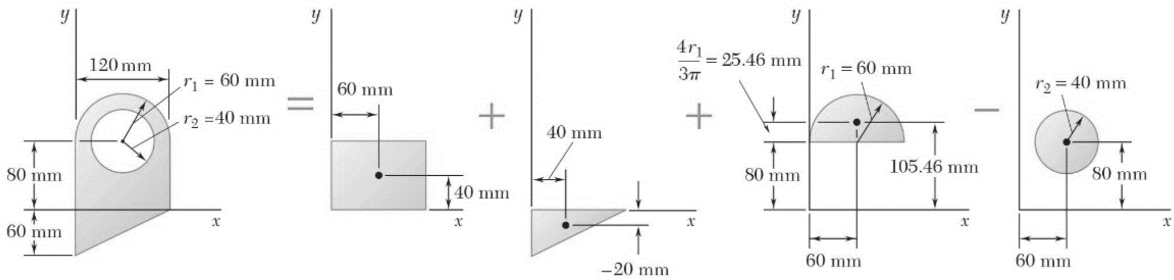


PROBLEMA RESUELTO 5.1

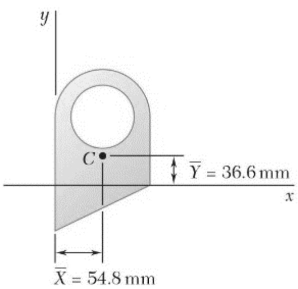
Para el área plana mostrada en la figura, determine: *a*) los primeros momentos con respecto a los ejes *x* y *y*, y *b*) la ubicación de su centroide.

SOLUCIÓN

Componentes del área. El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes y luego se introducen en la tabla que aparece en la parte inferior. El área del círculo se indica como negativa puesto que debe restarse de las demás áreas. Nótese que la coordenada $\bar{y}$ del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$



a) Primeros momentos del área. Con las ecuaciones (5.8), se escribe

$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$

b) Ubicación del centroide. Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

Figura 133. Determinación de Baricentros (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

Observaciones

- Queda como actividad extra para el lector verificar que, con la solución gráfica se llega al mismo resultado para las coordenadas del baricentro. Además, observe que para este planteo se tienen coordenadas negativas.
- En este ejercicio, además de la determinación del baricentro, se pide explícitamente hallar los *primeros momentos de áreas* o *momentos estáticos*. Tema que se analiza en la sección siguiente.
- Tener en cuenta que la *nomenclatura* utilizada por este autor difiere de la adoptada en el curso.

4.2. Momento Estático y Momento de Inercia de Área

Las propiedades geométricas que se estudian en esta sección tienen vital importancia en *Ingeniería Estructural*. A modo general, interesa que el lector reconozca la importancia de estas en relación con el análisis de secciones transversales de elementos estructurales, particularmente, en el análisis de vigas sometidas a flexión, **Figura 134**.

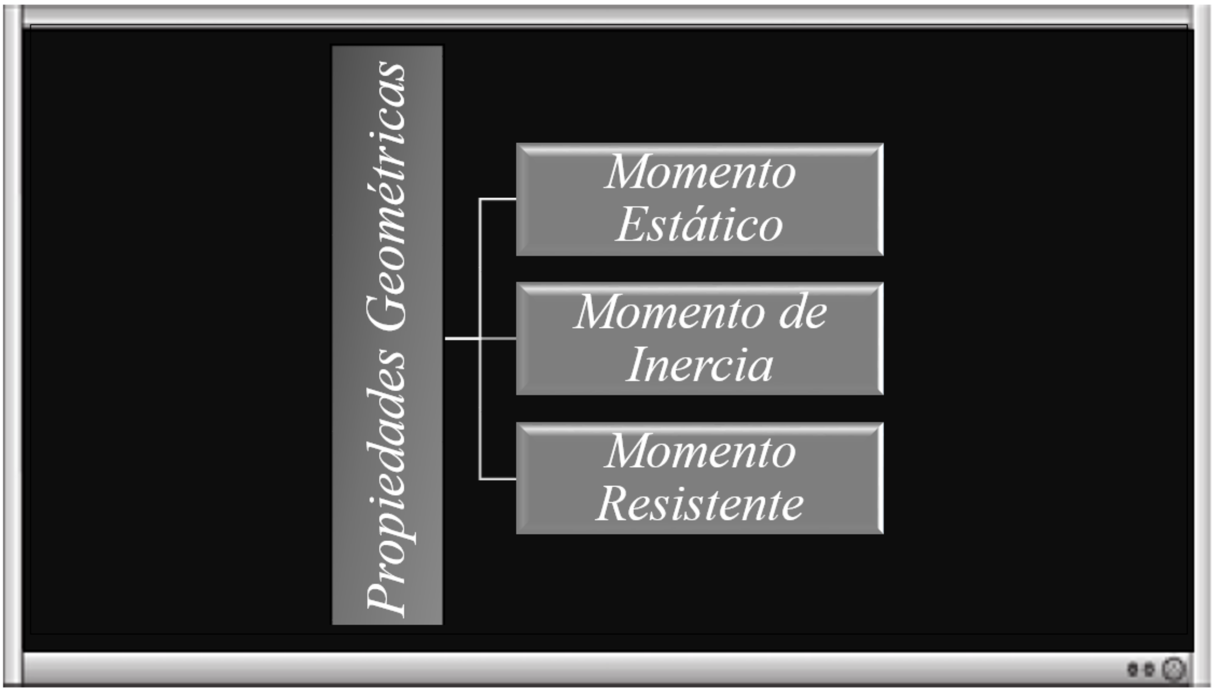


Figura 134. Propiedades Geométricas en Secciones Transversales de Elementos Estructurales (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En las subsecciones siguientes se han de analizar las definiciones inherentes a estos conceptos, particularmente de los dos primeros. Pero en primer lugar es conveniente y necesario dejar claro algunas de sus aplicaciones más importantes, aplicaciones que se analizan con mayor profundidad en la segunda parte del curso: *Resistencia de Materiales*.

En este sentido, el **Momento Estático** (*S*) además de su uso en la determinación de *ejes baricéntricos*, también es útil para determinar los *esfuerzos de corte en vigas* sujetas a cargas transversales (BEER *et al.* 2007).

El **Momento de Inercia** (*J*) por su parte, está relacionado con las tensiones[21] y deformaciones máximas que aparecen por flexión en un elemento estructural y, por tanto, junto con las propiedades del material determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión, **Figura 135**.

Para predecir la resistencia y la deflexión de esta viga, es necesario calcular el momento de inercia del área de su sección transversal.

Figura 135. Importancia del Momento de Inercia (Fuente: HIBBELER, 2010).

Finalmente, el **Momento Resistente** *W* (o *Módulo Resistente*) es un concepto asociado al momento de inercia y que reviste la misma importancia que este. En particular este concepto se desarrolla en Resistencia de Materiales.

Se puede adelantar que estos tres momentos dependen únicamente de la *forma y dimensión* de la sección: son *constantes geométricas* de cada perfil (RAFFO, 2007).

---

[21] El concepto de esfuerzo se aborda en el Capítulo 6. Los de tensión y deformación en Resistencia de Materiales.

En particular, las propiedades (*S*, *J* y *W*) de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales se proporcionan en tablas, por ejemplo, como la mostrada en la Figura 9.13 A, p. 488 del BEER *et al.* (2007). Sin embargo, como estas propiedades tienen su aplicación inmediata en el diseño de elementos estructurales (Resistencia de Materiales) no se anexan en este apunte.

4.2.1. Momento Estático: 1er. Momento de Área

Los numeradores de las (35), que suelen designarse como S_{x} y S_{y} se denominan, cada uno, *Momento Estático· de la Superficie*, respecto del eje x o del eje y, de su plano. Ec. (36).

$$S_{\mathrm{y}} = \int x \times dA \quad \left[\mathrm{m}^3\right]; \qquad S_{\mathrm{x}} = \int y \times dA \quad \left[\mathrm{m}^3\right] \tag{36}$$

En las (36) el eje de momentos está indicado por el subíndice de *S*. Por consiguiente, momento estático de una superficie es la suma de los productos de cada área elemental dA por su distancia a un eje de su plano. Conforme a las (35); las (36) pueden también escribirse como (**Ec. 37**):

$$S_{\mathrm{y}} = A \times x_{\mathrm{G}} \quad \left[\mathrm{m}^3\right]; \qquad S_{\mathrm{x}} = A \times y_{\mathrm{G}} \quad \left[\mathrm{m}^3\right] \tag{37}$$

La unidad de medida, es una longitud elevada al cubo; en las aplicaciones, generalmente, el cm^3. La presencia en las (36) de las distancias x o y (positivas o negativas) elevadas a la primera potencia, indica que un momento estático, podrá resultar positivo, negativo o nulo, ya que el área es siempre positiva.

Por otra parte, de su propia definición, resulta que si una superficie de área *A*, se subdivide en otras parciales de áreas *A*' y *A*'', cuyos momentos estáticos son conocidos, el momento estático total, *S*, iguala a la suma algebraica de los momentos estáticos parciales; como se indica en la Ec. (38).

$$S_x = S'_x + S''_x \quad \left[\mathrm{m}^3\right] \tag{38}$$

Y si la sección total de área *A*, está formada por partes llenas de área *A´* y partes huecas de área *A´´*, el momento estático de la parte llena S'_x es igual a momento estático S_x de la sección total, disminuido de momento estático de las partes huecas S''_x, Ec. (39).

$$S'_x = S_x - S''_x \quad \left[\mathrm{m}^3\right] \tag{39}$$

Estas propiedades aditivas, facilitan la determinación de momentos estáticos de figuras compuestas. Se ha dicho que el momento estático de superficies, puede ser nulo. Entonces de las (35) resulta (Ec. 40):

$$A \times x_G = \int x \times dA = 0 \quad \left[\mathrm{m}^3\right]; \qquad A \times y_G = \int y \times dA = 0 \quad \left[\mathrm{m}^3\right] \tag{40}$$

Como *A* es una magnitud positiva y siempre distinta de cero, para que su producto por x_G o por y_G, resulte nulo, es preciso que estas distancias sean iguales a cero. Luego, los ejes de momentos x e y, deben pasar por *G*. Ya que estos son arbitrarios, se concluye (Ver **Figura 136**):

El momento estático de una figura plana es nulo para cualquier eje barioéntrico de la figura. O también: *La anulación del momento estático respecto a un eje, es condición necesaria y suficiente para que este eje sea baricéntrico.*

Figura 136. Momento Estático y Eje Baricéntrico (Fuente: RAFFO, 2007).

Quizás lo más importante de todo el análisis precedente, es que el lector comprenda la aplicación que tiene este concepto en el curso, pero antes de explicar este aspecto es necesario describir los procedimientos para su determinación.

4.2.1.1. Cálculo

La determinación del primer momento de área se puede llevar a cabo con *procedimientos gráficos y analíticos*. No es tema del curso, sin embargo, realizar explicitamente estos cálculos pero el alumno debe conocerlos.

En efecto, **analíticamente**, se aplican las ecuaciones definitorias (36) o (37) según más convenga como lo expone RAFFO (2007) en los ejemplos 21 y 22 (pp. 66) de la edición citada. Por otra parte, el mismo autor explica en el ejemplo 23 (pp. 67), los pasos detallados para la **solución gráfica**. Se recomienda que el alumno realice un análisis de los ejemplos mencionados.

4.2.2. Momento de Inercia de Área: 2do. Momento de Área

En primer lugar, se debe recalcar que el momento de inercia se define tanto para superficies planas (*Momento de Inercia de Área*) como para masas (*Momento de Inercia de Masa*). En esta cátedra se centra la atención en los primeros dada su aplicación en Mecánica Estructural. Esta propiedad también se conoce como *Segundo Momento de Área*.

El segundo momento de área usualmente se deduce tomando como base a situaciones reales, por ejemplo, en el estudio de la *flexión de vigas* y en problemas de *hidrostática* que involucran *superficies sumergidas* (Ver **Figura 137**).

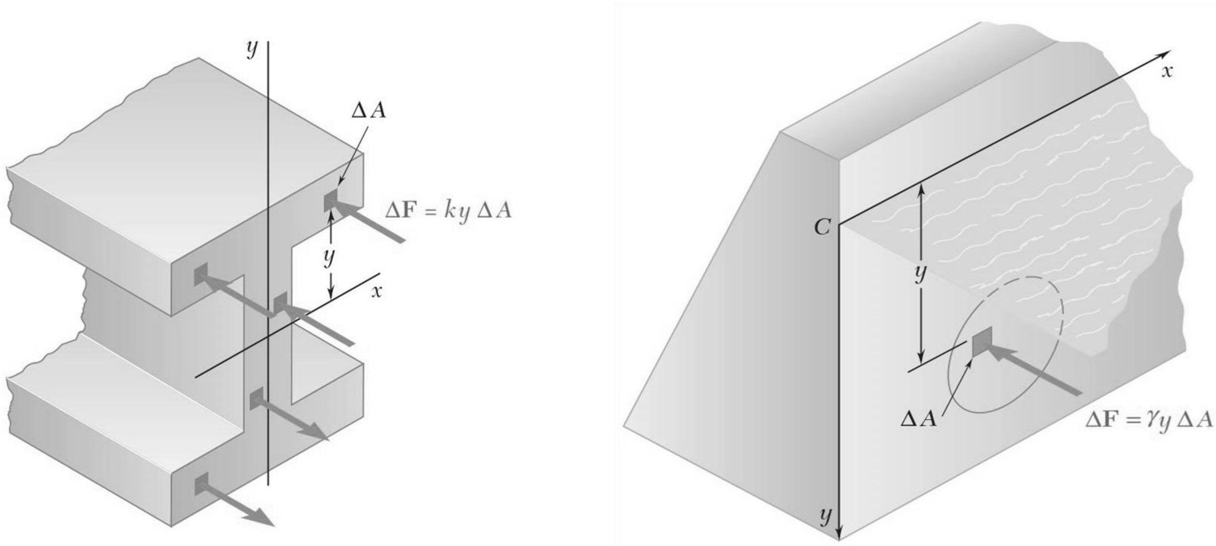


Figura 137. Deducción del Momento de Inercia (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

En efecto, siempre que una carga distribuida[22] actúa en forma perpendicular a un área y que su intensidad varía linealmente, el cálculo del momento de la distribución de carga con respecto a un eje implicará una cantidad llamada el momento de inercia del área. Para no ser muy extensos en el análisis, se recomienda que el lector profundice esta deducción en la literatura de los autores citados. En lo que sigue, se han de dar las definiciones pertinentes.

4.2.2.1. Definiciones

Momento de Inercia Axil o *ecuatorial* o *simple* de una superficie plana de área *A* respecto de un eje x de la misma (Ver **Figura 138**), es la suma de los productos de cada porción de área ΔA en que se ha subdividido la superficie, por el cuadrado de su distancia al eje. Designándolo con J_x, su valor está dado por la Ec. (41)-*a*. O sea, disminuyendo ΔA_i y aumentando su número, se tiene en el límite la Ec. (41)-*b*. Del mismo modo, se puede calcular el momento de inercia respecto del eje y, Ec. (41)-*c*.

[22] Las cargas distribuidas se analizan en el capítulo siguiente. En este caso, dichas cargas son las originadas por las tensiones en la sección transversal de la viga, y, por la presión del agua en el caso de la pared sumergida.

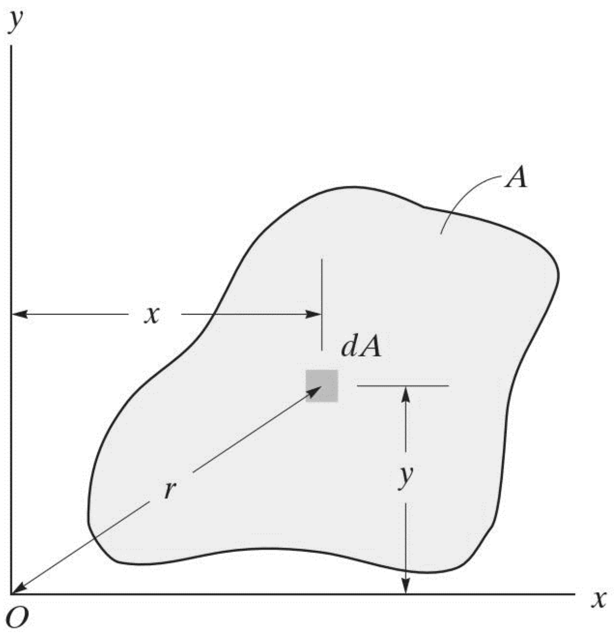


Figura 138. Definición del Momento de Inercia (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$\begin{aligned} &a) \quad J_{\mathrm{x}} = y_1{}^2 \times \Delta A_1 + y_2{}^2 \times \Delta A_2 + \ldots y_n{}^2 \times \Delta A_n \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \\ &b) \quad J_{\mathrm{x}} = \int y^2 dA \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \\ &c) \quad J_{\mathrm{y}} = \int x^2 dA \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \end{aligned} \tag{41}$$

De estas expresiones se observa que el momento de inercia es una *magnitud esencialmente positiva* y tiene unidades de longitud a la cuarta potencia. También es usual encontrar que el momento de inercia es representado como $J_{\text{x-x}}$, es decir, con doble subíndice indicativo del eje considerado.

Momento de Inercia Polar. También se puede formular esta cantidad para dA con respecto al "polo" *O* o eje z, (Ver Figura 138). A éste se le llama momento de inercia polar. Se define como $dJ_O = r^2 dA$, donde *r* es la distancia perpendicular desde el polo (eje z) hasta el elemento dA. Para toda el área el momento de inercia polar es (Ec. 42):

$$J_O = \int r^2 dA = J_{\mathrm{x}} + J_{\mathrm{y}} \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{42}$$

Esta relación entre J_O y J_x, J_y es posible puesto que $r^2 = J_x{}^2 + J_y{}^2$ (referirse a la misma figura). Esta formulación denota también que J_O *es una magnitud positiva*.

Momento de Inercia Centrifugo o *Compuesto* o también, *Producto de Inercia*. Esta propiedad es necesaria a fin de determinar los *momentos de inercia máximo y mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas. El producto de inercia del área de la Figura 138 con respecto a los ejes x y y se define como (Ec. 43):

$$J_{xy} = \int x \times y\, dA \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{43}$$

Es una magnitud *positiva*, *negativa* o *nula*, porque depende de los signos de x y de y ósea de la posición del elemento de área dA respecto de los ejes.

Radio de Giro. El radio de giro de un área con respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas. Si se *conocen* las *áreas A* y los *momentos de inercia* J, los radios de giro se determinan a partir de las fórmulas indicadas en la Ec. (44).

$$\begin{aligned} &a) \quad k_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \quad [\mathrm{m}] \\ &b) \quad k_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad [\mathrm{m}] \\ &c) \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad [\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{44}$$

Donde k es el radio de giro (el subíndice denota el eje al que corresponde). La forma de estas ecuaciones es fácil de recordar, ya que es semejante a la que se usa para encontrar el momento de inercia para un área diferencial con respecto a un eje. Por ejemplo, $J_x = k_x{}^2 \times A$; mientras que para un área diferencial $dJ_x = y^2 \times dA$.

Momento de Inercia Propio o Central. Cuando el momento de inercia se refiere a un eje baricentro del área se lo llama *Momento de Inercia Propio* o *Central*. Este nuevo concepto es muy importante dado que el lector ha de constatar su implicancia en diversos temas desarrollados.

Por ejemplo, el estudio de los momentos de inercia axiles se reduce al de los momentos de inercia centrales. En este sentido, las tablas que presentan las expresiones de cálculo de momentos de inercia de figuras comunes, en general, corresponden a momentos de inercia centrales (Ver Anexo 7, Sección 10.5) y justamente son estos los que tienen mayor aplicación en Resistencia de Materiales.

Por otra parte, como la dirección de los ejes *x* e *y* adoptados para el cálculo del momento de inercia es arbitraria, *los momentos de inercia centrales son momentos mínimos*. Esto se verifica en las ecuaciones (46) y (47) desarrolladas más adelante.

Del mismo modo, y como nota para finalizar esta sección y dar paso a la siguiente, la ecuación (48) de J_O, indica que *el momento de inercia polar es mínimo para el centro de gravedad*. En cambio, puede demostrarse, que *el momento de inercia centrífugo carece de mínimo*.

4.2.2.2. Teorema de los Ejes Paralelos

Este teorema también conocido como *Teorema de Steiner*, puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje que sea paralelo a un eje que pasa a través de su baricentro y del cual se conozca el momento de inercia.

Para desarrollar este teorema, considere el momento de inercia del área sombreada que se muestra en la **Figura 139** con respecto al eje *x*. Para iniciar, se elige un elemento diferencial dA que está ubicado a una distancia arbitraria *y´* del eje baricéntrico *x´*. Si la distancia entre los ejes paralelos x y x' se define como d_y, entonces el momento de inercia de dA con respecto al eje x $dJ_x = \left(y'+d_y\right)^2 dA$. Para toda el área (Ec. 45):

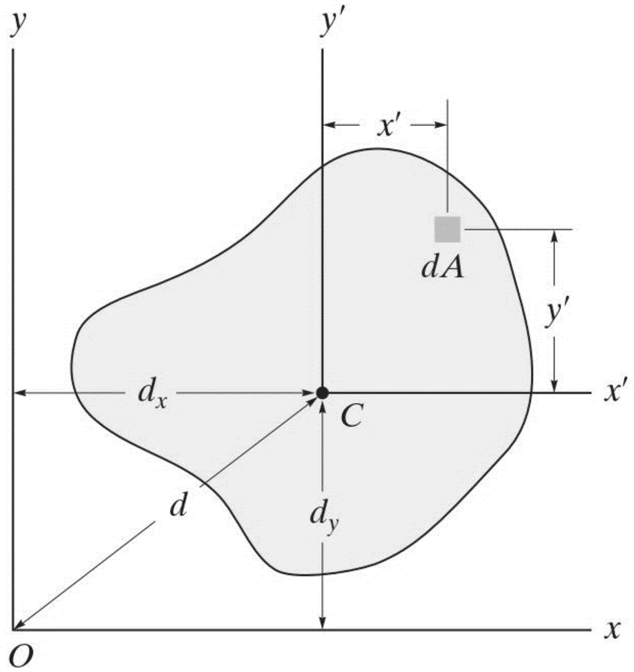


Figura 139. Definición del Momento de Inercia (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$J_x = \int \left(y'+d_y\right)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d_y \int y' dA + \int d_y{}^2 dA \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{45}$$

Del tercer miembro de la (45): La primera integral representa el momento de inercia del área con respecto al eje centroidal (: eje baricéntrico). La segunda integral es cero ya que el eje x' pasa a través del centroide C del área[23]. Si se observa, la tercera integral representa el área total A, el resultado final es, por tanto, Ec. (46).

$$J_x = \underbrace{J_{x'}}_{\substack{\text{momento}\\\text{de inercia}\\\text{propio o}\\\text{central}}} + A \times d_y{}^2 \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{46}$$

[23] Recordar que el momento estático de un área respecto de un eje baricéntrico es igual a cero.

En la anterior, J_x es el momento de inercia del área total *A* respecto al eje *x*, $J_{x'}$ es el momento de inercia propio o central y d_y es la distancia entre los ejes paralelos *x* y *x´*. Análogamente, con respecto al eje *y* (Ec. 47):

$$J_y = \underbrace{J_{y'}}_{\substack{\text{momento}\\ \text{de inercia}\\ \text{propio o}\\ \text{central}}} + A \times d_x^{\,2} \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{47}$$

Por último; para el momento de inercia polar $J_C = J_{x'} + J_{y'}$ y $d^2 = d_x^{\,2} + d_y^{\,2}$ se tiene lo indicado en la Ec. (48). Notar que J_C es el momento de inercia polar cuyo polo es el centroide *C*, por tal motivo se denomina *Momento de Inercia Polar Centroidal* (o Baricéntrico).

$$J_O = J_C + A \times d^2 \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{48}$$

La forma de cada una de estas tres ecuaciones (46, 47 y 48) establecen el **Teorema de Steiner**; que dice (referirse a la Figura 139): *El momento de inercia de un área A respecto de un eje cualquiera paralelo a un eje baricéntrico del área, es igual al momento de inercia propio o central del área, más el producto del área multiplicada por el cuadrado de la distancia entre dichos ejes.*

Cabe aclarar que el teorema de Steiner también se establece para el momento de inercia centrifugo obteniendo expresiones análogas a las anteriores tal como lo desarrolla RAFFO (2007).

4.2.2.3. Determinación Analítica y Gráfica

De los momentos de inercia que se han definido, los que revisten mayor importancia debido a su aplicación en el curso, son los *axiles* y los *polares*. Los primeros por su uso en vigas solicitadas a flexión y los segundos por su utilización en ejes sometidos a torsión. Teniendo en cuenta esto es necesario aludir a los procedimientos de cálculo de dichos momentos de inercia para que luego al aplicarlos en los ejercicios prácticos el alumno cuente con una base de fundamentación.

Determinación Analítica del Momento de Inercia. Las integrales (41) y 42) se pueden evaluar con facilidad si se selecciona a dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular J_x, la tira se selecciona paralela al eje *x*, de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia *y* del eje *x*, entonces, se obtiene el momento de inercia dJ_x de la tira multiplicando su área dA por y^2.

Para calcular J_y, la tira se selecciona paralela al eje *y* de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia *x* del eje *y*; así, el momento de inercia dJ_y de la tira es $x^2 \times dA$. Si se aplica lo anterior para el caso de un área rectangular (Ver **Figura 140**) se obtienen las expresiones genéricas para el momento de inercia, Ec. (49).

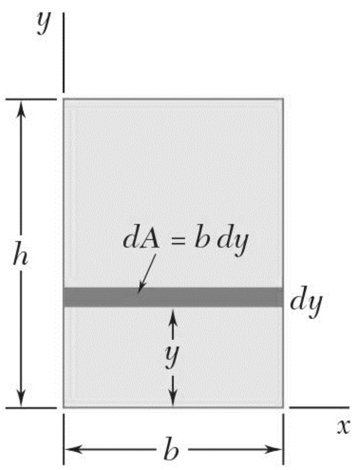


Figura 140. Determinación del Momento de Inercia para el Caso de un Área Rectangular (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

$$
\begin{aligned}
&a) \quad J_{\mathrm{x}} = \int_0^h y^2 \times dA \\
&b) \quad J_{\mathrm{x}} = \int_0^h y^2 \times b \times dy = \frac{b \times h^3}{3} \quad \left[\mathrm{m}^4\right]
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Del mismo modo, se obtiene con facilidad el momento de inercia con respecto al eje *y*, Ec. (50).

$$
\begin{aligned}
&a) \quad J_{\mathrm{y}} = \int_0^h x^2 \times dA \\
&b) \quad J_{\mathrm{y}} = \int_0^h x^2 \times b \times dx = \frac{b^3 \times h}{3} \quad \left[\mathrm{m}^4\right]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

En la (49) y (50) los ejes se han tomado en la base del rectángulo, sin embargo, lo más usual es considerar los ejes baricéntricos, a fin de obtener las expresiones para los momentos de inercia centrales que son de mayor interés. Si se procede de esta misma manera para cualquier área, en particular para las figuras comunes, se puede confeccionar una tabla como la del Anexo 7, Sección 10.5.

Determinación Gráfica del Momento de Inercia. Para la determinación gráfica se pueden mencionar distintos procedimientos algunos de los cuales escapan al contenido del curso. Este parágrafo, por tanto, solo busca que el alumno tenga presente que existen variadas metodologías tal como lo expone RAFFO (2007) en los títulos 71, 80 y 81. Sin embargo, existe un método conocido como *Circulo de Mohr* que amerita mayor análisis como se analiza posteriormente.

4.2.2.4. Propiedad Aditiva

Si una sección plana *S*, **Figura 141** $a)$, se divide en secciones parciales *S´*, *S´´*, *S´´´*, cuyos momentos de inercia son conocidos *J´*, *J´´*, *J´´´*, el momento de inercia total *J* es igual a la suma aritmética de los momentos de inercia parciales, Ec. (51):

$$J = J' + J'' + J''' \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{51}$$

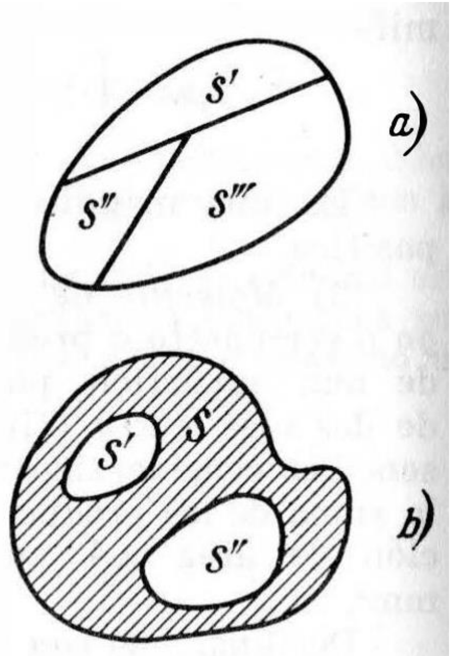


Figura 141. Propiedad Aditiva de Momento de Inercia (Fuente: RAFFO, 2007).

Si la sección está formada (**Figura 141**b) por partes llenas S y partes vacías S' y S'', el momento de inercia J de la parte llena es igual al momento de inercia J_1 de la sección total, menos los momentos de inercia de las partes huecas, Ec. (52).

$$J = J_1 - (J' + J'') \quad \left[\mathrm{m}^4\right] \tag{52}$$

Estas propiedades son muy útiles para los cálculos en los que se requiera hallar el momento de inercia de figuras compuestas tal como se menciona en la siguiente sección.

4.2.2.5. Figuras Compuestas

Un área compuesta consiste en una serie de partes o formas "más simples" conectadas, como rectángulos, triángulos y círculos. Siempre que el momento de inercia de cada una de esas partes se conoce o puede determinarse con respecto a un eje común, entonces el momento de inercia del área compuesta es igual a la *suma algebraica* (propiedad aditiva) de los momentos de inercia de todas sus partes, **Figura 142**.

Procedimiento para el análisis

El momento de inercia para un área compuesta con respecto a un eje de referencia puede determinarse por el siguiente procedimiento.

Partes compuestas.

- Con un croquis, divida el área en sus partes componentes e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

Teorema de los ejes paralelos.

- Si el eje centroidal para cada parte no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo de $\bar{I}$ use la tabla que aparece en la cubierta posterior interna del libro.

Suma.

- El momento de inercia de toda el área con respecto al eje de referencia se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al "restar" el momento de inercia del agujero del momento de inercia de toda la parte, incluido el agujero.

Figura 142. Procedimiento para la Obtención del Momento de Inercia de Figuras Compuestas (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Este autor designa el momento de inercia como I; y, al momento de inercia axil central como $\bar{I}$. Ejemplos ilustrativos del procedimiento señalado se muestra en los *problemas resueltos* 4.4 y 4.5.

4.2.2.6. Rotación de Ejes y Circulo de Mohr

Esta sección presenta en forma somera pero precisa, algunos conceptos que el lector debe conocer. Se sugiere qué, para mayor profundización de los mismos se indague en los autores citados. Estos conceptos son: el *Momento de Inercia con Respecto a Ejes Inclinados* (*Rotación de Ejes*), *Ejes y Momentos Principales de Inercia* y *Circulo de Mohr*.

Rotación de Ejes. En lo que sigue se adopta la denominación del autor mencionado. Según HIBBELER (2010), en el diseño estructural y mecánico, a veces es necesario calcular los momentos y el producto de inercia de I_u, I_v e I_{uv} para un área con respecto a un conjunto de ejes inclinados *u* y *v*, **Figura 143**, cuando se conocen los valores para θ, I_x, I_y e I_{xy}.

Para hacer esto se usan *ecuaciones de transformación*, las cuales relacionan las coordenadas x, y y u, v. De estas transformaciones se obtienen las expresiones de cálculo buscadas, **Figura 144**.

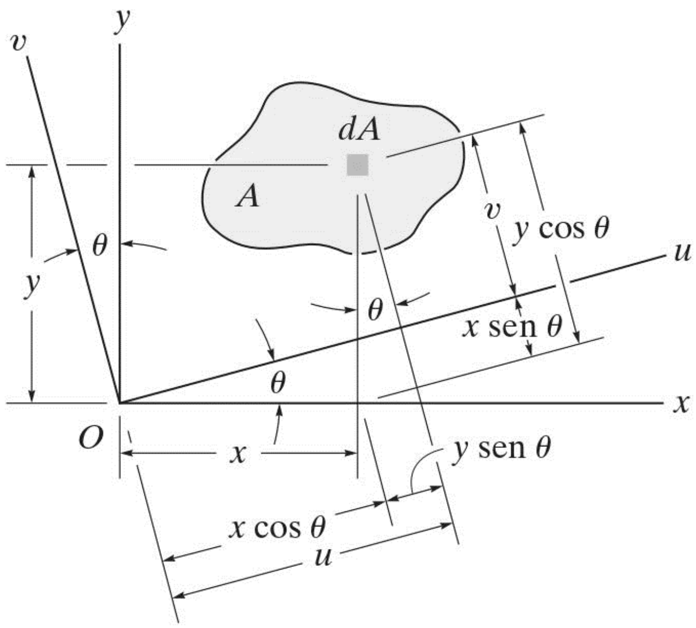


Figura 143. Rotación de Ejes y Ejes Principales de Inercia (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\mathrm{sen}\, 2\theta$$
$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\mathrm{sen}\, 2\theta$$
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\mathrm{sen}\, 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Figura 144. Momentos de Inercia Respecto a Ejes Inclinados (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Momento de Inercia Principales. Las ecuaciones de la Figura 144 muestran que I_u, I_v e I_{uv} dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes *u*, *v*. Particularmente, interesa determinar la orientación de esos ejes con respecto a los cuales los momentos de inercia del área son máximo y mínimo. Este sistema particular de ejes se llama **Ejes Principales del Área** (o **Ejes Principales de Inercia**), y los momentos de inercia correspondientes con respecto a esos ejes se llaman *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes principales para cada origen *O* elegido. Sin embargo, para el diseño estructural y mecánico, el origen *O* se ubica en el centroide del área.

El ángulo que define la orientación de los ejes principales puede encontrarse al diferenciar la primera de las ecuaciones de la (44) con respecto a θ y establecer el resultado igual a cero. De modo que, se llega a lo indicado en la **Figura 145**.

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

Figura 145. Ángulo que define la orientación de los ejes principales (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Las dos raíces, θ_{p1} y θ_{p2} de esta ecuación están separadas en 90° y especifican la inclinación de los ejes principales. Para sustituirlos en la ecuación de la Figura 144, se debe encontrar primero el seno y el coseno de $2\theta_{p1}$ y $2\theta_{p2}$, luego se sustituye cada una de las relaciones de seno y coseno en la primera o la segunda de las ecuaciones de la Figura 144, y, simplificando se obtiene la ecuación indicada en la **Figura 146**.

$$I_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Figura 146. Expresión para el Cálculo del Momento de Inercia Máximo o Mínimo de una Área Dada (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Según el signo que se elija, este resultado proporciona el momento de inercia máximo o mínimo para el área. Un procedimiento que está relacionado con la determinación de los ejes principales de inercia es el circulo de Mohr, tema que se aborda a continuación.

Circulo de Mohr. Las ecuaciones presentadas en las Figuras 144 a 146 tienen una solución gráfica que, por lo general, es fácil de usar y recordar. Al elevar al cuadrado la primera y la tercera de las ecuaciones de la (144) y sumarlas, y, considerando que I_x, I_y y I_{xy} son *constantes conocidas*, se obtiene la expresión de la **Figura 147**.

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

Figura 147. Ecuación Representativa del Circulo de Mohr (Fuente: HIBBELER, 2010).

Cuando esta ecuación se grafica sobre un sistema de ejes que representan los respectivos momentos de inercia y producto de inercia, como se muestra en la **Figura 148**, la gráfica resultante representa un círculo de radio R, con su centro ubicado en el punto $(a, 0)$. Las expresiones para R y a se observan en la misma gráfica.

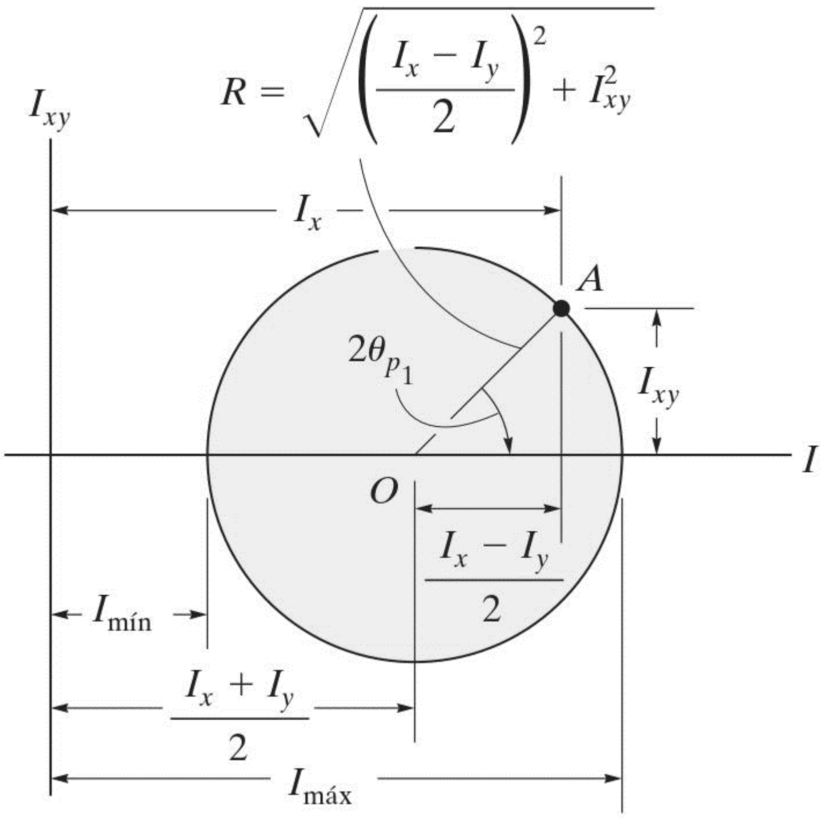


Figura 148. Círculo de Mohr (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

El circulo construido de esta manera se llama Círculo de Mohr, en honor del ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918). En otras palabras, este círculo permite obtener de manera gráfica los momentos principales de inercia siendo esa su principal utilidad.

PROBLEMA RESUELTO 4.4

Objetivo. Mostrar el procedimiento analítico para hallar el momento de inercia de áreas planas simples y compuestas: Mostrar el cálculo de *momento de inercia centrales*, la aplicación del *teorema de Steiner* y la *propiedad aditiva* de los momentos de inercia, **Figura 149**.

EJEMPLO 10.4

Determine el momento de inercia del área que se muestra en la figura 10-8*a* con respecto al eje *x*.

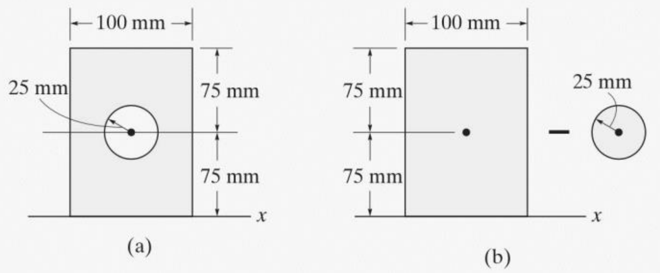


Fig. 10-8

SOLUCIÓN

Partes compuestas. El área puede obtenerse al *restar* el círculo del rectángulo de la figura 10-8*b*. El centroide de cada área está ubicado en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Los momentos de inercia con respecto al eje *x* se determinan con el teorema de los ejes paralelos y los datos proporcionados en la tabla de la cubierta posterior interna de este libro.

Círculo

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

Rectángulo

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

Suma. Entonces, el momento de inercia del área compuesta es

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Figura 149. Problema Resuelto 4.4 (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

- Recordar que este autor designa al momento de inercia como I. Por su parte, $\bar{I}$ es el momento de inercia propio o central.

- Tanto este problema como el siguiente solo son ilustrativos de cómo se aplican los conceptos mencionados en los objetivos, se puede decir, que son *problemas descontextualizados*. En efecto, problemas más relevantes para el curso son aquellos en los cuales las áreas planas corresponden a *secciones transversales de elementos estructurales*, principalmente vigas.

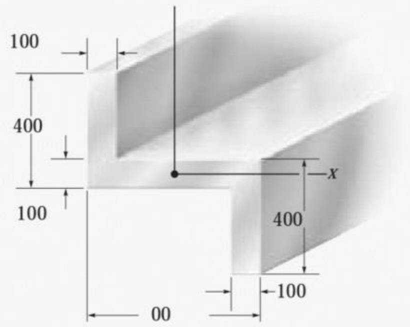
- En relación al punto anterior, el cálculo del momento de inercia de estas secciones transversales ha de permitir obtener otros parámetros seccionales como el *módulo resistente*. Esto se analiza en Resistencia de Materiales.

- Por lo dicho, en esta instancia el alumno debe enfocarse solamente en dominar los procedimientos.

PROBLEMA RESUELTO 4.5

Objetivo. Mostrar el procedimiento analítico para hallar el momento de inercia de áreas planas simples y compuestas: Mostrar el cálculo de *momento de inercia centrales*, la aplicación del *teorema de Steiner* y la *propiedad aditiva* de los momentos de inercia, **Figura 150**.

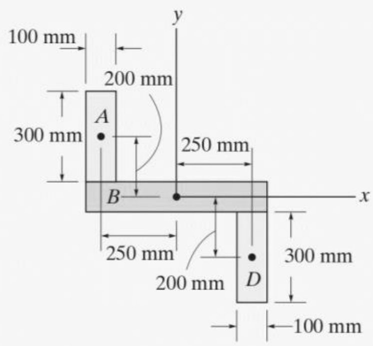
EJEMPLO 10.5



Determine los momentos de inercia para el área de la sección transversal del elemento que se muestra en la figura 10-9*a* con respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

SOLUCIÓN

Partes compuestas. La sección transversal puede subdividirse en las tres áreas rectangulares *A*, *B* y *D* que se muestran en la figura 10-9*b*. Para efectuar el cálculo, el centroide de cada uno de esos rectángulos está localizado en la figura.



(b)

Fig. 10-9

Teorema de los ejes paralelos. Con base en la tabla de la cubierta posterior interna de este libro, o en el ejemplo 10.1, el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$. Por lo tanto, con el teorema de los ejes paralelos para los rectángulos *A* y *D*, los cálculos son como sigue:

Rectángulos A y D

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$

$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$

$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

Rectángulo B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

Suma. Entonces, los momentos de inercia para toda la sección transversal son

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$

$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

$$= 5.60(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Figura 150. Problema Resuelto 4.5 (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Observaciones

- Recordar que este autor designa al momento de inercia como I. Por su parte, $\bar{I}$ es el momento de inercia propio o central.

5. ESTRUCTURAS, GRADOS DE LIBERTAD Y VÍNCULOS

5.1. Introducción

Hasta el momento en el curso se ha tratado con cuerpos rígidos de diversas formas y en diferentes aplicaciones y se ha considerado que sobre estos cuerpos actúan fuerzas (*cargas*) coplanares. Sin embargo, no se han dado mayores detalles de las características de dichos cuerpos.

En este sentido, en Estática Gráfica, a los cuerpos que cumplen con determinadas condiciones se los puede considerar como *Chapas Planas*. Este nuevo concepto, que se aborda en secciones siguientes, se conjuga con otros como *Estructuras*, *Grados de Libertad* y *Vínculos* conformando el eje de estudio principal.

Teniendo en cuenta lo anterior, en las secciones siguientes se brindan precisiones para que el lector asimile los conocimientos mínimos y necesarios asociados a los contenidos considerados como principales para el desarrollo de la asignatura.

5.2. Cargas

El término *carga* designa a las *fuerzas exteriores* que actúan sobre los elementos estructurales que no son solidarios a él, distinguiéndolas de las fuerzas exteriores que ocasionan los vínculos, las que reconocemos como reacciones de vínculo. Decimos entonces que el elemento estructural está *solicitado* por las cargas o sistema de cargas.

Pueden clasificarse como *distribuida* y *concentrada* (o *puntual*); la primera, a su vez, puede ser *superficial* o *lineal*, **Figura 151**. En Estática frecuentemente se inicia con cargas distribuidas y se halla la *concentrada equivalente*, pero, sin olvidar que la carga real es distribuida, esto se verifica más adelante cuando se calculan las reacciones de vínculo y se realizan los diagramas de esfuerzos y momento flector.

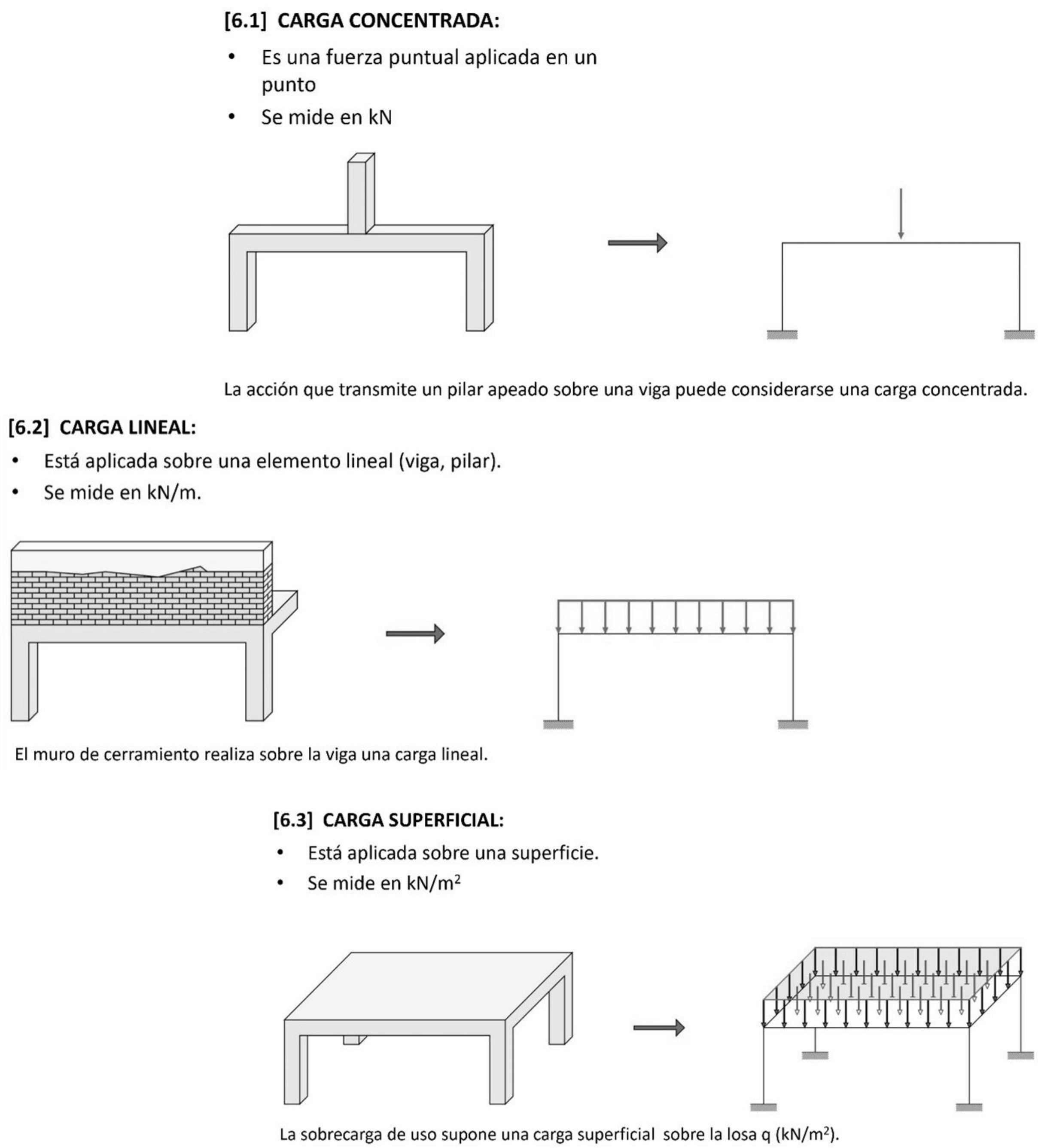


Figura 151. Clasificación de Cargas Según su Distribución (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Cabe mencionar que las cargas también pueden clasificarse según la forma de aplicación en *permanentes*, *accidentales* o *variables*.

5.3. Estructuras Planas

En primer término, se debe comprender qué es una *Estructura*, esta se puede entender conceptualmente como una construcción que soporta cargas. La función de una estructura es la de *trasladar* las *cargas* hasta un lugar donde se produzca la reacción: el *suelo*.

Según RAFFO (2007), los elementos estructurales utilizados en la técnica constructiva pueden agruparse en dos formas tipo: 1) *Formas Lineales* o *Piezas Prismáticas* o brevemente *Barras* (vigas, columnas), constituidas por sólidos de forma cilíndrica o prismática cuyas dimensiones transversales son pequeñas en comparación con su longitud; y, 2) *Formas Superficiales* (placas, bóvedas), pertenecen a éstas, los sólidos cuyo espesor es despreciable con relación a sus restantes dimensiones. En este curso se han de analizar elementos estructurales prismáticos tales como vigas y columnas (con mayor énfasis en los primeros); y, sistemas reticulados (o estructuras de barras).

La mayor parte de los elementos estructurales utilizados en construcción admiten un plano de simetría. Si las fuerzas exteriores y, por lo tanto, sus resultantes, actúan en este plano de simetría, se puede reemplazar el cuerpo rígido por un sistema plano de puntos materiales llamado **Chapa**, o bien, **Chapa Plana**, coincidente con el plano de simetría[24]. La aplicación de este concepto se ilustra bajo el titulo siguiente.

Elementos Estructurales: Viga

Geométricamente una viga puede considerarse definida por una Figura Plana S, **Figura 152**, con *Eje de Simetría* yy, la cual se traslada a lo largo de una línea plana AB, en posición siempre perpendicular a ésta y con su centro de gravedad G sobre AB. La figura plana se denomina

[24] En el Capítulo 4.9 de HIBBELER (2010) se analiza con mayor detalle la reducción de una carga simple distribuida.

Sección Transversal o *Perfil de la Viga*; la línea AB (recta o curva) lugar de los centros de gravedad del perfil, se denota como *Eje de la Viga* o *Eje Longitudinal*.

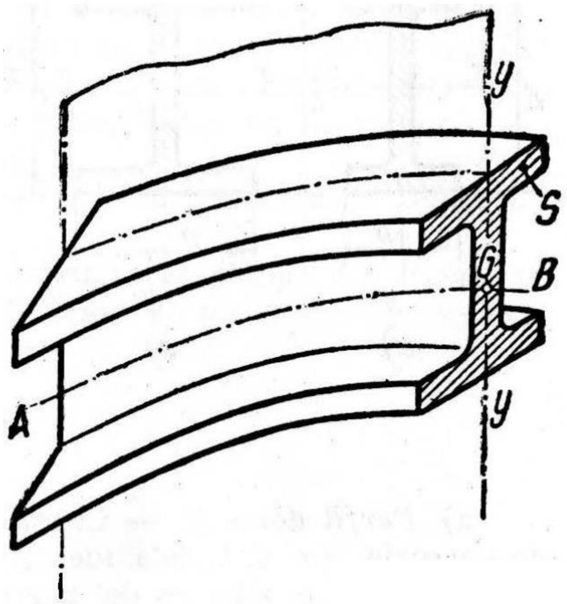


Figura 152. Elemento Estructural: Viga (Fuente: RAFFO, 2007).

El plano determinado por y , con AB, es el *plano de simetría* de la pieza y en él se encuentran todas las cargas que gravitan sobre la pieza (**Plano de Carga**). Por consiguiente, nada impide asimilar toda viga a una *Chapa Plana* infinitamente delgada, materialización del plano de simetría barra. El perfil del elemento estructural analizado puede cambiar de forma o de tamaño de modo continuo y puede ser lleno o con huecos interiores. El radio de curvatura del eje AB debe ser varias veces mayor que la dimensión transversal S medida en la dirección del eje de simetría y. *En la asignatura el estudio se limita a vigas de eje recto horizontal*.

Una vez definidas las cargas y su interacción con las estructuras, es necesario incorporar otros elementos intervinientes para que dicha estructura permanezca en equilibrio estático (: objeto de la Estática Gráfica). Estos elementos se definen bajos los conceptos de grados de libertad y vínculos.

5.4. Grados de Libertad y Vínculos

En lo que refiere a grados de libertad y vínculos, el objeto de esta sección es presentar las definiciones pertinentes de manera sistemática, luego, en la sección siguiente se particulariza la aplicación de cada una de ellas.

Concepto de Grados de Libertad. *Es una condición que deja establecida una posibilidad de desplazamiento determinado del cuerpo*. En efecto, si un cuerpo tiene un grado de libertad entonces, tiene una posibilidad de movimiento; si tiene dos grados de libertad, dos posibilidades y así sucesivamente.

A raíz de este concepto interesa exponer algunos ejemplos, a saber: 1) Un *cuerpo en el espacio* ($\mathbb{R}^3$) tiene 6 grados de libertad, **Figura 153**, rotación según los planos (xy), (xz) e (yz) y traslación según las direcciones x, y, z.

Figura 153. Grados de Libertad de un Cuerpo en el Espacio $\mathbb{R}^3$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2) Una figura plana, particularmente, una *chapa plana*, tiene 3 grados de libertad en el espacio bidimensional ($\mathbb{R}^2$), **Figura 154**, rotación alrededor de un punto cualquiera de uno de los planos; y, traslación según las direcciones del par de ejes considerados.

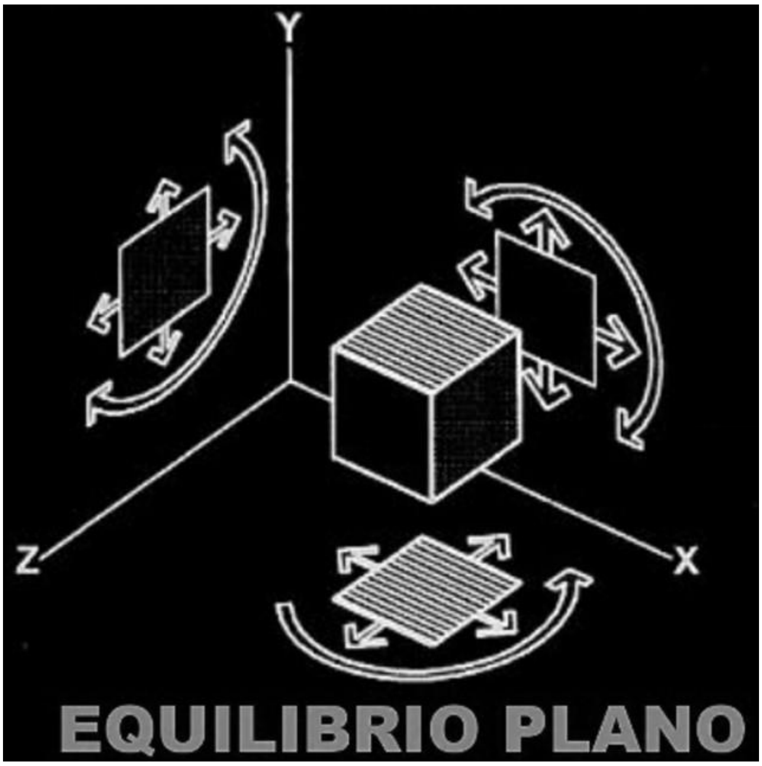


Figura 154. Grados de Libertad de una Chapa Plana en el Espacio Bidimensional $\mathbb{R}^2$ (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Concepto de Vínculo. Un cuerpo sometido a la acción de fuerzas que pueden reducirse a una resultante, a un par o a ambas, permanece prácticamente en equilibrio cuando encuentra obstáculos llamados vínculos que se oponen a su movimiento. Luego, *se puede definir como vínculo a toda limitación al desplazamiento de un cuerpo*. En efecto, *los vínculos anulan grados de libertad*, por lo tanto, debe el alumno notar que esto está en todo relacionado con las ecuaciones de equilibrio analizadas en la Sección 3.2 (más adelante se dan detalles al respecto).

Clasificación de Vínculos. Los vínculos pueden ser: 1) *Internos o Externos*; según limiten las posibilidades de desplazamiento relativos o internos de las partes que forman el sistema (o estructura) o bien, entre estas y la tierra; y, 2) *Simples*, *Dobles* o *Triples*; según sean capaces de suprimir 1, 2 o 3 grados de libertad, respectivamente.

Vínculos en Dos Dimensiones. El concepto de vínculo se puede definir en dos o en tres dimensiones, el análisis que sigue se limita a detallar las características de algunos de los vínculos más comunes que se pueden encontrar en dos dimensiones, pero previamente es necesario aclarar otro aspecto de estos: la **Materialización Física de los Vínculos**. La forma de realizar los vínculos en la práctica es mediante **Apoyos**. Los apoyos[25] son, por tanto, dispositivos materiales que reducen total o parcialmente la movilidad de un elemento estructural (viga, columna, armadura...). Dicho esto, se pasa a definir los vínculos más comunes arriba mencionados.

1-Apoyo Simple, de *Primer Orden* o de *Primera Especie*. El apoyo representado esquemáticamente en la **Figura 155**-*a)*, está formado por una pieza C, que apoya, mediante rodillos, sobre una superficie fija E, y unida por medio de una articulación o perno A, al elemento estructural B. Constituye un vínculo que suprime un grado de libertad; pues permite a la pieza B, un desplazamiento horizontal sobre los rodillos y una rotación con eje en el perno A, pero no permite desplazamiento vertical. Se denomina usualmente como *Articulación Móvil* o *Apoyo Móvil de Resbalamiento* (o simplemente Apoyo Móvil).

Figura 155. Apoyos Simples, Dobles y Triples (Fuente: RAFFO, 2007).

2-Apoyo Doble, de *Segundo Orden* o de *Segunda Especie*. El apoyo de la **Figura 155**-*b)*, solo se distingue del anterior por la ausencia de los rodillos, estando la pieza C sólidamente fijada al suelo E. es un vínculo que suprime 2 grados de libertad porque permite a la pieza B

---

[25] Los apoyos también son llamados “Soportes”.

una rotación en torno de la articulación A; pero suprime los desplazamientos horizontal y vertical. Se lo conoce también como *Articulación Fija* o *Apoyo Fijo*.

3-Apoyo Triple, de *Tercer Orden* o de *Tercera Especie*. El apoyo de la **Figura 155**-*c)*, constituye un vínculo fijo al suelo impidiendo todo desplazamiento o rotación de la pieza B. suprime 3 grados de libertad y se denomina usualmente *Empotramiento*.

Siguiendo el hilo del desarrollo de este tema y ahora que se tienen los conceptos previos necesarios, se puede definir formalmente un término que se ha mencionado reiteradas veces en este documento: las reacciones de vínculo.

Reacciones en los Apoyos (o *Reacciones de Vínculo*). Las cargas que actúan sobre el elemento estructural B (Figura 155) se transmiten a los apoyos y de allí, finalmente, al suelo. Para equilibrar estas cargas actuantes los vínculos generan una fuerza de igual intensidad, dirección y de sentido opuesto denominada *Reacción de Vínculo*. Las reacciones de vínculo son, pues, fuerzas que, actuando en los apoyos en sustitución de estos, equilibran a las cargas. Por su carácter de equilibrantes impiden el movimiento de la pieza B, manteniéndola fija (excepto las deformaciones elásticas).

Teniendo en cuenta las fuerzas actuantes y reaccionantes mencionadas (se sugiere al lector que haga una revisión de la Sección 2.2.3.1 para repasar estos conceptos) es necesario definir claramente cuáles son las condiciones de equilibrio en cada tipo de vínculo tal como se analiza a continuación.

Condiciones de Equilibrio en los Apoyos. **1**-*Equilibrio en el Apoyo Móvil*, **Figura 156**-*a)*, la reacción R en este apoyo tiene que ser perpendicular a la superficie deslizante E y pasante por A. El sentido es tal que el vector se dirige desde E hacia A. Quiere decir que de la reacción solo es necesario calcular su *módulo*. *Un apoyo móvil presenta solo una incógnita*. **2**-*Equilibrio en el Apoyo Fijo*, **Figura 156**-*b)*, en este apoyo la única condición para el equilibrio es que la reacción R pase por A. De R, pues, solo se conoce el punto A de su recta de acción, ignorándose la dirección de esta y el módulo. *Un apoyo fijo presenta dos incógnitas*. **3**-*Equilibrio en el Empotramiento*, **Figura 156-***c)* En este apoyo la reacción puede tener cualquier dirección, sentido y punto de aplicación. Se desconoce, por tanto, el punto de aplicación A de la reacción, la dirección y el módulo. *Un apoyo de empotramiento presenta 3 incógnitas*. En los autores citados, en particular: HIBBELER (2010), Capítulo 5 y BEER *et al* (2007); Capítulo 4, se presentan ejemplos típicos reales de apoyos, se sugiere una revisión para una mejor conceptualización.

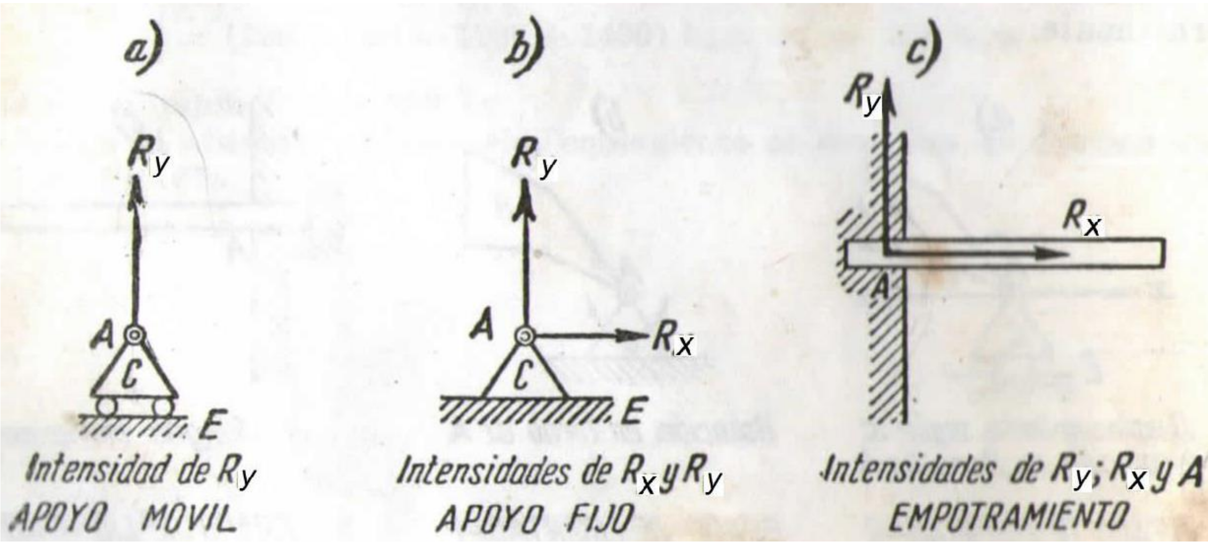


Figura 156. Condiciones de Equilibrio en los Apoyos (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

En lo que sigue (Sección 5.5), se expone la clasificación de estructuras tomando como base los conceptos vistos. El cálculo de reacciones de vínculo en vigas, por su parte (Sección 5.6), es un tema de interés particular ya que reviste importancia práctica para el desarrollo de los problemas.

5.5. Vínculos y Determinación Estática

5.5.1. Introducción

Como se ha dicho el concepto de vínculo puede ser aplicado tanto a cuerpos tridimensionales[26], como a aquellos que pueden ser considerados bidimensionales. En este último grupo se incluyen los elementos estructurales de interés para la asignatura como ya se ha dicho. Como ejemplo, considere qué, el análisis de las reacciones de vínculo en una viga se puede reducir al estudio de una chapa plana.

En este sentido, la presente sección busca precisar, en primer lugar, la *clasificación general de estructuras en función al número de vínculos* que esta posee. Particularizando, luego, este criterio de clasificación para una viga en su conceptualización de chapa plana. La sección se concluye con un ejercicio de aplicación práctica.

5.5.2. Tipos de Estructuras según el Número de Vínculos

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también debe estar sostenido o restringido propiamente por sus apoyos. Algunos cuerpos pueden tener más apoyos que los necesarios para el equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar colocados de tal manera que ocasionen el movimiento del cuerpo.

A continuación, se analiza cada uno de estos casos ahondando solo en aquellos detalles de interés. Se sugiere al alumno que tenga bien entendido las *condiciones de equilibrio en los apoyos* analizadas en la Sección 5.4.

Estructura Hiperestática. Esta estructura posee más restricciones de vínculos que grados de libertad, otros autores denotan esto como *restricciones redundantes*. En efecto, cuando un

[26] Equilibrio en tres dimensiones, Capitulo 5 (HIBBELER, 2010).

cuerpo tiene apoyos redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve *estáticamente indeterminado*. Estáticamente indeterminado significa que habrá más reacciones desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución.

Por ejemplo, la-viga-de la **Figura 157**, que se muestra junto con su diagrama de cuerpo libre, es estáticamente-indeterminada debido a las reacciones adicionales (o redundantes) en los apoyos.

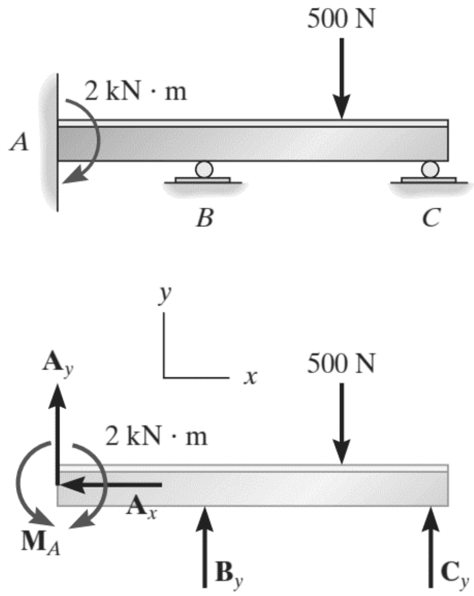


Figura 157. Estructura Estáticamente Indeterminada (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010)

Para la viga hay cinco incógnitas, $\mathrm{M}_A, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_x, B_y$ y C_y para las cuales sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum M_A = 0$ (Ver Ec. 31). Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas estáticamente-indeterminados del tipo que se muestra en la figura anterior se obtienen generalmente a partir de las *condiciones de deformación* presentes en los puntos de apoyo. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas relacionados con la Mecánica Elástica, como la *Mecánica de Materiales* (: Resistencia de Materiales).

Estructura Isostática. Es una estructura en el que número de restricciones de vínculos coincide con los grados de libertad de la misma. Para este caso se cuenta con igual número de ecuaciones (Ver Ec. 31) que incógnitas introducidas por los apoyos, se dice, entonces, que este tipo de estructuras es *estáticamente determinado*. Y son las que se estudian en el curso.

Sin embargo, esta condición no siempre garantiza que un cuerpo se encuentre estable cuando está sometido a una carga particular. Por ejemplo, el apoyo fijo en *A* y el apoyo móvil en *B* para la viga de la **Figura 158**, están colocados de tal modo que las líneas de acción de las fuerzas de reacción son *concurrentes* en un punto *A*. En consecuencia, la carga **P** aplicada ocasionará-que la viga gire un poco con respecto a *A*, Por lo que la viga está *impropiamente restringida*, $\sum M_A \neq 0$.

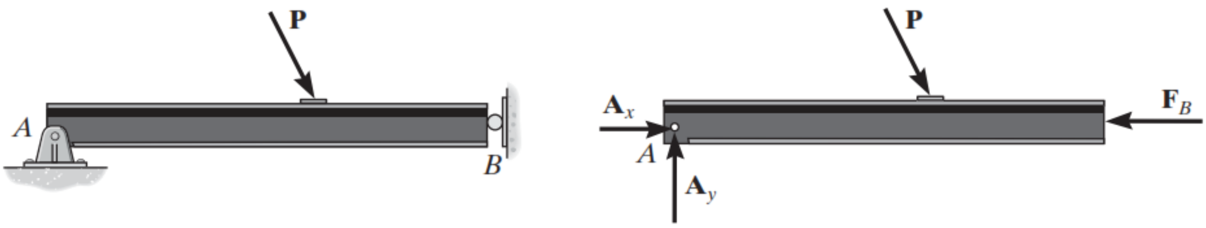


Figura 158. Estructura Impropiamente Restringida (Fuente: HIBBELER, 2010).

Estructura Hipostática. Es una estructura que tiene menor cantidad de restricciones de vínculos que grados de libertad.

5.5.3. Estructuras Isostáticas de una Sola Chapa

Como se ha dicho, ciertos elementos estructurales (estructuras planas) se pueden conceptualizar para su estudio como una chapa plana. Teniendo tres grados de libertad, una chapa se puede *fijar isostáticamente* colocando un apoyo móvil y uno fijo, o, tres apoyos móviles o también, un empotramiento.

En particular, y teniendo en cuenta los alcances del curso, lo anterior puede ser aplicado tanto a vigas como reticulados planos. Como este último se presenta formalmente en el Capítulo 7, solamente se analizan aquí los primeros. Sin embargo, es conveniente que ya en esta instancia el lector asimile la idea que la fijación isostática y los procedimientos de cálculo de reacciones de vinculo en una viga se aplican en la misma forma a los sistemas reticulados.

Clasificación de Vigas por Tipo de Apoyo. A menudo, las vigas se clasifican con respecto a cómo están soportadas. Por ejemplo, una *viga simplemente apoyada* es aquella que está articulada (apoyo fijo) en un extremo y sostenida por un rodillo (apoyo móvil) en el otro, **Figura 159** (*superior*), mientras que una *viga en voladizo* está fija o empotrada en un extremo y libre en el otro, **Figura 159**-(*intermedia*). Una combinación de aquellas resulta en una viga *simplemente apoyada con voladizo* con el de la **Figura 159** (*inferior*).

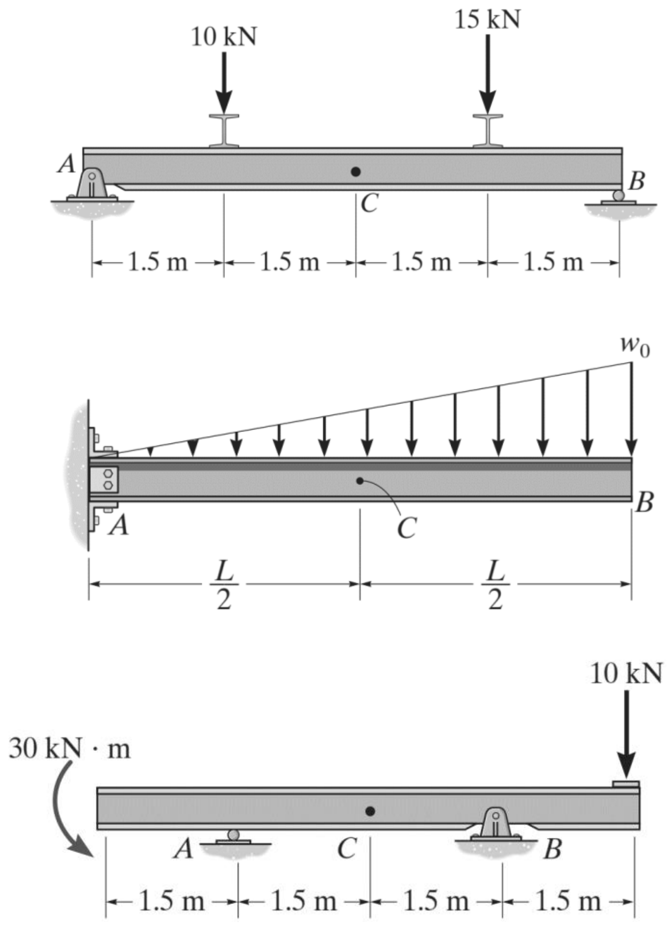


Figura 159. Clasificación de Vigas por Tipo de Apoyo [(1)] Este autor representa el apoyo móvil como un rodillo; compárese con Fig. 156 (a) (Fuente: Adaptado de HIBBELER, 2010).

Ahora que se conoce el elemento estructural en cuestión y la disposición de sus soportes (apoyos), el paso siguiente es netamente práctico y consiste en la determinación de las reacciones en dichos apoyos; o, comúnmente para este curso: el cálculo de reacciones de vínculo.

5.5.4. Cálculo de Reacciones de Vínculo en Estructuras Isostáticas

Si bien el título alude al tratamiento de estructuras isostáticas en general (por estar incluidos los reticulados planos dentro de este grupo), esta sección desarrolla únicamente los procedimientos gráficos y analíticos a utilizar en vigas[27]. Dicho desarrollo es íntegramente práctico mediante la resolución de situaciones problemáticas.

La serie de ejercicios resueltos presentados a continuación corresponden a los ejemplos 17 a 20 del RAFFO (2007). Se ha optado por esta estrategia por una cuestión de normalización de ciertos aspectos gráficos y algebraicos y para mayor simplicidad y claridad para el lector.

En las observaciones de cada ejemplo se consignan los aspectos de la resolución que se desea que el estudiante revise y/o compare con respecto a los ejercicios originales. Cabe destacar que los problemas resueltos aludidos no incluyen cargas distribuidas, sin embargo, el procedimiento que se ha de analizar también es válido para estas. Sin embargo, en los problemas resueltos del Capítulo 6, se puede ver el procedimiento para el cálculo analítico de reacciones cuando la carga es de esta naturaleza.

Por otra parte, el método de resolución gráfica que se ha de desarrollar ya ha sido analizado indirectamente en la Sección 2.2.4.2. Se recomienda su revisión antes de abordar la comprensión de los problemas ya que algunos detalles pueden ser omitidos.

[27] Luego, se aplican estos procedimientos a reticulados planos.

PROBLEMA RESUELTO 5.1

Objetivo. Mostrar los procedimientos gráfico y analítico para el cálculo de reacciones de vínculo en vigas isostáticas.

Consigna. Sea la viga *AB*, **Figura 160**, de luz 6 m (distancia entre apoyos), cargada con una fuerza de $F = 3\,\text{tnf}$ (tnf : tonelada fuerza), que actúa a la distancia de 2 m del apoyo *A*. supuestos apoyos horizontales determinar las reacciones.

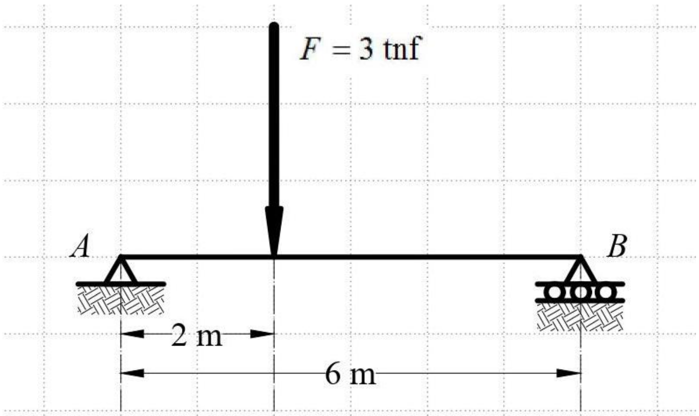


Figura 160. Viga Simplemente Apoyada (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Para la solución gráfica se define una escala de longitud y una escala de fuerza. Luego se trazan el esquema posicional[28] y los polígonos vectorial, polar y funicular obteniendo la línea de cierre *LC* que determina los segmentos $\overline{\mathrm{DC}}$ y $\overline{\mathrm{CE}}$ que leídos en la escala de fuerza resuelven el problema, **Figura 161**.

[28] Ver Glosario Sección 10.1.

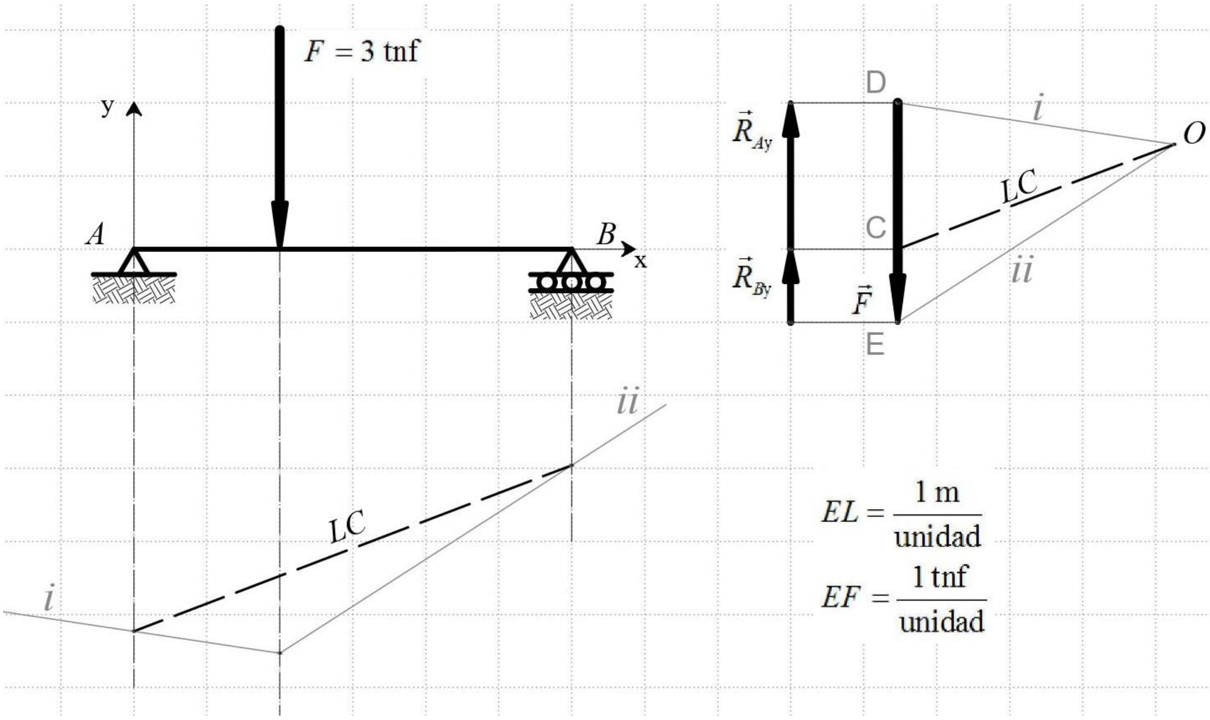


Figura 161. Cálculo de Reacciones: Solución Gráfica (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

$$\left\|\vec{R}_A\right\| = \left\|\vec{R}_{Ay}\right\| = \overline{\text{DC}} \times EF = 2 \text{ unidad} \times 1 \frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 2 \text{ tnf}$$

$$\left\|\vec{R}_B\right\| = \left\|\vec{R}_{By}\right\| = \overline{\text{CE}} \times EF = 1 \text{ unidad} \times 1 \frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 1 \text{ tnf}$$

Donde $\vec{R}_A = \left(\vec{R}_{Ax};\ \vec{R}_{Ay}\right)$ es la reacción en el apoyo A y $\vec{R}_B = \left(\vec{R}_{Bx};\ \vec{R}_{By}\right)$ la reacción en el apoyo B. En este caso no existen reacciones horizontales. Para terminar, se pueden representar los vectores en el esquema posicional, **Figura 162**.

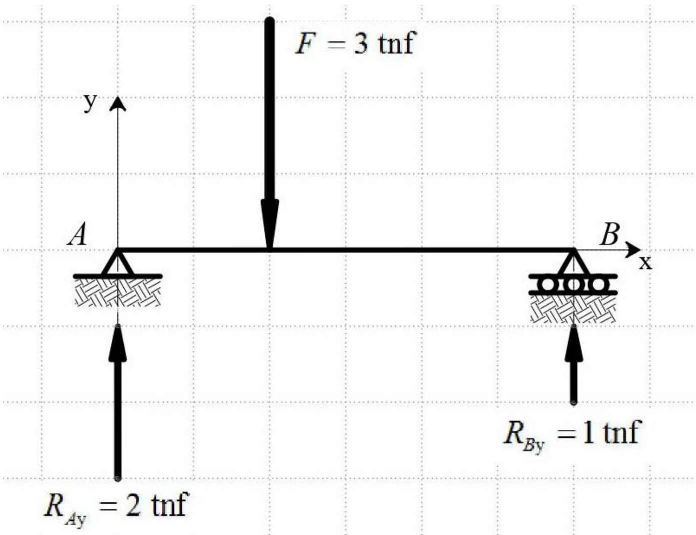


Figura 162. Esquema Posicional: Cargas y Reacciones en los Apoyos (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

En la práctica no es necesario realizar un esquema posicional adicional (como el anterior) para representar las reacciones en los apoyos, aquí, se lo ha hecho solo por una cuestión de claridad por ser este el primer ejercicio.

Finalmente, la respuesta se consigna como:

Respuesta	$\begin{cases} \vec{R}_A = (0;\ 2)\ \text{tnf} \\ \vec{R}_B = (0;\ 1)\ \text{tnf} \end{cases}$

2do. Solución Analítica. Para la solución analítica deben utilizarse las ecuaciones de equilibrio (Ver Ec. 31); para este caso:

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} M_A = 3\ \text{tnf} \times 2\ \text{m} - R_{By} \times 6\ \text{m} = 0 \\ \overset{\curvearrowright}{+} M_B = -3\ \text{tnf} \times 4\ \text{m} + R_{Ay} \times 6\ \text{m} = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$R_{By} = \frac{6\ \text{tnf} \cdot \text{m}}{6\ \text{m}} = 1\ \text{tnf}$$

$$R_{Ay} = \frac{12\ \text{tnf} \cdot \text{m}}{6\ \text{m}} = 2\ \text{tnf}$$

Y la respuesta:

Respuesta	$\begin{cases} \vec{R}_A = (0;\ 2)\ \text{tnf} \\ \vec{R}_B = (0;\ 1)\ \text{tnf} \end{cases}$

Observaciones

- Si bien el problema aclara de antemano que se está tratando con una *estructura estáticamente determinada*, puede darse el caso que esto no esté claro y, por lo tanto, es importante que lector se *cuestione* si se puede resolver con las ecuaciones de equilibrio disponibles, es decir, debe responderse la pregunta: *¿es una estructura estáticamente determinada?*

- Observar que la viga *AB* se ha representado como una “línea”, en otras palabras, la viga se resume a una línea. Esto se puede justificar considerando que la chapa plana tiene un eje de simetría y, por lo tanto, puede resumirse a este. En los problemas sucesivos se utiliza esta forma de representación gráfica.
- Para este caso y otros presentados más adelante, el sistema consta de una sola fuerza. Sin embargo, lo más común es que se planteen sistemas compuestos por varias fuerzas. En tal caso el alumno debe, en primer lugar, hallar la resultante y trazarla en el sistema y luego proceder como se ha analizado.
- Es válido plantear otros sistemas de ecuaciones para la solución analítica. El alumno debe evaluar, para cada caso, cual es la más conveniente. Por ejemplo:

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} M_A = 0 \\ +\uparrow \sum \vec{F}_{\mathrm{y}} = 0 \end{cases}$$

- De la línea de cierre (*LC*). Obtenida *LC* se traza una paralela a esta por el polo *O*. Esta *LC* en intersección con las rectas de acción de las reacciones, determina la magnitud de estas ya que sus direcciones son conocidas. Es necesario aclarar qué, para obtener la *LC*, es necesario conocer las rectas de acción (direcciones) de las reacciones.
- En algunos casos cuando se pide solamente la solución analítica del cálculo de reacciones, eventualmente se debe suponer el sentido de las mismas dado que esta característica vectorial no es siempre identificable, dependiendo ello de la complejidad de la estructura. Luego, si al despejar de las ecuaciones de equilibrio resulta un valor de reacción negativo, por ejemplo $R_{B\mathrm{y}} = -1\ \mathrm{tnf}$, significa que *el sentido real es el opuesto al adoptado*. Pero, si se realiza primero la solución gráfica el sentido real será consecuencia de este procedimiento, luego, ya no será necesario suponer un sentido en la solución analítica, este es el caso del ejercicio desarrollado y de los siguientes. Sin embargo, cuando se trate con

estructuras de barras (en el Capítulo 7) o con *diagramas de esfuerzo* (en el Capítulo 6) no se exige, usualmente, el cálculo gráfico de reacciones, con lo cual, en esos casos si debe, hipotéticamente, suponer un sentido para alguna reacción o reacciones en las cuales no este del todo claro esta característica vectorial.

PROBLEMA RESUELTO 5.2

Objetivo. Mostrar los procedimientos gráfico y analítico para el cálculo de reacciones de vínculo en vigas isostáticas.

Consigna. Determinar las reacciones, en la viga simplemente apoyada, esquematizada en la **Figura 163**.

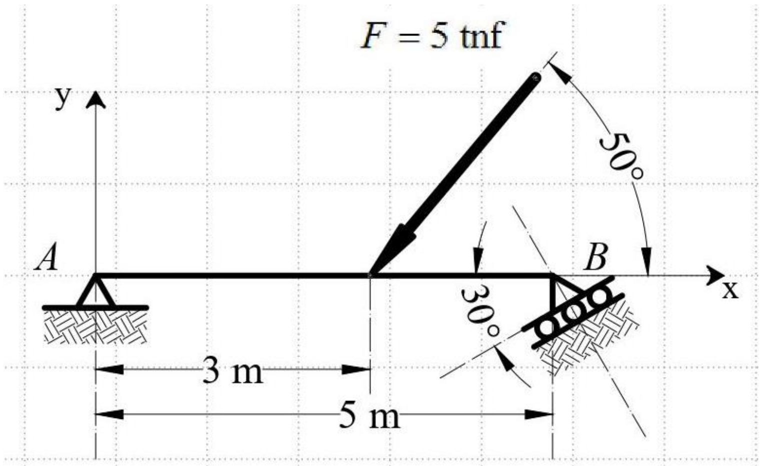


Figura 163. Viga Simplemente Apoyada (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Definidas las escalas y obtenidos el esquema posicional y los polígonos, el paso siguiente es obtener la línea de cierre. En este problema se desconoce la dirección de la reacción en *A*, por lo que es preciso recordar qué: tres fuerzas están en equilibrio si son concurrentes. Por lo tanto, por la intersección de la recta de acción de $\vec{F}$ y $\vec{R}_B$ (punto de concurrencia C) se debe trazar una recta que pase por el punto *A*. Dicha recta es representativa de la recta de acción de $\vec{R}_A$. De esta manera ya se puede obtener la línea de cierre, **Figura 164**, que trazada por el polo *O* da la solución:

$$\left\|\vec{R}_A\right\| = \overline{\mathsf{DE}} \times EF = 4{,}8 \text{ unidad} \times 1 \frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 4{,}8 \text{ tnf}$$

$$\left\|\vec{R}_B\right\| = \overline{\mathsf{FD}} \times EF = 2{,}7 \text{ unidad} \times 1 \frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 2{,}7 \text{ tnf}$$

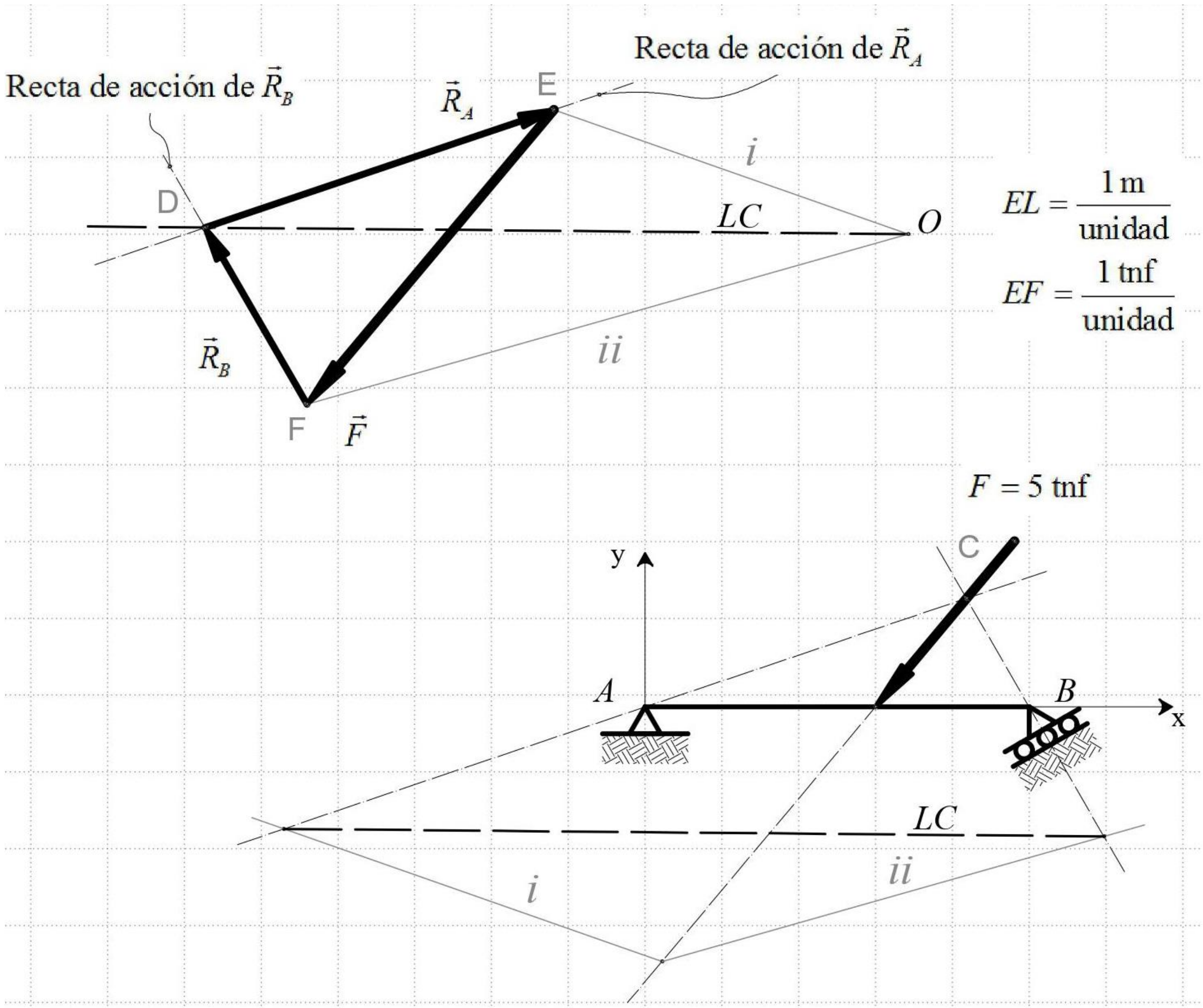


Figura 164. Cálculo de Reacciones: Solución Gráfica (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

El sistema final con las reacciones de apoyo incorporadas queda entonces como se muestra en la **Figura 165**.

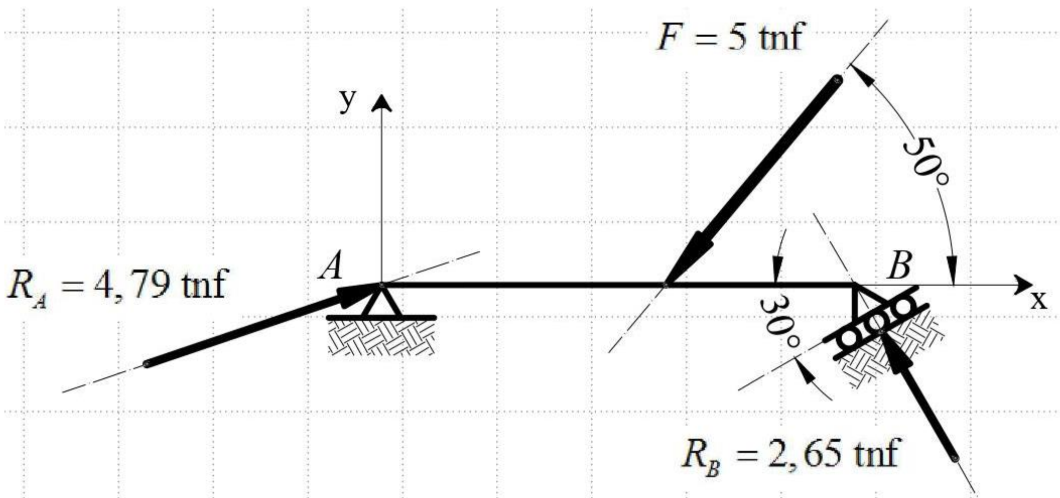


Figura 165. Esquema Posicional: Cargas y Reacciones en los Apoyos (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

Finalmente, la respuesta se consigna como (midiendo el ángulo directamente desde la gráfica):

Respuesta $\boxed{\begin{cases} \vec{R}_A = (4{,}8 \text{ tnf},\ 19{,}0°) \\ \vec{R}_B = (2{,}7 \text{ tnf},\ 120°) \end{cases}}$

El problema también podría haberse resuelto descomponiendo la fuerza en dos direcciones concurrentes con ella tal como lo plantea RAFFO (2007).

2do. Solución Analítica. Para la solución analítica deben utilizarse las ecuaciones de equilibrio (Ver Ec. 31). Para este caso, al existir fuerzas oblicuas es necesario conocer de antemano las componentes rectangulares de todas las fuerzas exteriores (cargas y reacciones). Así, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \sum \vec{F}_{\mathrm{x}} = R_{A\mathrm{x}} - 5 \text{ tnf} \times \cos 50° - R_B \times \cos 60° = 0 \qquad (1) \\ + \uparrow \sum \vec{F}_{\mathrm{y}} = R_{A\mathrm{y}} - 5 \text{ tnf} \times sen 50° + R_B \times sen 60° = 0 \qquad (2) \\ \overset{\frown}{+} M_A = 5 \text{ tnf} \times sen 50° \times 3 \text{ m} - R_B \times sen 60° \times 5 \text{ m} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De la (3):

$$R_B = \frac{11{,}49 \text{ tnf} \cdot \text{m}}{4{,}33 \text{ m}} \cong 2{,}65 \text{ tnf}$$

Y reemplazando en la (1):

$$R_{A\mathrm{x}} = 3{,}215 \text{ tnf} - 1{,}325 \text{ tnf} \cong 4{,}540 \text{ tnf}$$

Sustituyendo R_B en la (2):

$$R_{A\mathrm{y}} = 3{,}830 \text{ tnf} - 2{,}295 \text{ tnf} \cong 1{,}535 \text{ tnf}$$

El módulo de R_A y su argumento (redondeado a cuatro cifras significativas) se calculan como:

$$\left\|\vec{R}_A\right\| = \sqrt{(4{,}540 \text{ tnf})^2 + (1{,}535 \text{ tnf})^2} = 4{,}790 \text{ tnf}$$

$$\alpha_A = tg^{-1}\frac{1{,}535\ \text{tnf}}{4{,}540\ \text{tnf}} \cong 18{,}68°$$

Finalmente, la respuesta con redondeos a tres significativas es:

Respuesta $\boxed{\begin{cases} \vec{R}_A = (4{,}79\ \text{tnf},\ 18{,}7°) \\ \vec{R}_B = (2{,}65\ \text{tnf},\ 120°) \end{cases}}$

PROBLEMA RESUELTO 5.3

Objetivo. Mostrar los procedimientos gráfico y analítico para el cálculo de reacciones de vínculo en vigas isostáticas.

Consigna. Determinar las reacciones de la viga con doble voladizo, según esquema de la **Figura 166**.

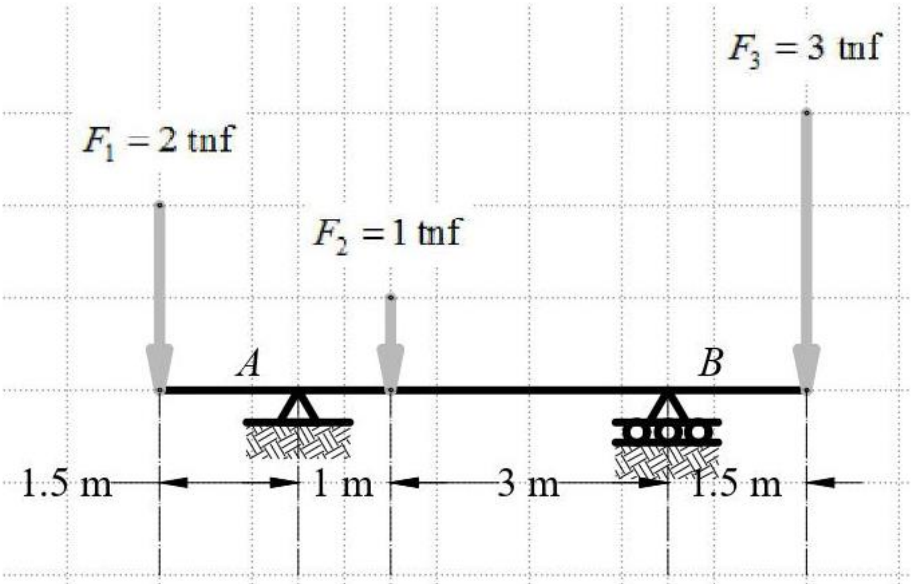


Figura 166. Viga Simplemente Apoyada con Doble Voladizo (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Para la solución gráfica se define una escala de longitud y una escala de fuerza. Luego se trazan el esquema posicional y los polígonos vectorial, polar y funicular obteniendo la línea de cierre *LC* que determina los segmentos $\overline{\mathrm{DC}}$ y $\overline{\mathrm{CE}}$ que leídos en la escala de fuerza resuelven el problema, **Figura 167**.

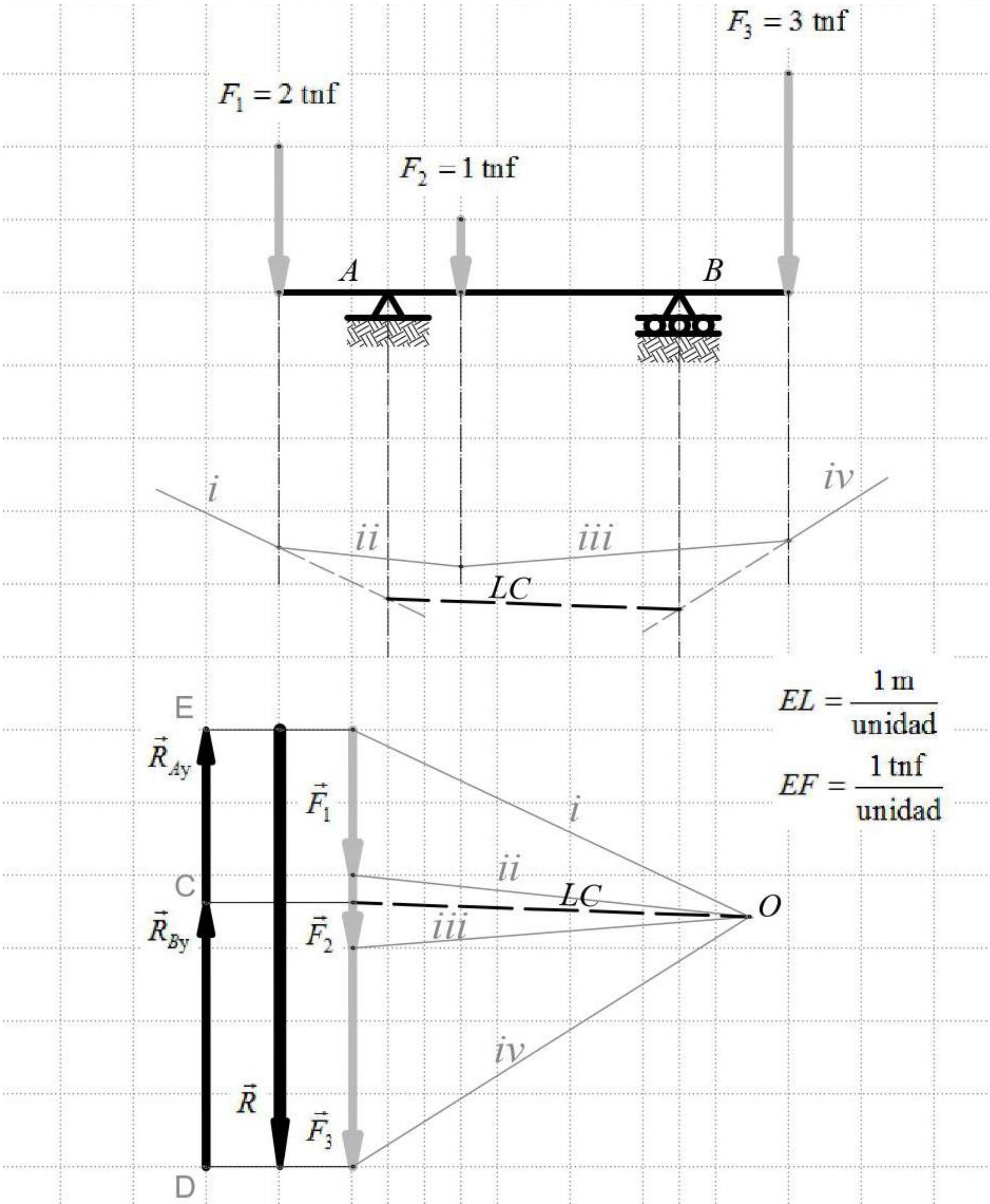


Figura 167. Cálculo de Reacciones de Vínculo: Solución Gráfica (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

$$\left\|\vec{R}_B\right\| = \left\|\vec{R}_{By}\right\| = \overline{\mathsf{DC}} \times EF = 3{,}6\text{ unidad} \times 1\,\frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 3{,}6\text{ tnf}$$

$$\left\|\vec{R}_A\right\| = \left\|\vec{R}_{Ay}\right\| = \overline{\mathsf{CE}} \times EF = 2{,}4\text{ unidad} \times 1\,\frac{\text{tnf}}{\text{unidad}} = 2{,}4\text{ tnf}$$

Para terminar, se pueden representar los vectores representativos de las reacciones en el esquema posicional, **Figura 168**.

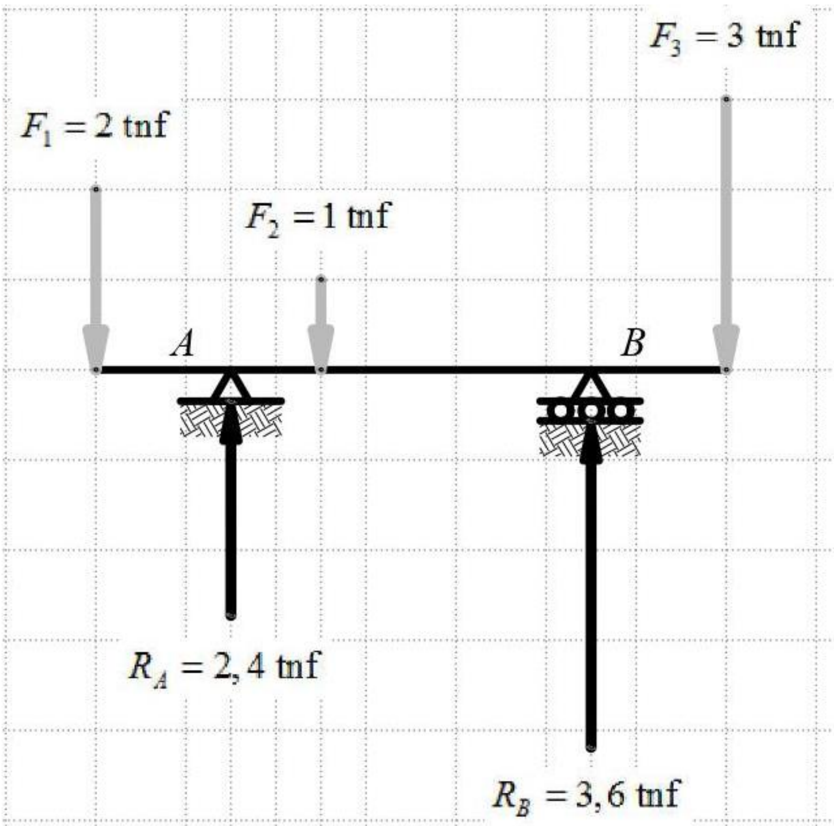


Figura 168. Esquema Posicional: Cargas y Reacciones en los Apoyos (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

Finalmente, la respuesta se consigna como:

Respuesta	$\begin{cases} \vec{R}_A = (2,4 \text{ tnf};\ 90°) \\ \vec{R}_B = (3,6 \text{ tnf};\ 90°) \end{cases}$

2do. Solución Analítica. Para la solución analítica deben utilizarse las ecuaciones de equilibrio (Ver Ec. 31); para este caso solo restan dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} M_A = -2 \text{ tnf} \times 1,5 \text{ m} + 1 \text{ tnf} \times 1 \text{ m} - R_B \times 4 \text{ m} + 3 \text{ tnf} \times 5,5 \text{ m} = 0 \\ \overset{\curvearrowright}{+} M_B = -2 \text{ tnf} \times 5,5 \text{ m} + R_A \times 4 \text{ m} - 1 \text{ tnf} \times 3 \text{ m} + 3 \text{ tnf} \times 1,5 \text{ m} = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$R_A = 2,375 \text{ tnf}$$
$$R_B = 3,675 \text{ tnf}$$

El resultado redondeado a tres cifras significativas es:

Respuesta	$\begin{cases} \vec{R}_A = (2{,}38 \text{ tnf};\ 90°) \\ \vec{R}_B = (3{,}68 \text{ tnf};\ 90°) \end{cases}$

PROBLEMA RESUELTO 5.4

Objetivo. Mostrar los procedimientos gráfico y analítico para el cálculo de reacciones de vínculo en vigas isostáticas (en este problema se respeta la nomenclatura del autor citado).

Consigna. Determinar las reacciones de una viga empotrada en $\boldsymbol{A}$, según esquema de la **Figura 169**.

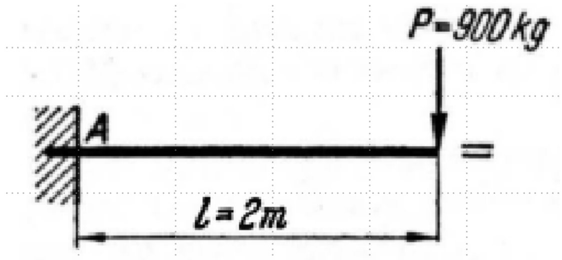


Figura 169. Viga Empotrada (Fuente: RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. El caso de una viga empotrada requiere un tratamiento particular para el cálculo de las reacciones de vínculo, dado que en un solo punto (punto $\boldsymbol{A}$) se restringen los efectos cinemáticos (traslación y rotación) de las cargas externas. En otras palabras, no se tienen dos apoyos independientes como en una viga simplemente apoyada y, por lo tanto, no es factible hallar una línea de cierre para resolver el problema con medios gráficos.

Lo que se realiza en este caso es determinar el momento reaccionante[29] $-\boldsymbol{M}$ (Ver **Figura 170**-*c*) en $\boldsymbol{A}$ mediante el procedimiento gráfico analizado en la Sección 2.2.5.4, según se muestra en las **Figuras 170**-*d*) y *e).*

2do. Solución Analítica. La *fuerza reaccionante* $\boldsymbol{R_A}$, **Figura 170**-*c*), siempre opuesta a la fuerza[30] $\boldsymbol{P}$ del sistema; y, el momento $-\boldsymbol{M}$, son equilibrantes del sistema dado:

$$\boldsymbol{R_A} = -\boldsymbol{P} = -900 \text{ kg}$$
$$-\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{P} \times \ell = -1800 \text{ kg}\times\text{m}$$

[29] También llamado momento de empotramiento.
[30] Si se tratase de un sistema de fuerzas, la fuerza reaccionante seria opuesta a la resultante de dicho sistema.

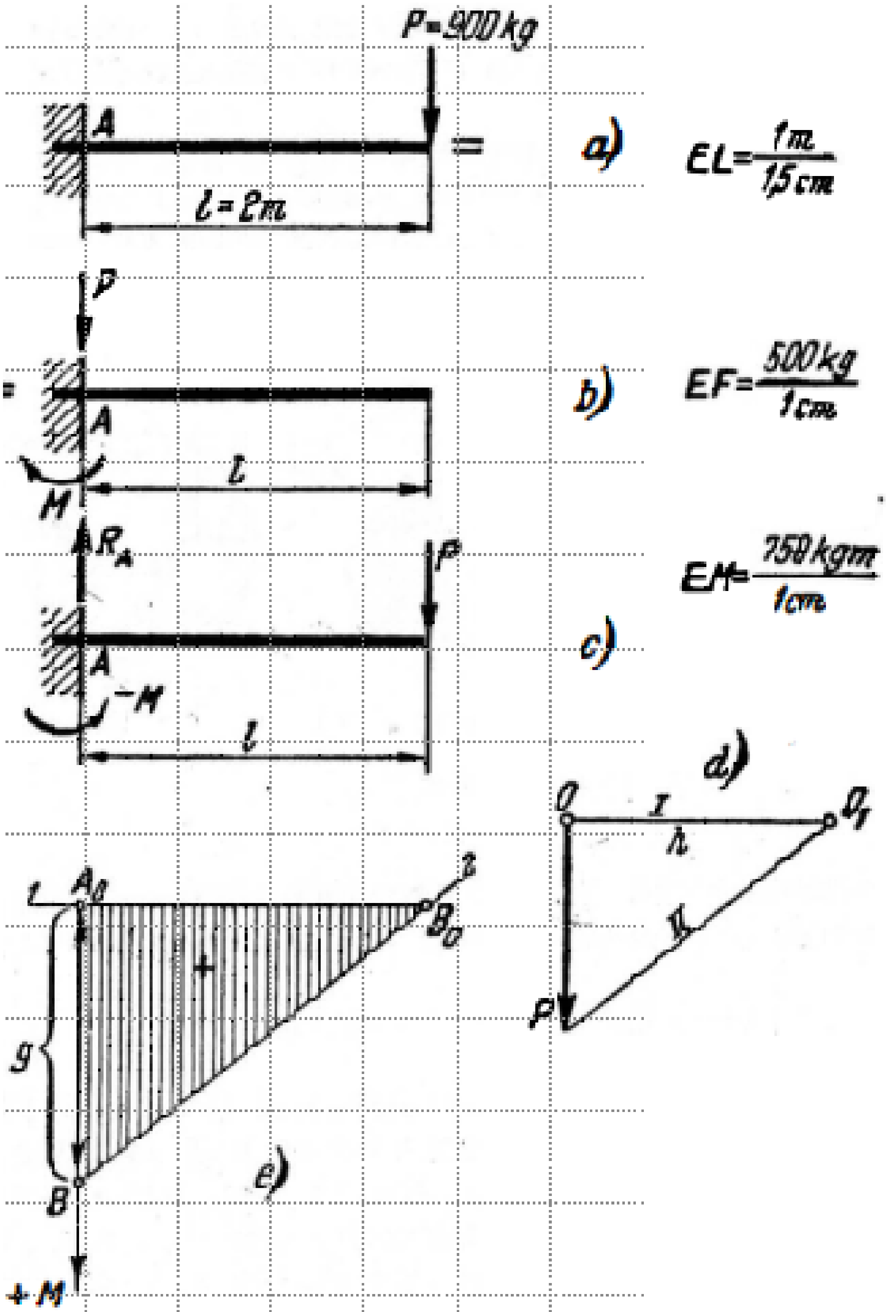


Figura 170. Reacciones en Vigas Empotradas: Consideraciones Analíticas y Gráficas (Fuente: RAFFO, 2007).

Y la respuesta se consigna como:

$$\textbf{Respuesta}\begin{cases} -\boldsymbol{M} = -1800 \text{ kg}\times\text{m} \\ \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}} = (900 \text{ kg}; 90°) \end{cases}$$

Observaciones

- El lector ha de notar que la resolución de este problema así presentado, es una mera transcripción del autor del cual fue tomado. Esto puede fundarse en la simpleza para la resolución de este caso particular.

6. FUERZAS INTERNAS, ESFUERZOS Y MOMENTO FLECTOR

6.1. Introducción

En la Sección 5.3 se ha dicho que la función de una estructura es la de *trasladar* las cargas hasta los lugares donde se producen las *reacciones*, estos lugares, son los apoyos[31]. Cabe preguntarse: *¿cómo llega la carga aplicada a la estructura hasta los apoyos?* La respuesta está asociada a los *esfuerzos*, en efecto, estos se transmiten a través de la estructura desde el punto de aplicación de la carga hasta los apoyos, luego, es de interés la determinación de estos esfuerzos.

Al concepto de esfuerzo, se adiciona, luego, el de *momento flector* (este último, no es precisamente un esfuerzo, pero sí da lugar a uno: la flexión[32]). Estos nuevos conceptos y su uso en Estática Gráfica se definen en la Sección 6.3.

En este sentido, y, desde el punto de vista práctico, la importancia de este capítulo radica en la *determinación gráfica y analítica de los esfuerzos* y *momentos flectores* en *vigas*. Cabe señalar, que la determinación de esfuerzos no es exclusiva de esta sección y también se analiza para estructuras de barras en el Capítulo 7.

Es muy importante que luego del estudio de este capítulo y del siguiente, el alumno identifique que los procedimientos y las técnicas aplicadas para el cálculo de esfuerzos y momentos flectores son la puerta de entrada a la Mecánica de Sólidos Deformables o Resistencia de Materiales tal como se señala en el Capítulo 1.

La determinación gráfica y analítica mencionadas, por su parte, han de ser analizadas desde un *enfoque netamente práctico* para no abrumar con desarrollos teóricos extensos, sin embargo, el lector no debe dejar de lado la rigurosidad matemática implícita en ellos, por lo cual, se ha

---

[31] Claro está, qué, en última instancia las cargas se han de trasladar hasta el suelo.
[32] La flexión en vigas se estudia en Resistencia de Materiales.

de indicar eventualmente el capítulo o página correspondiente a un desarrollo más profundo de los temas tratados por parte de los autores citados.

Además, y no menos importante, el alumno debe abordar este tema con un *dominio* razonable de todas las secciones anteriores dado que este es uno de los tópicos en el que convergen la mayoría de los temas desarrollados anteriormente. Finalmente, y antes de dar inicio al desarrollo de los conceptos de interés, se introduce primeramente el concepto de fuerza interna dado a que está relacionado con la deducción de los esfuerzos en vigas.

6.2. Concepto de Fuerza Interior

Según HIBBELER (2010) para diseñar un elemento estructural o mecánico es necesario conocer la fuerza (: *fuerza interna* o *interior*) que actúa dentro de él para asegurar que el material puede resistir esta fuerza, este es, en efecto, tema de análisis de Resistencia de Materiales. En Estática Gráfica, sin embargo, es necesario aproximar una primera definición como:

Las fuerzas internas son aquellas fuerzas que se desarrollan internamente en el material para mantener el equilibrio de todo el cuerpo. Se trata, básicamente, de la fuerza de atracción entre los átomos (fuerzas de cohesión).

En este sentido, en la Sección 2.2.3.1 se formaliza el concepto de las distintas fuerzas intervinientes en una estructura solicitada por un sistema de fuerzas. En efecto, cuando en un cuerpo actúan *fuerzas exteriores* se generan como consecuencia *fuerzas interiores* (: *fuerzas internas*) que tienden a equilibrar a las aplicadas exteriormente.

¿Cómo determinar las fuerzas internas? Para determinarlas se realizan seccionamientos imaginarios en la pieza considerada según distintos planos de corte tal como lo exponen los autores citados[33]. Por ejemplo, para el caso de una viga, el plano de corte es perpendicular a su

[33] Ver RAFFO (2007), Capítulo 11 y HIBBELER (2010), Capítulo 7.

eje longitudinal. Este seccionamiento pone en evidencia a las fuerzas internas que están actuando en la sección transversal de la viga donde se realiza el corte. En otras palabras, estas fuerzas internas están para mantener unidos a los segmentos de viga tras el corte. Por lo tanto, se puede decir conceptualmente, que las fuerzas internas son *reacciones internas* que permiten mantener unidos a los segmentos.

6.3. Esfuerzos y Momento Flector en Vigas

Antes de desarrollar la deducción de los términos aludidos en el título, se debe comprender que los esfuerzos y el momento flector están asociados a estados de solicitación de la viga, es decir, son fuerzas y momentos actuantes generados por las fuerzas externas (cargas y reacciones) aplicadas a la misma. Luego, interesa determinar cuál es el valor de estos esfuerzos y momentos y como están distribuidos a lo largo de la viga. El análisis siguiente responde a ello.

Entonces, considere una viga horizontal solicitada por las cargas $\boldsymbol{P_1}, ..., \boldsymbol{P_4}$ y por las reacciones $\boldsymbol{R_A}$ y $\boldsymbol{R_B}$, todas contenidas en un plano vertical α pasante por eje geométrico AB, de la viga, **Figura 171** *a)*. El conjunto determina un sistema plano de fuerzas en equilibrio.

Imaginando seccionada la viga por un plano S [34] comprendido entre dos fuerzas sucesivas, se designa con $\boldsymbol{R}_1$ a la resultante de las fuerzas ubicadas a la izquierda de S, o sea, en el segmento AS de la viga, y, con $\boldsymbol{R}_2$ a la resultante de las fuerzas ubicadas a la derecha de S.

En lo que sigue del desarrollo se puede optar por analizar el segmento izquierdo (AS) o el segmento derecho (SB) de la viga para obtener las definiciones buscadas. Se *considera*, por tanto, *el segmento izquierdo* dado a que es este el enfoque adoptado por la Cátedra.

[34] Tal como el mencionado en la sección anterior.

El seccionamiento S realizado define una sección transversal de la viga de nombre homónimo, **Figura 171** *c)*. Para la mayoría de las aplicaciones, la resultante izquierda $\boldsymbol{R}_1$ actúa en el baricentro G de dicha sección.

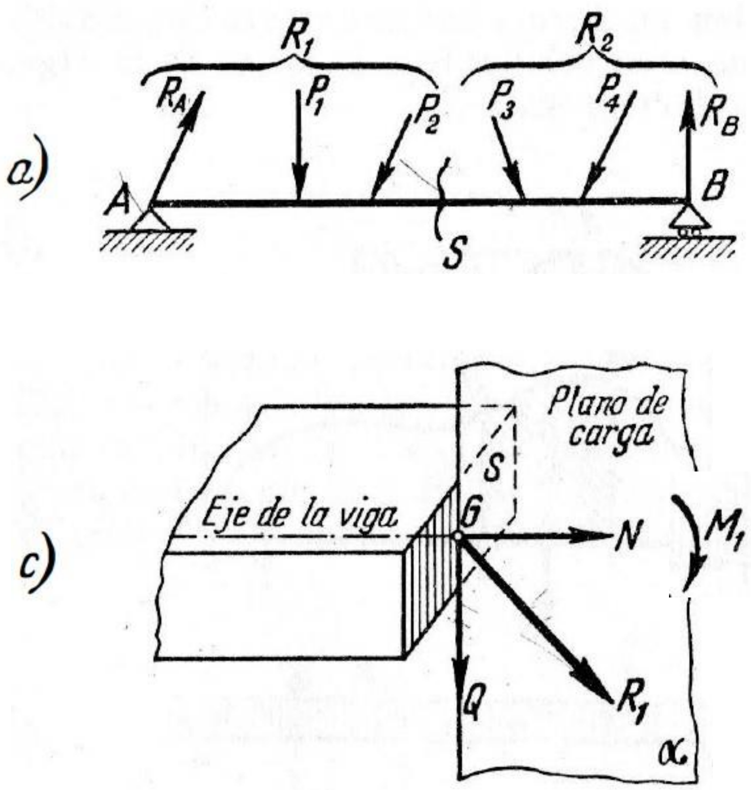


Figura 171. Esfuerzo Cortante, Esfuerzo Axial y Momento Flector en Vigas (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

En referencia a la figura anterior, $\boldsymbol{R}_1$ admite dos componentes a saber: la componente de fuerza $\boldsymbol{N}$ que actúa en forma perpendicular a la sección transversal denominada *esfuerzo axial*[35], y, la componente de fuerza $\boldsymbol{Q}$ que es tangente a la sección transversal llamada *esfuerzo cortante*, esfuerzo de corte o tangencial. El momento de par $\boldsymbol{M_1}$ que genera $\boldsymbol{R}_1$ respecto de S se conoce como momento flexionante, *momento flector* o *momento flexor*.

[35] Denominada por otros autores como esfuerzo normal o simplemente fuerza normal.

El análisis anterior se puede repetir para cualquier sección transversal de la viga. Están dadas, entonces, las condiciones para formular las definiciones.

Definiciones:

El **Momento Flexor** en la sección S de una viga, es el momento de todas las fuerzas exteriores actuantes a la izquierda de S, respecto del baricentro de S (o a la derecha con el signo contrario).

El **Esfuerzo de Corte** en la sección S de una viga, es la componente vertical, aplicada en el baricentro de S, de todas las fuerzas actuantes a la izquierda de S (o de las fuerzas situadas a la derecha de S con signo contrario).

El **Esfuerzo de Axial** (o axil) en la sección S de una viga, es la componente horizontal, aplicada en el baricentro de S, de todas las fuerzas actuantes a la izquierda de S (o de las fuerzas situadas a la derecha de S con signo contrario).

Los enunciados anteriores tienen varias *connotaciones* importantes, varias de ellas han de quedar complementadas con los problemas planteados, sin embargo, cabe consignarlas aquí: **1-** En primer lugar, en las tres definiciones no se descarta que la magnitud en cuestión pueda ser calculada *considerando el tramo derecho de viga* siempre y cuando se tenga especial cuidado con los signos de dichas magnitudes. Por ejemplo, en cierta sección transversal de la viga puede ser más conveniente calcular $\boldsymbol{N}$ considerando el segmento derecho de la viga, aunque la resolución del problema se esté realizando en el segmento izquierdo; **2-**El *esfuerzo axial* puede generar *tracción* o *compresión* según el eje longitudinal de la viga. Este esfuerzo no suele causar efectos importantes en vigas, pero, si tiene mayor injerencia en el cálculo de estructuras de barras (Capítulo 7), en los ensayos de tracción y compresión simples y en los problemas relacionados a esfuerzos axiales en ejes. Estos últimos, desarrollados en Resistencia de Materiales; **3-**Si se considera el origen de coordenadas coincidente con G, la expresión analítica de las definiciones se puede escribir como lo indica la **Ec. (53)**.

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \sum \vec{F}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{N} \quad [\mathrm{N}] \\
&b)\quad \sum \vec{F}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{Q} \quad [\mathrm{N}] \\
&c)\quad \sum M_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{S}} \quad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(53)}
$$

Resta aun, formalizar un aspecto no menos importante, pensando particularmente en la resolución de problemas, se trata de la **convención de signos** para los esfuerzos y momentos flectores definidos, **Figura 172**.

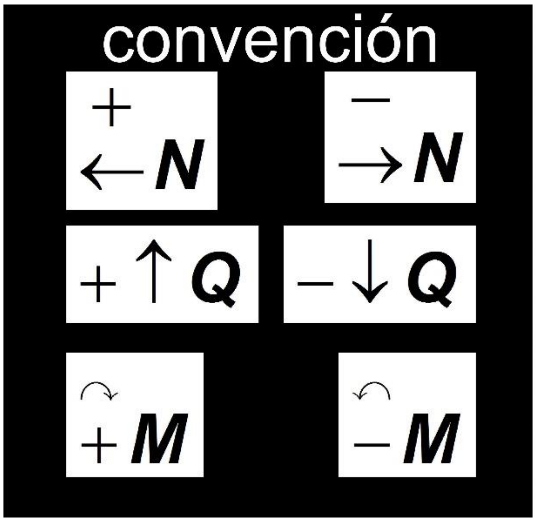


Figura 172. Convención de Signos para el Esfuerzo de Corte, Esfuerzo Axial y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Es decir, $\boldsymbol{N}$ es positivo si su sentido es coincidente con el semieje negativo de las x. Y, positivo en caso contrario. Del mismo modo, $\boldsymbol{Q}$ es positivo si su sentido es coincidente con el semieje positivo de las y (negativo en caso contrario). Finalmente, $\boldsymbol{M}$ es positivo si genera un momento de par en sentido horario. Y, negativo en caso contrario.

6.4. Determinación de Esfuerzos y Momento Flector en Vigas

Con el desarrollo teórico analizado en las secciones anteriores del capítulo, se está en condiciones de realizar los cálculos propiamente dichos para la determinación de los esfuerzos de corte y axial y momento flector en vigas. Esto se ha de hacer, directamente con la resolución de problemas presentando los *procedimientos gráficos y analíticos* que se utilizan en la asignatura. Estos procedimientos, han de dejar conclusiones y/o connotaciones importantes que también explican aspectos teóricos y que el alumno debe comprender, estas connotaciones se han de consignar en las *observaciones de los problemas*. Además, se ha de indicar convenientemente las páginas, capítulos y/o autores para una mayor y necesaria profundización del tema en cuestión. A continuación, se precisan algunos aspectos generales y procedimentales que deben ser tenidas en cuenta previo a la práctica.

6.4.1. Procedimiento Gráfico

Este consiste básicamente en la construcción de los conocidos *diagramas de esfuerzos y momento flector*. Estos diagramas muestran la distribución de los esfuerzos y de momento flector en cada diferencial de sección a lo largo de la viga. La principal *ventaja* es que permiten identificar los puntos críticos a primer golpe de vista. Los puntos críticos son las secciones de viga en las cuales estas magnitudes son máximas, es decir, las secciones de mayor solicitación. Luego, el ingeniero puede hacer uso de esta información para el diseño del elemento estructural, como se ha analizar en Resistencia de Materiales.

Los problemas que se presentan en este material responden a un grado de dificultad ascendente y presentan las variantes usuales, es decir, se han de resolver ejercicios típicos que se limitan a *cargas puntuales* y *uniformemente distribuidas* (o una combinación de estas) que actúan sobre vigas simplemente apoyadas (con y sin voladizo) y vigas empotradas, lo que responde principalmente a los *alcances del curso* y a la importancia de construir bases firmes, para lo cual, es suficiente con analizar las situaciones mencionadas. Luego, se pueden abordar situaciones más complejas, por ejemplo, para *cargas triangulares* o *irregulares*.

Se conocen varias técnicas para la construcción de estos diagramas. Por mencionar algunos, existe el *método de las áreas* que basa su técnica en el cálculo de áreas haciendo uso de la relación matemática (Ver Sección 6.4.2) entre el esfuerzo cortante y el momento flector. Otra opción consiste en el cálculo analítico del cortante, el axial y el momento flector en puntos notables, también llamados puntos de discontinuidad, para trazar luego las curvas correspondientes. Finalmente, una tercera opción a considerar, hace uso del *polígono funicular*, aunque este solo se utilice para la construcción del diagrama de momento flector, como se ha analizar. Las dos últimas opciones son las que se han de aplicar. Claro está, que una cuarta opción es el uso de algún *software* de dibujo para verificar lo realizado manualmente durante el proceso de aprendizaje, no así, en las instancias evaluativas.

De los diagramas es necesario aclarar, aun, un detalle que es conveniente que el lector tenga presente y que está asociado al concepto de fuerza interna. En efecto, según el análisis de la sección anterior, una viga puede estar sometida a esfuerzos axiales o cortantes y a momentos flectores, entonces, al realizar el diagrama se está mostrando en forma gráfica como se distribuyen las distintas solicitaciones ($\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{M}$) a lo largo del elemento estructural, en otras palabras, lo que se está representando es el efecto de las fuerzas actuantes.

Por otra parte, las fuerzas internas que actúan en la sección transversal considerada, son iguales a los esfuerzos en magnitud y dirección, pero tienen sentido opuesto ya que deben garantizar el equilibrio de la estructura como se ha dicho. Por este motivo, los diagramas de esfuerzos (tal como fue definido) se pueden reemplazar por *diagramas de fuerzas internas* obteniéndose el mismo resultado. La mayoría de los autores, sin embargo, opta por la representación de los esfuerzos y momentos flectores.

Para terminar, cabe destacar que estos diagramas también se pueden realizar para otros tipos de estructuras como pórticos, estructura de barras, entre otros, quedando este análisis fuera del contenido curricular.

6.4.2. Procedimiento Analítico

La solución analítica también permite hallar las magnitudes analizadas en cualquier diferencial de sección en la longitud de la viga. En rigor, el procedimiento consiste en obtener las llamadas *ecuaciones fundamentales*, las cuales son expresiones genéricas que describen, mediante fórmulas matemáticas, el comportamiento de $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ o $\boldsymbol{M}$.

Dichas ecuaciones están definidas, principalmente, por la disposición relativa entre las fuerzas y la estructura y por el tipo de cargas (concentradas o distribuidas), pudiéndose obtener más de una ecuación fundamental para una misma viga. Esto se ha de comprender perfectamente con la práctica.

Tales ecuaciones, ponen en evidencia la relación existente entre la carga aplicada, el esfuerzo cortante y el momento flector, en efecto, cuando la carga $\vec{F}$ es concentrada, el esfuerzo cortante entre tramos responde a una función constante, mientras que el momento flector responde a una función lineal, **Figura 173**. Del mismo modo, cuando la carga q es uniformemente distribuida, se tiene una ley lineal para el esfuerzo cortante y una ley cuadrática para el momento flector, **Figura 174**. La fundamentación de estas relaciones se puede ver en las Ec. (54).

$$\begin{aligned} &a) \quad \frac{d\boldsymbol{M}}{dx} = \boldsymbol{Q} \quad \text{La pendiente del diagrama de momento es igual al cortante} \\ &b) \quad \frac{d\boldsymbol{Q}}{dx} = q \quad \text{La pendiente del diagrama de esfuerzo es igual a la carga} \end{aligned} \qquad (54)$$

Donde q es la carga uniformemente distribuida, $d\boldsymbol{M}$ y $d\boldsymbol{Q}$ son el diferencial de momento flector y cortante, respectivamente.

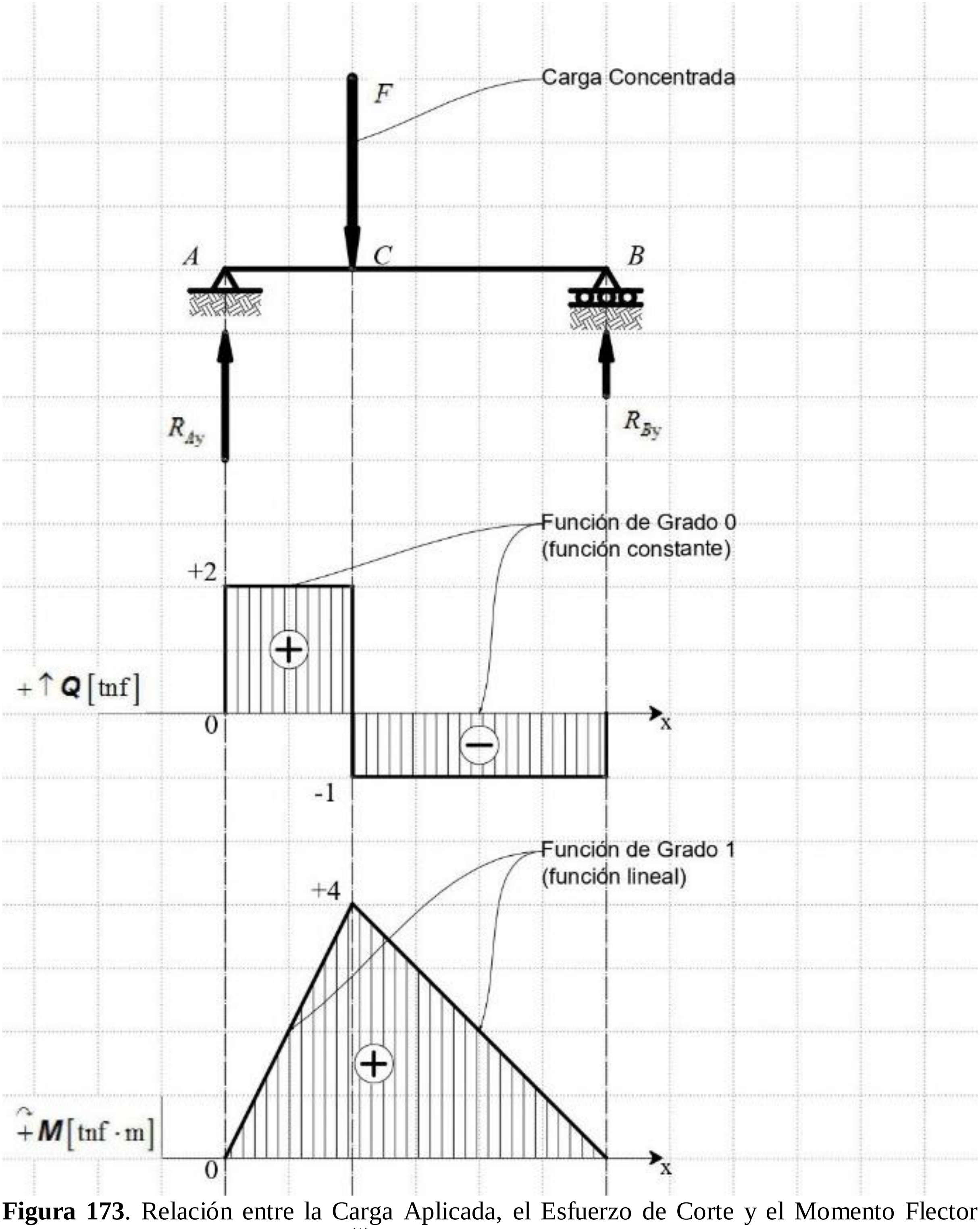


Figura 173. Relación entre la Carga Aplicada, el Esfuerzo de Corte y el Momento Flector cuando la Carga es Concentrada. [1] La Gráfica Corresponde al Problema 6.1 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

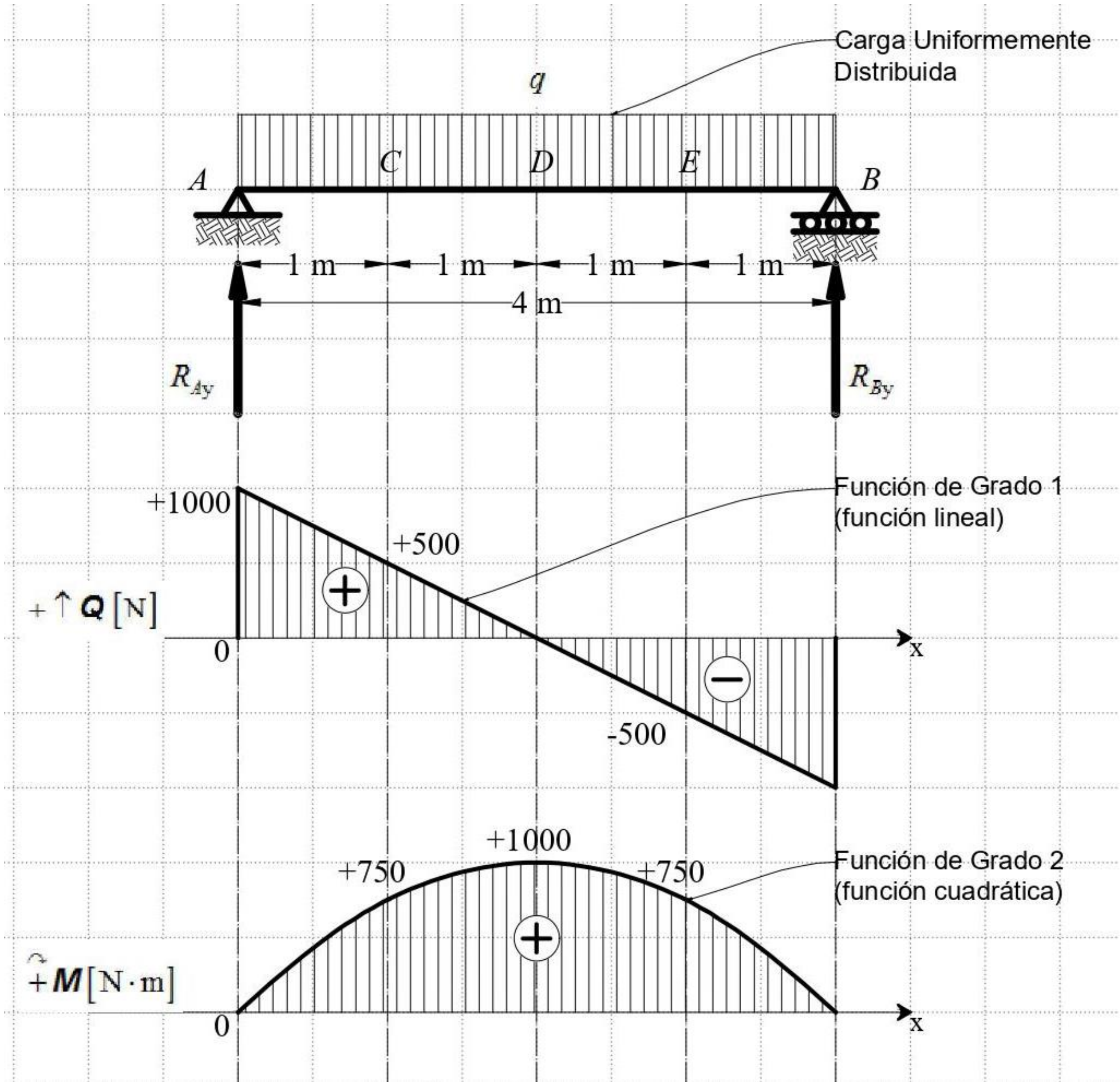


Figura 174. Relación entre la Carga Aplicada, el Esfuerzo de Corte y el Momento Flector cuando la Carga es Uniformemente Distribuida. [1] La Gráfica Corresponde al Problema 6.3 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Con la (54) queda claro que las relaciones están asociadas al cálculo diferencial, con lo cual, se puede decir qué, la derivada de la función de momento flector es igual al cortante, del mismo modo qué, la derivada de la función del cortante es igual a la carga. Esto justifica que cuando $\boldsymbol{Q} = 0$ se tiene un máximo en el diagrama de momento flector. Explicaciones más rigurosas de estas relaciones se pueden encontrar perfectamente deducidas en la bibliografía de este documento.

PROBLEMA RESUELTO 6.1

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico y analítico para determinar los esfuerzos cortantes, axiales y los momentos flectores para una viga solicitada con *cargas concentradas*. Reconocer como se comporta la distribución de esfuerzos y momentos flectores y la relación entre ellos, a lo largo de toda la viga cuando la carga aplicada es *concentrada*.

Consigna. Determinar gráfica y analíticamente los momentos flexores y esfuerzos cortantes y axiales de la viga del problema resuelto 5.1, **Figura 175**.

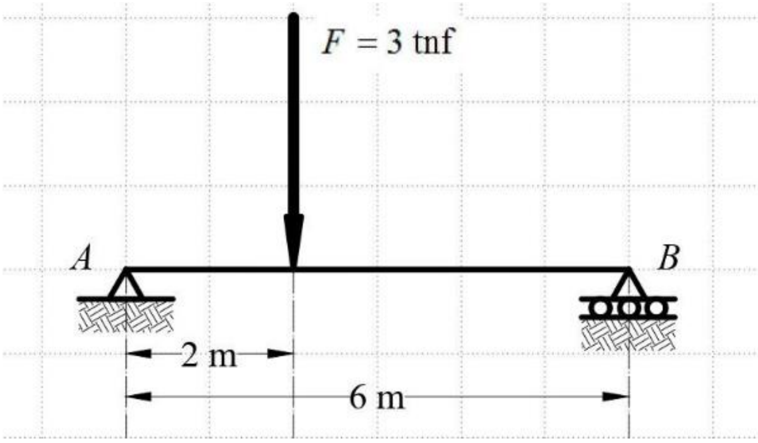


Figura 175. Viga Simplemente Apoyada Solicitada por una Carga Concentrada (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

Por tratarse del primer ejercicio se brindan detalles redundantes buscando que el alumno comprenda la forma de trabajo y asimile los conceptos necesarios para encarar problemas más complejos.

1ro. Solución Gráfica. El primer paso es determinar las reacciones de vínculo[36]. Para ello es necesario emplear alguno de los procedimientos analizados en la Sección 5.5.4. Resulta evidente que el procedimiento analítico (salvo que se especifique otra cosa) es el más conveniente. Entonces, las reacciones valen (Ver Problema Resuelto 5.1):

[36] Recordar que los esfuerzos y el momento flector a determinar están dados por las fuerzas externas (cargas y reacciones).

$$\left\|\vec{R}_A\right\| = \left\|\vec{R}_{Ay}\right\| = 2 \text{ tnf}$$
$$\left\|\vec{R}_B\right\| = \left\|\vec{R}_{By}\right\| = 1 \text{ tnf}$$

Luego, definidas las escalas de fuerza y de longitud, se obtiene el esquema posicional, **Figura 176**.

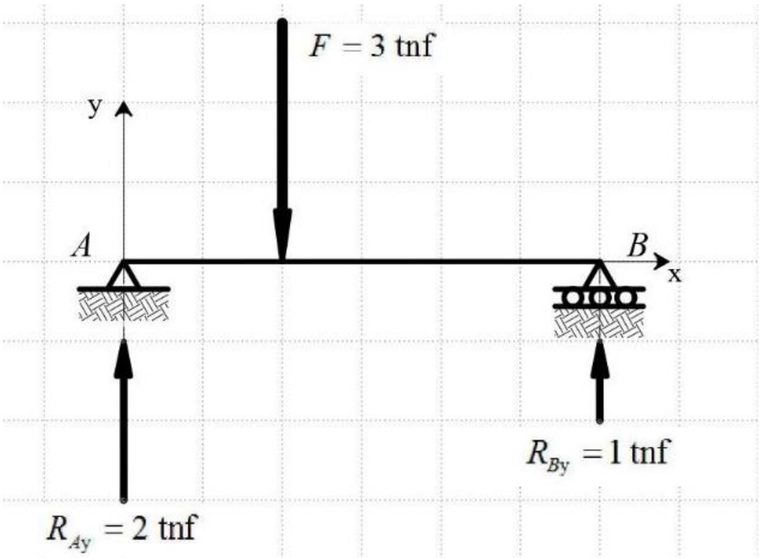


Figura 176. Esquema Posicional: Cargas y Reacciones en los Apoyos (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

El paso siguiente es trazar *líneas auxiliares* (*líneas de referencia*) que sirven de guía para el trazado de los diagramas. Las líneas *horizontales* indican el sentido evolutivo de las magnitudes (según $+x$) así como su valor cero. Las *verticales*, por su parte, se trazan en cada *punto de discontinuidad* identificado, **Figura 177**.

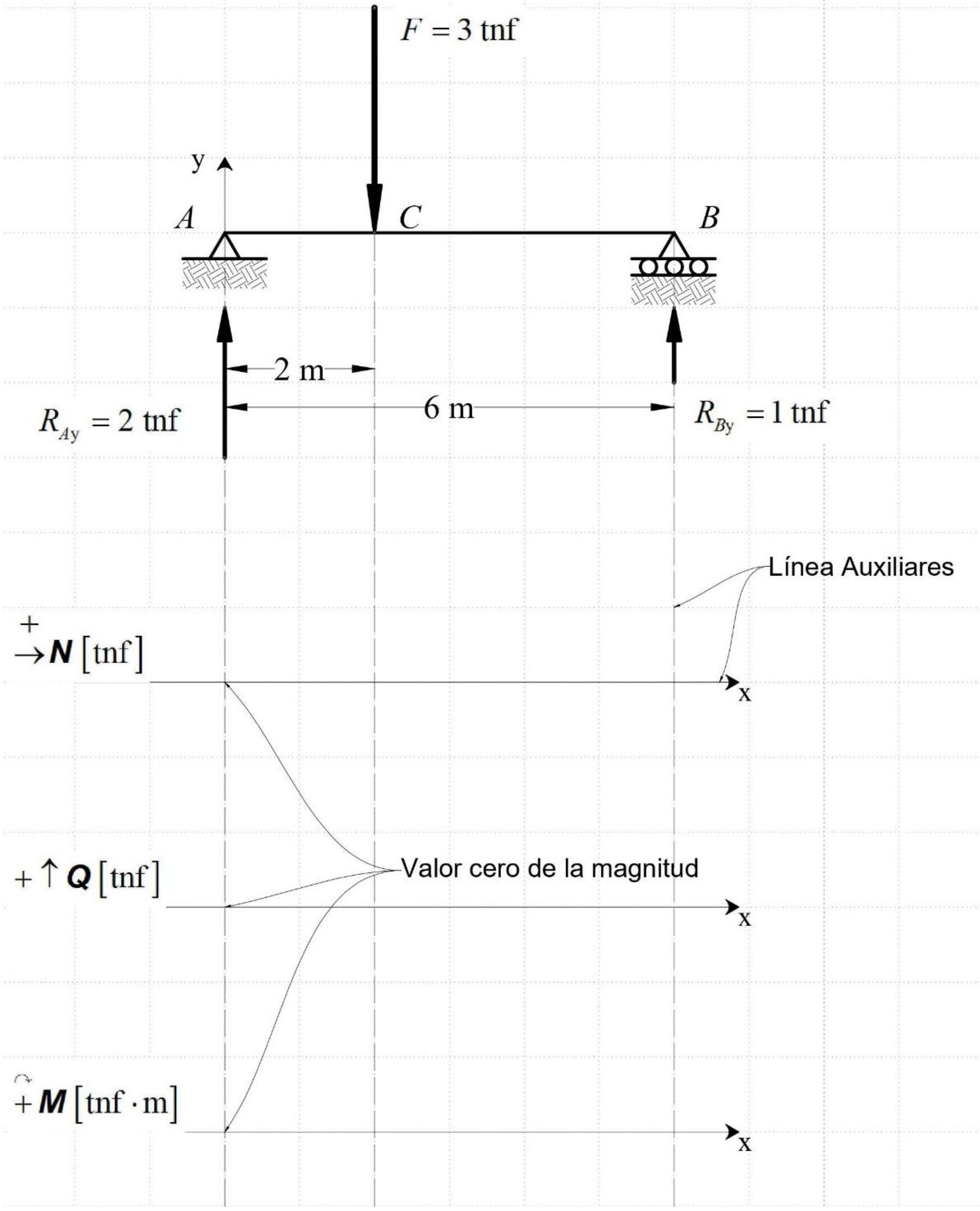


Figura 177. Construcción de los Diagramas de Esfuerzos y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Representación de los Esfuerzos Axiales ($\boldsymbol{N}$). En este caso no existen fuerzas oblicuas u horizontales, por lo tanto, no existe esfuerzo axial (Ver Problema Resuelto 6.4).

Representación de los Esfuerzos de Corte ($\boldsymbol{Q}$) y Momentos Flectores ($\boldsymbol{M}$). Básicamente, el procedimiento consiste en calcular los valores de $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{M}$ en cada punto de discontinuidad y luego ubicarlos sobre las líneas auxiliares correspondientes. Por ejemplo, el punto 0 (inicio de los diagramas) indican $\boldsymbol{Q} = 0$ y $\boldsymbol{M} = 0$, del mismo modo, el punto $+2$ indica que $\boldsymbol{Q} = +2$ (en las unidades correspondientes), **Figura 178**.

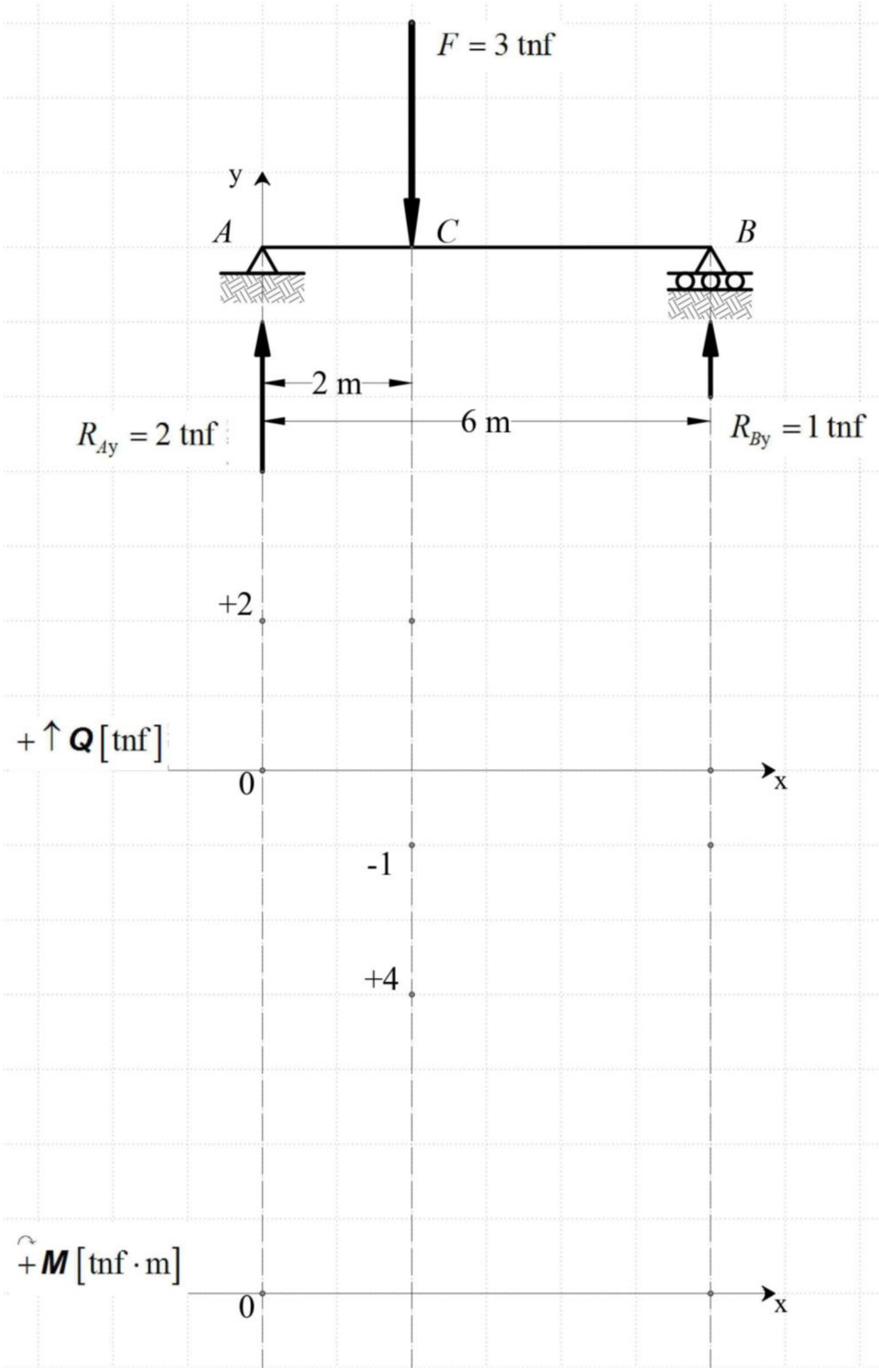


Figura 178. Construcción de los Diagramas de Esfuerzo de Corte y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Luego, solo resta unir todos los puntos en cada diagrama y el resultado es el que se muestra en la **Figura 179**. En la dicha figura también se indican los cálculos auxiliares de $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{M}$ en los puntos señalados (puntos de discontinuidad).

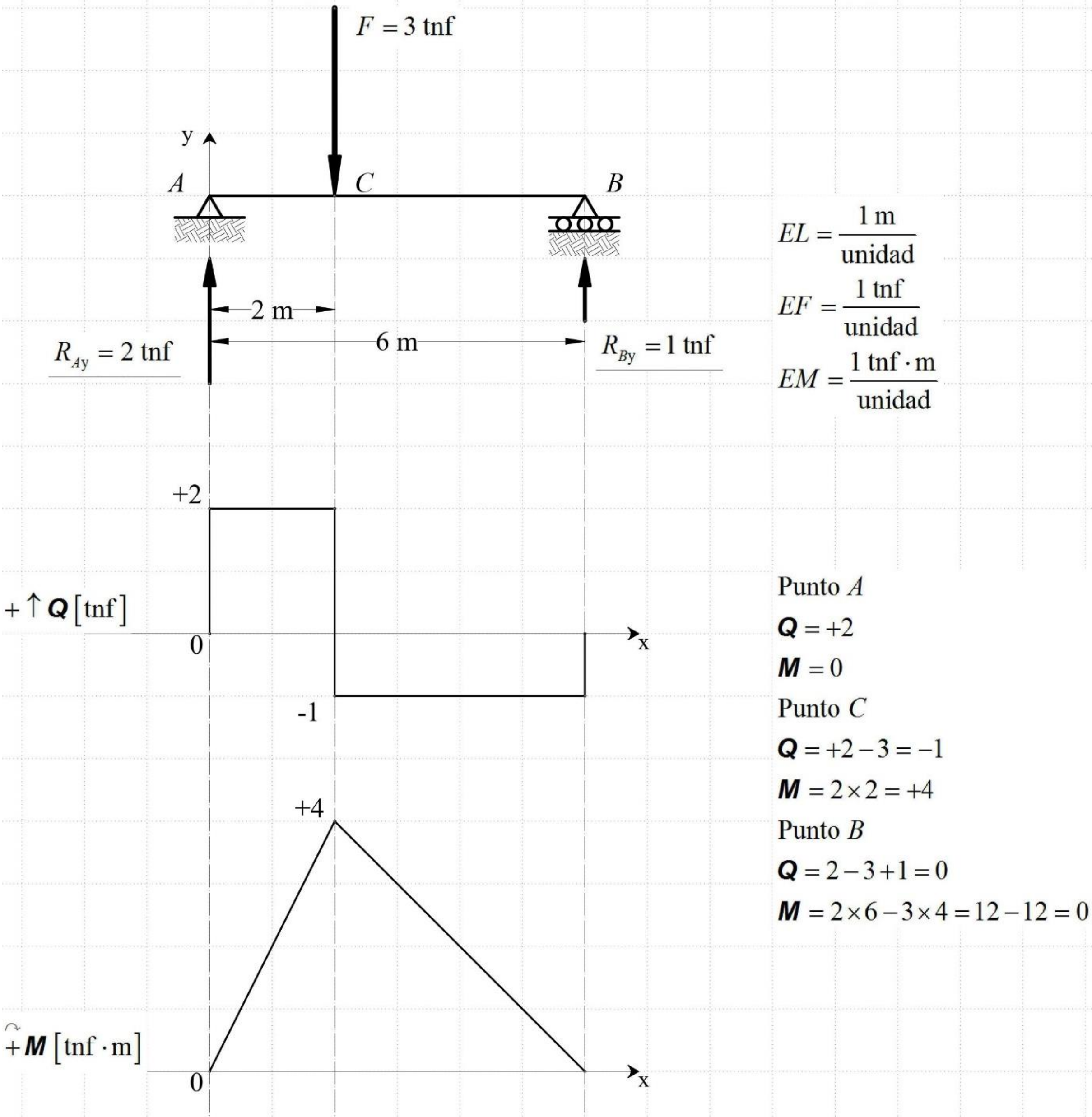


Figura 179. Construcción del Diagrama de Esfuerzo Cortante y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Hay que hacer énfasis en que el trazado de los diagramas no es un procedimiento trivial y para hacerlo se deben conocer cómo se comportan el momento flector y el esfuerzo cortante según el tipo de carga aplicada (Ver Sección 6.4).

Para este caso, la carga aplicada es concentrada, por lo tanto, ***Q*** responde a una función constante en cada tramo; y, en consecuencia, ***M*** responde a una función lineal (función de primer orden). Del mismo modo, en los puntos donde se anula el cortante le corresponde un máximo al momento flexor. Lo anterior ha de quedar explicitado con la solución analítica. Finalmente, la presentación usual de estos diagramas es el que se indica en la **Figura 180**.

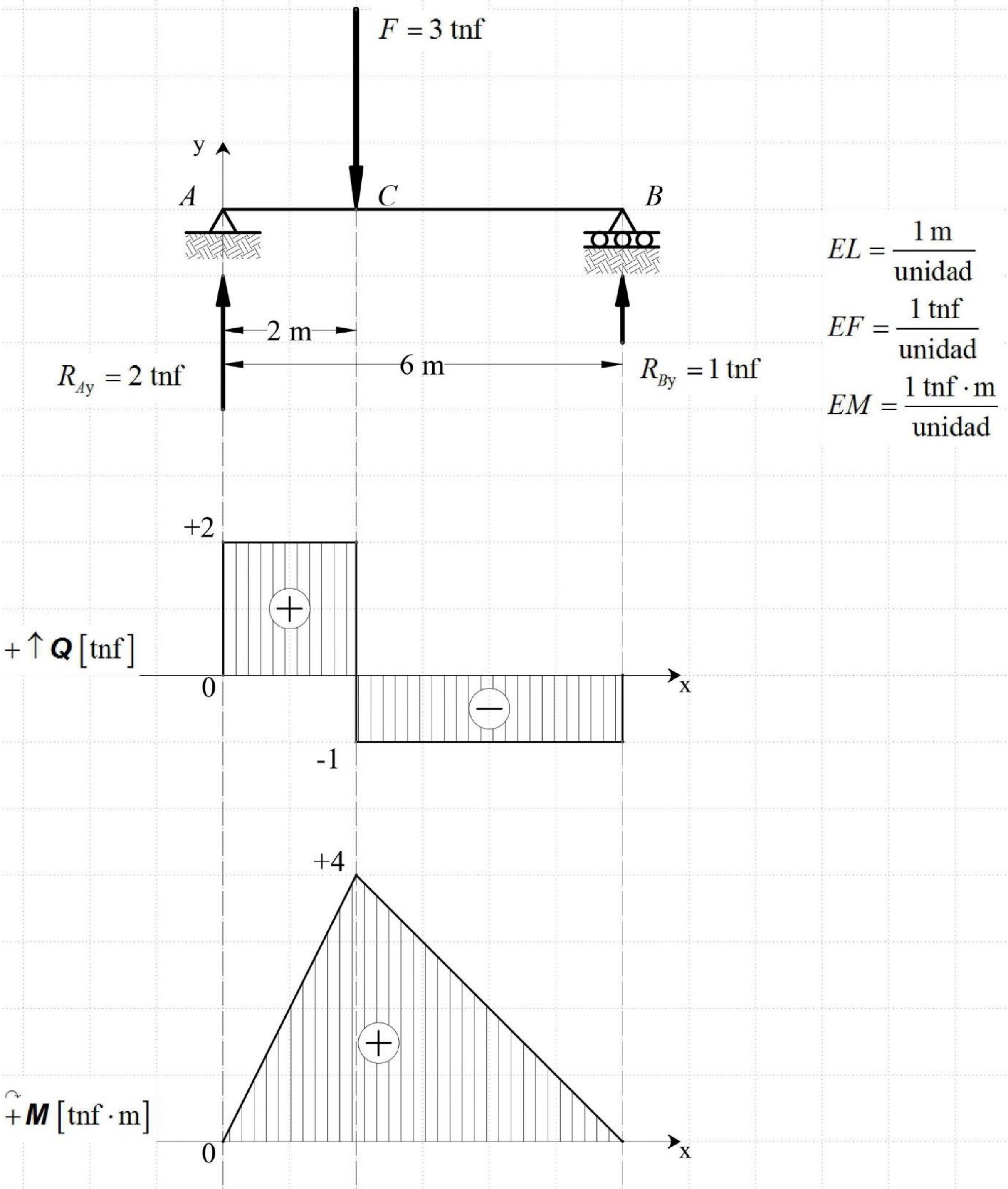


Figura 180. Diagrama de Momento Flexor y Esfuerzo Cortante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Notar qué, el punto inicial y el punto final de los diagramas están sobre la línea de referencia, ya que la viga en su totalidad debe estar en equilibrio. Esto es siempre así, a excepción de vigas empotradas (Ver Problema Resuelto 6.6). Otro detalle, es que se indica el signo de la magnitud en cada tramo. El relleno rayado del cortante, por su parte, es representativo del módulo del esfuerzo de corte en cada sección de la viga.

Para concluir, si en el diagrama anterior se mide una ordenada cualquiera, por ejemplo, y , ubicada a una abscisa *x* desde el extremo izquierdo de la viga, se puede obtener el valor del momento flexor o esfuerzo cortante en esa sección S, tal como se indica en la **Figura 181**.

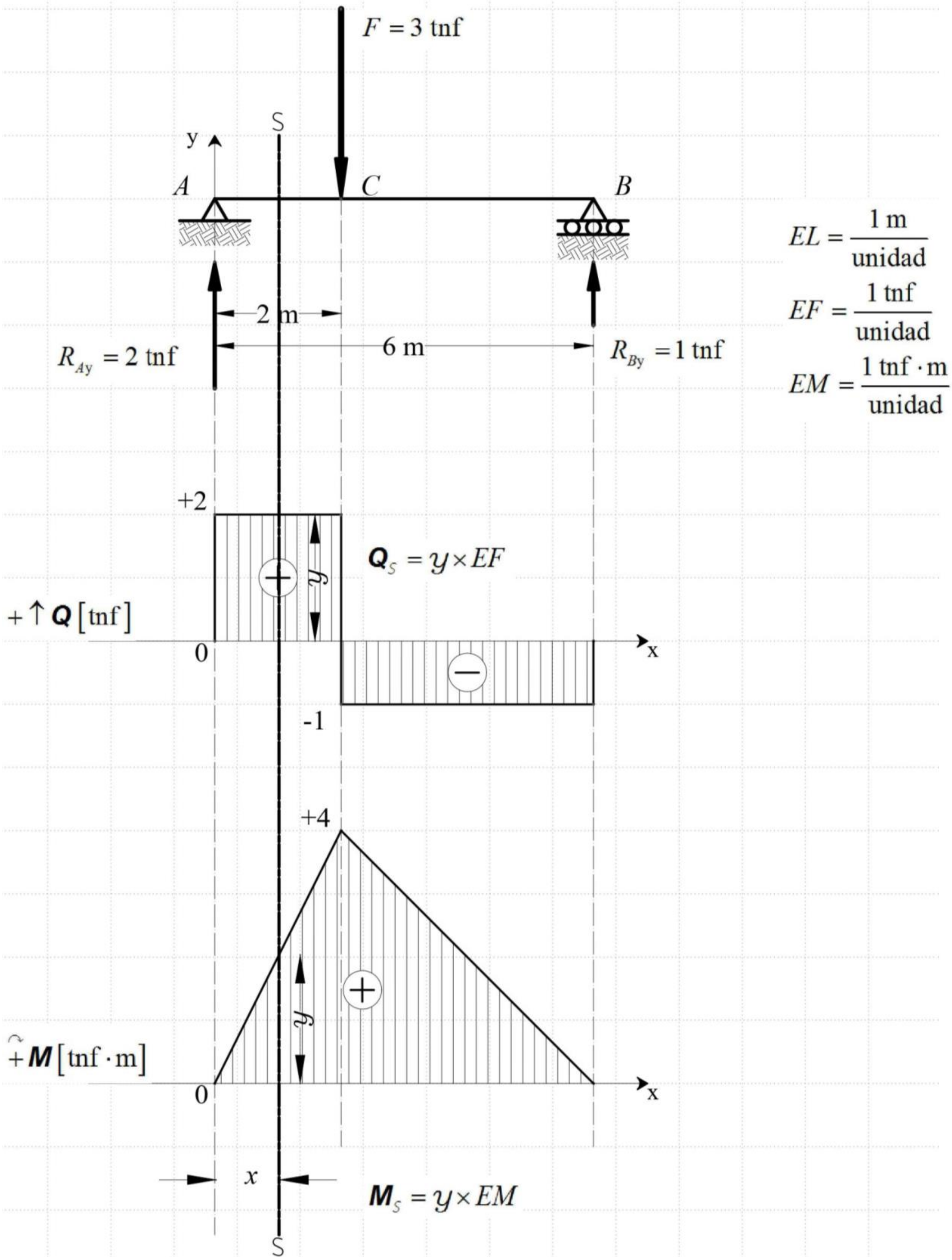


Figura 181. Valor del Momento Flexor y Esfuerzo Cortante Obtenidos del Diagrama (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2do. Solución Analítica. Como se ha dicho, la solución analítica permite hallar (al igual que los diagramas) las magnitudes analizadas en cualquier punto a lo largo de la longitud de la viga.

Para ello, hay que obtener las llamadas *ecuaciones fundamentales*, las cuales son expresiones genéricas que describen, mediante fórmulas matemáticas, el comportamiento de $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{M}$ en cualquier sección transversal a lo largo de la misma (están en función de *x*).

Estas ecuaciones se deben definir por tramos, ya que en cada tramo están implicadas, generalmente, cargas distintas (o una combinación de cargas), para este caso, los tramos son *AC* y *CB*.

Obtención de las Ecuaciones Fundamentales. Se deben hallar las expresiones que dejan a las magnitudes en función de *x*, para ello considere la **Figura 182** la cual representa un apoyo visual para comprender como se deducen las ecuaciones, por lo tanto, por simplicidad, solo se esquematiza en este problema.

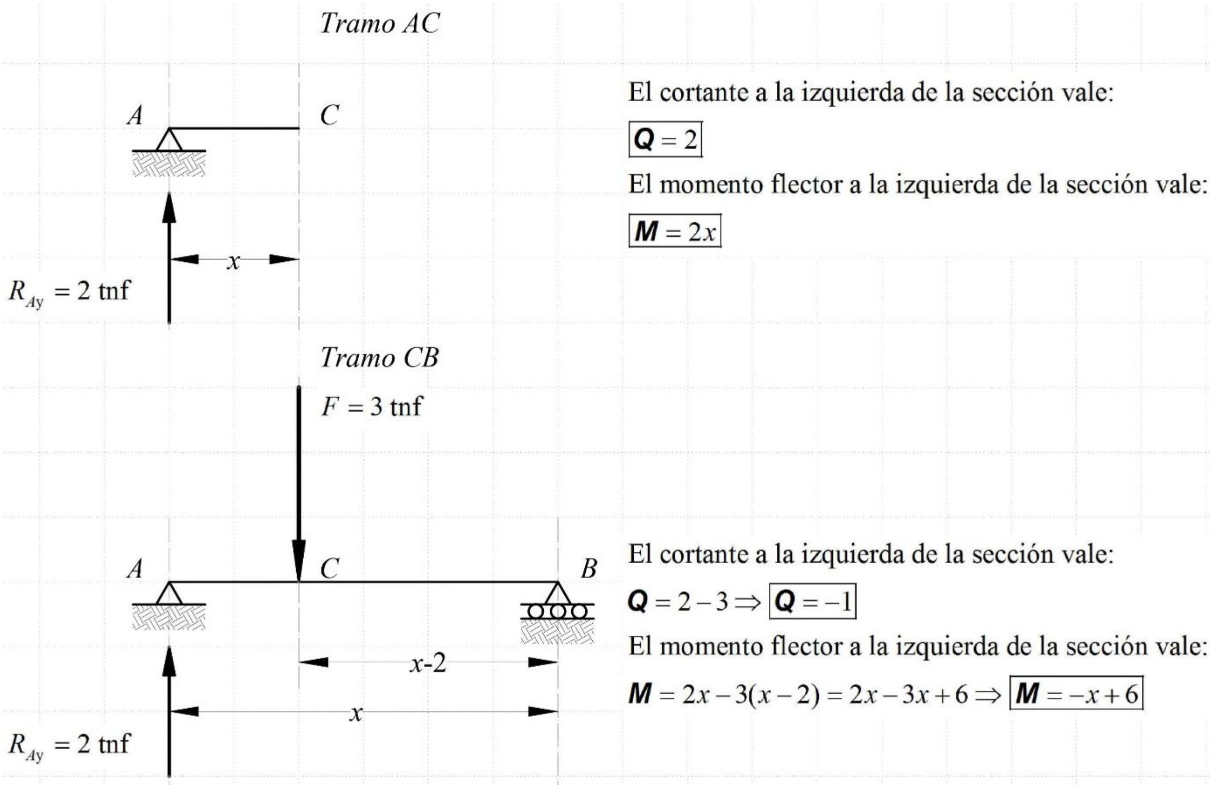


Figura 182. Deducción de las Ecuaciones Fundamentales en los Tramos de Viga (Tramo *AC* y Tramo *CB*) (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Observe que la deducción de las ecuaciones es, en esencia, la aplicación de la definición de las magnitudes. Otro detalle, es que en este problema el cortante no es función de *x* porque la carga es concentrada; en cambio, si lo es, cuando la carga es distribuida.

Hay que hacer notar que si se dispone de las ecuaciones fundamentales también es posible realizar los diagramas a partir de ellas. En este sentido, y a modo de verificación, se han de calcular los momentos flexores en los puntos de discontinuidad.

Punto A

$\boldsymbol{Q} = 2 \text{ tnf}$

$\boldsymbol{M} = 2x = 2(0) = 0 \text{ tnf} \cdot \text{m}$

Punto C

$\boldsymbol{Q} = -1$

$\boldsymbol{M} = 2x = 2(2) = 4 \text{ tnf} \cdot \text{m}$

Punto B

$\boldsymbol{Q} = -1$

$\boldsymbol{M} = -x + 6 = -6 + 6 = 0 \text{ tnf} \cdot \text{m}$

El momento en *C* también puede calcularse con la ecuación definida para el tramo *CB*, obteniéndose el mismo resultado:

$$\boldsymbol{M}_C = -x + 6 = -2 + 6 = 4 \text{ tnf} \cdot \text{m}$$

Con estos últimos cálculos se considera cumplimentada la solución analítica. En el problema siguiente se plantea la construcción del momento flexor de este mismo problema, pero, utilizando el polígono funicular como un procedimiento gráfico opcional pero no menos importante, por lo tanto, el estudiante debe saber aplicar también esta nueva técnica.

Observaciones

- Observe que dada la relación entre las *leyes* que rigen la carga, el esfuerzo cortante y el momento flector, este último responde a una función lineal de pendiente positiva en el primer tramo y negativa en el segundo.
- En el problema resuelto el diagrama de momento flector está por encima del eje x, lo cual es correcto. En el problema siguiente, sin embargo, se ha de trazar el mismo diagrama utilizando el polígono funicular resultando en un gráfico por debajo del eje x, siendo esto

último, consecuencia de la técnica utilizada. Se dan más detalles en las observaciones de dicho problema.

- Note que en el punto donde se *intersecan dos funciones*, por ejemplo, el punto *C* de la Figura 180, es factible calcular la magnitud ($\boldsymbol{M}$ o $\boldsymbol{Q}$) utilizando la ecuación fundamental de cualquiera de los tramos involucrados (compare con el Problema Resuelto 6.4).

PROBLEMA RESUELTO 6.2

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico que hace uso del polígono funicular para el trazado del diagrama de momento flector. Observar las características geométricas del diagrama así obtenido y comparar con la técnica anterior.

Consigna. Utilizar el polígono funicular para determinar gráficamente los momentos flexores de la viga del Problema Resuelto 6.1, **Figura 183**.

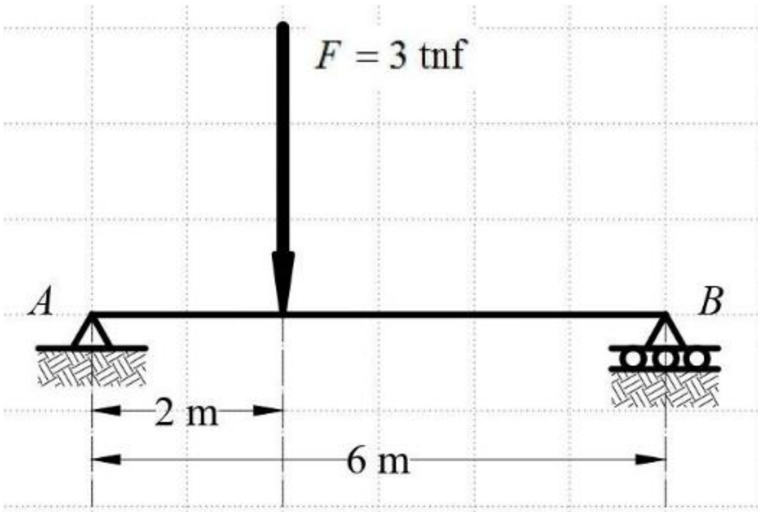


Figura 183. Viga Simplemente Apoyada Solicitada por una Carga Concentrada (Fuente: Adaptado de RAFFO, 2007).

SOLUCIÓN

Representación del Diagrama de Momento Flector. Lo primero es construir, naturalmente, el polígono polar, para ello se aprovecha el diagrama de esfuerzo cortante. En efecto, se proyecta desde este los puntos asociados a los vectores representativos de las fuerzas externas (cargas y reacciones), **Figura 184**, posteriormente, se traza el polígono funicular.

Hay que hacer notar qué, las fuerzas externas involucradas en el diagrama de esfuerzo cortante forman un *vectorial cerrado*, en consecuencia, el polígono *funicular* trazado es también *cerrado*[37], por este motivo las extensiones de los rayos extremos están superpuestos cumpliendo, al mismo tiempo, la función de *línea de referencia* para la determinación de los

---

[37] Condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares.

momentos flectores. Se sugiere leer detenidamente las observaciones de este problema para conocimiento de algunos detalles prácticos adicionales para la implementación de este método.

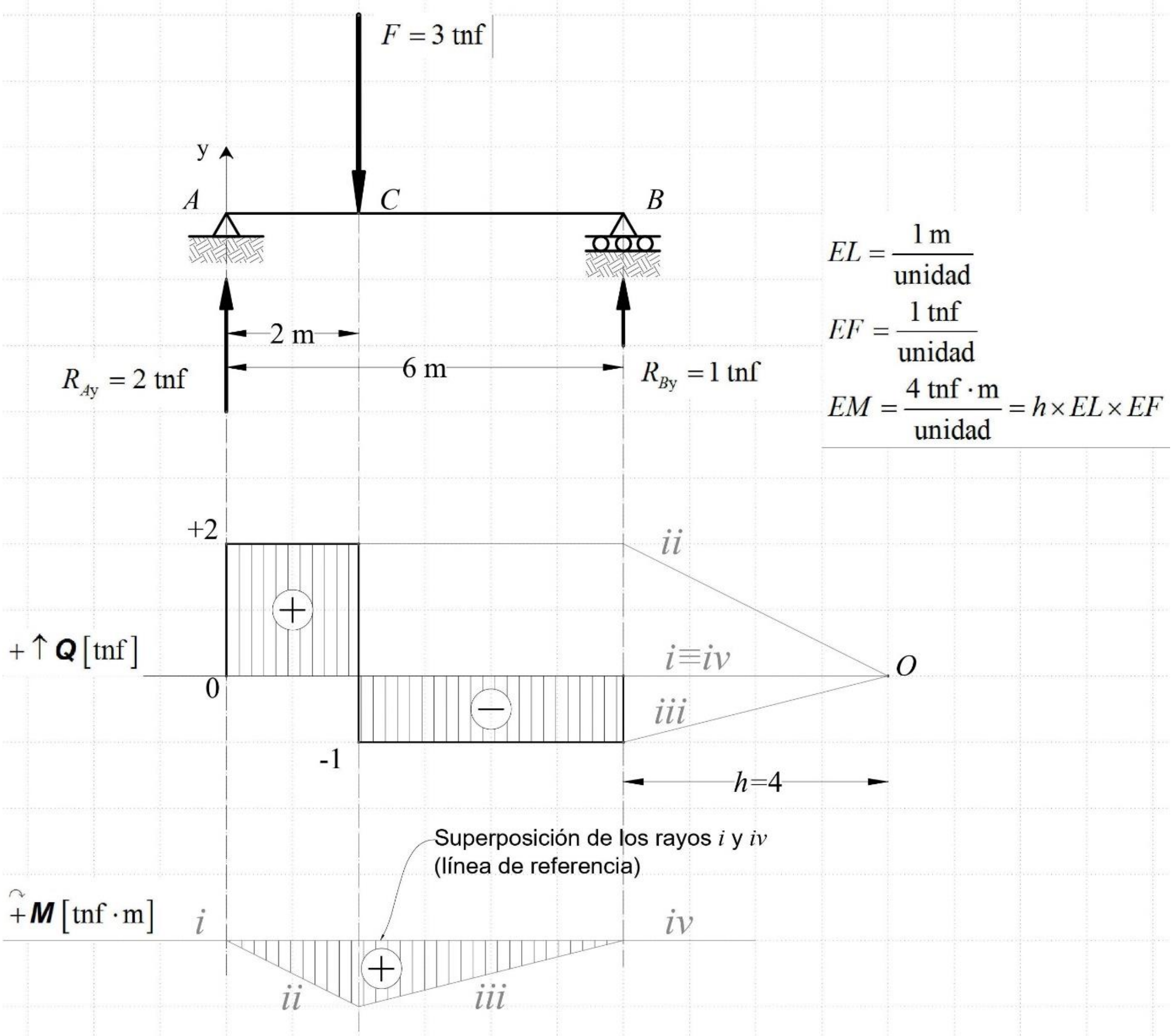


Figura 184. Diagrama de Momento Flector Construido con Base en el Polígono Funicular (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Observaciones

- El uso del polígono funicular para la construcción del diagrama de momento flector se fundamenta en el *cálculo gráfico del momento de una fuerza*. En este sentido, la escala de momentos se obtiene implicando la distancia polar h; a diferencia del procedimiento del Problema Resuelto 6.1.
- La *línea de referencia* (línea de valor cero) que se obtiene de la extensión de los rayos extremos, puede tener *infinitas inclinaciones* en función de la posición del polo O elegido,

sin embargo, el procedimiento es válido cualquiera fuere esa inclinación. En cambio, la ordenada para el cálculo del momento siempre se ha de medir verticalmente sin importar la pendiente de la línea de referencia, **Figura 185**.

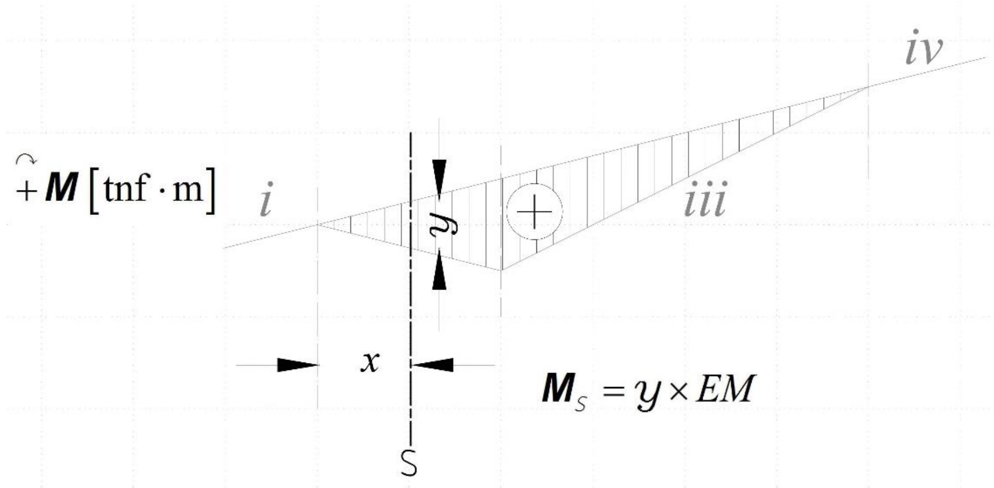


Figura 185. Obtención Gráfica del Momento Flexor con Línea de Referencia Oblicua (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

- Pese a lo mencionado en el parágrafo anterior, por practicidad, estética y orden, se prefiere que el *polo O* este *alineado* con la línea de referencia del diagrama de cortantes (como se ha resuelto en este problema). Siendo este el caso, el diagrama de momento flector obtenido con el polígono funicular resulta ser una *reflexión* del diagrama obtenido punto a punto en el problema 6.1. Esta *característica geométrica* distintiva es consecuencia del uso del polígono funicular. Pero recuerde qué, conceptualmente es incorrecto (dada la relación entre $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{Q}$) ya qué la pendiente en el tramo *AC* debe ser positiva, del mismo modo la pendiente en el tramo *CB* debe ser negativa. Una evidencia de esto son las ecuaciones fundamentales. En otras palabras, la inclinación del rayo no indica necesariamente, la pendiente de la función que describe al momento flector.
- En relación al párrafo anterior, compare este ejercicio con los Problemas Resueltos 6.4 y 6.5.

PROBLEMA RESUELTO 6.3

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico y analítico para determinar los esfuerzos cortantes y los momentos flectores para una viga simplemente apoyada solicitada por una *carga uniformemente distribuida*. Reconocer como se comporta la distribución de esfuerzos y momentos flectores en esta situación.

Consigna. Determinar gráfica y analíticamente los momentos flexores y esfuerzos cortantes de la viga esquematizada en la **Figura 186**.

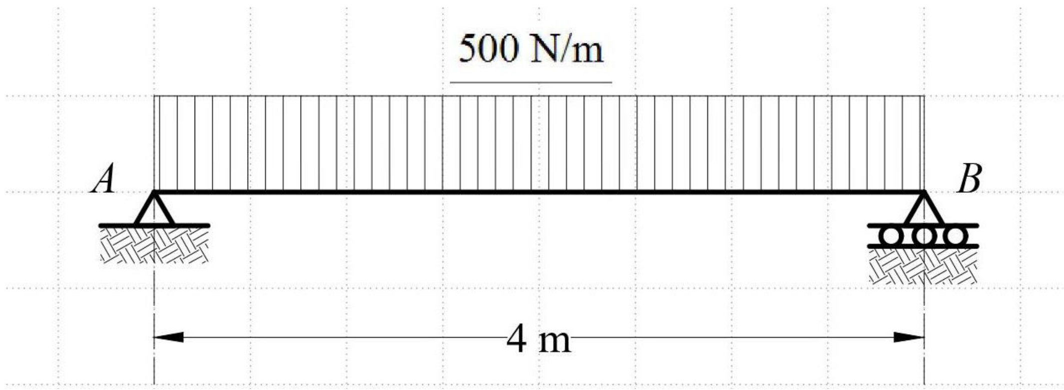


Figura 186. Viga Simplemente Apoyada Solicitada por una Carga Uniformemente Distribuida (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Por tratarse del primer ejercicio que implica cargas distribuidas, se brindan detalles redundantes buscando que el alumno comprenda la forma de trabajo y asimile los conceptos necesarios para encarar problemas más complejos.

1ro. Solución Gráfica. Deben calcularse las reacciones de vínculo. Aunque se trate de cargas distribuidas los valores de las reacciones se obtienen del modo que se analiza en la Sección 5.5.4, sin embargo, exige un paso previo: *el cálculo de la carga concentrada equivalente* $\vec{F}_{eq.}$ (Ver Sección 5.2).

Específicamente, para una *carga uniformemente distribuida*, ya que por cada metro lineal se tiene un valor constante de la carga, $\vec{F}_{eq.}$ se calcula como:

$$F_{eq.} = 500\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \times 4\text{ m} = 2000\text{ N}$$

Donde $F_{eq.}$ es el módulo de $\vec{F}_{eq.}$. $\vec{F}_{eq.}$ está actuando en el baricentro del *rectángulo de carga* (o *superficie de carga*)[38], **Figura 187**.

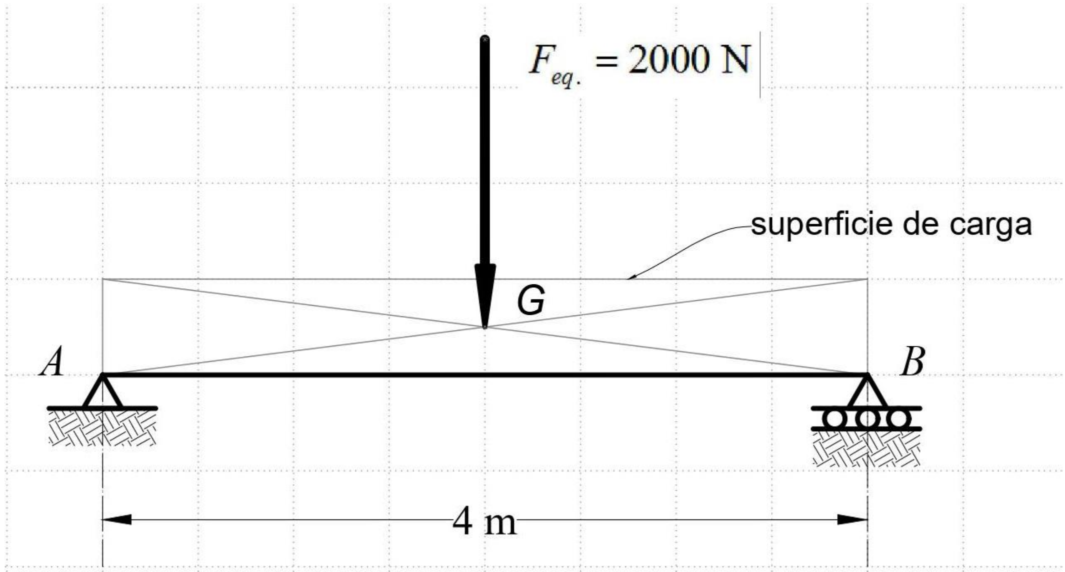


Figura 187. Carga Concentrada Equivalente a una Carga Uniformemente Distribuida (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Ahora que se conocen el valor de la carga equivalente y su posición relativa a la estructura, se pueden determinar las reacciones de vínculo planteando un posible sistema de ecuaciones[39].

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} \sum M_A = 0 \quad \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_y = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I):

$R_{By} = 1000$ N

Y, reemplazando luego en (II):

$R_{Ay} = 1000$ N

Pero todavía, previo al trazado de los diagramas, la implicancia de cargas distribuidas admite la aplicación de ciertas estrategias que están directamente relacionadas al *cómo construir dichos*

[38] La superficie de carga puede responder a otras figuras geométricas regulares o irregulares.
[39] Notar qué, en este caso, por una cuestión de simetría, las reacciones podrían haberse deducido sin necesidad cálculo.

diagramas. En efecto, siempre que se tengan cargas distribuidas es posible subdividirlas en tramos más pequeños de longitud arbitraria a cada uno de los cuales le corresponde una carga equivalente. En este caso, la subdivisión realizada es de cuatro tramos; y, los esfuerzos cortantes y momento flectores se han de determinar en esos puntos (o secciones) de subdivisión, **Figura 188**.

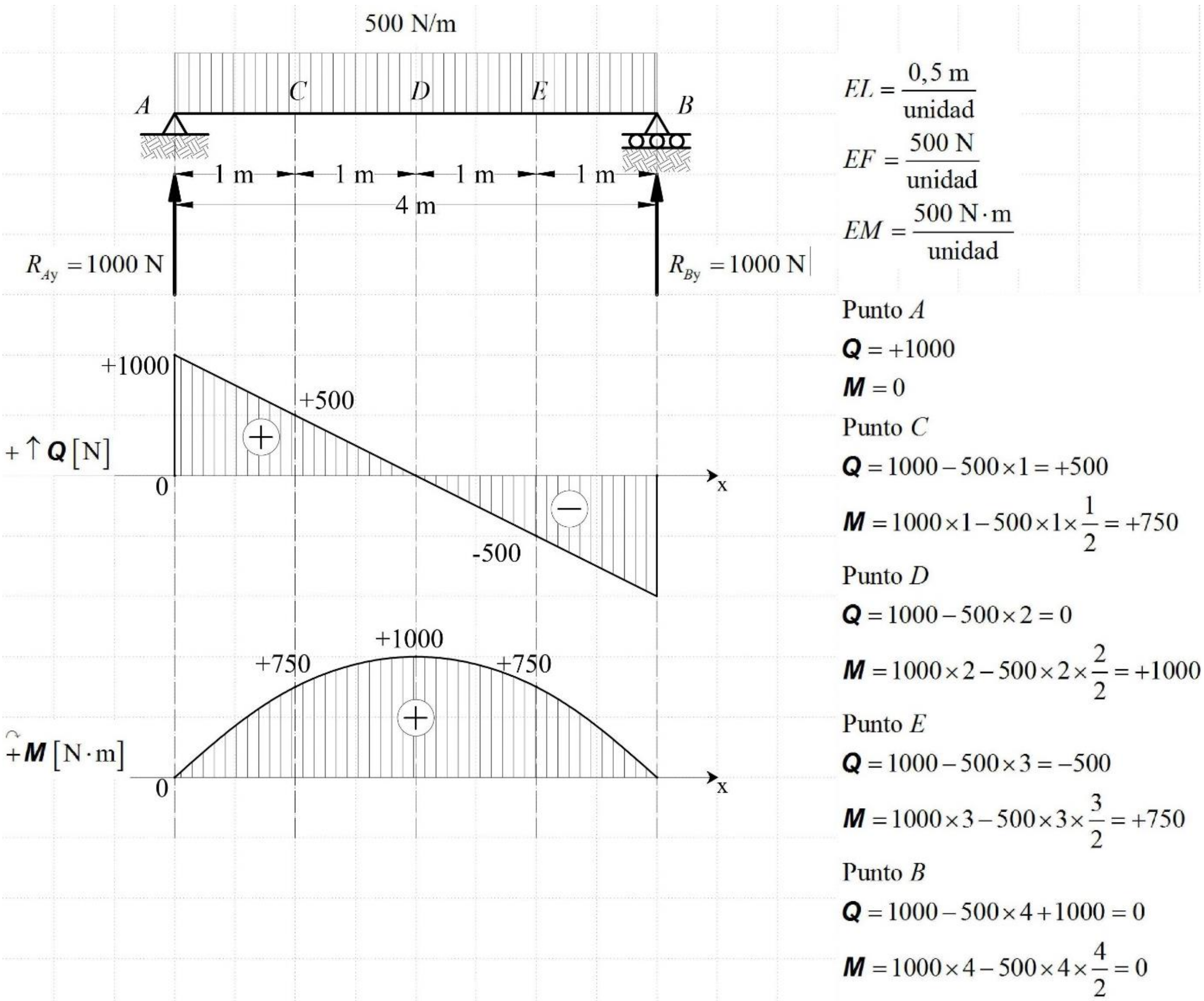


Figura 188. Diagrama de Momento Flexor y Esfuerzo Cortante (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Los diagramas anteriores podrían haberse trazado con un menor número de subdivisiones, sin embargo, hubiera resultado en un gráfico de momento flector menos preciso. Por otra parte, el número de subdivisiones cumple un papel más importante cuando se traza el diagrama de momento flector utilizando el *polígono funicular*, como se explica en las observaciones de este problema.

2do. Solución Analítica. *Obtención de las Ecuaciones Fundamentales*. Tal como se ha indicado, las ecuaciones fundamentales se definen por tramos de viga cuando existen distintos tipos de cargas aplicadas o cuando existen los mismos tipos de cargas, pero, con distintas magnitudes. Para esta situación, la carga tiene la misma característica en toda la longitud de la viga, por lo tanto, no es necesario definir una ecuación fundamental para cada tramo, entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = 1000 - 500x}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000x - 500x\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{M} = 1000x - 250x^2}$$

Se calcula ahora, a modo de verificación, los valores en los puntos de discontinuidad adoptados para la solución gráfica:

Punto A

$$\boldsymbol{Q} = 1000 - 500(0) = 1000 \text{ N}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000(0) - 250(0)^2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Punto C

$$\boldsymbol{Q} = 1000 - 500(1) = 500 \text{ N}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000(1) - 250(1)^2 = 750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Punto D

$$\boldsymbol{Q} = 1000 - 500(2) = 0 \text{ N}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000(2) - 250(2)^2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Punto E

$$\boldsymbol{Q} = 1000 - 500(3) = -500 \text{ N}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000(3) - 250(3)^2 = 750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Punto B

$$\boldsymbol{Q} = 1000 - 500(4) = -1000 \text{ N}$$

$$\boldsymbol{M} = 1000(4) - 250(4)^2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

De nuevo, los valores obtenidos con las ecuaciones fundamentales verifican los obtenidos con el método gráfico.

Observaciones

- Este tipo de situación es particularmente importante; y, claro, no es casualidad que sea presentado en esta instancia. En este sentido, ha de ser usual encontrar otros problemas con cargas uniformemente distribuidas parciales, es decir, que no actúan en la longitud total de la viga como aquí, sin embargo, también en esos casos es posible aplicar la estrategia utilizada en este ejercicio.

- Observar que el diagrama de *momento flector es de segundo orden,* mientras que el de *esfuerzo cortante es de primer orden*, verificándose con ello la relación entre estas magnitudes para una *carga uniformemente distribuida*.

- En el *ejemplo 24* de RAFFO (2007), se plantea la obtención del diagrama de momento flector utilizando el método del polígono funicular, se recomienda al lector que realice una lectura comprensiva de esa resolución verificando procedimientos tales como la *técnica* utilizada para la *construcción de la parábola*.

- Dada la claridad en la resolución del ejemplo citado en el párrafo anterior, en este problema se ha optado por no presentar la construcción del diagrama de momento flector utilizando el polígono funicular, sin embargo, queda como actividad complementaria para el alumno. En este sentido, el alumno ha de notar que aplicando el funicular la parábola obtenida resulta ser una reflexión del diagrama obtenido calculando los momentos punto a punto. Otros aspectos importantes de esta característica se explican en los Problemas Resueltos 6.4 y 6.5.

PROBLEMA RESUELTO 6.4

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico y analítico para determinar los esfuerzos cortantes, axiales y momentos flectores para una viga simplemente apoyada con voladizo *solicitada por cargas uniformemente distribuidas y cargas concentradas.* Reconocer como se comporta la distribución de esfuerzos y momentos flectores en esta situación.

Consigna. Determinar gráfica y analíticamente los momentos flexores, esfuerzos cortantes y axiales de la viga de la **Figura 189**.

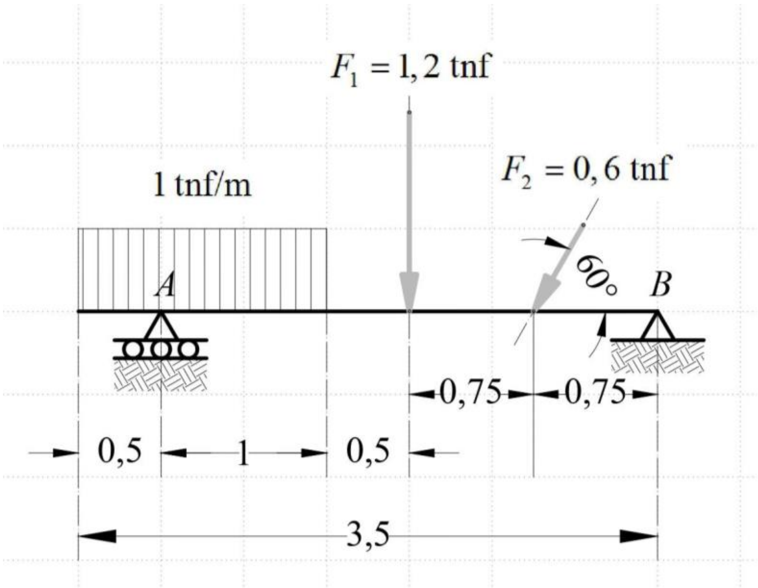


Figura 189. Viga Simplemente Apoyada con Voladizo Solicitada por Cargas Uniformemente Distribuidas y por Cargas Concentradas. (1) Las longitudes están en metros (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. Identificados y rotulados los puntos de discontinuidad, deben calcularse las reacciones de vínculo. Para ello, se plantea un posible sistema de ecuaciones y se representa, luego, el esquema posicional resultante, **Figura 190**.

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} \sum M_B = 0 \quad \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_{\mathrm{y}} = 0 \quad \text{(II)} \\ \overset{+}{\rightarrow} \vec{F}_{\mathrm{x}} = 0 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

De (I):

$R_{\mathrm{Ay}} \cong 2{,}11\,\mathrm{tnf}$

Y, reemplazando luego en (II):

$R_{By} \cong 1{,}11\ \text{tnf}$

Finalmente, de (III) se obtiene:

$R_{Bx} = 0{,}30\ \text{tnf}$

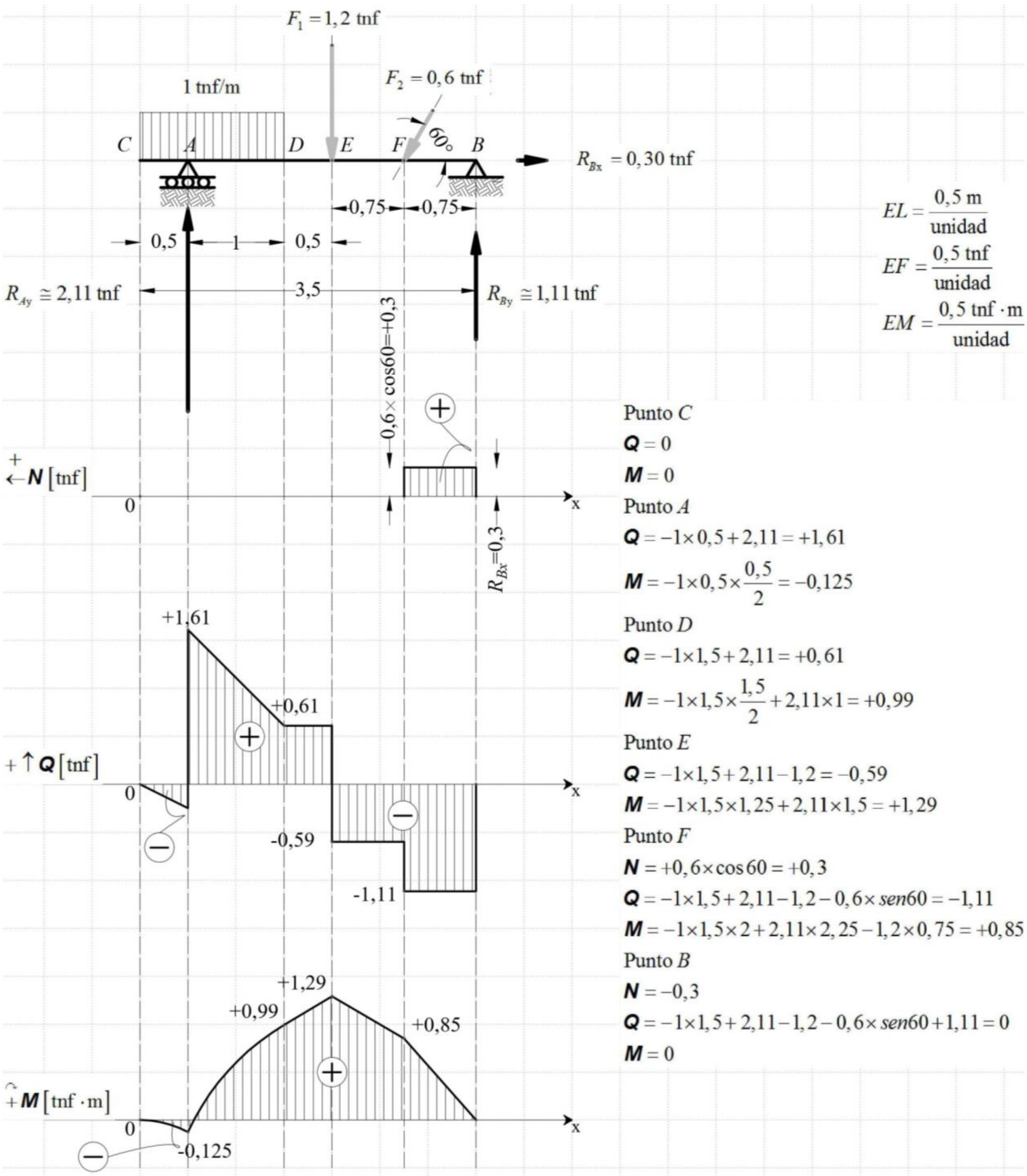


Figura 190. Diagrama de Esfuerzo Cortante, Esfuerzo Axial y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como las fuerzas $F_2 \times \cos 60$ y R_{Bx} tienden a alargar la viga (*tracción*), el esfuerzo axial es positivo, es decir, en ese tramo la viga esta solicitada a tracción. Como se ha explicado en la teoría, esta es la convención más ampliamente aceptada.

2do. Solución Analítica. *Obtención de las Ecuaciones Fundamentales*.

Tramo CA

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = -1x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{M} = -1x\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2}$$

Tramo AD

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = -1x + 2{,}11}$$

$$\boldsymbol{M} = -1x\left(\frac{x}{2}\right) + 2{,}11\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{M} = -\frac{1}{2}x^2 + 2{,}11x - 1{,}05}$$

Tramo DE

$$\boldsymbol{Q} = -1 \times 1{,}5 + 2{,}11 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q} = 0{,}61}$$

$$\boldsymbol{M} = -1 \times 1{,}5 \times (x - 0{,}75) + 2{,}11(x - 0{,}5) = -1{,}5x + 1{,}125 + 2{,}11x - 1{,}055 \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{M} = 0{,}61x + 0{,}07}$$

Tramo EF

$$\boldsymbol{Q} = -1 \times 1{,}5 + 2{,}11 - 1{,}2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q} = -0{,}59}$$

$$\boldsymbol{M} = -1 \times 1{,}5 \times (x - 0{,}75) + 2{,}11 \times (x - 0{,}5) - 1{,}2(x - 2) =$$

$$= -1{,}5x + 1{,}125 + 2{,}11x - 1{,}055 - 1{,}2x + 2{,}4 \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{M} = -0{,}59x + 2{,}47}$$

Tramo FB

$$\boxed{\boldsymbol{N} = 0{,}6 \times \cos 60 = 0{,}3}$$

$$\boldsymbol{Q} = -1 \times 1{,}5 + 2{,}11 - 1{,}2 - 0{,}6 \times sen60 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q} = -1{,}11}$$

$$\boldsymbol{M} = -1 \times 1{,}5 \times (x - 0{,}75) + 2{,}11 \times (x - 0{,}5) - 1{,}2 \times (x - 2) - 0{,}6 \times sen60 \times (x - 2{,}75) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{M} = -1{,}11x + 3{,}9}$$

Los valores de las magnitudes en los puntos de discontinuidad obtenidas con las ecuaciones anteriores resultan en:

Punto C

$\boldsymbol{Q} = -1(0) = 0 \text{ tnf}$

$\boldsymbol{M} = -\dfrac{1}{2}(0)^2 = 0 \text{ tnf} \cdot \text{m}$

Punto A

$\boldsymbol{Q} = -1(0,5) + 2{,}11 = 1{,}61 \text{ tnf}$

$$\boldsymbol{M}\begin{cases} \text{Ecuación del tramo } CA: -\dfrac{1}{2}(0,5)^2 \cong -0{,}125 \text{ tnf} \cdot \text{m} \\ \text{Ecuación del tramo } AD: -\dfrac{1}{2}(0,5)^2 + 2{,}11(0,5) - 1{,}05 \cong -0{,}125 \text{ tnf} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Punto D

$$\boldsymbol{Q}\begin{cases} \text{Ecuación del tramo } AD: -1(1,5) + 2{,}11 = 0{,}61 \text{ tnf} \\ \text{Ecuación del tramo } DE: 0{,}61 \text{ tnf} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{M}\begin{cases} \text{Ecuación del tramo } AD: -\dfrac{1}{2}(1,5)^2 + 2{,}11(1,5) - 1{,}05 \cong 0{,}99 \text{ tnf} \cdot \text{m} \\ \text{Ecuación del tramo } DE: 0{,}61(1,5) + 0{,}07 \cong 0{,}99 \text{ tnf} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Punto E

$\boldsymbol{Q} = -0{,}59 \text{ tnf}$

$$\boldsymbol{M}\begin{cases} \text{Ecuación del tramo } DE: 0{,}61(2) + 0{,}07 \cong 1{,}29 \text{ tnf} \cdot \text{m} \\ \text{Ecuación del tramo } EF: -0{,}59(2) + 2{,}47 \cong 1{,}29 \text{ tnf} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Punto F

$\boldsymbol{Q} = -1{,}11 \text{ tnf}$

$$\boldsymbol{M}\begin{cases} \text{Ecuación del tramo } EF: -0{,}59(2,75) + 2{,}47 \cong 0{,}85 \text{ tnf} \cdot \text{m} \\ \text{Ecuación del tramo } FB: -1{,}11(2,75) + 3{,}9 \cong 0{,}85 \text{ tnf} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Punto B

$\boldsymbol{Q} = -1{,}110 \text{ tnf}$

$\boldsymbol{M} = -1{,}11(3,5) + 3{,}9 \cong 0 \text{ tnf} \cdot \text{m}$

Los resultados anteriores confirman la legitimidad de las ecuaciones fundamentales.

Observaciones

- Notar qué, existen funciones de tramos distintos que tienen un punto en común (se intersecan), con lo cual, es posible calcular el valor de la magnitud en ese punto (como se ha hecho) con cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, el punto *D*.

PROBLEMA RESUELTO 6.5

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico que hace uso del polígono funicular para el trazado del diagrama de momento flector. Observar las características geométricas del diagrama así obtenido y comparar con la técnica anterior.

Consigna. Utilizar el polígono funicular para determinar gráficamente los momentos flexores de la viga del Problema Resuelto 6.4, **Figura 191**.

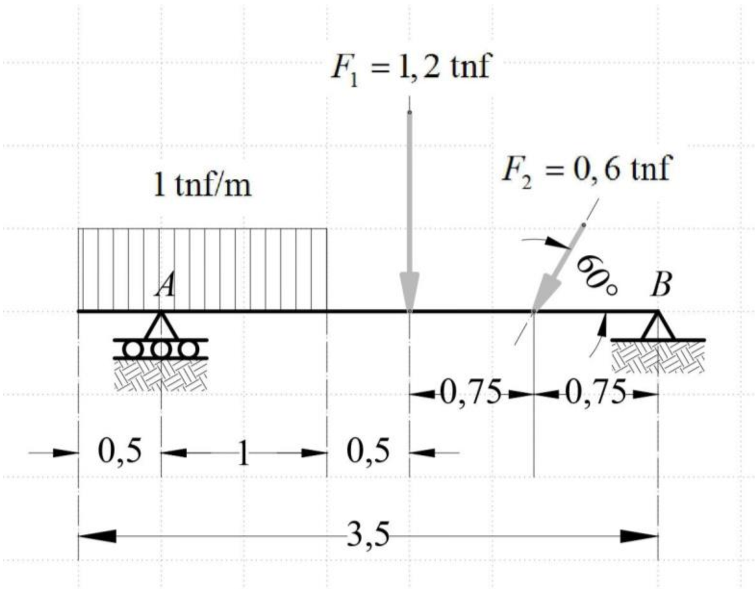


Figura 191. Viga Simplemente Apoyada con Voladizo Solicitada por Cargas Uniformemente Distribuidas y por Cargas Concentradas. (1) Las longitudes están en metros (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Representación del Diagrama de Momento Flector. Para la construcción del polígono polar se aprovecha el diagrama de esfuerzo cortante, en efecto, se proyecta desde este los puntos asociados a los vectores representativos de las fuerzas externas (cargas y reacciones), **Figura 192**, posteriormente, se traza el polígono funicular.

Hay que hacer notar qué, las fuerzas externas involucradas en el diagrama de esfuerzo cortante forman un *vectorial cerrado*, en consecuencia, el polígono *funicular* trazado es también *cerrado*[40], por este motivo los rayos extremos están superpuestos cumpliendo, al mismo tiempo,

[40] Condiciones gráficas de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares.

la función de *línea de referencia* para la determinación de los momentos flectores. Se sugiere leer detenidamente las observaciones de este problema para conocimiento de algunos detalles prácticos de este método.

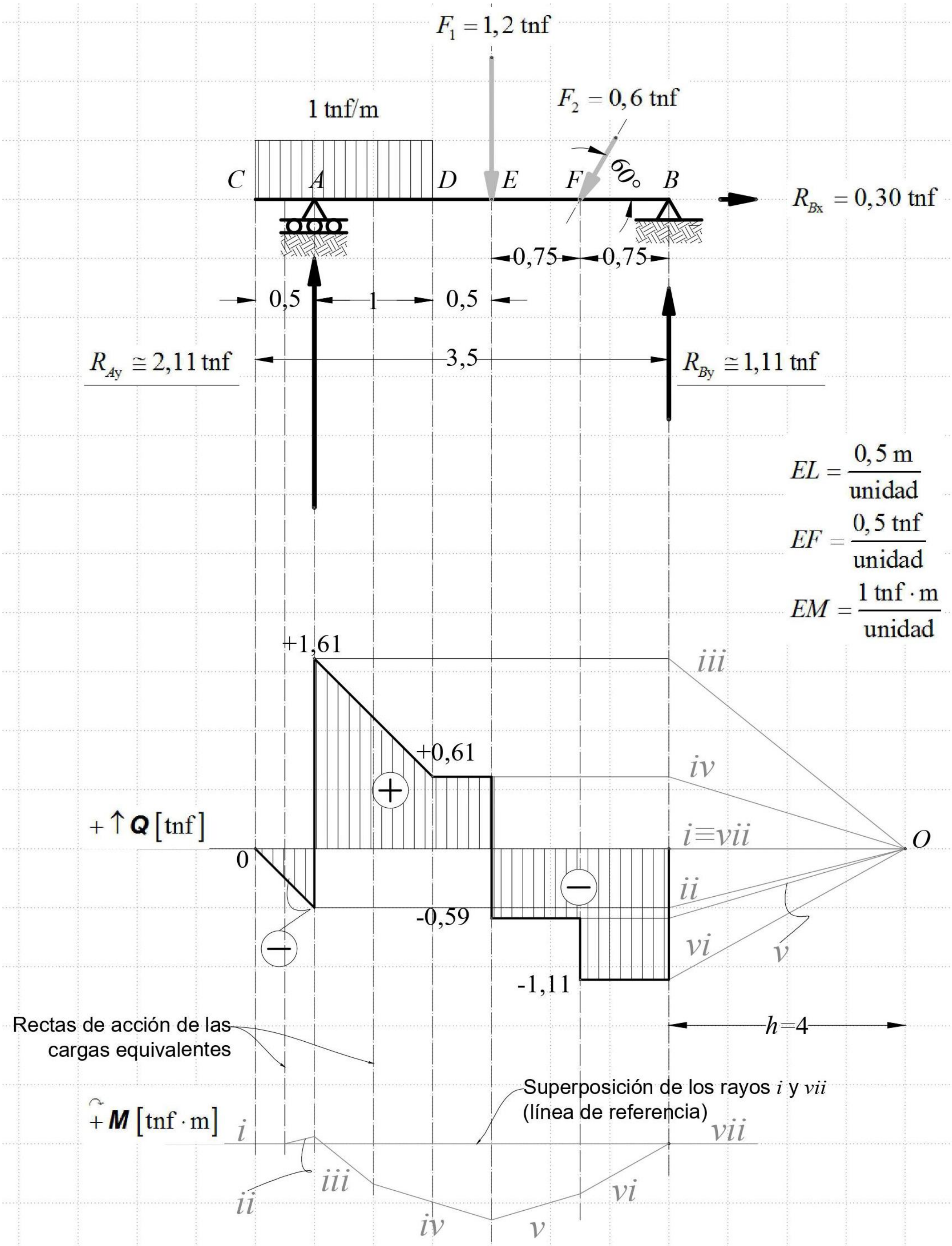


Figura 192. Trazado del Polígono Funicular para la Construcción del Diagrama de Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El paso siguiente para completar el diagrama, es trazar los segmentos de parábolas en los tramos (*CA* y *AD*) donde la carga es uniformemente distribuida. Esto se puede realizar calculando los momentos flectores en puntos convenientes, por ejemplo, puntos intermedios en el tramo analizado. Finalmente, el diagrama completo se indica en la **Figura 193**. Por su parte, en la **Figura 194**, se brinda un detalle de la construcción de las parábolas.

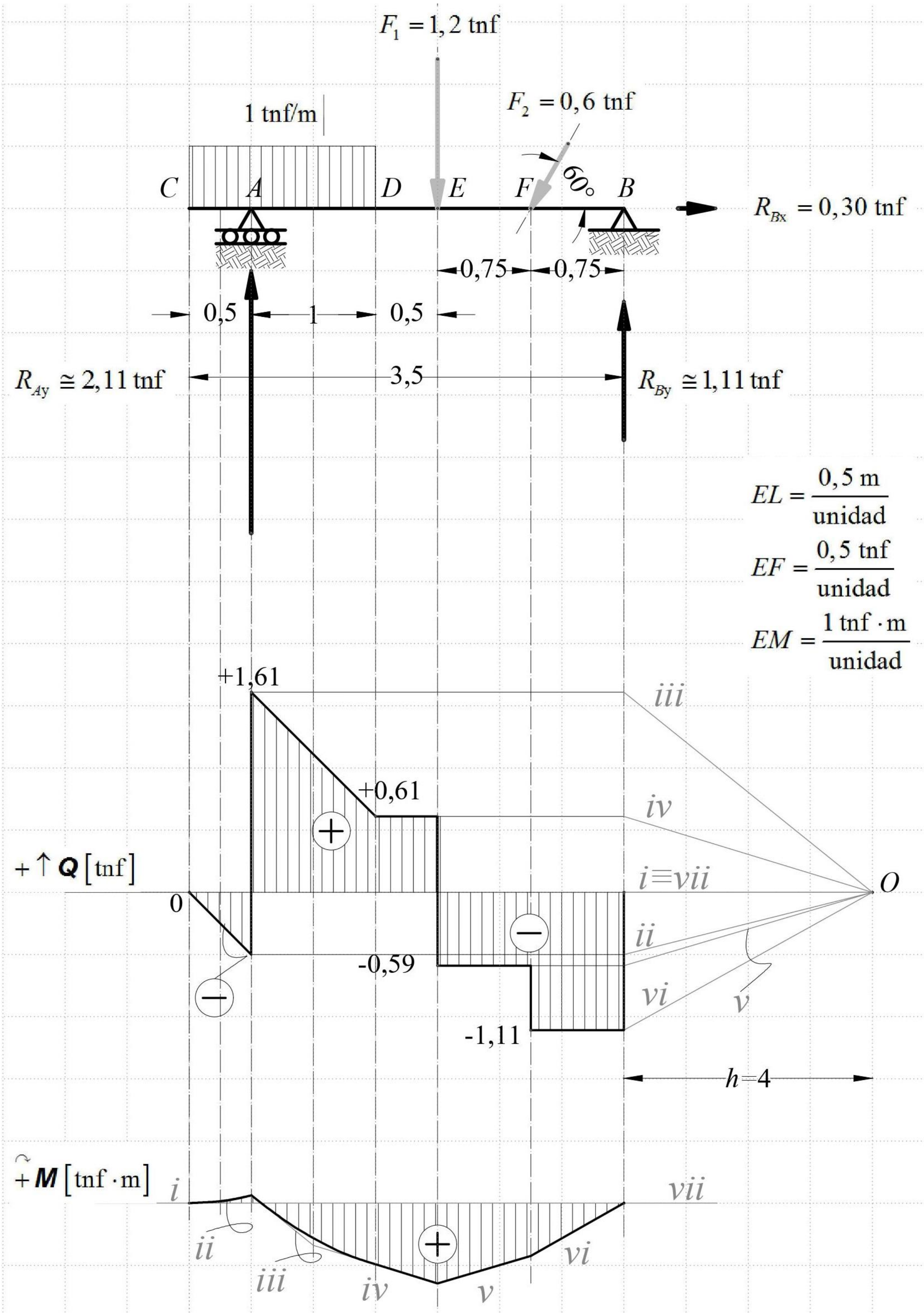


Figura 193. Diagrama de Momento Flector Utilizando el Polígono Funicular (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

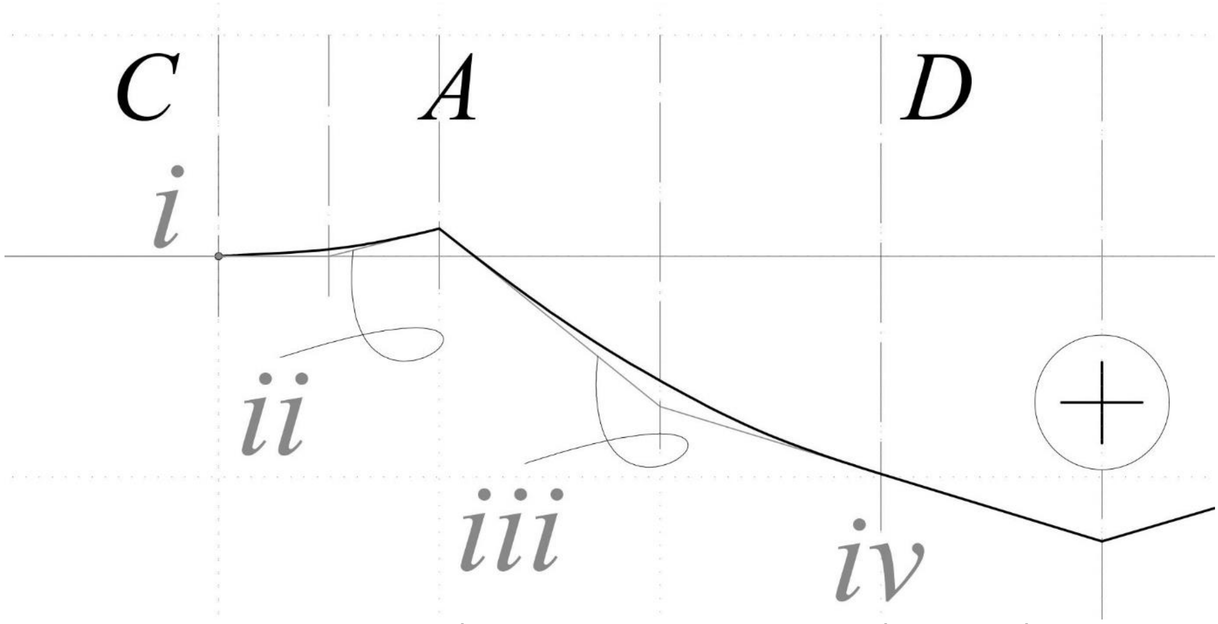


Figura 194. Detalle del Trazado de las Parábolas en los Tramo *CA* y *AD* (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Observaciones

- Note que los segmentos de *parábolas* (tramo *CA* y *AD*) son *cóncavas hacia arriba*, esto es conceptualmente incorrecto dado que deberían ser *cóncavas hacia abajo* como en el problema resuelto anterior. Pese a esto, el método sigue siendo válido y esta característica geométrica distintiva es consecuencia del uso del polígono funicular. Pero recuerde, desde el punto de vista del análisis matemático es conceptualmente es incorrecto. Una evidencia de esto son las ecuaciones fundamentales.
- En relación a lo anterior, puede apreciarse qué, el diagrama obtenido con el polígono funicular resulta ser una *reflexión* del diagrama del problema anterior, salvando, naturalmente las escalas de momentos utilizadas. En este sentido, si se adopta $h = 2$ las escalas serían iguales y los diagramas serían estrictamente una reflexión uno del otro.
- Si existen *cargas distribuidas*, como en este caso, el funicular se traza considerando las cargas o sub *cargas equivalentes* de estas. Observe, las sub cargas equivalentes en los tramos *CA* y *AD*.

- Por practicidad, estética y orden, se sugiere que el *polo O* este *alineado* con la línea de referencia del diagrama de cortantes (como en este problema). Sin embargo, cualquiera sea la alineación del polo el método es igualmente válido como se ha analizado en el Problema Resuelto 6.1.
- El uso del polígono funicular para la construcción del diagrama de momento flector se fundamenta en *cálculo gráfico del momento de una fuerza*.
- Notar qué, existen funciones de tramos distintos que tienen un punto en común (se intersecan), con lo cual, es posible calcular el valor de la magnitud en ese punto (como se ha hecho) con cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, el punto *E*.

PROBLEMA RESUELTO 6.6

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico y analítico para determinar el esfuerzo cortante y de momento flector para una viga empotrada. Reconocer como se distribuyen estos a lo largo de toda la viga.

Consigna. Determinar gráfica y analíticamente los momentos flexores y esfuerzos cortantes de la viga de la **Figura 195**.

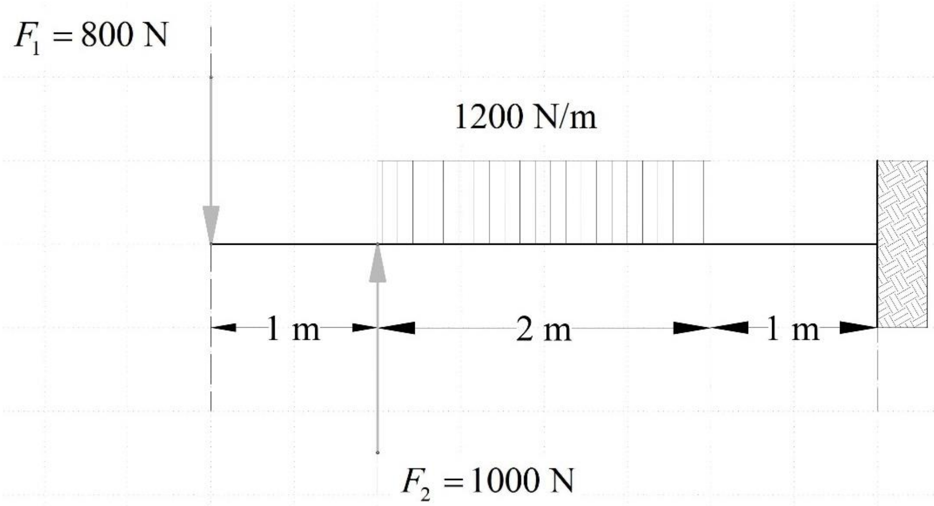


Figura 195. Viga Empotrada Solicitadas por Cargas Concentradas y Distribuidas (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

1ro. Solución Gráfica. El procedimiento es el mismo que el realizado hasta el momento. En efecto, una de las posibles maneras de calcular las reacciones (para las cuales se ha supuesto un sentido, **Figura 196**) es la que se indica en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} +\uparrow \vec{F}_{\mathrm{y}} = -800 + 1000 - 2400 + R_{D\mathrm{y}} = 0 \quad \text{(I)} \\ \overset{\curvearrowright}{+} \sum M_A = -1000 \times 1 + 2400 \times 2 - R_{D\mathrm{y}} \times 4 + M_D = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I):

$$\boxed{R_{D\mathrm{y}} = +2200 \text{ N}}$$

Remplazando en (II) y operando:

$$\boxed{M_D = +5000 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Dado que los signo de R_{Dy} y M_D son positivos, los sentidos supuestos inicialmente son correctos.

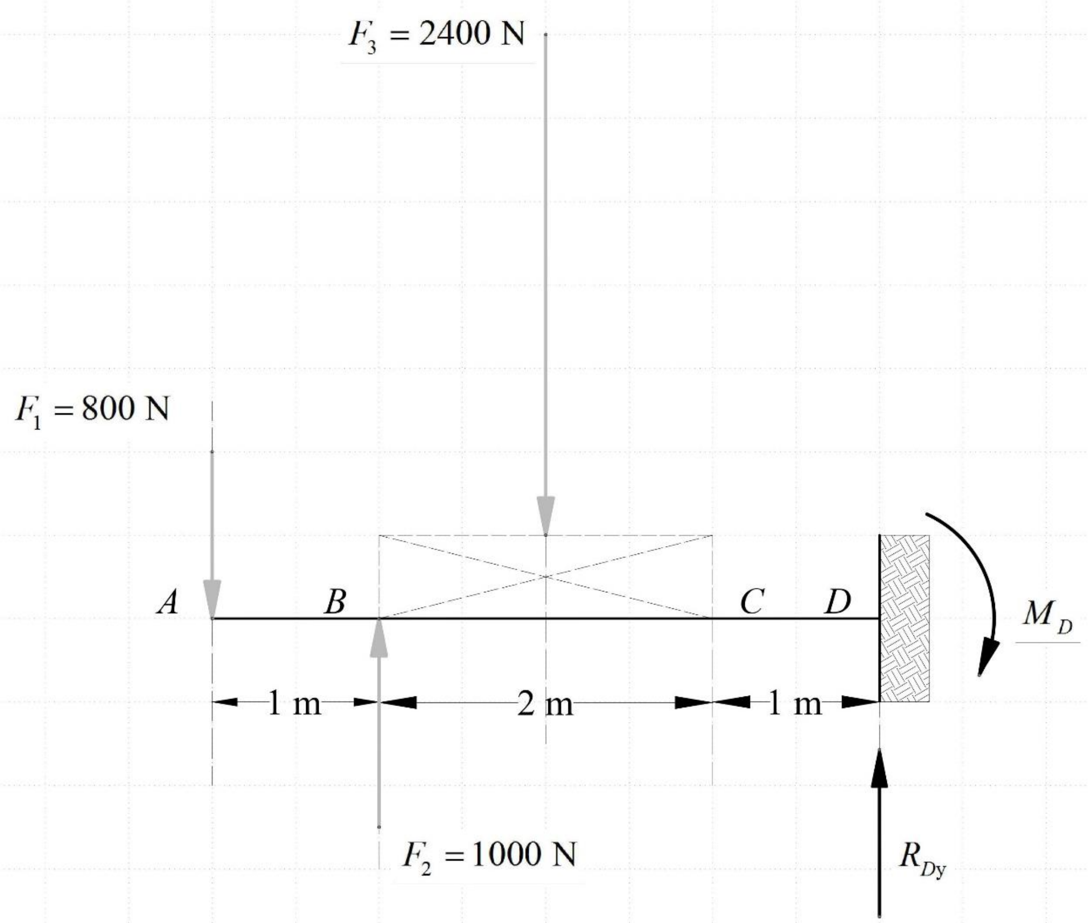


Figura 196. Cálculo de Reacciones de Vínculo en Una Viga Empotrada (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En la **Figura 197** se muestra el esquema posicional de la situación en el cual solo se ha representado el diagrama de esfuerzo cortante, dado que existe una observación interesante a realizar y que se presenta recurrentemente, previo al trazado del diagrama de momento flector.

En efecto, se observa que el punto E es un punto de esfuerzo cortante cero, por lo tanto, se tiene en el mismo un *máximo* en el diagrama de momento flector, con lo cual, también es necesario calcular el momento en ese punto de abscisa. Para ello, se debe determinar la distancia x indicada en dicha figura. Esto se realiza mediante *semejanza de triángulos*. Concluida esta operación se está en condiciones de trazar el diagrama de momento flector, **Figura 198**.

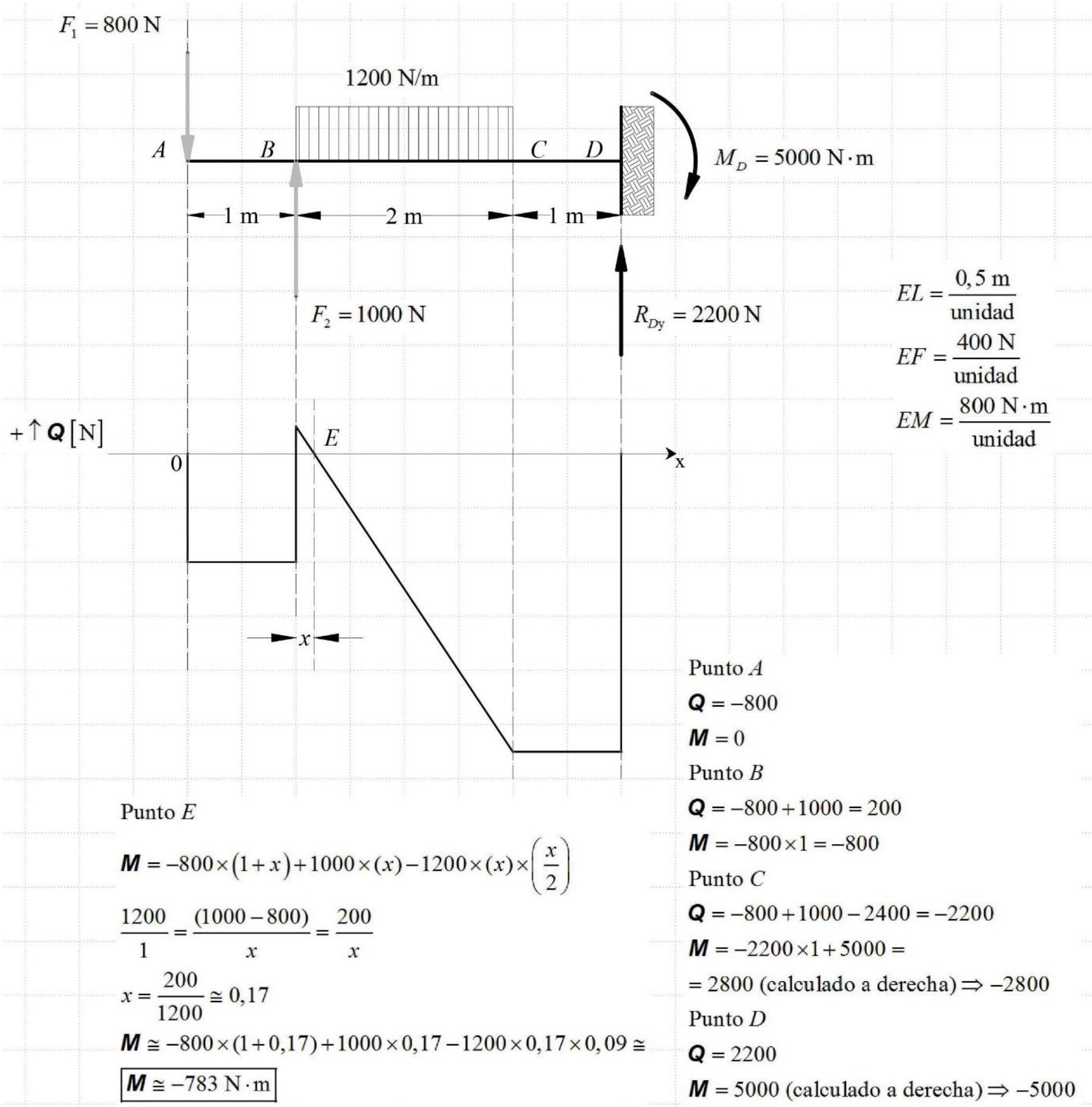


Figura 197. Diagrama de Esfuerzo Cortante y Cálculo del Momento Flector Máximo (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

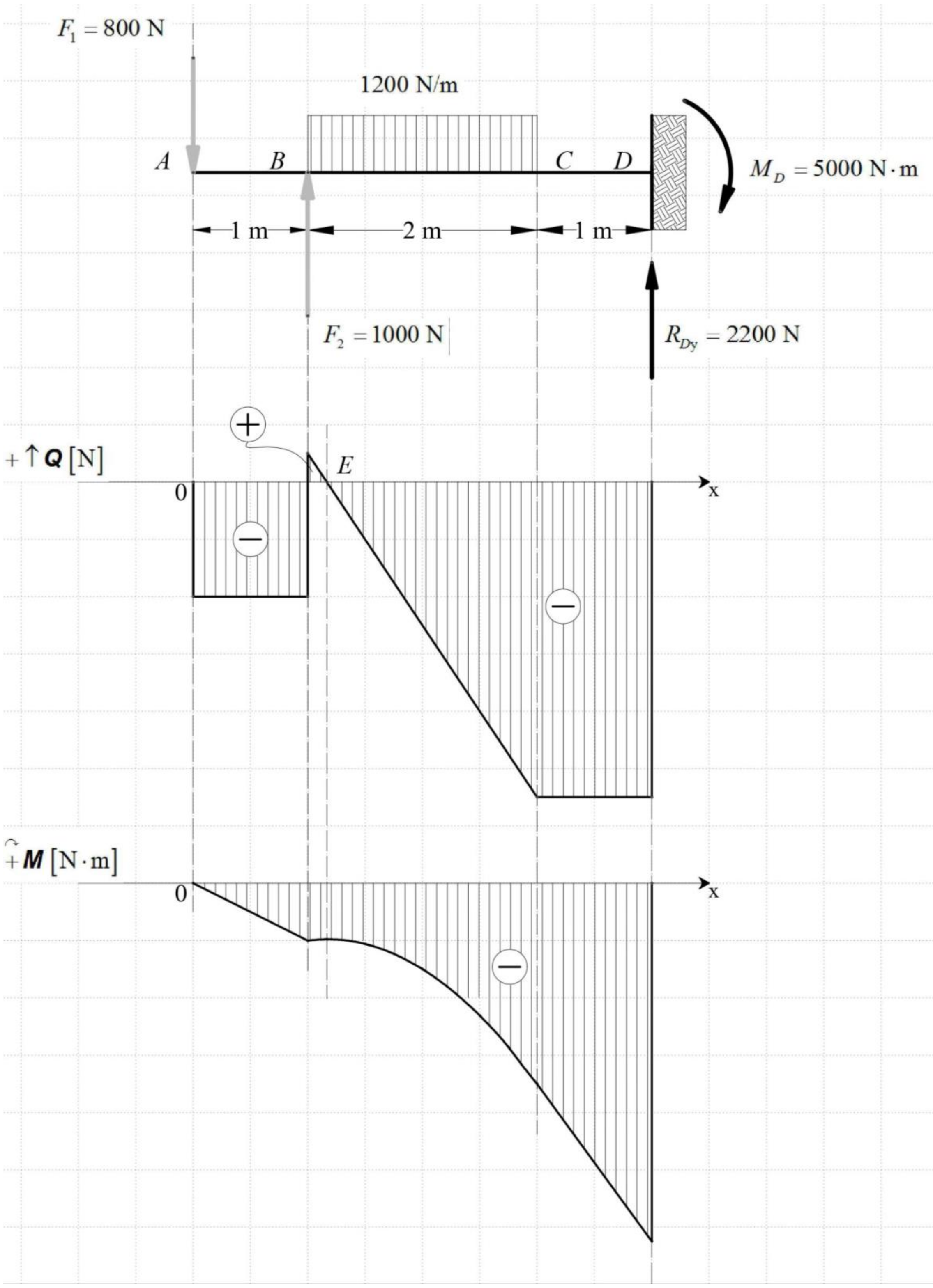


Figura 198. Diagrama de Esfuerzo Cortante y Momento Flector (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2do. Solución Analítica. *Obtención de las Ecuaciones Fundamentales.*

Tramo AB

$\boldsymbol{Q} = -800 \Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{Q} = -800}$

$\boldsymbol{M} = -800x \Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{M} = -800x}$

Tramo BC

$\boldsymbol{Q} = -800 + 1000 - 1200(x-1) = 200 - 1200x + 1200 \Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{Q} = -1200x + 1400}$

$$\boldsymbol{M} = -800x + 1000(x-1) - 1200(x-1)\left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow$$

$\boxed{\boldsymbol{M} = -600x^2 + 1400x - 1600}$

Tramo CD

$\boldsymbol{Q} = -800 + 1000 - 1200 \times 2 =$

$\boxed{\boldsymbol{Q} = -2200}$

$\boldsymbol{M} = -800x + 1000(x-1) - 1200 \times 2 \times (x-2) \Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{M} = -2200x + 3800}$

Según las ecuaciones, los valores de las magnitudes en los puntos de discontinuidad (o secciones) son:

$Punto\ A$:

$\boldsymbol{Q} = -800 \text{ N}$

$\boldsymbol{M} = -800(0) = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$

$Punto\ B$:

$\boldsymbol{Q} = -1200(1) + 1400 = 200 \text{ N}$

$$\boldsymbol{M}\begin{cases}\text{Ecuación del tramo } BC: -600(1)^2 + 1400(1) - 1600 = -800 \text{ N}\cdot\text{m}\\ \text{Ecuación del tramo } AB: -800(1) = -800 \text{ N}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$Punto\ C$:

$\boldsymbol{Q} = -1200(3) + 1400 = -2800 \text{ N}$

$$\boldsymbol{M} = \begin{cases}\text{Ecuación del tramo } BC = -600(3)^2 + 1400(3) - 1600 = -2800 \text{ N}\cdot\text{m}\\ \text{Ecuación del tramo } CD = -2200(3) + 3800 = -2800 \text{ N}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$Punto\ D$:

$\boldsymbol{Q} = -2200 \text{ N}$

$\boldsymbol{M} = -2200(4) + 3800 = -5000 \text{ N}\cdot\text{m}$

Los resultados anteriores verifican los proporcionados por los diagramas.

Observaciones

- En el caso de una viga empotrada el valor del *momento flector* y del *esfuerzo cortante* son *máximos* en el empotramiento puesto que este es el único punto dónde se produce la reacción. Comparar esto con el caso de una viga simplemente apoyada.
- Al calcularse el momento flector en el punto *E*, se ha dicho que este valor es un máximo, en efecto, lo es en términos de *pendiente cero*. Sin embargo, el momento máximo se da en el empotramiento. Hay que distinguir entonces, entre *máximos (extremos relativos) de una función* y *momento solicitante máximo*.
- Queda como tarea para el lector, construir el *diagrama de momento flector* haciendo uso del *polígono funicular*.

7. ESTRUCTURAS DE BARRAS

7.1. Introducción

En la Sección 5.3 se analizan las vigas como principales elementos estructurales y todo el desarrollo posterior refiere a dicho elemento, sin embargo, existen otras estructuras que también son de interés y que forman parte de los contenidos de la asignatura: las estructuras de barras.

Las *estructuras de barras*, también denominadas, *armaduras* o *reticulados*, están formadas por barras unidas por sus extremos en puntos llamados nudos. Cuando los ejes baricéntricos de las barras son coplanares resultan los *Reticulados Planos*, estos son, en efecto, el tema de análisis de este capítulo.

Así como lo estudiado con anterioridad, este capítulo no se caracteriza por un análisis teórico exhaustivo, en cambio, ha de tener un enfoque lo más práctico posible. En este sentido, los aspectos de análisis inician con la presentación de las *hipótesis de cálculo* y las caracterizaciones más importantes de los sistemas reticulados planos. Posteriormente, la atención se centra en la resolución.

7.2. Caracterización e Hipótesis de Cálculo

Desde el punto de vista constructivo, ya se tiene en conocimiento qué es un reticulado plano, sin embargo, es necesario aun presentar algunos detalles importantes que caracterizan a este tipo de estructuras desde el enfoque de la Estática Gráfica.

En relación al parágrafo anterior, un sistema reticulado plano puede considerarse, también, como una *chapa plana*, por lo tanto, es posible definir en el los aspectos o condiciones de *determinación estática* analizados en la Sección 5.5. En este sentido, las técnicas para el *cálculo de reacciones de vínculo* se aplican de igual manera que las ya desarrolladas para vigas.

7.3. Resolución de Reticulados

Además de comprender las definiciones, caracterizaciones o condiciones con las cuales se da tratamiento a los sistemas reticulados, el lector debe adquirir la destreza para aplicar las técnicas o procedimientos propios de la Estática Gráfica para la correcta resolución de los ejercicios típicos planteados en la Cátedra. Cabe preguntarse entonces: *¿Qué significa resolver un reticulado*? La respuesta se presenta a modo de *itinerario* en la **Figura 199**.

Resolución de un Reticulado

$$\text{1ro.: } \textit{Verificar que sea isostático} \Leftrightarrow \begin{cases} a\text{-}\begin{cases}\text{Verificar que sea una estructura rígida,}\\ \text{es decir, que no se deforme } (b = 2n - 3)\end{cases} \\ b\text{ - Verificar vínculos y grados de libertad}\end{cases}$$

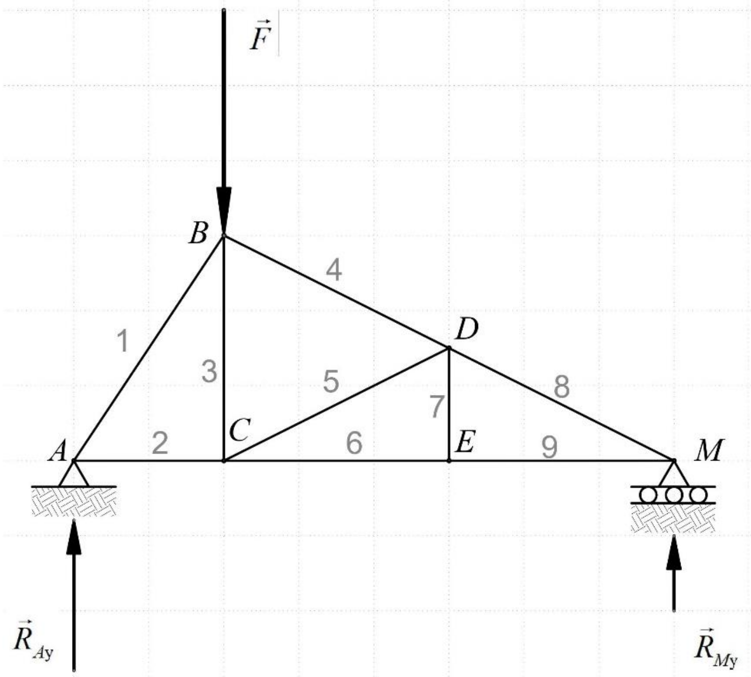
2do: *Calcular las reacciones de vínculo*

$$\text{3ro. } \textit{Calcular los esfuerzos} \text{ en las barras, estos sólo pueden ser} \begin{cases}\text{de tracción}\\ \text{de compresión}\end{cases}$$

Figura 199. Itinerario para la Resolución de un Reticulado (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Para ilustrar el itinerario anterior, considere el sistema de la **Figura 200**, en el mismo se aprecia que se trata de una estructura *rígida* porque forma triángulos; y, además, tiene igual cantidad de vínculos como grados de libertad (consta de un vínculo móvil y uno fijo, es decir, se restringen los 3 grados de libertad del sistema). Las dos condiciones anteriores verifican el punto uno del itinerario.

Luego, deben calcularse las *reacciones de vínculo* con los métodos analíticos de la Estática Gráfica, es decir, los analizados para el caso de vigas isostáticas. Finalmente, para *calcular los esfuerzos*, el primer paso es identificar los nudos y las barras, es decir, deben enumerarse (o rotularse). En este caso, las barras están enumeradas y los nudos rotulados. Sin considerar aun los métodos específicos para el cálculo de los esfuerzos, el resultado de la resolución suele ser una tabla en la que se consignan los datos obtenidos (como se indica en la figura aludida).



Barra	*Esfuerzo* [N]
1	−100
2	+500
.	.
.	.
9	+500

Figura 200. Resolución de una Estructura Reticulada (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En la tabla de la figura anterior, el *signo menos* indica que el esfuerzo al que está sometido la barra es de *compresión*, en consecuencia, si el signo que acompaña a la magnitud es positivo el esfuerzo será de tracción.

La descripción procedimental de los párrafos anteriores exige recalcar algunos aspectos importantes: **1-**Los esfuerzos aludidos son *esfuerzos axiales* a las barras, por tanto, solo pueden ser de *compresión* o de *tracción*. Estos tipos de esfuerzos revisten mayor importancia en este tipo de estructuras (recuerde que ocurre lo contrario en vigas); **2-**Note qué, en comparación con las vigas, un reticulado es simplemente otro tipo de estructura, con lo cual, en *condiciones estáticamente determinadas*, le son igualmente aplicables los procedimientos analizados para las primeras; **3-**Con referencia al aspecto anterior, la expresión: $b = 2n - 3$ (donde b es el número de barras y n el número de nudos) indica la *condición analítica* para determinar si el *reticulado* es o no isostático; en efecto, se pueden dar tres casos tal como se indica a continuación, **Figura 201**.

Condiciones Analíticas de Determinación Estática

$b < 2n - 3 \Rightarrow$ Sistema Reticulado Hipostático o Móvil

$b = 2n - 3 \Rightarrow$ Sistema Reticulado Isostático

$b > 2n - 3 \Rightarrow$ Sistema Reticulado Hiperestático

Figura 201. Condiciones Analíticas de Determinación Estática en Sistemas Reticulados (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Para el ejemplo de la figura: $b = 2n - 3 = 2(6) - 3 = 9$, lo cual verifica que se trata de una estructura isostática, es decir, se puede resolver con las herramientas de Estática Gráfica; **5-**Del mismo modo en que los esfuerzos cortantes y axiales y los momentos flectores calculados en el Capítulo 6 permiten dimensionar la viga, los esfuerzos axiales hallados aquí permiten, luego, *dimensionar la barra*[41]; **6-**Para terminar, y no por ello menos importante, resta presentar formalmente los métodos para determinar los esfuerzos propiamente dichos. Esto se realiza con procedimientos gráficos y analíticos que se indican en la **Figura 202**.

Procedimientos de Determinación de Esfuerzos

$\langle \textit{Nudos} \,|\, \textit{Método Gráfico / Analítico} \rangle$

$\langle \textit{Cremona} \,|\, \textit{Método Gráfico} \rangle$

$\langle \textit{Culmann} \,|\, \textit{Método Gráfico} \rangle$

$\langle \textit{Ritter} \,|\, \textit{Método Gráfico / Analítico} \rangle$

Figura 202. Procedimientos para la Determinación de Esfuerzos Axiales en Sistemas Reticulados Isostáticos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

En todos los métodos se parte de la condición de equilibrio por lo que la sumatoria de fuerzas en los puntos considerados y los momentos deben ser cero, así como los polígonos de fuerzas deben ser cerrados. Para ilustrar de mejor manera dichos procedimientos, se opta por resolver un único ejercicio mediante todos los métodos, el lector tiene, de esta manera, la posibilidad de comparar y elaborar sus propias conclusiones.

[41] Como se ha dicho en reiteradas oportunidades dicho dimensionamiento le corresponde a la Resistencia de Materiales (Ver Capítulo 1).

PROBLEMA RESUELTO 7.1

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico de los *Nudos* para la obtención de los esfuerzos axiales en barras de un sistema reticulado isostático.

Consigna. Determinar los esfuerzos axiales en las barras de una armadura de acuerdo a los datos indicados en el esquema de la **Figura 203**.

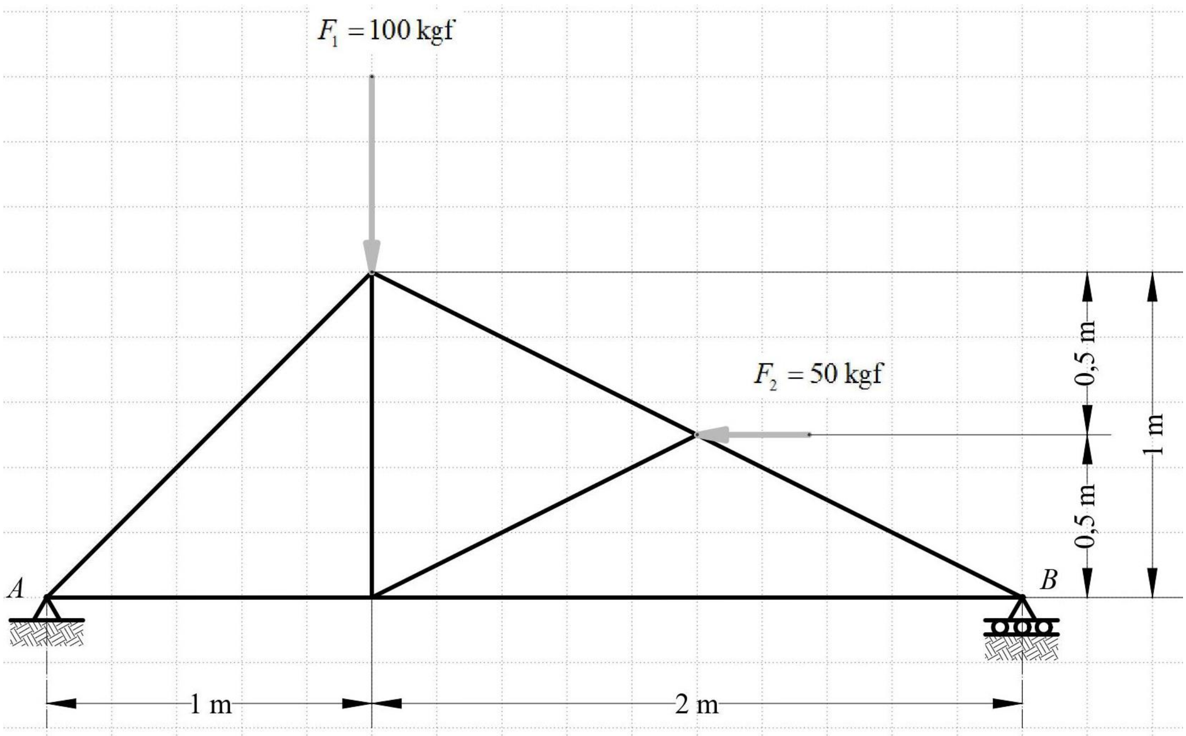


Figura 203. Estructura Reticulada: Resolución por el Método de los Nudos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Previo a resolver el reticulado, es conveniente definir una escala de longitud y trazar el esquema posicional, numerando las barras, rotulando los nudos[42] y trazando las reacciones de vínculo suponiendo sus sentidos, **Figura 204**. Posteriormente, se inician con los pasos propios según el itinerario propuesto en la Figura 199.

---

[42] En este caso se opta por este tipo de nomenclatura, existen otras opciones según cada autor.

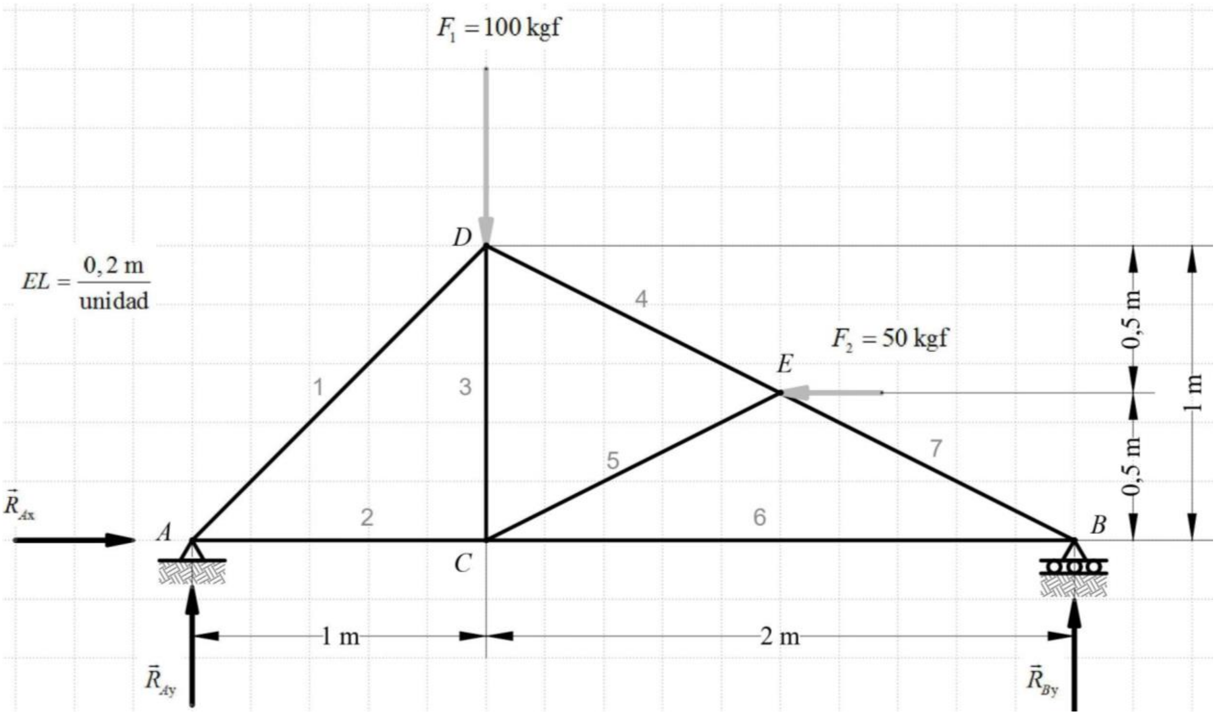


Figura 204. Estructura Reticulada: Resolución por el Método de los Nudos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

1ro. Verificación del Sistema. El sistema reticulado debe ser isostático, por ende, deben cumplirse las condiciones gráficas y analíticas de rigidez. La primera se cumple, dado que la estructura está formada por triángulos; mientras que la condición analítica es también verificada según:

$$b = 2n - 3 = 2(5) - 3 = 7 \Rightarrow \boxed{b = 7}$$

Ahora es factible avanzar en la resolución. Entonces, el paso siguiente es determinar todas las fuerzas externas. Como las cargas son conocidas, se deben determinar solamente las reacciones.

2do. Cálculo de Reacciones de Vínculo. Se calculan aplicando las ecuaciones de equilibrio (procedimientos ya conocidos), un posible sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{+} \sum M_B = 0 & \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_y = 0 & \text{(II)} \\ \overset{+}{\rightarrow} \vec{F}_x = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I):

$$R_{Ay} = 75 \text{ kgf}$$

Reemplazando R_{Ay} en (II) y operando:

$$R_{By} = 25 \text{ kgf}$$

Para terminar, de (III):

$$R_{Ax} = 50 \text{ kgf}$$

3ro. Determinación de Esfuerzos. Esta es la instancia que implica nuevos procedimientos de trabajo exclusivamente inherentes al método en cuestión. En efecto, obtenidas las reacciones en los apoyos, no solamente el conjunto de fuerzas exteriores resulta equilibrado, también debe subsistir *equilibrio, aisladamente en cada nudo*, entre las fuerzas exteriores que en él inciden y los esfuerzos axiales dirigidos según las barras que al nudo concurran (RAFFO, 2007).

La idea del parágrafo anterior representa la fundamentación teórica del procedimiento mencionado, su concreción, por otra parte, consiste básicamente en construir un polígono vectorial cerrado en cada nudo de la estructura y aplicar luego las ecuaciones de equilibrio. Operativamente, los pasos a seguir se pueden enumerar de la siguiente manera:

1-Aislar un nudo en el que no haya más de dos incógnitas[43], por ejemplo, el nudo *A*. Convenir un sentido de circulación en ese nudo, **Figura 205**. El sentido de circulación, que se indica con una flecha circular, indica el orden en que se han de tomar las fuerzas para construir el vectorial indicado en el punto 2.

[43] Esta condición es necesaria porque desde el momento en que se aísla el nudo solo se dispone de dos ecuaciones (sumatoria en x y en y) para resolver el problema analíticamente.

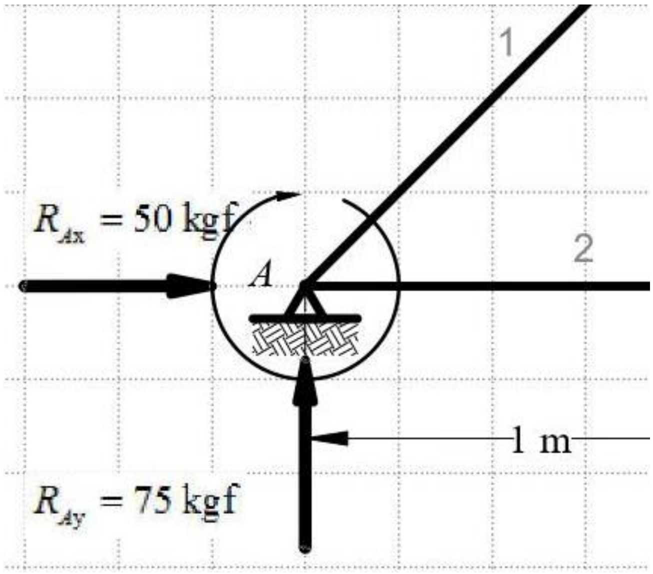


Figura 205. Método de los Nudos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2-Construir el vectorial cerrado con las fuerzas intervinientes en el nudo; iniciando por la *primera fuerza conocida después de la última desconocida*, según el sentido convenido en el punto anterior.

Las fuerzas intervinientes en el nudo son las *fuerzas exteriores* $\vec{R}_{Ay}$ y $\vec{R}_{Ax}$; y, las *fuerzas internas* que está "haciendo" la barra (el material) en oposición a las cargas externas aplicadas. Por lo tanto, de la construcción del vectorial cerrado se obtienen los sentidos de las fuerzas internas (desconocidas) que están actuando en las barras para garantizar el equilibrio en el nudo[44].

En efecto, definida una escala de fuerzas se inicia con $\vec{R}_{Ay}$, luego con $\vec{R}_{Ax}$ y seguido se trazan las direcciones 1 y 2, **Figura 206** *(izq.)*. Para cerrar el vectorial se indican los sentidos convenientemente, **Figura 206** *(der.)*.

[44] Recordar que hasta el momento solo se ha analizado el equilibrio entre fuerzas exteriores (equilibrio estático), pero, a partir de ahora, también se empieza a tener en consideración el equilibrio entre fuerzas exteriores e interiores (equilibrio elástico) para desarrollar los métodos. Para el caso particular de barras de un reticulado (eslabones cortos) las fuerzas internas actúan únicamente en el sentido axial de dicha barra.

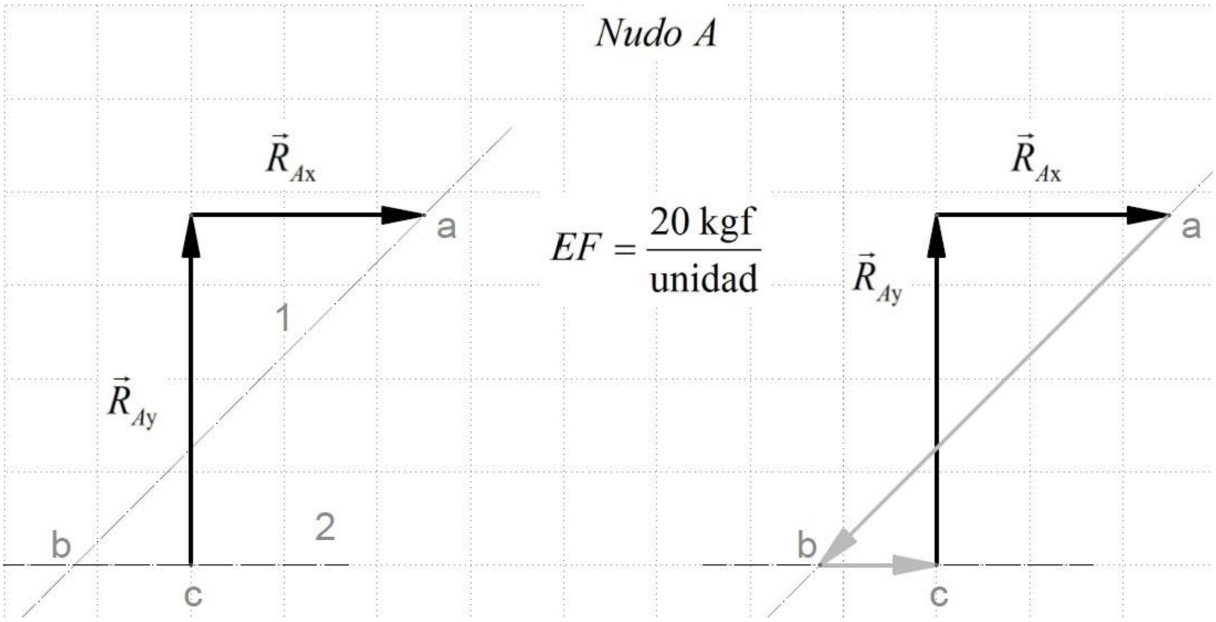


Figura 206. Método de los Nudos: Construcción del Polígono Vectorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Lo que sigue es indicar en el esquema posicional los sentidos hallados en el vectorial, como se muestra en la **Figura 207**.

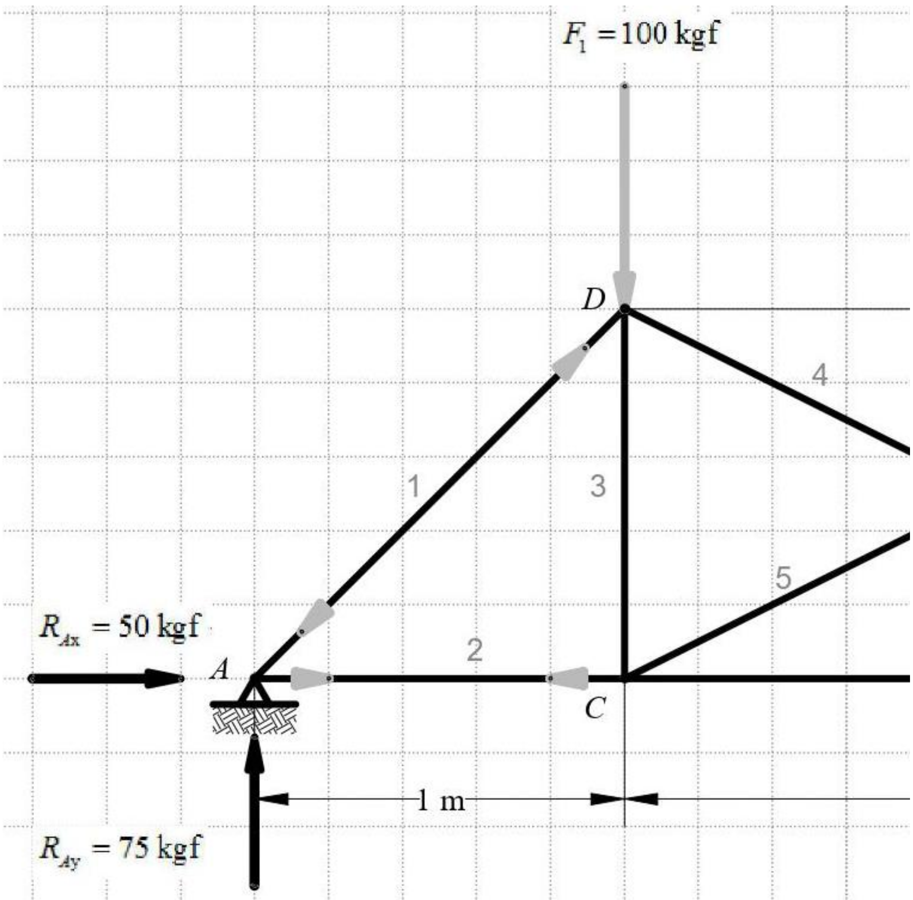


Figura 207. Método de los Nudos: Fuerzas Internas en Barras (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

De la figura anterior notar qué, además, se han indicado los sentidos de las fuerzas internas en los extremos opuestos de las barras, es decir, en los nudos *D* y *C*, esto es consecuencia de la *tercera ley de Newton* para garantizar que las barras 1 y 2 estén en equilibrio.

Lo expresado en los parágrafos anteriores, tiene **connotaciones importantes**, a saber:

a) Que las fuerzas internas en la barra 2 tiendan a acercar los nudos *A* y *C* significa que las fuerzas externas están tendiendo a separar dichos nudos, es decir, la barra está solicitada por un *esfuerzo axial de tracción*. El valor de dicho esfuerzo es igual en módulo y dirección, pero, de sentido opuesto a la fuerza interna.

b) Del mismo modo, las fuerzas internas tienden a separar los nudos *A* y *D* de la barra 1, con lo cual, la barra está solicitada a compresión.

c) Para el cálculo analítico de los esfuerzos (paso 3), se plantean ecuaciones de equilibrio considerando también las fuerzas internas, luego, por lo dicho en a), los módulos de dichas fuerzas son iguales a los módulos de los esfuerzos en las barras con el signo positivo si es de tracción o negativo si es de compresión.

3-Plantear las ecuaciones de equilibrio para hallar los módulos de los esfuerzos. Usualmente, el planteo analítico requiere de estrategias trigonométricas o geométricas previas para determinar ciertos parámetros como ángulos que permitan hallar las componentes implicadas, **Figura 208**. Convendremos en designar con $\vec{N}_1$ a la fuerza interna en la barra 1 y con $\vec{N}_2$ a la fuerza interna en la barra 2.

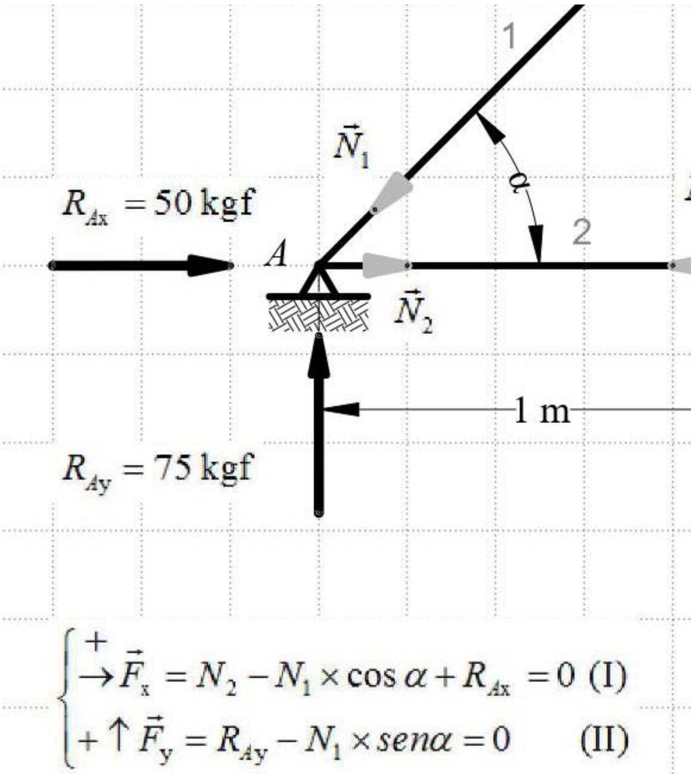


Figura 208. Método de los Nudos: Cálculo de los Esfuerzos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

A partir de (II) del sistema de ecuaciones anterior, donde $\alpha = 45°$ (catetos iguales):

$$R_{Ay} - N_1 \times sen\alpha = 0$$

$$N_1 = \frac{R_{Ay}}{sen\alpha} = \frac{75}{sen45°} \Rightarrow \boxed{N_1 \cong 106}$$

Reemplazando en (I):

$$N_2 - N_1 \times \cos\alpha + R_{Ax} = 0$$

$$N_2 = 106 \times \cos 45 - 50 \Rightarrow \boxed{N_2 \cong 25}$$

Como verificación, los resultados anteriores se pueden obtener gráficamente de Figura 206 *(der.)*.

$$N_1 = \overline{\text{ab}} \times EF \cong 5{,}3\ \text{unidad} \times 20\ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 106\ \text{kgf}$$

$$N_2 = \overline{\text{bc}} \times EF \cong 1{,}2\ \text{unidad} \times 20\ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 24\ \text{kgf}$$

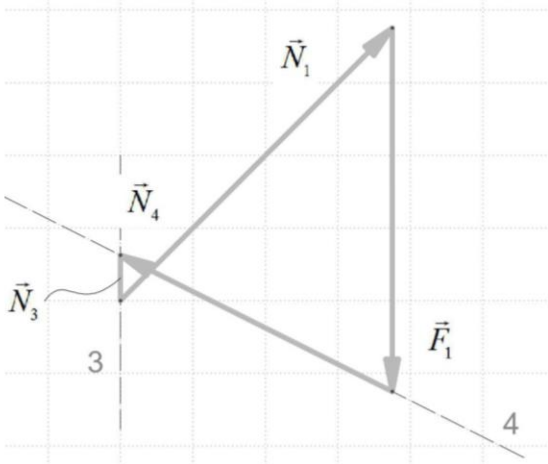
Para finalizar se consignan los valores obtenidos en una tabla acompañado del signo correspondiente, como se indica a continuación, **Figura 209**.

Barra	*Esfuerzo* [kgf]
1	−106
2	+25
. .	. .
7	

Figura 209. Tabla Parcial de Valores de Esfuerzos: Nudo A (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Se concluye que la barra 1 está solicitada a compresión (por eso el signo "$-$"); y, la barra 2 a tracción (por eso el signo "$+$"). Está claro, que todos estos detalles minuciosos del procedimiento se realizan por única vez por ser este el primer nudo analizado. En este sentido, en los planteos de los nudos siguientes se presentan únicamente los diagramas vectoriales y las ecuaciones de equilibrio, **Figura 210**, complementado con el esquema posicional y la tabla que resume los esfuerzos en las barras, **Figura 211**.

Nudo D



$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \vec{F}_x = N_1 \times \cos 45 - N_4 \times \cos 27 = 0 & \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_y = N_1 \times sen45 - F_1 + N_4 \times sen27 - N_3 = 0 & \text{(II} \end{cases}$$

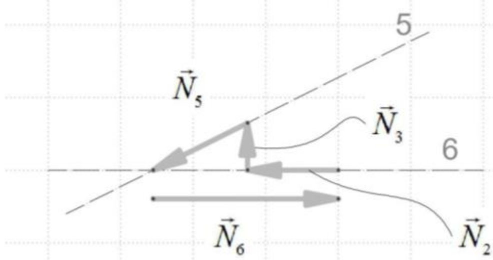
De (I):

$$N_4 = \frac{106 \times \cos 45}{\cos 27} \Rightarrow \boxed{N_4 \cong 84 \text{ kgf}}$$

Entonces de (II):

$$N_3 = 106 \times sen45 - 100 + 84 \times sen27 \Rightarrow \boxed{N_3 \cong 13 \text{ kgf}}$$

Nudo C



$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \vec{F}_x = -N_2 - N_5 \times \cos 27 + N_6 = 0 & \text{(I)} \\ + \uparrow \vec{F}_y = N_3 - N_5 \times sen27 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

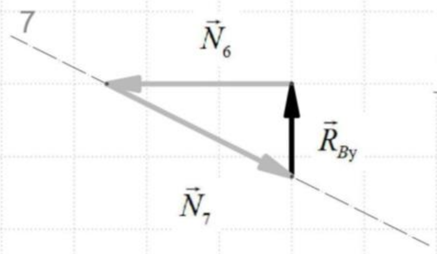
De (II):

$$N_5 = \frac{13}{sen27} \Rightarrow \boxed{N_5 \cong 28,63 \text{ kgf}}$$

Entonces de (I):

$$N_6 = 25 + 28,63 \times \cos 27 \Rightarrow \boxed{N_6 \cong 50,51 \text{ kgf}}$$

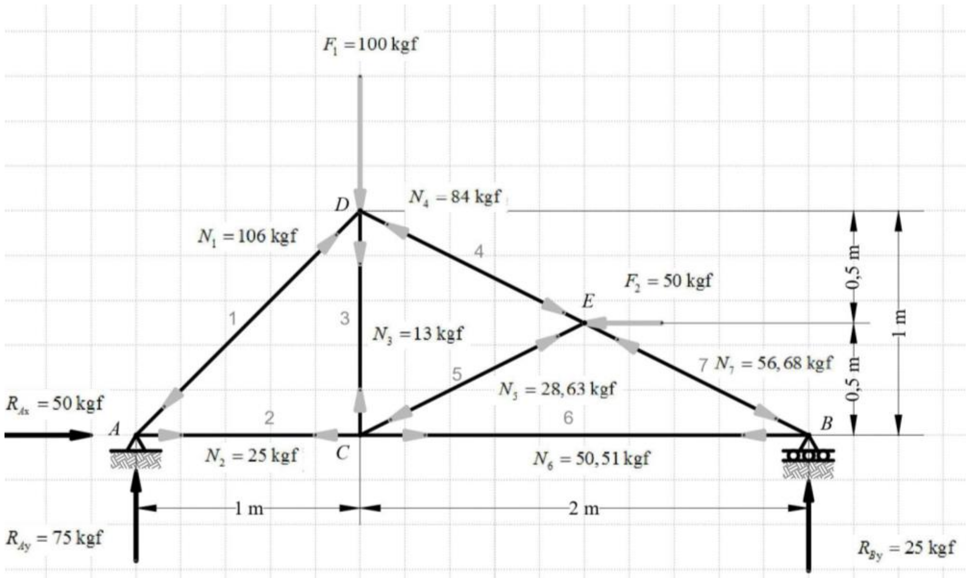
Nudo B



$$\overset{+}{\rightarrow} \vec{F}_x = -N_6 + N_7 \times \cos 27 = 0$$

$$N_7 = \frac{50,51}{\cos 27} \Rightarrow \boxed{N_6 \cong 56,68 \text{ kgf}}$$

Figura 210. Análisis General de Nudos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).



Barra	*Esfuerzo* [kgf]
1	−106
2	+25
3	+13
4	−84
5	−28,63
6	+50,51
7	−56,68

Figura 211. Esquema Posicional Final y Tabla de Esfuerzos (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

El formato de presentación de las figuras anteriores, es la usual exigida en la Cátedra.

PROBLEMA RESUELTO 7.2

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico de *Cremona* para la obtención de los esfuerzos axiales en barras de un sistema reticulado isostático.

Consigna. Determinar los esfuerzos axiales en las barras de la armadura del Problema Resuelto 7.1, **Figura 212**.

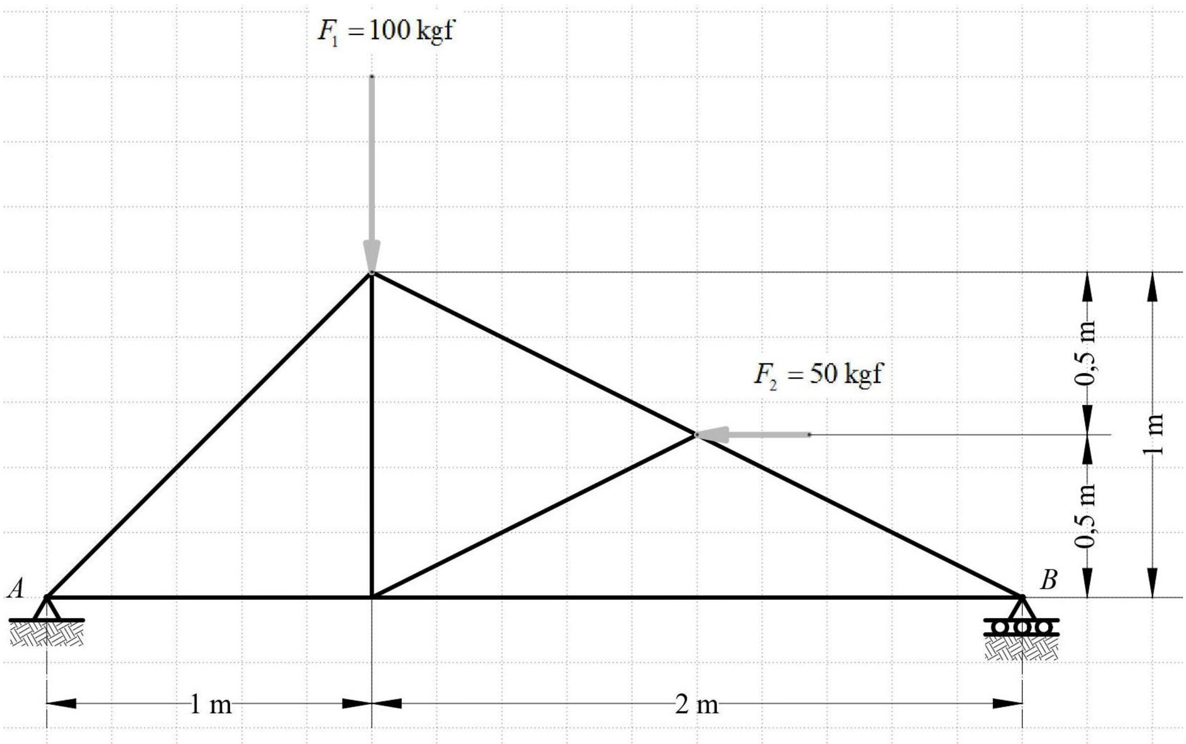


Figura 212. Estructura Reticulada: Resolución por el Método de Cremona (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Estando ya definidos los pasos primero y segundo del itinerario propuesto en la Figura 200, solo resta la determinación de los esfuerzos.

3ro. Determinación de Esfuerzos. Este método consiste de los pasos siguientes:

1-Establecer un recorrido sobre la estructura, **Figura 213** *(sup.)*, y trazar el polígono de fuerzas externas ordenado siguiendo este recorrido, **Figura 213** *(inf.)*, en este caso se ha iniciado con $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Ax}$ y así sucesivamente hasta cerrar el polígono.

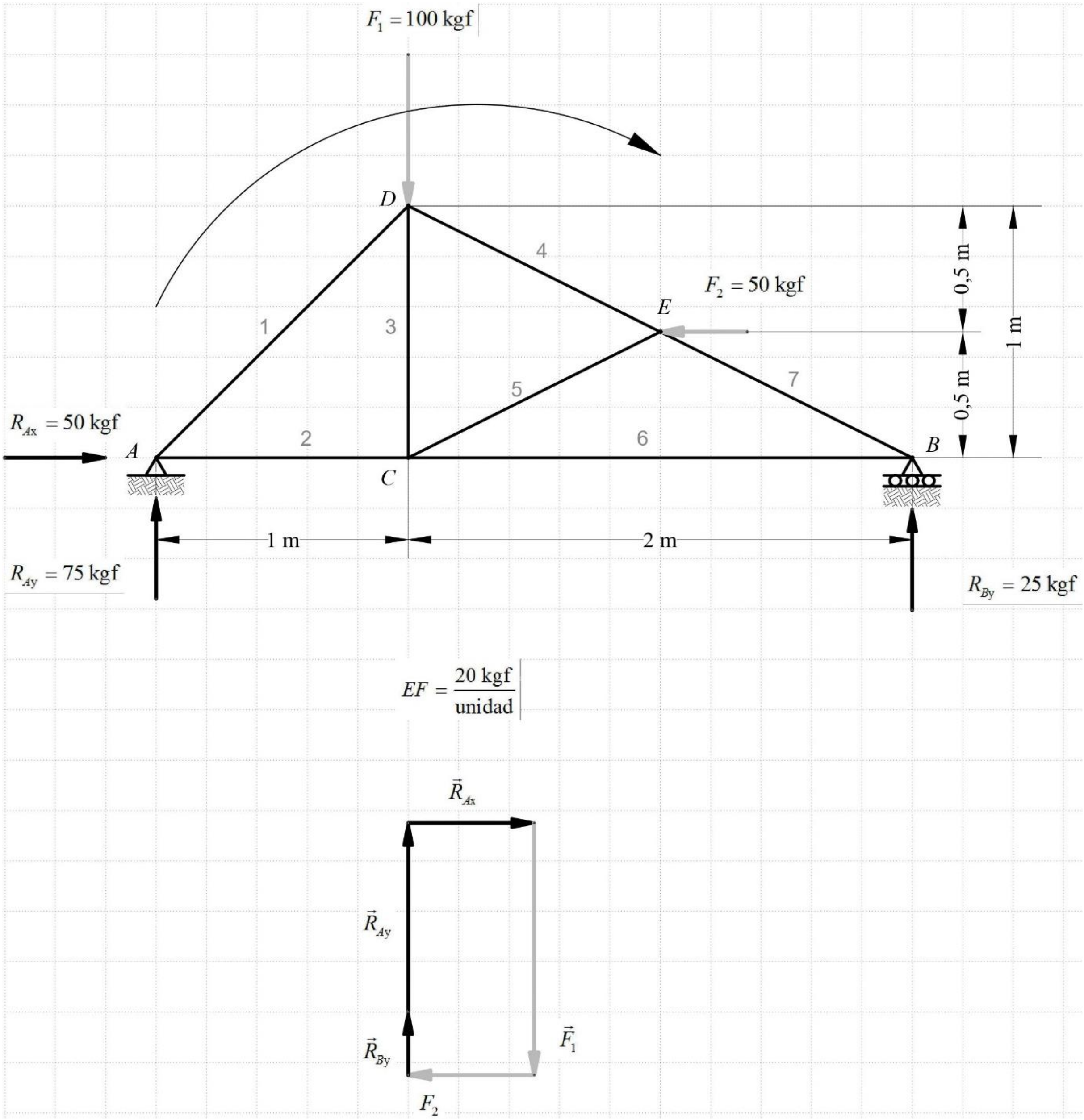


Figura 213. Estructura Reticulada: Resolución por el Método de Cremona (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

2-Realizar el equilibrio de cada nudo sobre el polígono de fuerzas externas realizado. Es decir, se deben trazar los polígonos vectoriales de cada nudo (Figura 211) sobre el gráfico anterior siguiendo el mismo recorrido que el establecido en el paso 1; iniciando por la *primera fuerza conocida después de la última desconocida*. Para introducir al lector al método, en primer lugar, solo se traza el vectorial del nudo *A*, **Figura 214** (cabe destacar que también se podría haber iniciado por el nudo *B*). Por una cuestión de claridad, las fuerzas que no intervienen en este nudo se representan con línea de trazo, este criterio gráfico se mantiene para el resto de los nudos.

Hay que tener en cuenta que el punto de inicio del primer vectorial (en este caso del nudo *A*) debe coincidir con el punto de finalización del vectorial del último nudo trazado (: las fuerzas internas y las externas están en equilibrio).

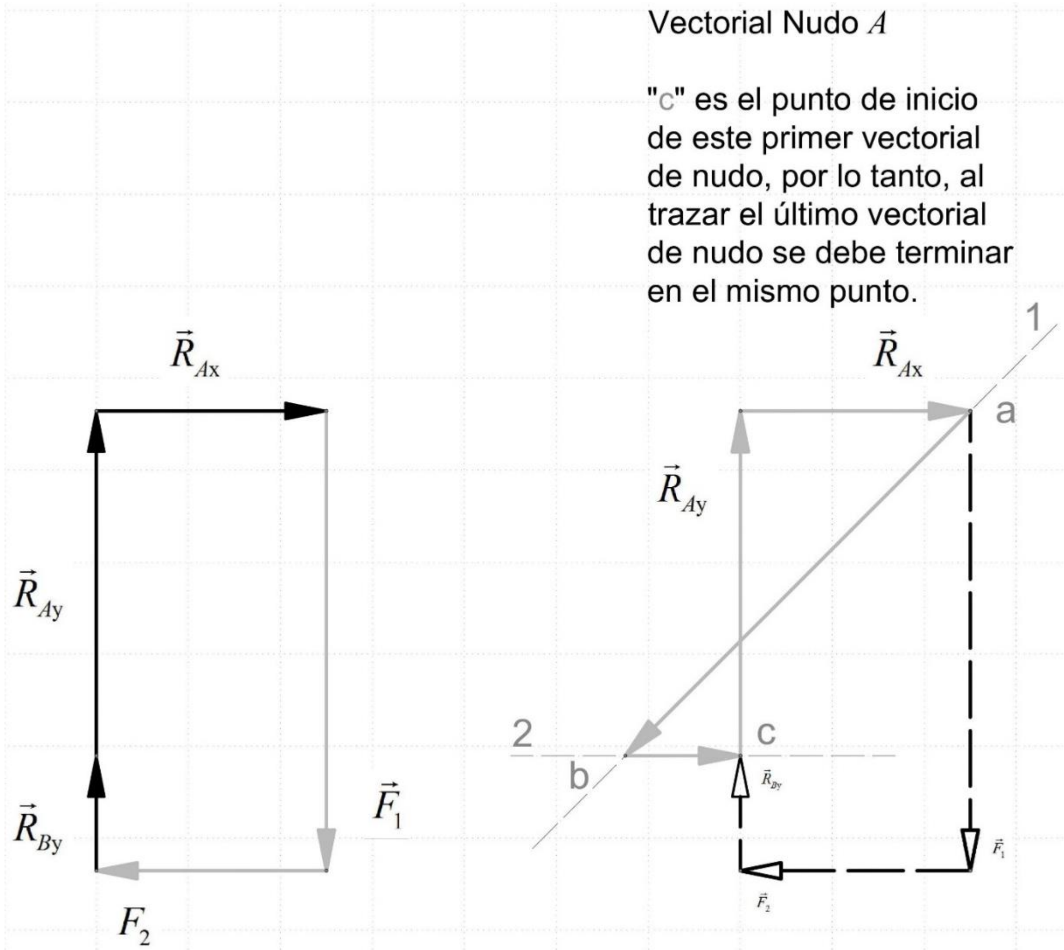


Figura 214. Resolución Parcial del Método de Cremona: Vectorial en el Nudo *A*. (1) La escala de fuerzas de este grafico es la indicada en la Figura 214 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Pasando, luego, a otro nudo en el que haya dos o menos incógnitas, elegido de modo tal que la fuerza interna en una de sus barras sea una de las ya calculadas, para este caso el nudo *D*, se traza el polígono vectorial, **Figura 215**, manteniendo con línea de trazo el vectorial del nudo *A*. Luego, siguiendo el criterio de elección de nudo, se prosigue con los nudos *C*, *E* y *B*, resultando las **Figuras 216** a **218**.

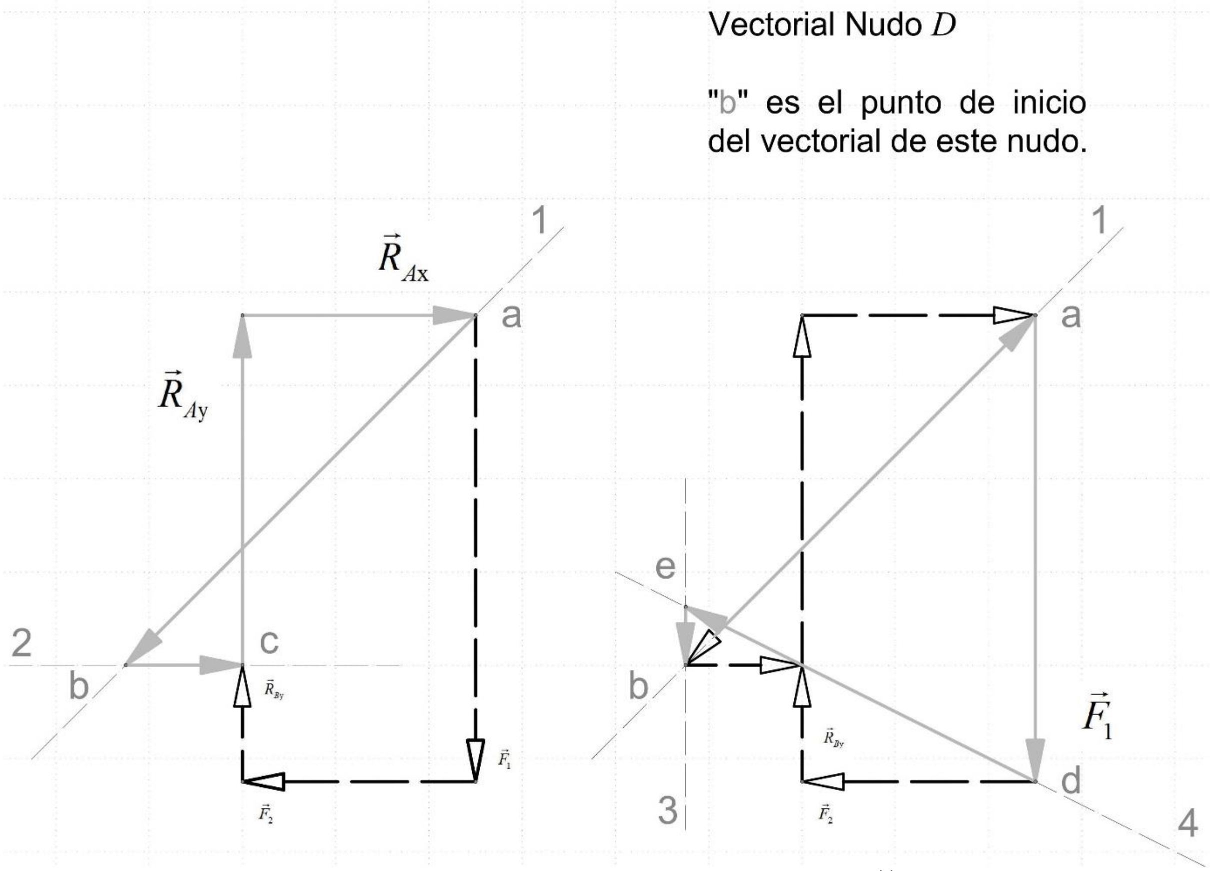


Figura 215. Resolución Parcial del Método de Cremona: Vectorial en el Nudo D. (1) La escala de fuerzas de este grafico es la indicada en la Figura 214 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

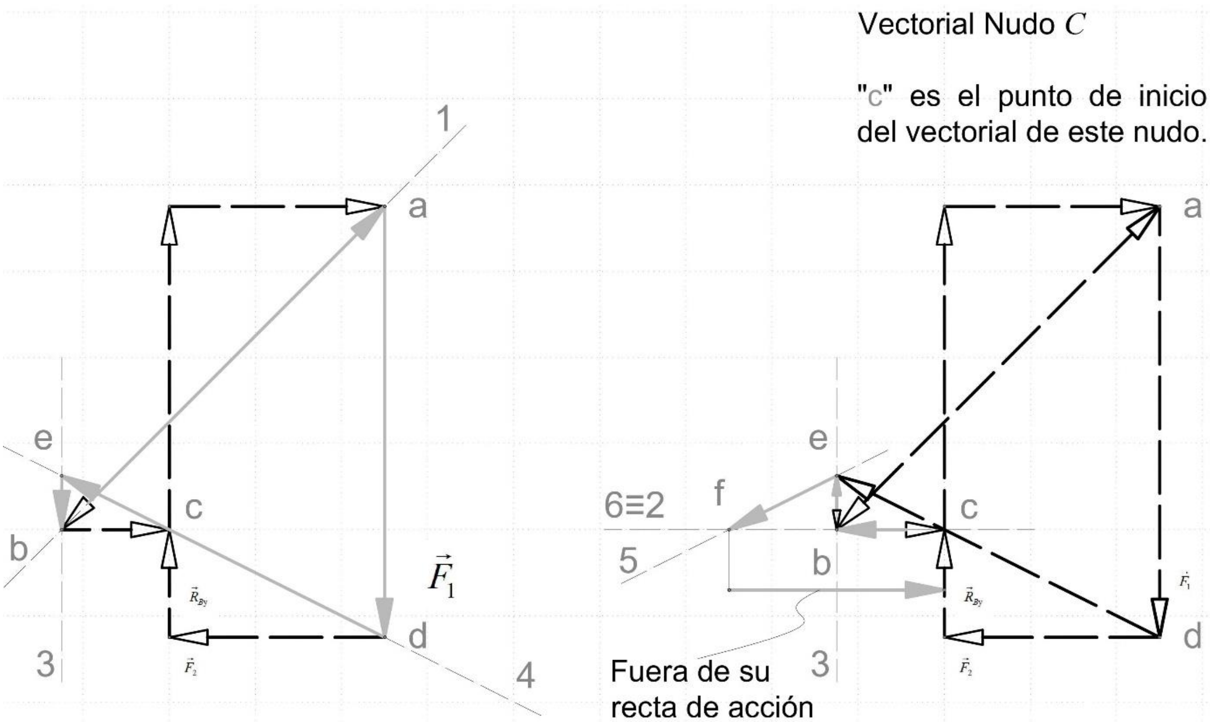


Figura 216. Resolución Parcial del Método de Cremona: Vectorial en el Nudo C. (1) La escala de fuerzas de este grafico es la indicada en la Figura 214 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

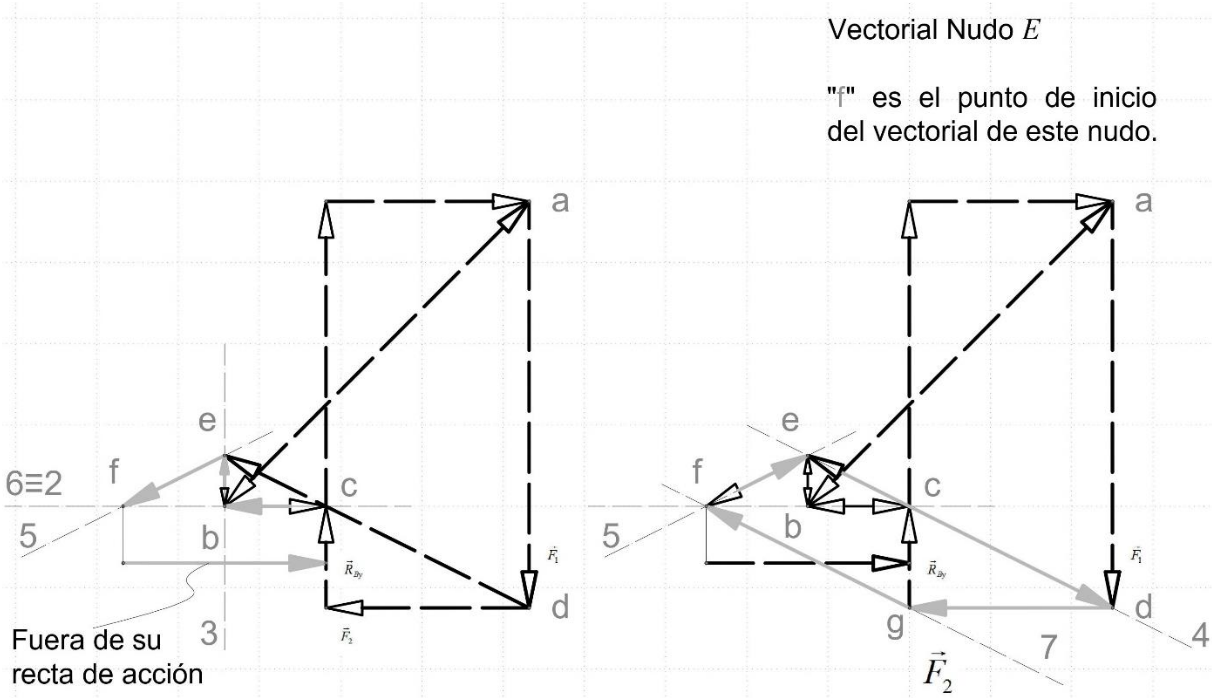


Figura 217. Resolución Parcial del Método de Cremona: Vectorial en el Nudo E. (1) La escala de fuerzas de este grafico es la indicada en la Figura 214 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

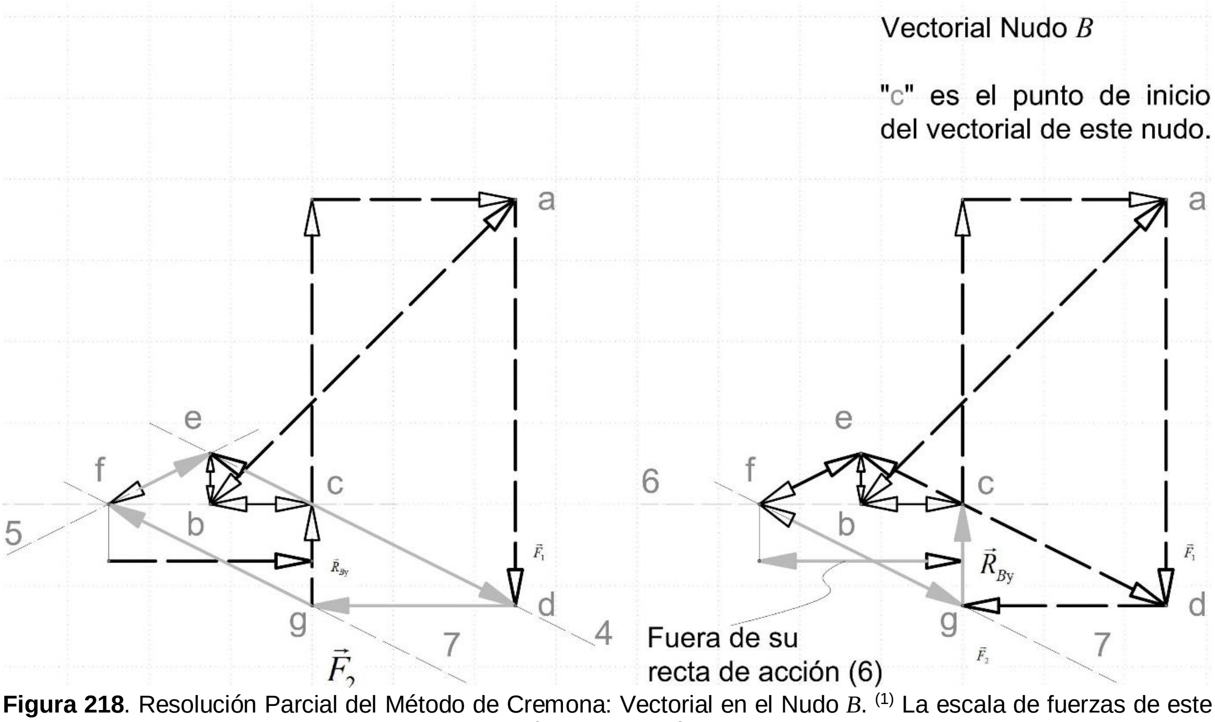


Figura 218. Resolución Parcial del Método de Cremona: Vectorial en el Nudo B. (1) La escala de fuerzas de este grafico es la indicada en la Figura 214 (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Con el vectorial del nudo B se cumplimenta el método logrando un polígono cerrado. Como es un método gráfico, si se quiere saber la magnitud del esfuerzo en cualquier barra solo basta con medir la longitud correspondiente y multiplicarla por la escala, por ejemplo, para las barras 6 y 7 los módulos de los esfuerzos valen:

$$N_6 = \overline{\mathsf{fc}} \times EF \cong 2{,}5\ \text{unidad} \times 20\ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 50\ \text{kgf}$$

$$N_7 = \overline{\mathsf{fg}} \times EF \cong 2{,}7\ \text{unidad} \times 20\ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 54\ \text{kgf}$$

Resultados que son aproximados a los obtenidos mediante el método de nudos. Está claro qué, en la medida que se concluye con el trazado del vectorial en un nudo, los sentidos de las fuerzas internas deben trasladarse a las barras del reticulado, tal como se explica en RAFFO (2007).

PROBLEMA RESUELTO 7.3

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico/analítico de *Ritter* para la obtención de los esfuerzos axiales en barras de un sistema reticulado isostático.

Consigna. Determinar los esfuerzos axiales en las barras 4, 5 y 6 de la armadura del Problema Resuelto 7.1, **Figura 219**.

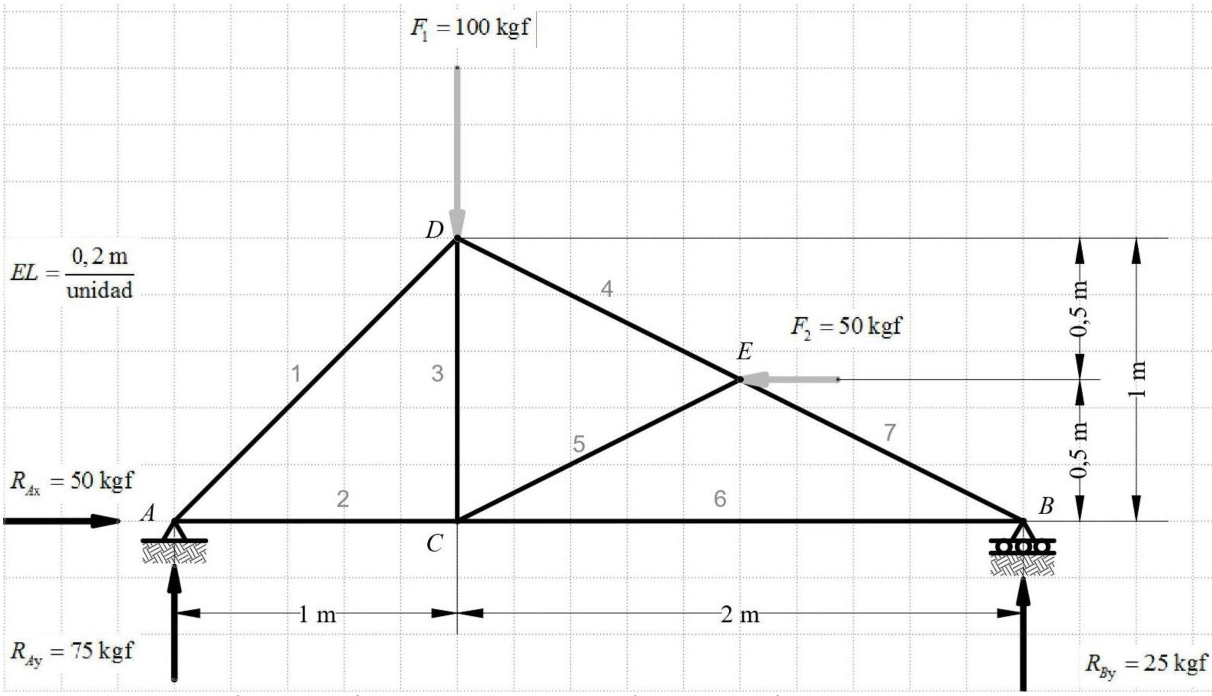


Figura 219. Resolución por el Método de Ritter (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Estando ya definidos los pasos primero y segundo del itinerario propuesto en la Figura 200, solo resta la determinación de los esfuerzos.

Determinación de Esfuerzos. El método de los nudos o de cremona no permiten individualizar el esfuerzo de una determinada barra sin el cálculo previo de los esfuerzos en otras barras. Además, son inaplicables en todo nudo al cual concurran más de dos barras desconocidas. Estos inconvenientes desaparecen en este método o en el de Culmann que se analiza en el próximo problema.

El método de Ritter consiste en realizar un seccionamiento imaginario S a la estructura, **Figura 220**, y luego, plantear el equilibrio de momentos (: ecuación de equilibrio) en la parte izquierda o en la parte derecha de la estructura. Tal como se ha visto en la Sección 2.2.4, este método es *gráfico/analítico* dado que en el planteo de momentos algunos brazos de momento deben obtenerse en forma gráfica.

Por su parte, el *seccionamiento* S debe realizarse de modo que el mismo:

1) No pase por ningún nudo;

2) No encuentre más de tres barras;

3) Las barras no sean concurrentes.

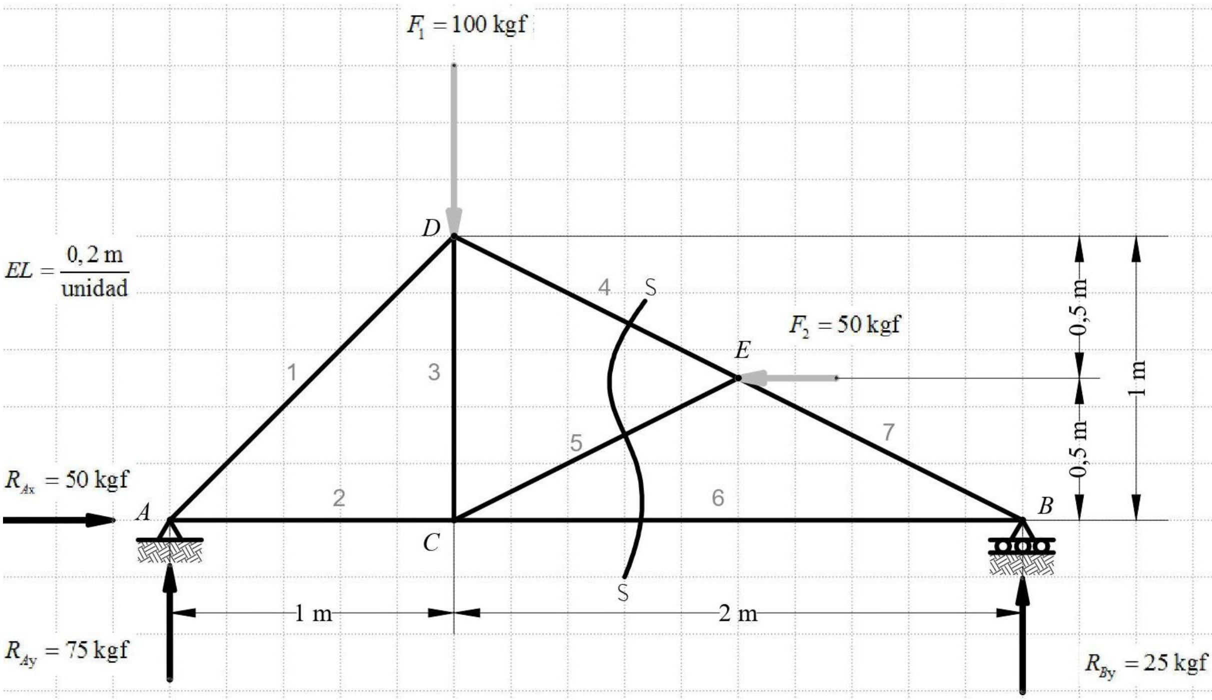


Figura 220. Resolución por el Método de Ritter (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Luego del seccionamiento, ambas partes de la estructura permanecen en equilibrio si se consideran en las barras seccionadas las fuerzas internas que en ellas se desarrollan debido a las cargas externas aplicadas. Si se analiza el *tramo derecho*, estas fuerzas internas deben evidenciarse incorporando sus sentidos de actuación, **Figura 221**. Dichos sentidos son solo supuestos y se han de confirmar, luego, en función al signo de los resultados obtenidos de las ecuaciones de equilibrio.

Dado que el módulo de la fuerza interna en una barra dada, es igual al módulo del esfuerzo en esa misma barra, se las designa con $\vec{N}$ por una conveniencia práctica para el planteo de los momentos.

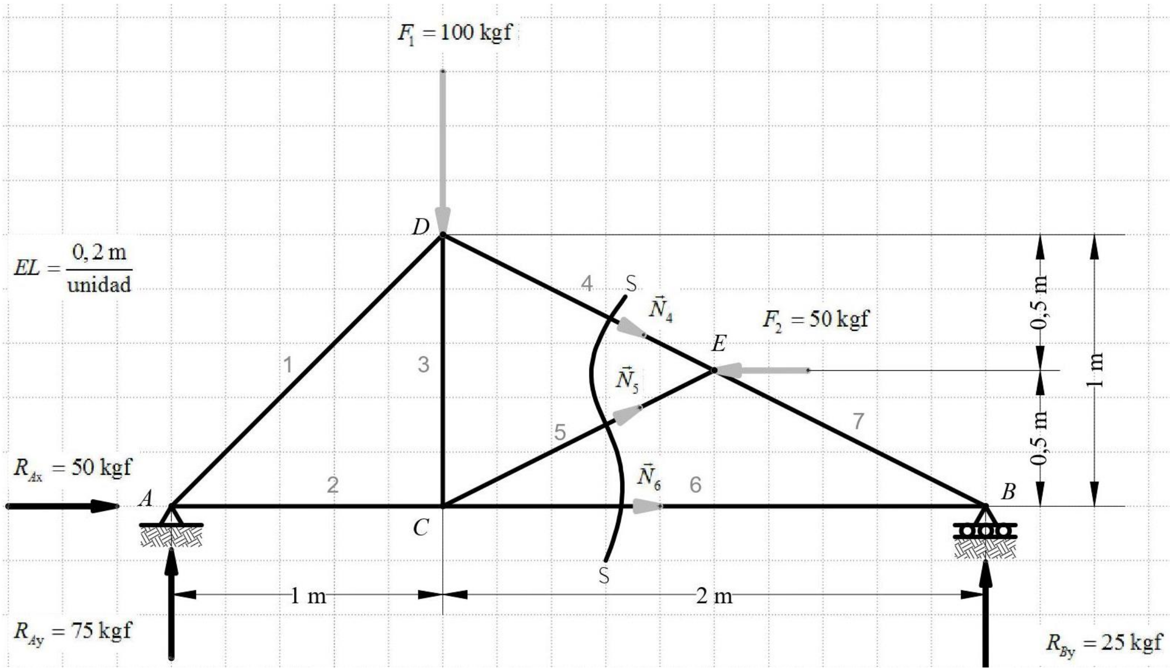


Figura 221. Resolución por el Método de Ritter (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Planteo de las Ecuaciones de Equilibrio. El centro de momentos puede tomarse en cualquier punto de la estructura, por conveniencia:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{+}\sum M_B = N_5 \times d_5 - 50 \times 0,5 = 0 & \text{(I)} \\ \overset{\frown}{+}\sum M_E = -N_6 \times 0,5 - 25 \times 1 = 0 & \text{(II)} \\ \overset{\frown}{+}\sum M_C = N_4 \times d_4 - 50 \times 0,5 - 25 \times 2 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I):

$$N_5 \times d_5 - 50 \times 0,5 = 0$$

$$N_5 = \frac{50 \times 0,5}{d_5} \cong \frac{25}{0,9} \Rightarrow \boxed{N_5 \cong 27,8 \text{ kgf} \cdot \text{m}}$$

Donde $d_5 = 4,5\text{ unidad} \times 0,2\,\frac{\text{m}}{\text{unidad}} = 0,9\text{ m}$

Como el sentido de la fuerza interna en la barra 5 tiende a dirigirse hacia el nudo *E*, la barra trabaja a *compresión*.

De (II):

$$-N_6 \times 0,5 - 25 \times 1 = 0$$
$$N_6 \times 0,5 = -25 \times 1$$
$$N_6 = \frac{-25 \times 1}{0,5} \Rightarrow \boxed{N_6 \cong -50 \text{ kgf} \cdot \text{m}} \therefore \text{el sentido real es opuesto al adoptado}$$

Como el sentido de la fuerza interna en la barra 6 tiende a alejarse del nudo *B*, la barra trabaja a *tracción*.

De (III):

$$N_4 \times d_4 - 50 \times 0,5 - 25 \times 2 = 0$$
$$N_4 \cong \frac{50 \times 0,5 + 25 \times 2}{d_4} \cong \frac{75}{0,9} \Rightarrow \boxed{N_4 \cong 83,3 \text{ kgf} \cdot \text{m}}$$

Donde $d_4 = 4,5 \text{ unidad} \times 0,2 \dfrac{\text{m}}{\text{unidad}} = 0,9 \text{ m}$.

Como el sentido de la fuerza interna en la barra 4 tiende a dirigirse hacia el nudo *E*, la barra trabaja a *compresión*.

PROBLEMA RESUELTO 7.4

Objetivo. Mostrar el procedimiento gráfico de *Culmann* para la obtención de los esfuerzos axiales en barras de un sistema reticulado isostático.

Consigna. Determinar los esfuerzos axiales en las barras 4, 5 y 6 de la armadura del Problema Resuelto 7.1, **Figura 222**.

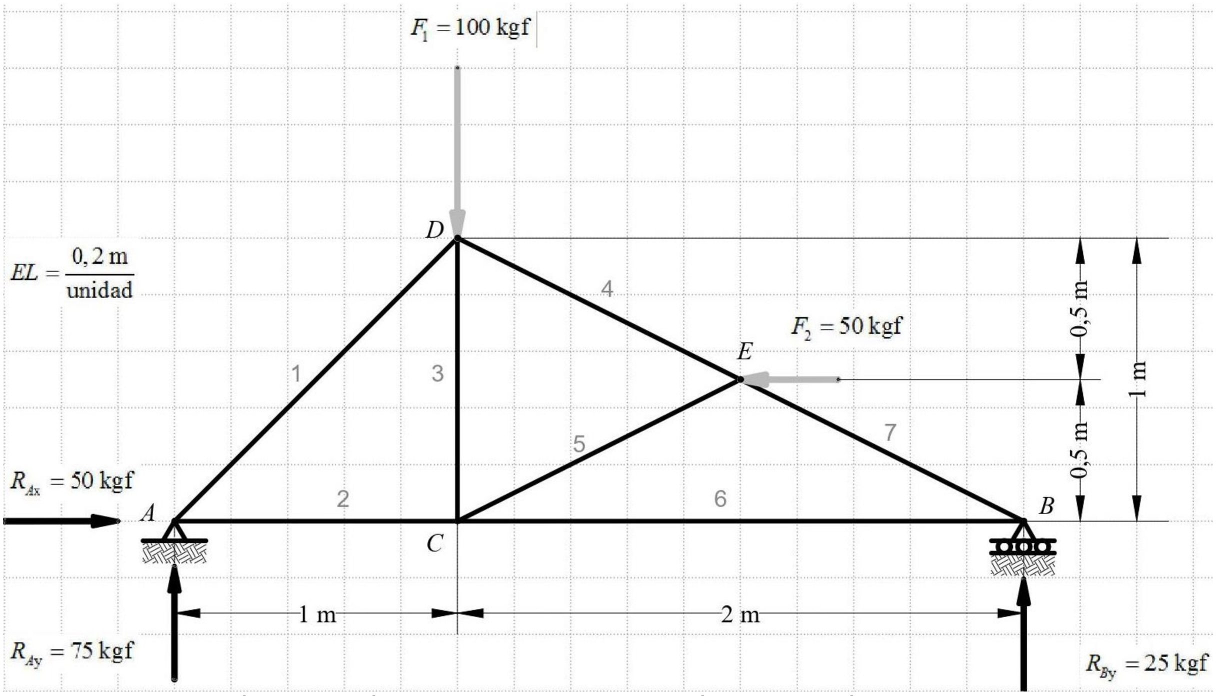


Figura 222. Resolución por el Método de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

SOLUCIÓN

Estando ya definidos los pasos primero y segundo del itinerario propuesto en la Figura 200, solo resta la determinación de los esfuerzos.

Determinación de Esfuerzos. Este método, que supone como el de Ritter, practicada un seccionamiento satisfaciendo las mismas condiciones que este último, **Figura 223**, consiste en equilibrar la *resultante* de las fuerzas exteriores situadas a la izquierda o a la derecha del corte, con *tres fuerzas* según las respectivas barras seccionadas.

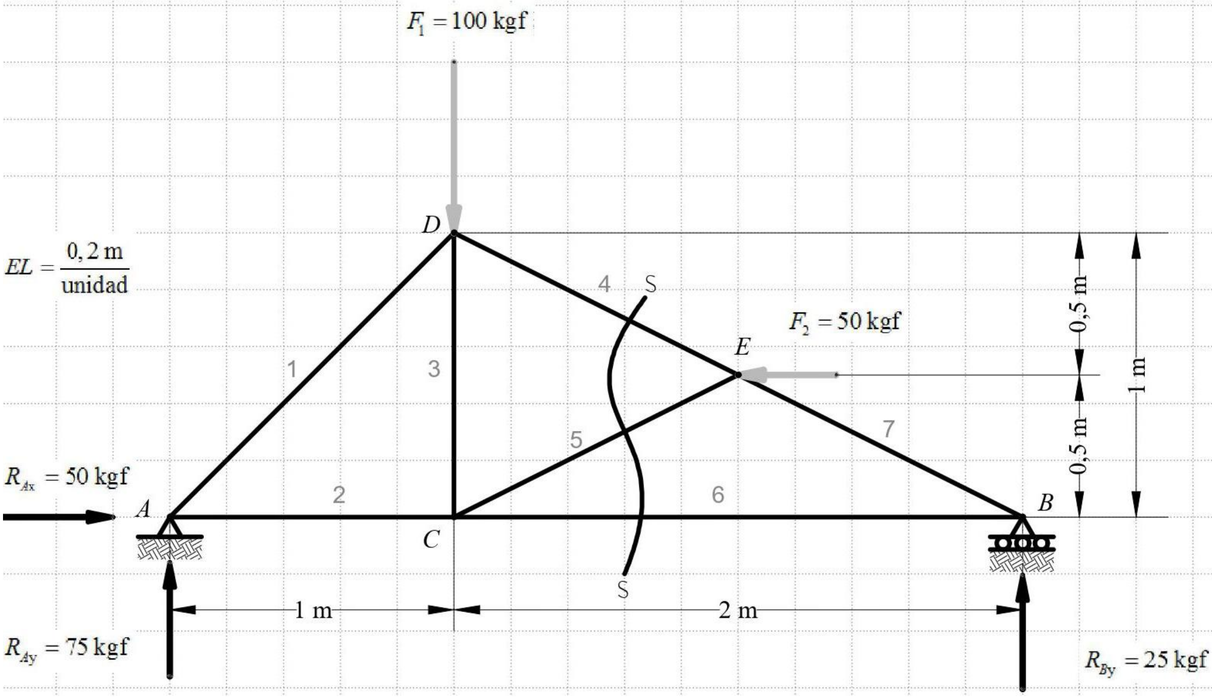


Figura 223. Resolución por el Método de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Como se ha analizado en la Sección 2.2.4 es un método que requiere conocer la posición relativa de la fuerza respecto de las direcciones. En este caso, la fuerza es la *resultante derecha* (se considera el tramo derecho) y las direcciones las correspondientes a los ejes de las barras. Por lo tanto, en primer lugar, es necesario trazar los polígonos vectorial, polar y funicular para ubicar dicha resultante en el sistema, **Figura 224**. El paso siguiente es definir la línea auxiliar de Culmann, **Figura 225**.

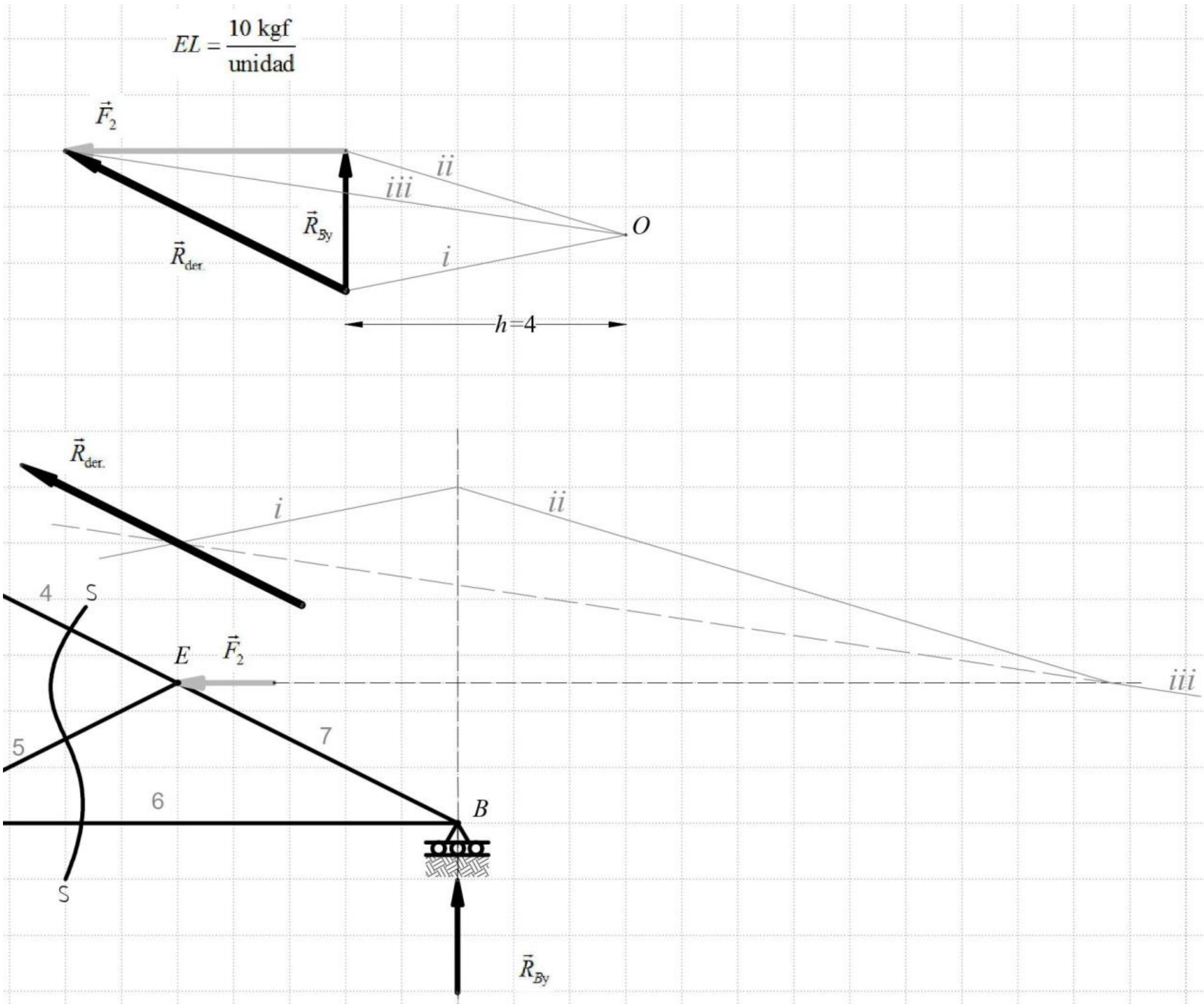


Figura 224. Resolución por el Método de Culmann: Ubicación de la Resultante Derecha en el Sistema (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

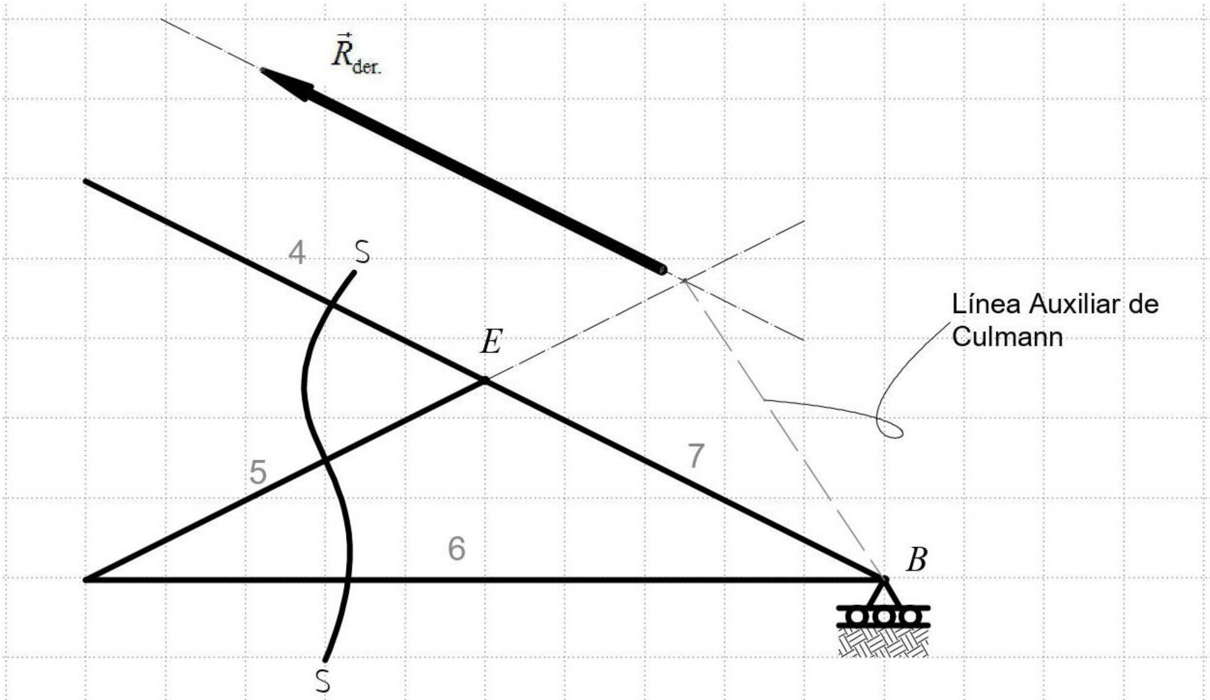
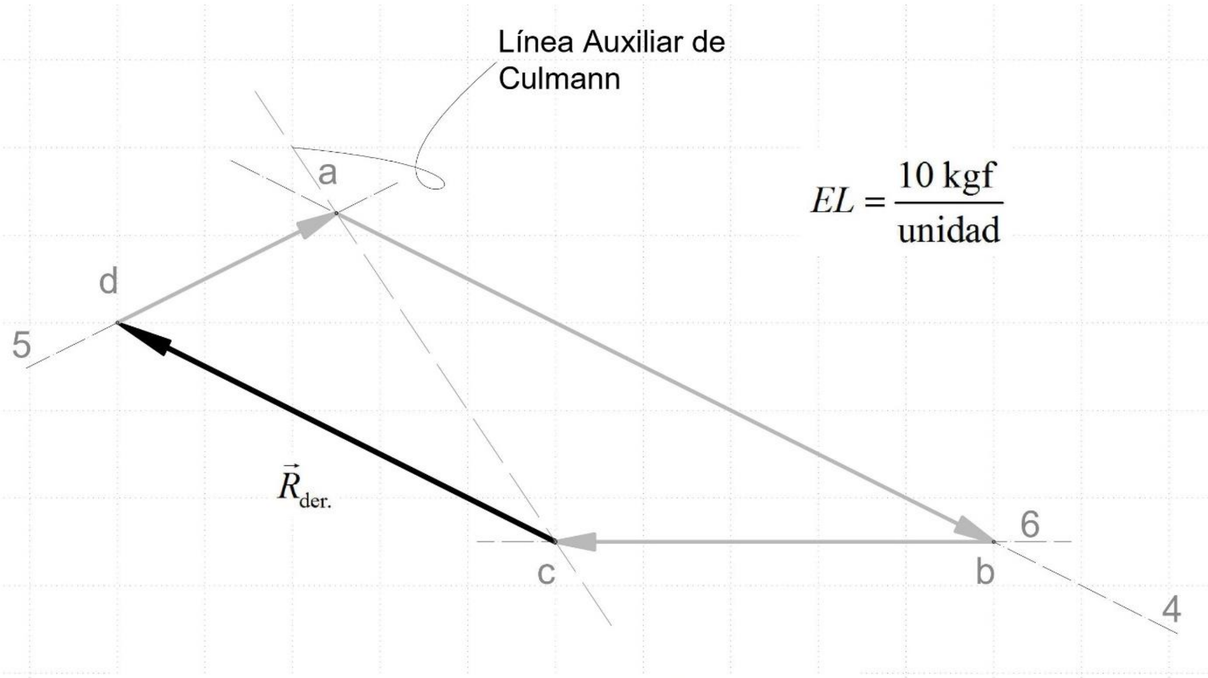


Figura 225. Resolución por el Método de Culmann: Línea Auxiliar de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Finalmente, descomponer la resultante derecha en las direcciones 4, 5 y 6 según la metodología ya conocida, **Figura 226**.



$$N_4 = \overline{\mathsf{ab}} \times EF \cong 8,4 \text{ unidad} \times 10 \ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 84 \text{ kgf}$$

$$N_5 = \overline{\mathsf{ad}} \times EF \cong 2,8 \text{ unidad} \times 10 \ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 28 \text{ kgf}$$

$$N_6 = \overline{\mathsf{bc}} \times EF \cong 2,5 \text{ unidad} \times 5 \ \frac{\text{kgf}}{\text{unidad}} \cong 50 \text{ kgf}$$

Figura 226. Resolución por el Método de Culmann (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Notar que el polígono anterior deja evidenciado en una forma gráfica, como las fuerzas interiores desarrolladas en las barras analizadas equilibran a la resultante derecha.

8. MÁQUINAS SIMPLES

8.1. Introducción

Las *palancas, poleas, tornos* y *planos inclinados* se denominan máquinas simples, y no obstante haber sido inventadas hace miles de años, todavía reportan gran utilidad. En cualquier tipo de las máquinas que se usan actualmente, aun las más complicadas, no existen sino combinaciones más o menos ingeniosas de una o más máquinas simples. No hay más que observar una máquina de escribir o una máquina de ferrocarril: por todos lados descubriremos palancas, tornos, poleas, engranajes, etc.

En este capítulo se estudian varias máquinas simples. El *objeto del estudio* puede sintetizarse así: 1) Qué fuerza es necesaria para mantener en *equilibrio* a un cuerpo, empleando una máquina simple; y, 2) Cuánto vale la *multiplicación* de cada máquina, es decir, por cuánto se multiplica nuestra fuerza al emplear la máquina.

Cabe destacar que, en materia de *nomenclatura*, en este capítulo se respetan las utilizadas por el autor. Además, no se presentan los problemas resuelto como hasta el momento se ha realizado, dado que no revisten mayor complejidad para el lector, se recomienda, por tanto, la lectura del material bibliográfico recomendado como complemento para los ejercicios prácticos.

8.2. Palanca

Una palanca es, en general, una barra rígida, que puede girar alrededor de un punto o de un eje. Imagine que se trata de levantar un peso, como está indicado en la **Figura 227**. Instintivamente se ha de tratar de tomar la palanca lo más lejos posible del punto de apoyo A, pues se sabe que así es más fácil levantarlo. Si, se toma la palanca por la mitad, habrá que hacer más fuerza, y aun así es posible que no se lo pueda levantar.

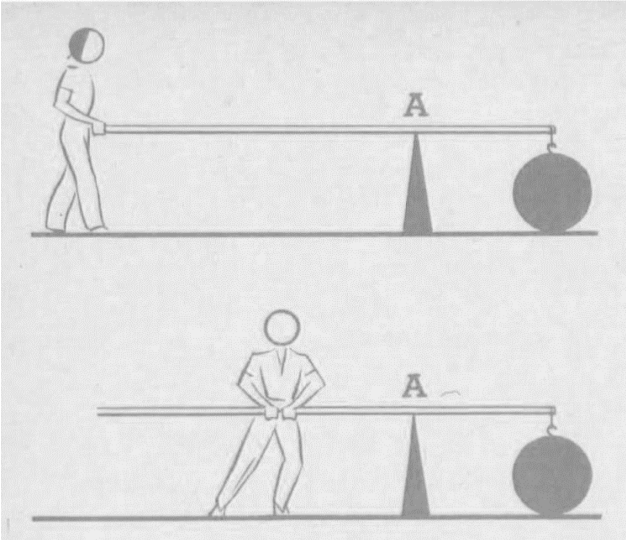


Figura 227. La Palanca (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

La explicación es evidente: el peso que se quiere vencer, que se ha de llamar *resistencia* $\mathbf{R}$ tiende a hacer girar la palanca en el sentido señalado en la **Figura 228**. Es decir, constituye una cupla de momento $\mathbf{R}\times\mathrm{r}$ respecto de A, la fuerza aplicada para vencer, lo que se ha de llamar *fuerza motriz* $\mathbf{F}$, constituye una cupla de momento $\mathbf{F}\times\mathrm{d}$. La condición para que un cuerpo sometido a cuplas esté en equilibrio, es que la cupla resultante tenga momento nulo. Como en este caso las fuerzas son paralelas, sus vectores momento tienen la misma recta de acción, y para que el momento resultante sea nulo deberá ser, Ec. (55):

$$\begin{aligned} &a) \quad \mathbf{M}(\mathbf{F})+\mathbf{M}(\mathbf{R})=0 \quad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \\ &b) \quad \mathbf{F}\times\mathrm{d}+\mathbf{R}\times\mathrm{r}=0 \quad\quad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{55}$$

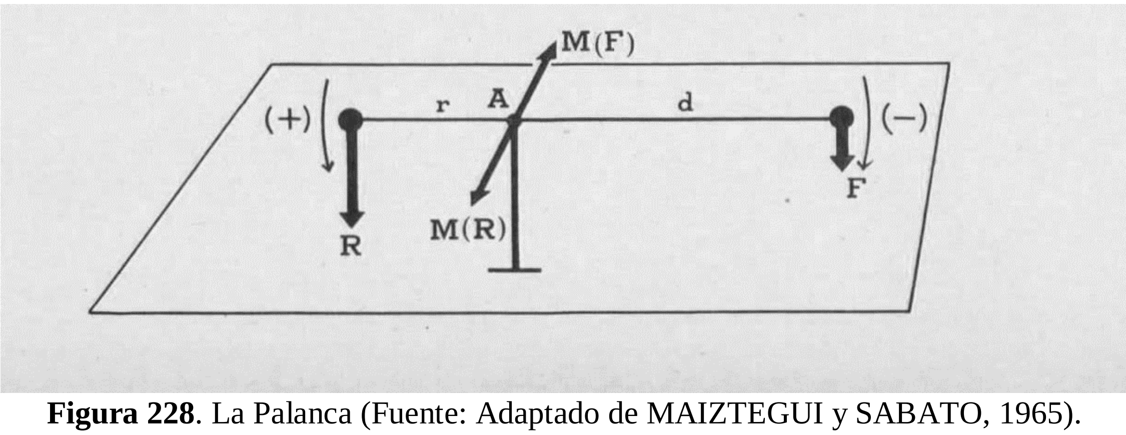


Figura 228. La Palanca (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

La condición es, pues, que el producto de la fuerza motriz por su brazo sea igual al producto de la resistencia por su brazo.

Multiplicación de la Palanca. De la condición de equilibrio (55) resulta la Ec. (56); es decir, que la palanca multiplica a la fuerza motriz por el factor d/r, llamado factor de multiplicación. Así, si el brazo de la fuerza motriz es 4 veces mayor que el de la resistencia cualquier fuerza que se aplique se verá también multiplicada por cuatro.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{r}} \quad [\mathrm{N}] \tag{56}$$

Pero ganar fuerza no es el único resultado de la aplicación de las palancas: con ellas se puede ganar también en velocidad. Claro que en este caso habrá que efectuar una fuerza mayor que la resistencia, pues hay un compromiso*: o se gana en fuerza, perdiendo velocidad, o se gana en velocidad, perdiendo fuerza*, tal como lo desarrollan MAIZTEGUI y SABATO (1965).

Géneros de Palancas. Son palancas de *primer género* aquellas cuyo punto de apoyo está entre la resistencia y la fuerza motriz. *Ejemplos*: las tijeras, las balanzas de platillos, el subibaja. *Palancas de segundo género* son aquellas que tienen la resistencia aplicada entre el punto de apoyo y la fuerza motriz. *Ejemplos*: la carretilla, el rompenueces, el remo de un bote. *Palancas de tercer género* son aquellas que tienen la fuerza motriz entre el punto de apoyo y la resistencia. *Ejemplos*: el pedal de la máquina de afilar, las pinzas para servirse azúcar.

Cualquiera sea el género de palanca, la condición de equilibrio es la misma. Obsérvese que la de tercer género sólo puede usarse para ganar en velocidad, pues siempre el brazo de la fuerza motriz es menor que el de la resistencia.

8.3. Torno

El torno no es sino una *palanca* con forma apropiada para que dé muchas vueltas y pueda arrollar una soga. Lo constituye un cilindro que por medio de una manija gira alrededor de su eje, que permanece fijo. La **Figura 229** muestra un torno: el circulito en O es la proyección del eje; el círculo de radio OB es la sección del cilindro, y OA es el brazo de la manija. La condición de equilibrio del torno es la misma que la de la palanca: que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas sea nula; Ec. (57).

$$\begin{array}{ll} a) & \mathbf{M}(\mathbf{F}) + \mathbf{M}(\mathbf{R}) = 0 \quad [\mathrm{N \cdot m}] \\ b) & \mathbf{F} \times \mathrm{OA} + \mathbf{R} \times \mathrm{OB} = 0 \quad [\mathrm{N \cdot m}] \end{array} \tag{57}$$

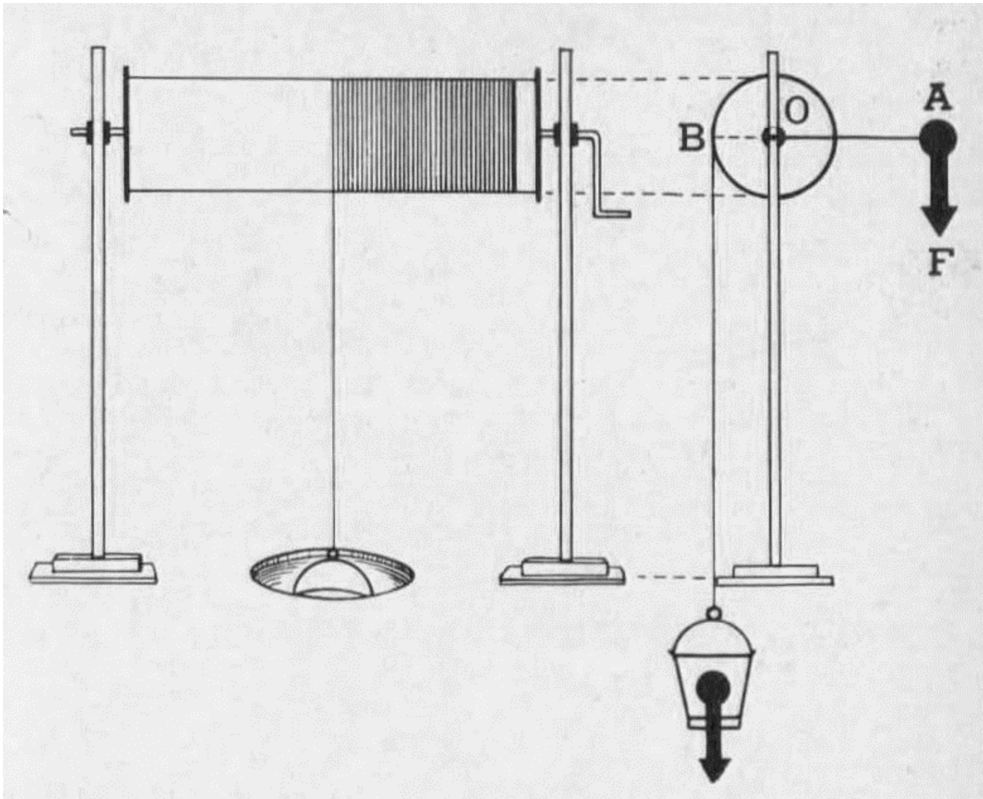


Figura 229. El Torno (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

Multiplicación del Torno. Como en el caso anterior, de la condición de equilibrio (57) resulta la Ec. (58):

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \times \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} \quad [\mathrm{N}] \tag{58}$$

El factor $\mathrm{OA/OB}$ es la multiplicación del torno. Si, por ejemplo, la manija tiene 40 cm de largo y el radio del cilindro mide 10 cm, la multiplicación vale 40 cmx10 cm= 4. Cualquier fuerza que se aplique en la manija aparece en la periferia del cilindro multiplicada por 4. El torno también se usa para *multiplicar la velocidad*. Si la manija es de longitud menor que el radio, hay que hacer mayor fuerza que la resistencia, pero la resistencia se mueve con mayor velocidad que la mano.

8.4. Engranajes

Los engranajes son simples *combinaciones de palancas* de forma especial. En la **Figura 230** se tienen dos ruedas dentadas, de radios r y r'; suponga que se pretende equilibrar una resistencia $\mathbf{R}$, como se indica. Para ello se aplica una fuerza motriz $\mathbf{F}$, que se supone aplicada en la periferia de la rueda grande. Es evidente que la condición para que el engranaje este en equilibrio está dado por la Ec. (59).

$$\begin{aligned} &a) \quad \mathbf{F}\times r + \mathbf{R}\times r' = 0 \quad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \\ &o\ sea: \\ &b) \quad \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{R}} = \frac{r'}{r} \quad [1] \end{aligned} \tag{59}$$

Por otra parte, como los dientes son iguales en las dos ruedas, el número de dientes contenido en cada rueda es directamente proporcional a la longitud de la misma, y, por lo tanto, al radio; Ec. (60-*a*); y, combinando esta proporción con la (59-*b*), se obtiene la Ec. (60-*b*).

$$\begin{aligned} &a) \quad \frac{n'}{n} = \frac{r'}{r} \quad [1] \\ &b) \quad \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{R}} = \frac{n'}{n} \quad [1] \end{aligned} \tag{60}$$

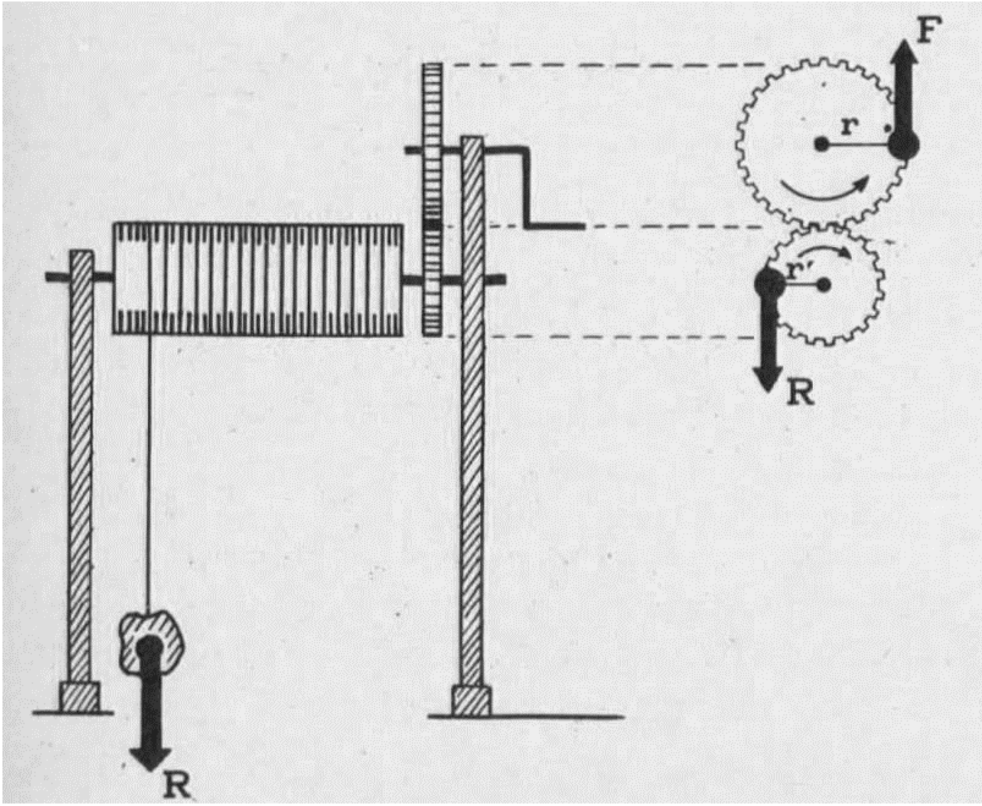


Figura 230. Engranajes (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

La (60-*b*) expresa que la fuerza motriz aplicada a una rueda es a la resistencia aplicada en la otra, como el número de dientes de ésta es al de aquélla. Por lo tanto, si $n' < n$ se gana en fuerza; si en cambio $n' > n$ se gana en velocidad.

Multiplicación del Engranaje. De la (60-*b*) resulta la Ec. (61) en la cual el factor n'/n es la multiplicación.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \times \frac{n}{n'} \quad [\mathrm{N}] \tag{61}$$

En la *bicicleta*, la rueda grande se llama plato, y la pequeña, piñón. La transmisión de la fuerza se hace por medio de la cadena. La combinación más común de número de dientes es de 48 a 18. Algunas bicicletas tienen palanca de cambio, con el fin de aumentar la velocidad (disminuyendo la fuerza) o la fuerza (disminuyendo la velocidad). Para ello, las combinaciones de dientes son, respectivamente, 48 y 22 y 48 y 16.

8.5. Polea Fija

Es una rueda que puede girar alrededor de un eje fijo que pasa por su centro. En su periferia tiene una garganta, por la que corre una soga o una cadena. Un ejemplo es la conocida roldana, **Figura 231**. Si se desea sostener un peso $\mathbf{R}$, como está indicado en la figura, se debe aplicar una fuerza $\mathbf{F}$. Para que la polea no gire, la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas debe ser nula; Ec. (62), esta ecuación expresa la condición de equilibrio de una polea móvil.

$$\begin{aligned} &a) \quad -\mathbf{F}\times \mathrm{r}+\mathbf{R}\times \mathrm{r}=0 \quad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \\ &o\ sea: \\ &b) \quad \mathbf{F}=\mathbf{R} \quad [\mathrm{N}] \end{aligned} \tag{62}$$

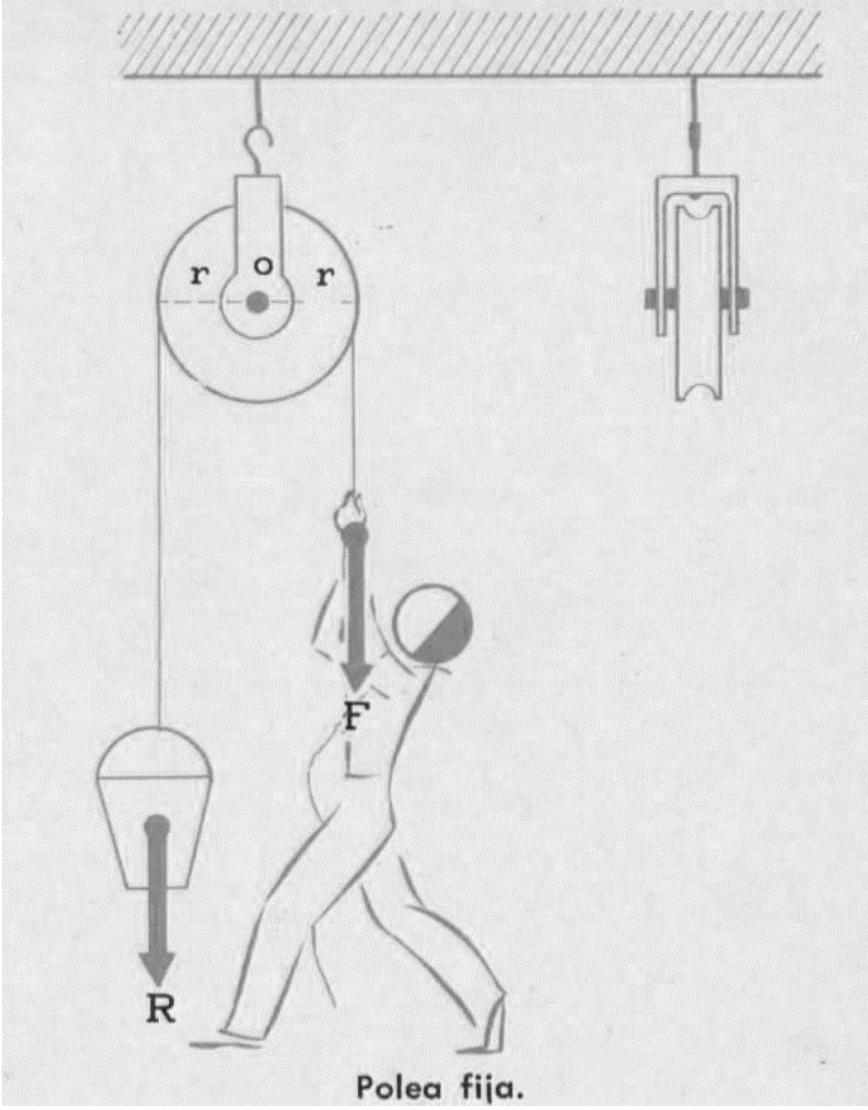


Figura 231. Polea Fija (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

Multiplicación de la Polea Fija. Puesto que no se gana en fuerza, la multiplicación es, evidentemente, igual a l. Entonces, *¿cuál es la ventaja?* Pensar en cualquiera de sus aplicaciones: la roldana para subir el agua de un pozo, o un balde en un edificio en construcción, las poleas que tienen los cables de las señales de ferrocarril. La *respuesta es inmediata*: su función es cambiar la dirección de una fuerza.

8.6. Polea Móvil

En lugar de apoyarse en el eje como la fija, lo está en la cuerda, **Figura 232**. Para equilibrar una resistencia $\mathbf{R}$, se aplica la fuerza $\mathbf{F}$; se ha de estudiar ahora qué relación hay entre ambas fuerzas.

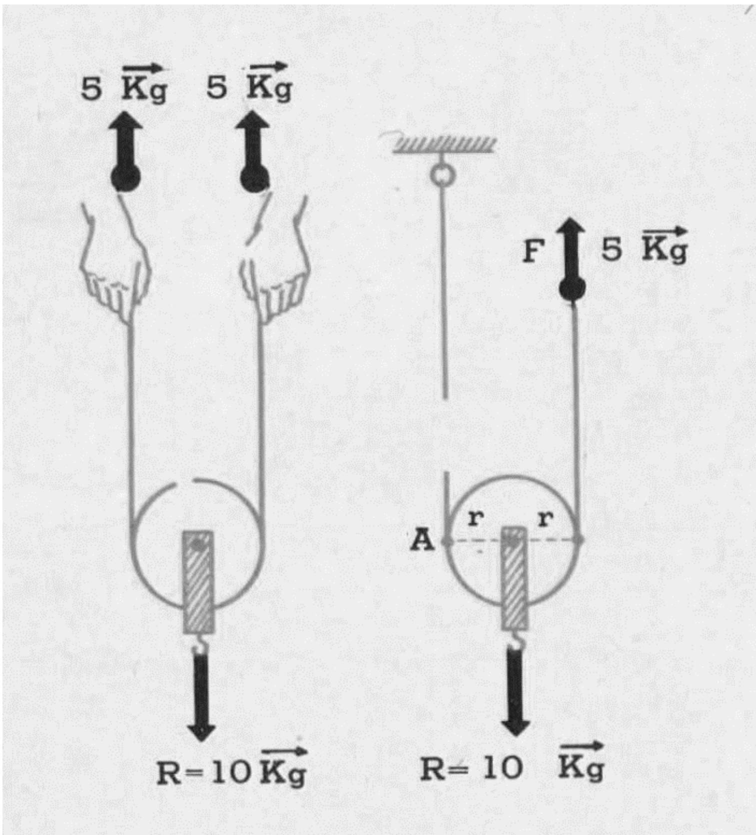


Figura 232. Polea Móvil (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

La figura anterior muestra que para $10\,\overrightarrow{\text{kg}}$, cada mano debe aplicar $5\,\overrightarrow{\text{kg}}$; si se desatiende una de las ramas, atándola al soporte, la fuerza motriz aplicada es de solo $5\,\overrightarrow{\text{kg}}$. Siempre se cumple, pues, que la fuerza motriz es la mitad de la resistencia (Ec. 63). Para la demostración analítica de la (63) solo basta con plantear que la suma de momentos de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{F}$ respecto de A es igual a 0.

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{R}}{2} \quad [\mathrm{N}] \tag{63}$$

Multiplicación de la Polea Móvil. En el caso de fuerzas paralelas $\mathbf{R} = 2\mathbf{F}$. La multiplicación de la polea móvil es 2.

8.7. Combinaciones de Poleas

Aparejo Potencial. La **Figura 233** muestra un aparejo potencial, formado por tres poleas móviles y una fija. La *primera polea móvil*, comenzando desde abajo, reduce la fuerza necesaria para equilibrar la resistencia a la mitad de ésta; la *segunda polea móvil* reduce esta mitad a la cuarta parte; *la tercera polea* reduce esta cuarta parte a la octava.

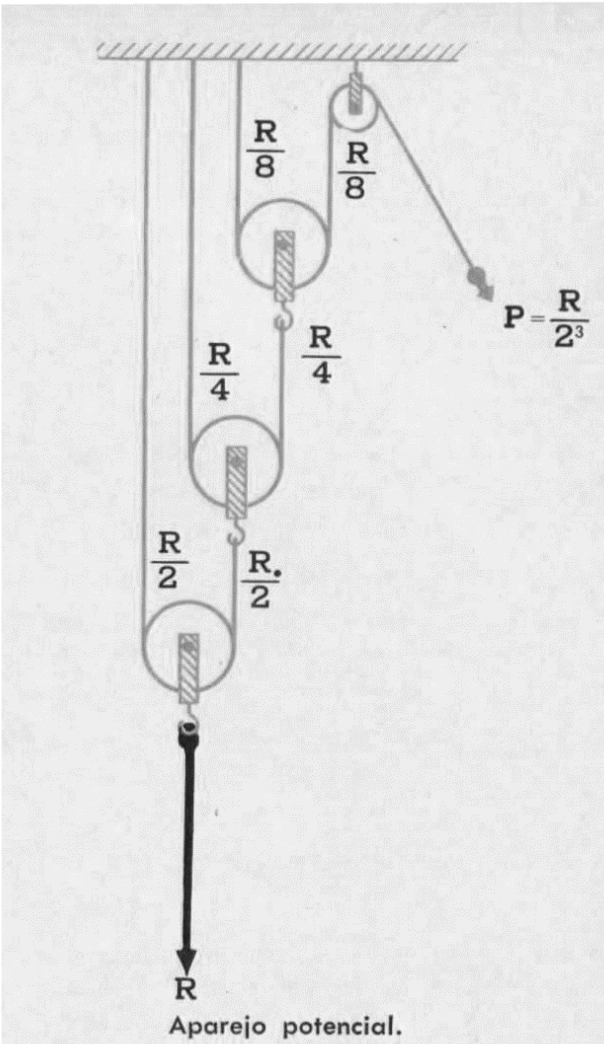


Figura 233. Aparejo Potencial (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

La *función de la polea fija* es facilitar el movimiento y mantener el paralelismo. Se ve fácilmente que cada polea que entra en funciones, divide por 2 el esfuerzo necesario. En este caso se cumple la **Ec. (64)**.

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \mathbf{F}=\frac{\mathbf{R}}{8}=\frac{\mathbf{R}}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{\mathbf{R}}{2^3}\quad [\mathrm{N}]\\
&\text{En general, para un aparejo con } n \text{ poleas móviles,}\\
&\text{la condición de equilibrio es:}\\
&b)\quad \mathbf{F}=\frac{\mathbf{R}}{2^n}\quad [\mathrm{N}]
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(64)}
$$

El número *n* de poleas móviles aparece como exponente de 2, y las potencias de 2 figuran como divisores de la resistencia; de ahí que este sistema de poleas se llame aparejo potencial.

Multiplicación del Aparejo Potencial. De la condición de equilibrio (64) resulta evidente que (Ec. 65):

$$\mathbf{F}\times 2^n=\mathbf{R}\quad [\mathrm{N}] \qquad (65)$$

Donde el factor de multiplicación es 2^n. Por otra parte, además de la configuración anterior de poleas existe otra también de interés: el *aparejo factorial*.

Aparejo Factorial. También llamado *aparejo en serie*, **Figura 234**, está formado por un número de poleas fijas sobre una misma montura y otras tantas poleas móviles también colocadas sobre una misma montura, de la cual cuelga la carga a levantar. La figura muestra un aparejo con dos poleas fijas y dos poleas móviles. La fuerza $\mathbf{F}$ que se debe realizar es, en este caso, es la cuarta parte de la resistencia $\mathbf{R}$, **(Ec. 66)**.

$$a) \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{R}}{4} = \frac{\mathbf{R}}{2 \cdot 2} \quad [\mathrm{N}]$$

En general, para un aparejo con n poleas móviles, la condición de equilibrio es: **(66)**

$$b) \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{R}}{2 \cdot n} \quad [\mathrm{N}]$$

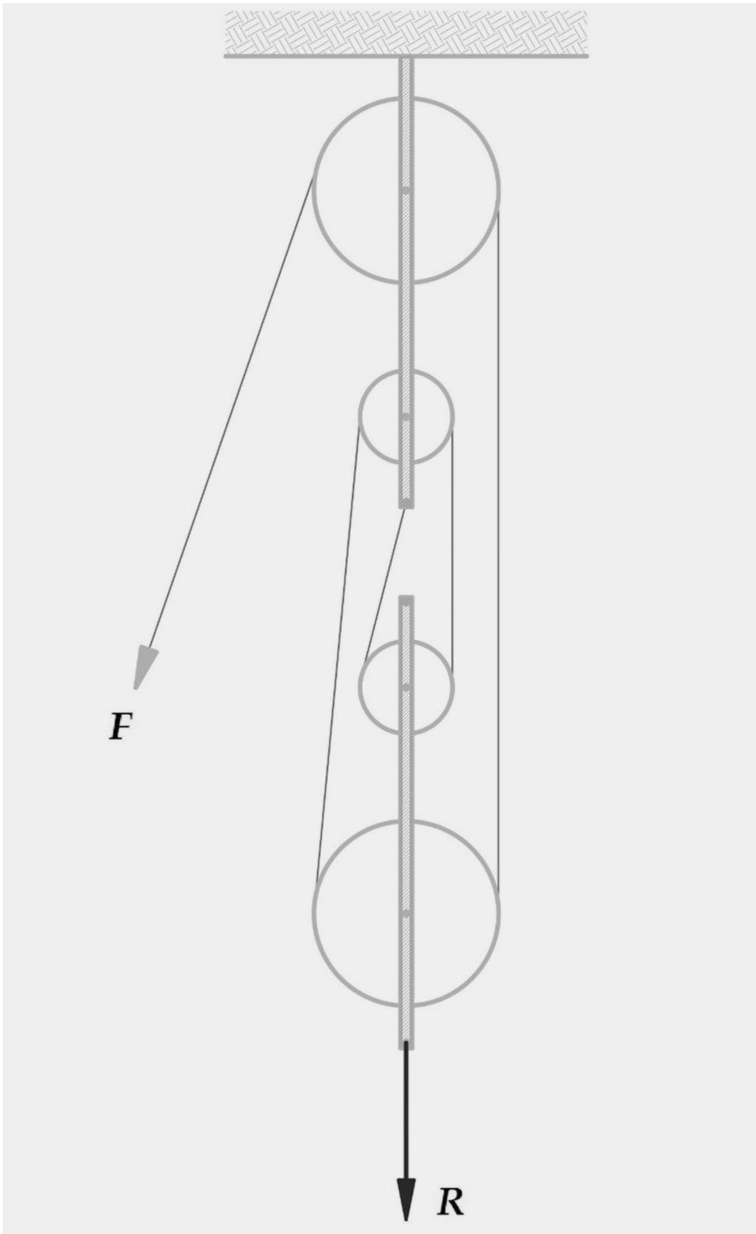


Figura 234. Aparejo Factorial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

Multiplicación del Aparejo Factorial. De la condición de equilibrio (66) resulta evidente que (Ec. 67):

$$\mathbf{F} \times 2 \cdot n = \mathbf{R} \quad [\mathrm{N}] \tag{67}$$

Donde el factor de multiplicación es $2 \cdot n$. Finalmente, se presenta una última configuración de poleas, el *aparejo diferencial*.

Aparejo Diferencial. El aparejo diferencial se compone de dos poleas fijas de distinto radio caladas sobre el mismo eje, **Figura 235**. Se usa combinada con una polea móvil provista de un gancho donde se coloca la carga que se desea elevar. Puede usarse con una cuerda, pero normalmente las gargantas de las poleas son dentadas y se utiliza una cadena. Se llama así porque la fuerza $\mathbf{F}$ necesaria para elevar el peso $\mathbf{R}$ es proporcional a la diferencia entre dichos radios, **Ec. (68)**. Donde r_1 es el radio mayor y r_2 es el radio menor.

$$\mathbf{F} = \frac{r_1 - r_2}{2 \times r_1} \times \mathbf{R} \quad [\mathrm{N}] \tag{68}$$

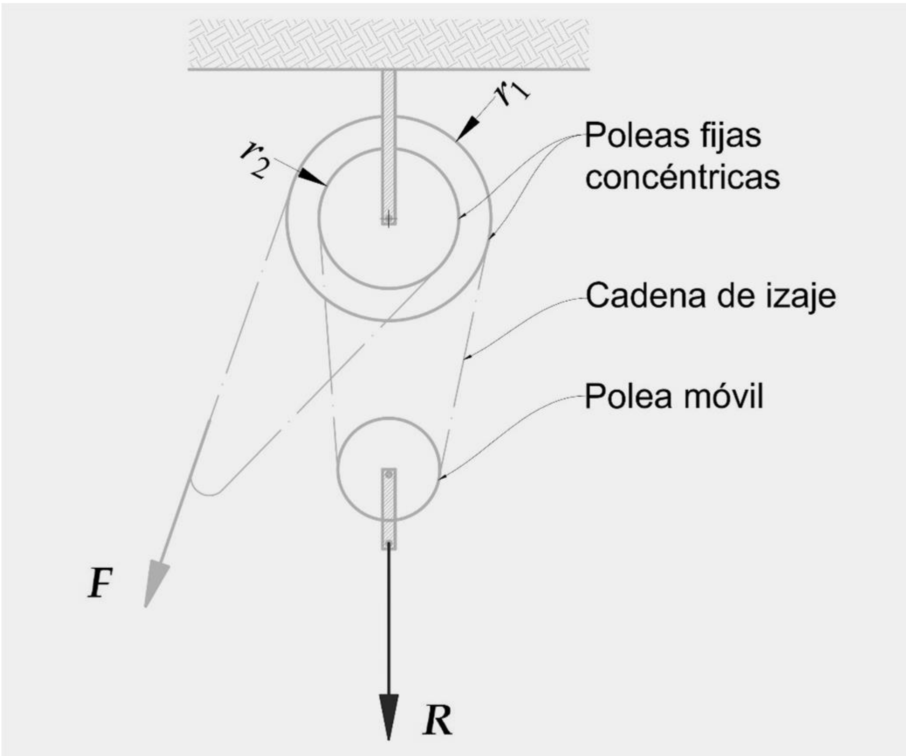


Figura 235. Aparejo Diferencial (Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020).

De la (68) se puede obtener fácilmente el factor de multiplicación de este tipo de aparejo. A continuación, y para concluir con el análisis de las máquinas simples, se presenta un caso también muy conocido, el *plano inclinado*.

8.8. Plano Inclinado

Todos hemos visto subir un barril o un tambor a un camión: se usa un tablón inclinado, pues así es más fácil subirlo. Ese tablón es una máquina simple: el plano inclinado, pues así es más fácil subirlo. Los chicos conocen otra aplicación: el tobogán. La **Figura 236** muestra un plano inclinado, y un barril cuyo peso es la resistencia $\mathbf{R}$, que se debe equilibrar con la fuerza motriz $\mathbf{F}$.

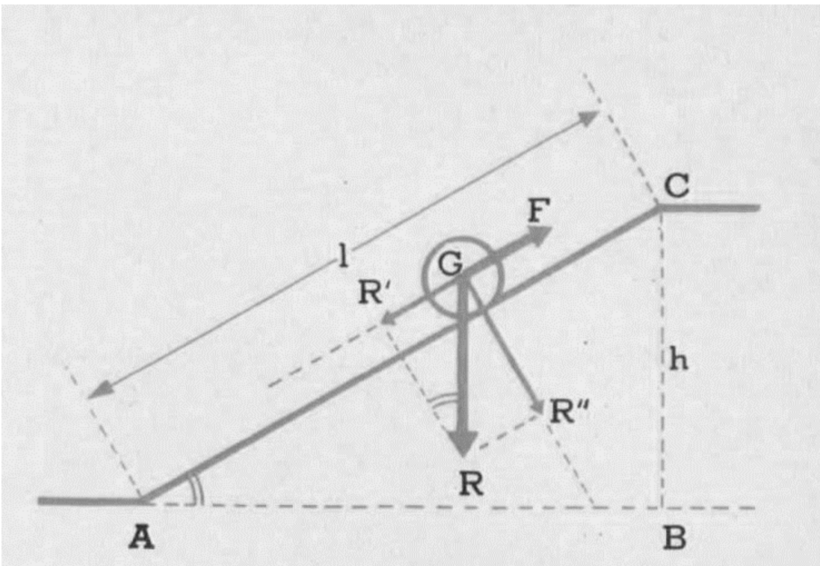


Figura 236. Plano Inclinado (Fuente: Adaptado de MAIZTEGUI y SABATO, 1965).

Para hallar la condición de equilibrio, se descompone la resistencia $\mathbf{R}$ en dos: $\mathbf{R'}$, paralela al plano inclinado, y $\mathbf{R''}$, perpendicular al mismo. Como ésta queda anulada por la reacción del plano, la que hace deslizar al barril hacia abajo es $\mathbf{R'}$. A ella, pues, se debe anular, y la condición es que sea $\mathbf{F}$ igual y opuesta a $\mathbf{R'}$. Observando la figura se advierte que los triángulos GRR’ y ABC son semejantes, por ser rectángulos y tener A=R (pues sus lados son perpendiculares entre sí y ambos son agudos). Por lo· tanto, sus lados homólogos son proporcionales; Ec. (69).

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \frac{\mathbf{R'}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{l}} \quad [1] \\
&\text{Como cuando hay equilibrio se cumple que } \mathbf{F} = \mathbf{R}\text{:} \\
&b)\quad \mathbf{F} \times \mathrm{l} = \mathbf{R} \times \mathrm{h} \quad [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}]
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Para conceptualizar de mejor manera la condición de equilibrio dada en la (69), se sugiere analizar el ejemplo desarrollado por el autor citado. De la *multiplicación del plano inclinado*, basta con despejar de la 69-*b*.

9. BIBLIOGRAFÍA

BEER, P. F.; Johnston Jr., R. E.; Mazurek, F. D. 2007. *Mecánica Vectorial para Ingenieros-Estática*. (8va ed.). McGraw-Hill Interamericana. Estados Unidos. 621 pp.

BIPM. 2018. *Conferencia General de Pesos y Medidas 2018.* Extraído el 19 de noviembre de 2018, de: www.bipm.org.

CEM. 2013. *Recomendaciones del Centro Español de Metrología para la Enseñanza y Utilización del Sistema Internacional de Unidades de Medida.* Extraído el 19 de febrero de 2020, de: www.cem.es.

DI PIETRO, D. 1968. *Estática Gráfica*. Librería y Editorial Alsina. Argentina. 182 pp.

EQUILIBRIO MECÁNICO. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 10 de mayo de 2019 de http://es.m.wikipedia.org/wiki/equilibrio_mecánico

FATELA, M. A. 2012. *Física de Ingeniería-Guía N.º 2 Sistemas de Unidades*. Instituto Pre Universitario. Mendoza, Argentina.

GÁLVEZ, F. J.; López, R.; Llopis, A.; Rubio, C.; 1998. *Física. Curso Teórico-Practico de Fundamentos Físicos de la Ingeniería.* Editorial Tébar Flores S. L., y Librería Politécnica. España. 715 pp.

GUZMÁN, A. M.; 1964. *Estática Aplicada a las Máquinas.* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata. Ciudad de La Plata, Argentina. 187 pp.

HIBBELER, R. C.; 2010. *Ingeniería Mecánica-Estática.* (12ª ed.). Prentice Hall (Pearson). México. 672 pp.

MAIZTEGUI, A.; Sabato, J. 1965. *Física*. (8a ed.). Kapelusz- 450 pp.

PANSERI, E. 1978. *Curso Medio de Estática Gráfica.* (12ª ed.). Construcciones Sudamericanas. Estados Unidos. 445 pp.

RAFFO, C. M. 2007. *Introducción a la Estática y Resistencia de Materiales.* (11ª ed.). Alsina. Argentina. 304 pp.

10. ANEXO

10.1. Glosario de Términos

Carga: Fuerza exterior aplicada a una estructura o cuerpo.

Diagrama de Cuerpo Libre: La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere de una especificación completa de todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan sobre un cuerpo. La mejor manera de tomar en cuenta esas fuerzas es trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, el cual lo representa aislado o "libre" de su entorno, esto es, un "cuerpo libre". Sobre este bosquejo es necesario mostrar todas las fuerzas y los momentos de par que ejerce el entorno sobre el cuerpo, de manera que cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio se puedan tener en cuenta estos efectos. Para resolver problemas en mecánica, es de primordial importancia tener un entendimiento total de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre (HIBBELER, 2010). Cabe aclarar que estos diagramas se trazan tanto para una partícula como para un sólido rígido.

Diagrama Espacial: Diagrama que muestra el cuerpo y su entorno natural, es decir, se muestra la situación de real del elemento estructural y las cargas que sobre el actúan.

Esfuerzo: Es una fuerza interna que surge como oposición a las cargas (fuerzas externas). Con estos dos conceptos (fuerza externa e interna) podemos decir que: si una barra está sometida a la tracción debido a la carga, entonces, el material está trabajando a la compresión debido a la oposición que presentan las fuerzas internas contra las externas.

Esquema Posicional y Escala de Longitud (*EL*): Aparte la escala de fuerzas, en la Estática se necesita una *Escala de Dibujo, Escala Lineal* o *Escala de Longitud*, para representar el *esquema acotado de la estructura*, que fija las posiciones relativas de las fuerzas actuantes, entre sí y con aquélla. Este esquema se denomina *Esquema Posicional* o

Plano de Posición (RAFFO, 2007). Los esquemas posicionales típicos que hemos de encontrar corresponden a una viga simplemente apoyada solicitada por varias fuerzas. Por su parte, una *escala lineal*, abreviadamente *EL*, expresa la relación entre las magnitudes lineales reales de una estructura (generalmente medidas en metros) y la· longitud que la representa en el dibujo (cm), tal como se estudia en dibujo técnico.

Fuerza: Toda causa capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo, esto es, de pararlo o de variar su velocidad o su trayectoria si está en movimiento, de moverlo si está en reposo, se llama Fuerza. En forma breve, llámese fuerza toda causa capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo (DI PIETRO, 1968).

Momento de 1er. Orden de Área: ídem Momento Estático de Área.

Momento de 2do. Orden de Área: ídem Momento de Inercia de Área.

Resultante: También conocida como *Fuerza Neta*, es la suma de las fuerzas (*vector suma o vector resultante*) que actúan sobre un cuerpo y cuyo efecto es el equivalente al efecto que producirían todas las fuerzas actuando en conjunto. La operación indicada se denomina *suma geométrica* (siendo vectores queda sobrentendido que es una suma geométrica) (PANSERI, 1978).

Vector Deslizante: Un vector deslizante puede actuar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción. En otras palabras, estos vectores pueden desplazarse sobre su recta de acción en contraposición a los *vectores fijos* que tienen un punto de aplicación definido (HIBBELER, 2010). En otras palabras, es el vector cuya posición nos es indiferente a efectos de cálculo, siempre que se mantenga en su recta de acción original.

Vector: Un segmento de recta queda determinado por sus extremos, cuando estos puntos están dados en cierto orden se dice que el segmento está orientado, y a este segmento orientado se le denomina vector.

10.2. Sistema Internacional de Unidades

Con el paso de los años se han creado varios sistemas de unidades. A pesar de los grandes esfuerzos que la comunidad científica y los ingenieros han hecho para unificar el mundo con un solo sistema de unidades, en la actualidad aún son de uso común dos de estos: el *sistema inglés* que se conoce como *United States Customary System* (USCS) y el SI métrico (de *Le Systeme Internacional d 'Unites*), también llamado *sistema internacional*.

El SI es un sistema simple y lógico basado en una relación decimal entre las distintas unidades, y se usa para trabajo científico y de ingeniería en la mayor parte de las naciones industrializadas, incluso en Inglaterra. Por su parte, el sistema inglés no tiene base numérica sistemática evidente y varias unidades de este sistema se relacionan entre sí de manera bastante arbitraria (12 pulg = 1 pie, 1 milla = 5280 pies, 4 cuartos = 1 galón, etc.) lo cual hace que el aprendizaje sea confuso y difícil. Estados unidos es el único país industrializado que aún no adopta por completo el SI.

En vista de lo expuesto, esta sección pretende que el lector adopte el sistema internacional para los cálculos, pero, que, al mismo tiempo, tenga conocimiento de los sistemas de unidades vigentes y de aquellos otros (como el *sistema técnico*) con los que se podría encontrar en alguna bibliografía consultada. Con esto se pretende: que maneje correctamente la escritura de las magnitudes físicas y sus unidades basándose en la normativa del sistema internacional (Ver **Anexos 1** a **3**).

Anexo 1. Unidades fundamentales del sistema internacional (Fuente: BIPM, 2018).

Unidad		Magnitud física	
Símbolo	**Nombre**	**Símbolo**	**Nombre**
m	Metro	l	Longitud
kg	kilogramo	m	Masa
s	Segundo	t	Tiempo (1)
K	Kelvin	T	Temperatura absoluta (2)
A	Amperio	$\boldsymbol{I}$	Intensidad de corriente eléctrica
mol	mol	n	Cantidad de sustancia
cd	Candela		Intensidad luminosa (3)

(1) Segundo cronológico. (2) Temperatura termodinámica. (3) Cantidad de luz.

Anexo 2. Sistema inglés de unidades (Fuente: CENGEL, 2012).

Unidad		Magnitud física	
Símbolo	**Nombre**	**Símbolo**	**Nombre**
Fundamentales			
lbf	Libra	$\boldsymbol{F}$	Fuerza (1)
ft	Pie anglosajón o Internacional	l	Longitud
s	Segundo	t	tiempo
Algunas unidades derivadas			
lbm	Libra masa	m	Masa (2)
Otras unidades			
slug	Eslug	m	Masa (3)
pdl	poundal	$\boldsymbol{F}$	Fuerza (4)

(1) Se define como la fuerza que acelera una masa de 32,174 lbm (1 slug) a razón de 1 pie por segundo cuadrado. (2) 1 lbm ≅ 0,454 kg. (3) 1 slug ≅ 32,174 lbm. (4) Es la fuerza necesaria para acelerar una libra masa en un pie por segundo cuadrado. 1 pdl≅0,14 N.

Anexo 3. Sistema técnico (o práctico) de unidades (Fuente: FACORRO, 2011).

Unidad		Magnitud física	
Símbolo	**Nombre**	**Símbolo**	**Nombre**
Fundamentales			
kgf	Kilogramo fuerza o kilopondio	$\boldsymbol{F}$	Fuerza
s	Segundo	t	Tiempo
m	Metro	l	Longitud
Algunas unidades derivadas			
u.t.m.	Unidad técnica de masa	m	Masa (1)

(1) Está definida como la masa de un cuerpo cuyo peso es igual a la aceleración de la gravedad en el lugar en que se encuentra. En otras palabras: es la masa a la cual 1 kgf le imprime una aceleración de 1 m/s^2. 1 u.t.m. ≅ 9,81 kg.

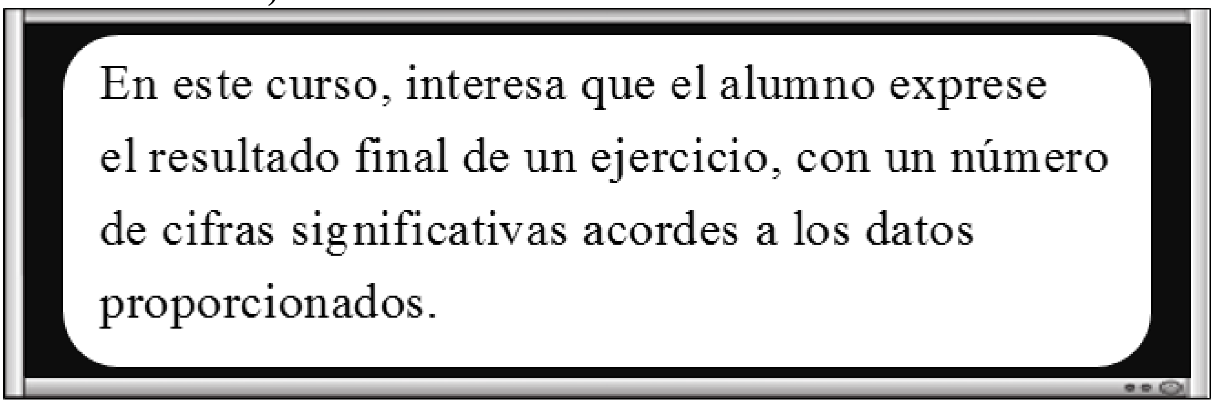
Algunos autores clasifican los sistemas presentados en las tablas anteriores como *sistemas gravitacionales* a aquellos que incluyen a la fuerza como unidad fundamental, mientras que los demás son denominados *sistemas absolutos*. En efecto, el sistema inglés y el técnico son sistemas gravitacionales mientras que el sistema internacional es absoluto.

10.3. Cálculos Numéricos

A menudo, el trabajo numérico en la práctica de la ingeniería se realiza mediante el uso de calculadoras portátiles y computadoras. Sin embargo, es importante que las *respuestas* a cualquier problema se expresen con una *exactitud justificable* y una cantidad apropiada de cifras significativas (BEER *et al.* 2007).

En esta sección se analizan estos temas, junto con algunos otros aspectos importantes relacionados con los *cálculos en ingeniería* para que el alumno cuente con un criterio al momento de expresar la cantidad de cifras de un resultado (Ver **Anexo 4**).

Anexo 4. Cifras Significativas en la Respuesta ante un Ejercicio Planteado (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).



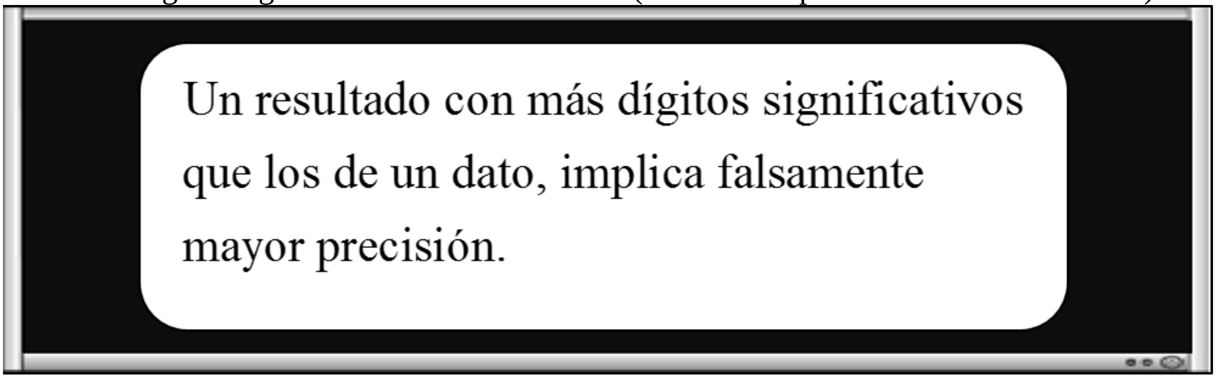
Para comprender mejor lo anterior es necesario definir primeramente algunos conceptos:

Exactitud Numérica. La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la de los cálculos desarrollados. El número de cifras significativas contenidas en cualquier número determina la *exactitud* de éste.

En los cálculos de ingeniería, la información ofrecida en forma de datos suele presentarse hasta cierto número de dígitos significativos, *comúnmente tres*, puesto que la mayoría de los datos en Mecánica como medidas geométricas y cargas pueden medirse de manera confiable con esta exactitud.

En consecuencia, los resultados obtenidos no pueden darse con mayor exactitud que el número de dígitos significativos de un dato (Ver **Anexo 5**). Dar resultados con mayor número de dígitos significativos implica una mayor exactitud de la que en realidad existe y esto se debe evitar.

Anexo 5. Dígitos Significativos de un Resultado (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).



Pero, para comprender mejor lo anterior es necesario precisar algunos conceptos como son cifras significativas (cs), redondeo de números y cálculos intermedios.

Cifras Significativas. Se llaman cifras significativas de una medición a la cantidad de dígitos conocidos con certeza, más la cifra estimada que depende del instrumento de medida. Para entender este concepto es menester mencionar algunas *reglas básicas,* a saber:

1-Cualquier dígito diferente de cero se considera significativo, ej.: 124 tiene 3 cs; 27,42 tiene 4 cs. **2**-Los ceros entre dígitos diferentes de cero se consideran significativos, ej.: 12004 tiene 5 cs; 20,07 tiene 4 cs; 102008 tiene 6 cs. **3**-Los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero no se consideran significativos, ej.: 0,0035 tiene 2 cs; 00154 tiene 3 cs. **4**-Para un número mayor que la unidad, todos los ceros que están a la derecha de la coma decimal se consideran significativos, ej.: 12,0 tiene 3 cs; 1,020 tiene 4 cs. **5**-Para cantidades enteras, todos los ceros que están a la derecha del último dígito diferente de cero se pueden considerar significativos o no, ej.: 1200 puede tener 2 (el 1 y el 2), 3 (el 1, el 2 y el 0) o 4 (el 1, el 2 y los dos 0) cs. Sin embargo, esta ambigüedad se evita se si se expresa el número como potencias de base diez, ej.: $1,200x10^3$ tiene 4 cs; $1,20x10^3$ tiene 3 cs; $1,2x10^3$ tiene 2 cs.

Redondeo de Números. El redondeo de un número es necesario para que la exactitud del resultado sea la misma que la de los datos del problema.

Como regla general, cualquier cifra numérica que termine en cinco o más se redondea hacia arriba, y un número menor que cinco se redondea hacia abajo. Las reglas para redondear números se ilustran de mejor manera con *ejemplos*.

Suponga que el número 3,5587 debe redondearse a tres cifras significativas, como

el cuarto dígito (8) es mayor que 5, el tercer número se redondea hacia arriba a 3,56. De la misma manera, 0,5896 se convierte en 0,590 y 9,3866 en 9,39. Si redondeamos 1,341 a tres cifras significativas, como el cuarto dígito (1) es menor que 5, entonces obtenemos 1,34. Asimismo 0,3762 se convierte en 0,376 y 9,871 en 9,87.

Hay un *caso especial* para cualquier número que tiene un 5 con ceros que lo siguen. Como regla general, si el dígito que precede al 5 es un número par, dicho dígito no se redondea hacia arriba. Si el dígito que precede al 5 es un número impar, éste se redondea hacia arriba. Por ejemplo 75,25 redondeado a tres cifras significativas se convierte en 75,2, 0,1275 se convierte en 0,128 y 0,2555 en 0,256.

Cálculos Intermedios. Cuando se realiza una sucesión de cálculos, se recomienda almacenar los resultados intermedios en la calculadora. En otras palabras, *no redondee los cálculos hasta expresar el resultado final*. Este procedimiento mantiene la precisión a través de la serie de pasos realizados hasta la solución final (HIBBELER, 2010).

10.4. Factores de conversión

1 kgf (kilogramo fuerza)	9,80665 N
1 tnf (tonelada fuerza)	1000 kgf (kilogramo fuerza)
1 lbf (libra fuerza)	4,45 kgf (kilogramo fuerza)

Fuente: Cátedra de Estática y Resistencia de Materiales, 2020.

10.5. Apéndice de Tablas y Diagramas

Anexo 6. Baricentro de Superficies Planas Comunes (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

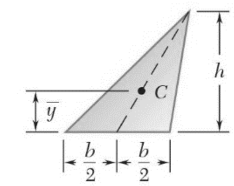
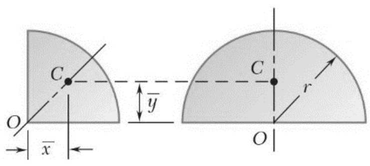
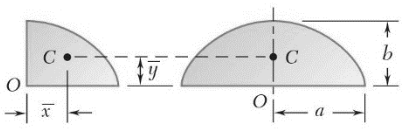
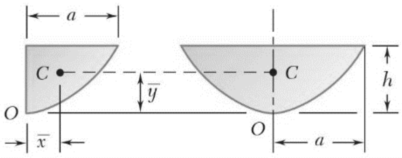
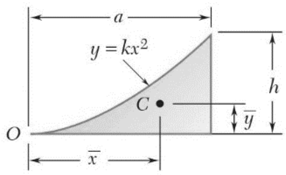
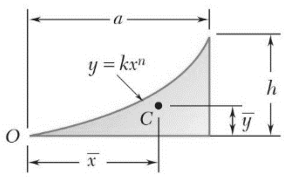
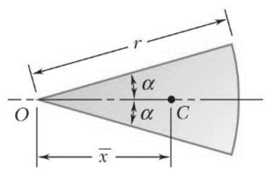
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8A Centroides de áreas comunes.

NOTA: Como puede observarse el autor de esta tabla titula la misma como “Centroides de áreas comunes”. Recordar que para el caso de superficies planas homogéneas el baricentro G es coincidente con el centroide C.

Anexo 7. Momentos de Inercia de Formas Geométricas Comunes (Fuente: Adaptado de BEER *et al.* 2007).

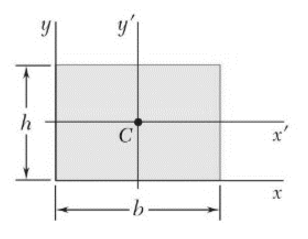
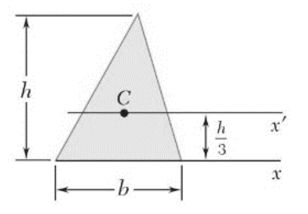
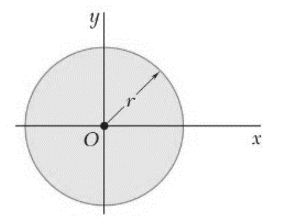
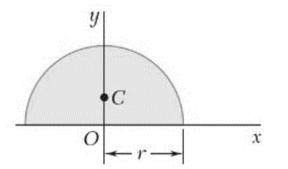
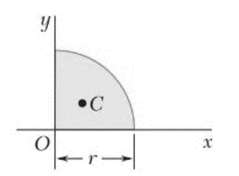
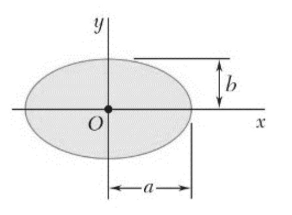
Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

NOTA: I : Momento de Inercia Axil. $\bar{I}$: Momento de Inercia Axil Central. J_O : Momento de Inercia Polar. J_C : Momento de Inercia Polar Central.